

[АНТИЗОРИЧ]

Введение в математический анализ.

Непрерывность, пределы,
дифференцируемость

Владимир Антонович Зорич

Декабрь 1985 год

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

От своего имени и от имени будущих читателей я благодарю всех, кто нашел возможность, живя в разных странах, сообщить в издательство или мне лично о погрешностях (опечатках, ошибках, пропусках), замеченных в русском, английском, немецком или китайском изданиях этого учебника. Замечания учтены и соответствующая правка внесена в текст предлагаемого шестого русского издания.

Как выяснилось, книга пригодилась и физикам - очень этому рад. Во всяком случае я действительно стремился сопровождать формальную теорию содержательными примерами ее применения как внутри математики, так и вне нее.

Шестое издание содержит ряд дополнений, которые, возможно, будут полезны студентам и преподавателям. Во-первых, это некоторые материалы реальных лекций (например записи двух вводных обзорных лекций первого и третьего семестров) и, во-вторых, это математические сведения (порой актуальные, например связь многомерной геометрии и теории вероятностей), примыкающие к основному предмету учебника.

Москва, 2011 год В. Зорич

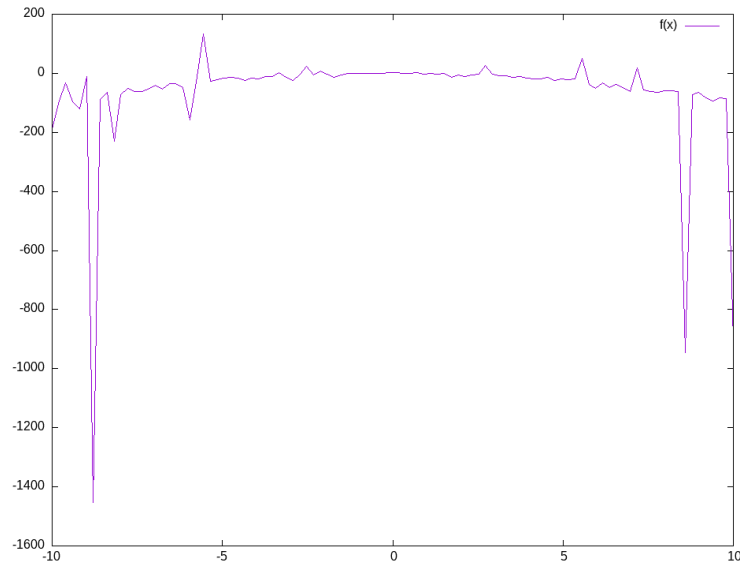
Дано: $\left(\frac{\sin(x^{10}+x^4+x^3-12\cdot x^2+1)}{(x^2+x+1)\cdot\cos(15\cdot x^{32})}\right) \cdot (x^3+x+1) + \cos\left(\frac{-4\cdot x^6}{\sin(1+x)}\right) + \frac{x^2}{-1}$

Ну что? Тейлора тебе дать?

$$1.84147 + \frac{-16.6502}{2} \cdot x^2 + \frac{-nan}{6} \cdot x^3 + \bar{o}(x^3)$$

График функции

$\left(\frac{\sin(x^{10}+x^4+x^3-12\cdot x^2+1)}{(x^2+x+1)\cdot\cos(15\cdot x^{32})}\right) \cdot (x^3+x+1) + \cos\left(\frac{-4\cdot x^6}{\sin(1+x)}\right) + \frac{x^2}{-1}$ имеет вид:



Уравнение касательной в точке $x=0$ имеет вид:

$$y = 1.84147x + 1.84147$$

Ничего не понял, но очень интересно:

$$(x^2)' = 1 \cdot 2 \cdot x^1$$

Если аксиомы не противоречивы, то

$$\left(\frac{x^2}{-1}\right)' = \frac{1 \cdot 2 \cdot x^1 \cdot -1 - x^2 \cdot 0}{-1 \cdot -1}$$

Я не знаю почему это так, но это факт:

$$(1+x)' = 0 + 1$$

Вас это не шокирует?

$$(\sin(1+x))' = (\cos(1+x)) \cdot (0+1)$$

Ничего не понял, но очень интересно:

$$(x^6)' = 1 \cdot 6 \cdot x^5$$

Ну вот! 14 стадий, и матан выучен!

