

[АНТИЗОРИЧ]

Введение в математический анализ.

Непрерывность, пределы,
дифференцируемость

Владимир Антонович Зорич

Декабрь 1985 год

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

От своего имени и от имени будущих читателей я благодарю всех, кто нашел возможность, живя в разных странах, сообщить в издательство или мне лично о погрешностях (опечатках, ошибках, пропусках), замеченных в русском, английском, немецком или китайском изданиях этого учебника. Замечания учтены и соответствующая правка внесена в текст предлагаемого шестого русского издания.

Как выяснилось, книга пригодилась и физикам - очень этому рад. Во всяком случае я действительно стремился сопровождать формальную теорию содержательными примерами ее применения как внутри математики, так и вне нее.

Шестое издание содержит ряд дополнений, которые, возможно, будут полезны студентам и преподавателям. Во-первых, это некоторые материалы реальных лекций (например записи двух вводных обзорных лекций первого и третьего семестров) и, во-вторых, это математические сведения (порой актуальные, например связь многомерной геометрии и теории вероятностей), примыкающие к основному предмету учебника.

Москва, 2011 год В. Зорич

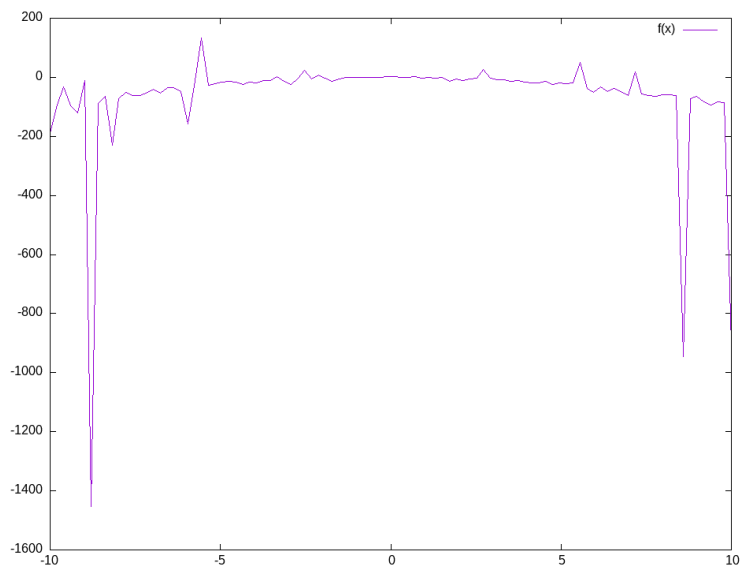
Дано: $(\frac{\sin(x^{10}+x^4+x^3-12\cdot x^2+1)}{(x^2+x+1)\cdot\cos(15\cdot x^{32})}) \cdot (x^3+x+1) + \cos(\frac{(-4)\cdot x^6}{\sin(1+x)}) + \frac{x^2}{(-1)}$

Ну что? Тейлора тебе дать?

$$1.84147 + \frac{-16.6502}{2} \cdot x^2 + \frac{-nan}{6} \cdot x^3 + \bar{o}(x^3)$$

График функции

$(\frac{\sin(x^{10}+x^4+x^3-12\cdot x^2+1)}{(x^2+x+1)\cdot\cos(15\cdot x^{32})}) \cdot (x^3+x+1) + \cos(\frac{(-4)\cdot x^6}{\sin(1+x)}) + \frac{x^2}{(-1)}$ имеет вид:



Уравнение касательной в точке $x=0$ имеет вид:

$$y = 1.84147x + 1.84147$$

Я бы давно бы вас убил за это количество переменных А, ещё на стадии двух переменных А!

$$(x^2)' = 1 \cdot 2 \cdot x^1$$

Если Земля плоская, то очевидно:

$$(\frac{x^2}{(-1)})' = \frac{1 \cdot 2 \cdot x^1 \cdot (-1) - x^2 \cdot 0}{(-1) \cdot (-1)}$$

Даже сишнику очевидно

$$(1+x)' = 0+1$$

Любому советскому первокласснику очевидно, что

$$(\sin(1+x))' = (\cos(1+x)) \cdot (0+1)$$

Segmentation fault (core dumped)

$$(x^6)' = 1 \cdot 6 \cdot x^5$$

Ну а это вообще база:

$$((-4) \cdot x^6)' = 0 \cdot x^6 + (-4) \cdot 1 \cdot 6 \cdot x^5$$

Даже сишнику очевидно

$$\left(\frac{(-4) \cdot x^6}{\sin(1+x)}\right)' = \frac{(0 \cdot x^6 + (-4) \cdot 1 \cdot 6 \cdot x^5) \cdot (\sin(1+x)) - (-4) \cdot x^6 \cdot ((\cos(1+x)) \cdot (0+1))}{(\sin(1+x)) \cdot (\sin(1+x))}$$

