

2015 级离散数学期末试题 (A 卷)

班级_____ 学号_____ 姓名_____ 成绩_____

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得分									

1. 选择题 (共 10 题, 每题 1 分)

- 1) 设 p : 我有时间, q : 我去旅游, 下面哪个命题可以符号化为 $p \rightarrow q$? ()
- A. 除非我有时间, 我才去旅游.
 B. 除非我去旅游, 否则我没时间.
 C. 只有我有时间, 我才去旅游.
 D. 我去旅游仅当我有时间.
- 2) 设 $C(x)$ 表示 x 是运动员, $G(x)$ 表示 x 是强壮的, 则命题 “没有运动员不是强壮的” 符号化为哪个公式? ()
- A. $\neg \forall x(C(x) \wedge \neg G(x))$ B. $\neg \forall x(C(x) \rightarrow \neg G(x))$
 C. $\neg \exists x(C(x) \wedge \neg G(x))$ D. $\neg \exists x(C(x) \rightarrow \neg G(x))$
- 3) 设 $F(x)$ 表示 x 是火车, $G(y)$ 表示 y 是汽车, $H(x,y)$ 表示 x 比 y 快, 则命题 “有的汽车比所有的火车快” 符号化为下面哪个公式? ()
- A. $\exists y(G(y) \rightarrow \forall x(F(x) \wedge H(x,y)))$ B. $\exists y(G(y) \wedge \forall x(F(x) \rightarrow H(y,x)))$
 C. $\forall x \exists y(G(y) \rightarrow (F(x) \wedge H(x,y)))$ D. $\exists y(G(y) \rightarrow \forall x(F(x) \rightarrow H(x,y)))$
- 4) 下列推理哪个是不正确的? ()
- A. 前提: $\neg p \vee (q \rightarrow r), \neg s \vee p, q$ 结论: $s \rightarrow r$
 B. 前提: $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s), (s \vee t) \rightarrow u$ 结论: $p \rightarrow u$
 C. 前提: $(p \wedge q) \rightarrow r, r \rightarrow s, \neg s \wedge p$ 结论: q
 D. 前提: $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, q$ 结论: $r \vee s$
- 5) 下面哪个命题公式是永真式? ()
- A. $(p \vee q) \rightarrow \neg r$
 B. $(q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p$
 C. $\neg(\neg p \vee q) \wedge q$

- D. $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$
- 6) 下列命题中错误的是哪个? ()
- A. $x \in \{x\} \cup \{\{x\}\}$; B. $\{x\} \subseteq \{x\} - \{\{x\}\}$;
 C. 若 $A = \{x\} \cup x$, 则 $x \in A$ 且 $x \subseteq A$; D. $A - B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$.
- 7) 下列命题中正确的是哪个? ()
- A. 若 $A \cap B = A \cap C$, 则 $B = C$; B. 若 $A \cup B = A \cup C$, 则 $B = C$;
 C. 若 $A \oplus B = A \oplus C$, 则 $B = C$; D. 若 $A \subset B$ 且 $C \subset D$, 则 $A \cap C \subset B \cap D$.
- 8) 集合 $A = \{1, 2, 3, 6\}$, A 上的整除关系具有的性质是下面的哪个? ()
- A. 自反的、对称的、可传递的; B. 反自反的、对称的、可传递的;
 C. 自反的、反对称的、可传递的; D. 反自反的、反对称的、可传递的.
- 9) 设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A$, 下面描述错误的是哪个? ()
- A. B 的下界、上界一定存在;
 B. B 的下确界、上确界不一定存在;
 C. B 的下确界、上确界如果存在, 则惟一;
 D. B 的最小元是其下确界.
- 10) 自然数集合 N 与下述哪个集合不等势? ()
- A. 有理数集合 Q ; B. $\{0, 1\}^N$;
 C. $N \times N$; D. $N - \{1, 2, 3\}$.