$$(-4 \cdot x^6)' = 0 \cdot x^6 + -4 \cdot 1 \cdot 6 \cdot x^5$$

Заметим, что

$$\left(\frac{-4 \cdot x^6}{\sin(1+x)}\right)' = \frac{(0 \cdot x^6 + -4 \cdot 1 \cdot 6 \cdot x^5) \cdot (\sin(1+x)) - -4 \cdot x^6 \cdot ((\cos(1+x)) \cdot (0+1))}{(\sin(1+x)) \cdot (\sin(1+x))}$$

Я бы давно бы вас убил за это количество переменных А, ещё на стадии двух переменных А!

$$\begin{aligned} & \left(\cos\left(\frac{-4 \cdot x^6}{\sin(1+x)}\right)\right)' = \\ & -1 \cdot \left(\sin\left(\frac{-4 \cdot x^6}{\sin(1+x)}\right)\right) \cdot \left(\frac{(0 \cdot x^6 + -4 \cdot 1 \cdot 6 \cdot x^5) \cdot (\sin(1+x)) - -4 \cdot x^6 \cdot ((\cos(1+x)) \cdot (0+1))}{(\sin(1+x)) \cdot (\sin(1+x))}\right) \end{aligned}$$

Совершенно очевидно, что

$$(x^3)' = 1 \cdot 3 \cdot x^2$$

Вас это не шокирует?

$$(x^3 + x)' = 1 \cdot 3 \cdot x^2 + 1$$

Если Земля плоская, то очевидно:

$$(x^3 + x + 1)' = 1 \cdot 3 \cdot x^2 + 1 + 0$$

Если Земля плоская, то очевидно:

$$(x^{32})' = 1 \cdot 32 \cdot x^{31}$$

Ииииииииииииии если:

$$(15 \cdot x^{32})' = 0 \cdot x^{32} + 15 \cdot 1 \cdot 32 \cdot x^{31}$$

Взял с первой страницы в гугле:

$$(\cos(15 \cdot x^{32}))' = -1 \cdot \sin(15 \cdot x^{32}) \cdot (0 \cdot x^{32} + 15 \cdot 1 \cdot 32 \cdot x^{31})$$

Совершенно очевидно, что

$$(x^2)' = 1 \cdot 2 \cdot x^1$$

Если аксиомы не противоречивы, то

$$(x^2 + x)' = 1 \cdot 2 \cdot x^1 + 1$$

KERNEL PANIC - NOT SYNCING!

$$(x^2 + x + 1)' = 1 \cdot 2 \cdot x^1 + 1 + 0$$

Segmentation fault (core dumped)

$$\begin{aligned} & ((x^2 + x + 1) \cdot \cos(15 \cdot x^{32}))' = \\ & (1 \cdot 2 \cdot x^1 + 1 + 0) \cdot \cos(15 \cdot x^{32}) + (x^2 + x + 1) \cdot -1 \cdot \sin(15 \cdot x^{32}) \cdot (0 \cdot x^{32} + 15 \cdot 1 \cdot 32 \cdot x^{31}) \end{aligned}$$

Любому советскому первокласснику очевидно, что

$$(x^2)' = 1 \cdot 2 \cdot x^1$$

Очередное халявное преобразование:

$$(12 \cdot x^2)' = 0 \cdot x^2 + 12 \cdot 1 \cdot 2 \cdot x^1$$

Ну, а это вообще не должно вызывать вопросов:

$$(x^3)' = 1 \cdot 3 \cdot x^2$$

Segmentation fault (core dumped)

$$(x^4)' = 1 \cdot 4 \cdot x^3$$

Segmentation fault (core dumped)

$$(x^{10})' = 1 \cdot 10 \cdot x^9$$

Это преобразование позаимствуем из вступительных испытаний в
советские ясли:

$$(x^{10} + x^4)' = 1 \cdot 10 \cdot x^9 + 1 \cdot 4 \cdot x^3$$

(HONORABLE MENTION)

$$(x^{10} + x^4 + x^3)' = 1 \cdot 10 \cdot x^9 + 1 \cdot 4 \cdot x^3 + 1 \cdot 3 \cdot x^2$$

Ну вот! 14 стадий, и матан выучен!

$$(x^{10} + x^4 + x^3 - 12 \cdot x^2)' = 1 \cdot 10 \cdot x^9 + 1 \cdot 4 \cdot x^3 + 1 \cdot 3 \cdot x^2 - 0 \cdot x^2 + 12 \cdot 1 \cdot 2 \cdot x^1$$

Я бы давно бы вас убил за это количество переменных А, ещё на стадии
двух переменных А!