Вас это не шокирует?

$$\begin{aligned} & \left(\cos\left(\frac{(-4) \cdot x^6}{\sin(1+x)}\right)\right)' = \\ (-1) \cdot \left(\sin\left(\frac{(-4) \cdot x^6}{\sin(1+x)}\right)\right) \cdot & \left(\frac{(0 \cdot x^6 + (-4) \cdot 1 \cdot 6 \cdot x^5) \cdot (\sin(1+x)) - (-4) \cdot x^6 \cdot ((\cos(1+x)) \cdot (0+1))}{(\sin(1+x)) \cdot (\sin(1+x))}\right) \end{aligned}$$

Совершенно очевидно, что

$$(x^3)' = 1 \cdot 3 \cdot x^2$$

Взял с первой страницы в гугле:

$$(x^3 + x)' = 1 \cdot 3 \cdot x^2 + 1$$

Любому советскому первокласснику очевидно, что

$$(x^3 + x + 1)' = 1 \cdot 3 \cdot x^2 + 1 + 0$$

Ну а это вообще база:

$$(x^{32})' = 1 \cdot 32 \cdot x^{31}$$

KERNEL PANIC - NOT SYNCING!

$$(15 \cdot x^{32})' = 0 \cdot x^{32} + 15 \cdot 1 \cdot 32 \cdot x^{31}$$

Это преобразование позаимствуем из вступительных испытаний в советские ясли:

$$(\cos(15 \cdot x^{32}))' = (-1) \cdot \sin(15 \cdot x^{32}) \cdot (0 \cdot x^{32} + 15 \cdot 1 \cdot 32 \cdot x^{31})$$

Я не знаю почему это так, но это факт:

$$(x^2)' = 1 \cdot 2 \cdot x^1$$

Ничего не понял, но очень интересно:

$$(x^2 + x)' = 1 \cdot 2 \cdot x^1 + 1$$

Совершенно очевидно, что

$$(x^2 + x + 1)' = 1 \cdot 2 \cdot x^1 + 1 + 0$$

Это преобразование позаимствуем из вступительных испытаний в советские ясли:

$$\begin{aligned} & ((x^2 + x + 1) \cdot \cos(15 \cdot x^{32}))' = \\ (1 \cdot 2 \cdot x^1 + 1 + 0) \cdot \cos(15 \cdot x^{32}) + & (x^2 + x + 1) \cdot (-1) \cdot \sin(15 \cdot x^{32}) \cdot (0 \cdot x^{32} + 15 \cdot 1 \cdot 32 \cdot x^{31}) \end{aligned}$$

Ну, а это вообще не должно вызывать вопросов:

$$(x^2)' = 1 \cdot 2 \cdot x^1$$

KERNEL PANIC - NOT SYNCING!

$$(12 \cdot x^2)' = 0 \cdot x^2 + 12 \cdot 1 \cdot 2 \cdot x^1$$

Заметим, что

$$(x^3)' = 1 \cdot 3 \cdot x^2$$

Любому советскому первокласснику очевидно, что

$$(x^4)' = 1 \cdot 4 \cdot x^3$$

Любому советскому первокласснику очевидно, что

$$(x^{10})' = 1 \cdot 10 \cdot x^9$$

(HONORABLE MENTION)

$$(x^{10} + x^4)' = 1 \cdot 10 \cdot x^9 + 1 \cdot 4 \cdot x^3$$

Однажды Хемингуэй поспорил, что сможет написать самый трогательный рассказ:

$$(x^{10} + x^4 + x^3)' = 1 \cdot 10 \cdot x^9 + 1 \cdot 4 \cdot x^3 + 1 \cdot 3 \cdot x^2$$

Ну, а это вообще не должно вызывать вопросов:

$$(x^{10} + x^4 + x^3 - 12 \cdot x^2)' = 1 \cdot 10 \cdot x^9 + 1 \cdot 4 \cdot x^3 + 1 \cdot 3 \cdot x^2 - 0 \cdot x^2 + 12 \cdot 1 \cdot 2 \cdot x^1$$