2. 判断题 (共 10 题, 每题 1 分, 真为"T", 假为"F")

- 1) 在命题逻辑中, 公式 $((\neg p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg r \vee s)$ 的层次是 4. ()
- 2) 在命题逻辑中, 公式 $q \wedge \neg(p \rightarrow q)$ 是可满足式. ()
- 3) 每一个极小项当其真值指派与编码相同时, 其真值为 1, 在其余 $2^n - 1$ 种指派情况下均为 0. ()
- 4) $C_1 \wedge C_2$ 与 $\text{Res}(C_1, C_2)$ 是等值的. ()
- 5) $\forall x \exists y G(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x G(x, y)$ ()
- 6) A, B, C 是任意三个集合, 则 $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$. ()
- 7) 设 F 是任意的关系, 则 $\text{ran } F^{-1} = \text{dom } F$. ()
- 8) 恒等关系确定的自然映射是双射. ()
- 9) 设 R 为 A 上的关系, 则 R 在 A 上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} = I_A$. ()
- 10) 任何实数区间都与实数集合 R 等势. ()

3. 填空题（共 10 题，每题 3 分）

- 1) 在命题逻辑中, 公式 $A = (p \vee q) \rightarrow \neg r$ 的成真赋值为_____.
- 2) 设 $c_1 = \neg p \vee q \vee r$, $c_2 = p \vee q \vee \neg s$, 则 $\text{Res}(c_1, c_2) =$ _____.
- 3) 给定解释 I 如下:

(a) 个体域为实数集合;	(b) $\bar{a} = 0$
(c) $\bar{f}(x, y) = x - y$	(d) $\bar{F}(x, y): x = y, \bar{G}(x, y): x < y$
- 则公式 $\forall x \forall y (G(x, y) \rightarrow \neg F(f(x, y), a))$ 在 I 下的真值为_____.
- 4) 设个体域 $D = \{a, b\}$, 消去公式 $\forall x \exists y (F(x) \wedge G(y)) \rightarrow H(y)$ 中的量词后得到的公式为（要求使用不超过四个联结词）_____.
- 5) 公式 $(\forall x F(x, y) \rightarrow \exists y G(y)) \rightarrow \forall x H(x, y)$ 的前束范式为_____.
- 6) 令 $S = \{100, 101, 102, \dots, 999\}$, 在 S 中有_____个数, 它们都至少含有数字 3 或 7.
- 7) 已知 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <1, 2>, <2, 1>\}$, 则 $A/R =$ _____.
- 8) 偏序集 $\langle A, R \rangle$, 其中 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, R 是 A 上的整除关系, 则 A 的极大元是_____.
- 9) $R = \{<1, 2>, <1, 3>, <2, 1>, <2, 3>, <3, 2>\}$, 则 $R \upharpoonright \{1, 3\} =$ _____.
- 10) 已知 $A = \{3n | n \in \mathbb{N}\}$, 则 $\text{card } A =$ _____.

4. （10 分）某电路中有一个灯泡和三个开关 A, B, C 。已知在且仅在下述四种情况下灯亮:

- (1) C 的扳键向上, A, B 的扳键向下。
- (2) A 的扳键向上, B, C 的扳键向下。
- (3) B, C 的扳键向上, A 的扳键向下。
- (4) A, B 的扳键向上, C 的扳键向下。

设 F 为 1 表示灯亮, 命题变元 p, q, r 分别表示 A, B, C 的扳键向上。

- (A) 求 F 的主析取范式。
- (B) 在联结词完备集 $\{\neg, \wedge\}$ 上构造 F , 并尽可能地简单。

5. (10 分) 在一阶逻辑中推证下列结论的有效性:

所有爱学习的人都有知识; 每个有知识、爱思考的人都有创造力; 有些爱学习、爱思考的人是科学家. 所以有些爱学习、有创造力的人是科学家.

设个体域是人的集合, $P(x)$: x 爱学习, $R(x)$: x 有知识,

$S(x)$: x 有创造力, $U(x)$: x 是科学家, $V(x)$: x 爱思考.

6. (10 分) 设 N 是自然数集合, 定义 N 上的二元关系 R :

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in N, y \in N, x+y \text{ 是偶数} \}$$

(1) 证明 R 是一个等价关系;

(2) 求关系 R 的等价类.

7. (10 分) 设 $A=(0,1)$, $B=(0,1]$. 通过构造双射函数证明集合 A 与 B 等势.

8. (10 分) 已知集合 A 和 B , 其中 $A \neq \emptyset$, $\langle B, \leq \rangle$ 是偏序集, $\langle B, \leq \rangle$ 中存在最大元 b . 定义 B^A 上的二元关系 R 如下:

$$fRg \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow (f(x) \leq g(x))).$$

(1) 证明 R 为 B^A 上的偏序关系.

(2) 给出偏序集 $\langle B^A, R \rangle$ 中的最大元.