$$(x^{10} + x^4 + x^3 - 12 \cdot x^2 + 1)' = 1 \cdot 10 \cdot x^9 + 1 \cdot 4 \cdot x^3 + 1 \cdot 3 \cdot x^2 - 0 \cdot x^2 + 12 \cdot 1 \cdot 2 \cdot x^1 + 0$$

Иииииииииииииии если:

$$(sin(x^{10} + x^4 + x^3 - 12 \cdot x^2 + 1))' = (cos(x^{10} + x^4 + x^3 - 12 \cdot x^2 + 1)) \cdot (1 \cdot 10 \cdot x^9 + 1 \cdot 4 \cdot x^3 + 1 \cdot 3 \cdot x^2 - 0 \cdot x^2 + 12 \cdot 1 \cdot 2 \cdot x^1 + 0)$$

Совершенно очевидно, что

$$\left(\frac{sin(x^{10} + x^4 + x^3 - 12 \cdot x^2 + 1)}{(x^2 + x + 1) \cdot cos(15 \cdot x^{32})} \right)' = \frac{((cos(E - 12 \cdot x^2 + 1)) \cdot (G + 1 \cdot 3 \cdot x^2 - 0 \cdot x^2 + F + 0)) \cdot (B \cdot A) - (sin(E - 12 \cdot x^2 + 1)) \cdot ((B + 0) \cdot A + B \cdot -1 \cdot D \cdot (0 \cdot x^{32} + C))}{(B \cdot A) \cdot (B \cdot A)},$$

где:

$$A = cos(15 \cdot x^{32})$$

$$B = x^2 + x + 1$$

$$C = 15 \cdot 1 \cdot 32 \cdot x^{31}$$

$$D = sin(15 \cdot x^{32})$$

$$E = x^{10} + x^4 + x^3$$

$$F = 12 \cdot 1 \cdot 2 \cdot x^1$$

$$G = 1 \cdot 10 \cdot x^9 + 1 \cdot 4 \cdot x^3$$

Я не знаю почему это так, но это факт:

$$\begin{aligned}
& \left(\left(\frac{\sin(x^{10}+x^4+x^3-12 \cdot x^2+1)}{(x^2+x+1) \cdot \cos(15 \cdot x^{32})} \right) \cdot (x^3+x+1) \right)' = \\
& \left(\frac{((\cos(C-12 \cdot x^2+1)) \cdot (G+1 \cdot 3 \cdot x^2-0 \cdot x^2+F+0)) \cdot (A \cdot B) - (\sin(C-12 \cdot x^2+1)) \cdot ((A+0) \cdot B + A \cdot -1 \cdot E \cdot (0 \cdot x^{32}+D))}{(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)} \right) \cdot \\
& A + \left(\frac{\sin(C-12 \cdot x^2+1)}{A \cdot B} \right) \cdot (A+0), \text{ где:} \\
& A = 1 \cdot 3 \cdot x^2 + 1 \\
& B = \cos(15 \cdot x^{32}) \\
& C = x^{10} + x^4 + x^3 \\
& D = 15 \cdot 1 \cdot 32 \cdot x^{31} \\
& E = \sin(15 \cdot x^{32}) \\
& F = 12 \cdot 1 \cdot 2 \cdot x^1 \\
& G = 1 \cdot 10 \cdot x^9 + 1 \cdot 4 \cdot x^3
\end{aligned}$$

Если аксиомы не противоречивы, то

$$\begin{aligned}
& \left(\left(\frac{\sin(x^{10}+x^4+x^3-12 \cdot x^2+1)}{(x^2+x+1) \cdot \cos(15 \cdot x^{32})} \right) \cdot (x^3+x+1) + \cos\left(\frac{-4 \cdot x^6}{\sin(1+x)}\right) \right)' = \\
& \left(\frac{((\cos(G-12 \cdot x^2+1)) \cdot (K+1 \cdot 3 \cdot x^2-0 \cdot x^2+J+0)) \cdot (E \cdot F) - (\sin(G-12 \cdot x^2+1)) \cdot ((E+0) \cdot F + E \cdot -1 \cdot I \cdot (0 \cdot x^{32}+H))}{(E \cdot F) \cdot (E \cdot F)} \right) \cdot \\
& E + \left(\frac{\sin(G-12 \cdot x^2+1)}{E \cdot F} \right) \cdot (E+0) + -1 \cdot (\sin(D)) \cdot \left(\frac{(0 \cdot x^6+C) \cdot (\sin(1+x)) - -4 \cdot x^6 \cdot B}{A} \right), \text{ где:} \\
& A = (\sin(1+x)) \cdot (\sin(1+x)) \\
& B = (\cos(1+x)) \cdot (0+1) \\
& C = -4 \cdot 1 \cdot 6 \cdot x^5 \\
& D = \frac{-4 \cdot x^6}{\sin(1+x)} \\
& E = 1 \cdot 3 \cdot x^2 + 1 \\
& F = \cos(15 \cdot x^{32}) \\
& G = x^{10} + x^4 + x^3 \\
& H = 15 \cdot 1 \cdot 32 \cdot x^{31} \\
& I = \sin(15 \cdot x^{32}) \\
& J = 12 \cdot 1 \cdot 2 \cdot x^1 \\
& K = 1 \cdot 10 \cdot x^9 + 1 \cdot 4 \cdot x^3
\end{aligned}$$