Если Земля плоская, то очевидно:

$$(x^{10} + x^4 + x^3 - 12 \cdot x^2 + 1)' = 1 \cdot 10 \cdot x^9 + 1 \cdot 4 \cdot x^3 + 1 \cdot 3 \cdot x^2 - 0 \cdot x^2 + 12 \cdot 1 \cdot 2 \cdot x^1 + 0$$

Совершенно очевидно, что

$$(sin(x^{10} + x^4 + x^3 - 12 \cdot x^2 + 1))' = (cos(x^{10} + x^4 + x^3 - 12 \cdot x^2 + 1)) \cdot (1 \cdot 10 \cdot x^9 + 1 \cdot 4 \cdot x^3 + 1 \cdot 3 \cdot x^2 - 0 \cdot x^2 + 12 \cdot 1 \cdot 2 \cdot x^1 + 0)$$

Если аксиомы не противоречивы, то

$$\left(\frac{sin(x^{10} + x^4 + x^3 - 12 \cdot x^2 + 1)}{(x^2 + x + 1) \cdot cos(15 \cdot x^{32})} \right)' = \frac{((cos(E - 12 \cdot x^2 + 1)) \cdot (G + 1 \cdot 3 \cdot x^2 - 0 \cdot x^2 + F + 0)) \cdot (B \cdot A) - (sin(E - 12 \cdot x^2 + 1)) \cdot ((B + 0) \cdot A + B \cdot (-1) \cdot D \cdot (0 \cdot x^{32} + C))}{(B \cdot A) \cdot (B \cdot A)},$$

где:

$$A = cos(15 \cdot x^{32})$$

$$B = x^2 + x + 1$$

$$C = 15 \cdot 1 \cdot 32 \cdot x^{31}$$

$$D = sin(15 \cdot x^{32})$$

$$E = x^{10} + x^4 + x^3$$

$$F = 12 \cdot 1 \cdot 2 \cdot x^1$$

$$G = 1 \cdot 10 \cdot x^9 + 1 \cdot 4 \cdot x^3$$

Очередное халявное преобразование:

$$\begin{aligned}
& \left(\left(\frac{\sin(x^{10}+x^4+x^3-12 \cdot x^2+1)}{(x^2+x+1) \cdot \cos(15 \cdot x^{32})} \right) \cdot (x^3+x+1) \right)' = \\
& \left(\frac{((\cos(C-12 \cdot x^2+1)) \cdot (G+1 \cdot 3 \cdot x^2-0 \cdot x^2+F+0)) \cdot (A \cdot B) - (\sin(C-12 \cdot x^2+1)) \cdot ((A+0) \cdot B + A \cdot (-1) \cdot E \cdot (0 \cdot x^{32}+D))}{(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)} \right) \cdot \\
& A + \left(\frac{\sin(C-12 \cdot x^2+1)}{A \cdot B} \right) \cdot (A+0), \text{ где:} \\
& A = 1 \cdot 3 \cdot x^2 + 1 \\
& B = \cos(15 \cdot x^{32}) \\
& C = x^{10} + x^4 + x^3 \\
& D = 15 \cdot 1 \cdot 32 \cdot x^{31} \\
& E = \sin(15 \cdot x^{32}) \\
& F = 12 \cdot 1 \cdot 2 \cdot x^1 \\
& G = 1 \cdot 10 \cdot x^9 + 1 \cdot 4 \cdot x^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Вас это не шокирует?} \\
& \left(\left(\frac{\sin(x^{10}+x^4+x^3-12 \cdot x^2+1)}{(x^2+x+1) \cdot \cos(15 \cdot x^{32})} \right) \cdot (x^3+x+1) + \cos\left(\frac{(-4) \cdot x^6}{\sin(1+x)}\right) \right)' = \\
& \left(\frac{((\cos(G-12 \cdot x^2+1)) \cdot (K+1 \cdot 3 \cdot x^2-0 \cdot x^2+J+0)) \cdot (E \cdot F) - (\sin(G-12 \cdot x^2+1)) \cdot ((E+0) \cdot F + E \cdot (-1) \cdot I \cdot (0 \cdot x^{32}+H))}{(E \cdot F) \cdot (E \cdot F)} \right) \cdot \\
& E + \left(\frac{\sin(G-12 \cdot x^2+1)}{E \cdot F} \right) \cdot (E+0) + (-1) \cdot (\sin(D)) \cdot \left(\frac{(0 \cdot x^6+C) \cdot (\sin(1+x)) - (-4) \cdot x^6 \cdot B}{A} \right), \\
& \text{где:} \\
& A = (\sin(1+x)) \cdot (\sin(1+x)) \\
& B = (\cos(1+x)) \cdot (0+1) \\
& C = (-4) \cdot 1 \cdot 6 \cdot x^5 \\
& D = \frac{(-4) \cdot x^6}{\sin(1+x)} \\
& E = 1 \cdot 3 \cdot x^2 + 1 \\
& F = \cos(15 \cdot x^{32}) \\
& G = x^{10} + x^4 + x^3 \\
& H = 15 \cdot 1 \cdot 32 \cdot x^{31} \\
& I = \sin(15 \cdot x^{32}) \\
& J = 12 \cdot 1 \cdot 2 \cdot x^1 \\
& K = 1 \cdot 10 \cdot x^9 + 1 \cdot 4 \cdot x^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Ииииииииииииии если:} \\
& \left(\left(\frac{\sin(x^{10}+x^4+x^3-12 \cdot x^2+1)}{(x^2+x+1) \cdot \cos(15 \cdot x^{32})} \right) \cdot (x^3+x+1) + \cos\left(\frac{(-4) \cdot x^6}{\sin(1+x)}\right) + \frac{x^2}{(-1)} \right)' = \\
& \left(\frac{((\cos(H-12 \cdot x^2+1)) \cdot (L+1 \cdot 3 \cdot x^2-0 \cdot x^2+K+0)) \cdot (F \cdot G) - (\sin(H-12 \cdot x^2+1)) \cdot ((F+0) \cdot G + F \cdot (-1) \cdot J \cdot (0 \cdot x^{32}+I))}{(F \cdot G) \cdot (F \cdot G)} \right) \cdot \\
& F + \left(\frac{\sin(H-12 \cdot x^2+1)}{F \cdot G} \right) \cdot (F+0) + (-1) \cdot (\sin(E)) \cdot \\
& \left(\frac{(0 \cdot x^6+D) \cdot (\sin(1+x)) - (-4) \cdot x^6 \cdot C}{B} \right) + \frac{A \cdot x^2 \cdot 0}{(-1) \cdot (-1)}, \text{ где:} \\
& A = 1 \cdot 2 \cdot x^1 \cdot (-1) \\
& B = (\sin(1+x)) \cdot (\sin(1+x)) \\
& C = (\cos(1+x)) \cdot (0+1) \\
& D = (-4) \cdot 1 \cdot 6 \cdot x^5 \\
& E = \frac{(-4) \cdot x^6}{\sin(1+x)} \\
& F = 1 \cdot 3 \cdot x^2 + 1 \\
& G = \cos(15 \cdot x^{32}) \\
& H = x^{10} + x^4 + x^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= 15 \cdot 1 \cdot 32 \cdot x^{31} \\
J &= \sin(15 \cdot x^{32}) \\
K &= 12 \cdot 1 \cdot 2 \cdot x^1 \\
L &= 1 \cdot 10 \cdot x^9 + 1 \cdot 4 \cdot x^3
\end{aligned}$$

После очевидных упрощений имеем:

$$\left(\frac{((\cos(G-12 \cdot x^2+1)) \cdot (J+3 \cdot x^2-12 \cdot 2x)) \cdot (E \cdot F) - (\sin(G-12 \cdot x^2+1)) \cdot ((2x+1) \cdot F + E \cdot (-1) \cdot I \cdot H)}{(E \cdot F) \cdot (E \cdot F)} \right) .$$

$$E + \left(\frac{\sin(G-12 \cdot x^2+1)}{E \cdot F} \right) \cdot E + (-1) \cdot (\sin(D)) \cdot \left(\frac{C \cdot (\sin(1+x)) - B}{A} \right), \text{ где:}$$

$$A = (\sin(1+x)) \cdot (\sin(1+x))$$

$$B = (-4) \cdot x^6 \cdot (\cos(1+x))$$

$$C = (-4) \cdot 6 \cdot x^5$$

$$D = \frac{(-4) \cdot x^6}{\sin(1+x)}$$

$$E = 3 \cdot x^2 + 1$$

$$F = \cos(15 \cdot x^{32})$$

$$G = x^{10} + x^4 + x^3$$

$$H = 15 \cdot 32 \cdot x^{31}$$

$$I = \sin(15 \cdot x^{32})$$

$$J = 10 \cdot x^9 + 4 \cdot x^3$$