Совершенно очевидно, что

$$\begin{aligned}
& \left(\left(\frac{\sin(x^{10}+x^4+x^3-12 \cdot x^2+1)}{(x^2+x+1) \cdot \cos(15 \cdot x^{32})} \right) \cdot (x^3+x+1) + \cos\left(\frac{-4 \cdot x^6}{\sin(1+x)}\right) + \frac{x^2}{-1} \right)' = \\
& \left(\frac{((\cos(H-12 \cdot x^2+1)) \cdot (L+1 \cdot 3 \cdot x^2-0 \cdot x^2+K+0)) \cdot (F \cdot G) - (\sin(H-12 \cdot x^2+1)) \cdot ((F+0) \cdot G + F \cdot -1 \cdot J \cdot (0 \cdot x^{32}+I))}{(F \cdot G) \cdot (F \cdot G)} \right) \cdot \\
& F + \left(\frac{\sin(H-12 \cdot x^2+1)}{F \cdot G} \right) \cdot (F+0) + -1 \cdot (\sin(E)) \cdot \left(\frac{(0 \cdot x^6+D) \cdot (\sin(1+x)) - -4 \cdot x^6 \cdot C}{B} \right) + \frac{A - x^2 \cdot 0}{-1 \cdot -1},
\end{aligned}$$

где:

$$\begin{aligned}
& A = 1 \cdot 2 \cdot x^1 \cdot -1 \\
& B = (\sin(1+x)) \cdot (\sin(1+x)) \\
& C = (\cos(1+x)) \cdot (0+1) \\
& D = -4 \cdot 1 \cdot 6 \cdot x^5 \\
& E = \frac{-4 \cdot x^6}{\sin(1+x)} \\
& F = 1 \cdot 3 \cdot x^2 + 1 \\
& G = \cos(15 \cdot x^{32}) \\
& H = x^{10} + x^4 + x^3 \\
& I = 15 \cdot 1 \cdot 32 \cdot x^{31} \\
& J = \sin(15 \cdot x^{32})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= 12 \cdot 1 \cdot 2 \cdot x^1 \\ L &= 1 \cdot 10 \cdot x^9 + 1 \cdot 4 \cdot x^3 \end{aligned}$$

После очевидных упрощений имеем:

$$\left(\frac{((\cos(G-12 \cdot x^2+1)) \cdot (J+3 \cdot x^2-12 \cdot 2x)) \cdot (E \cdot F) - (\sin(G-12 \cdot x^2+1)) \cdot ((2x+1) \cdot F + E \cdot -1 \cdot I \cdot H)}{(E \cdot F) \cdot (E \cdot F)} \right) \cdot E +$$

$$\left(\frac{\sin(G-12 \cdot x^2+1)}{E \cdot F} \right) \cdot E + -1 \cdot (\sin(D)) \cdot \left(\frac{C \cdot (\sin(1+x)) - B}{A} \right), \text{ где:}$$

$$A = (\sin(1+x)) \cdot (\sin(1+x))$$

$$B = -4 \cdot x^6 \cdot (\cos(1+x))$$

$$C = -4 \cdot 6 \cdot x^5$$

$$D = \frac{-4 \cdot x^6}{\sin(1+x)}$$

$$E = 3 \cdot x^2 + 1$$

$$F = \cos(15 \cdot x^{32})$$

$$G = x^{10} + x^4 + x^3$$

$$H = 15 \cdot 32 \cdot x^{31}$$

$$I = \sin(15 \cdot x^{32})$$

$$J = 10 \cdot x^9 + 4 \cdot x^3$$