

# Chương 3: Thông tin và định lượng thông tin

- 1 **Lượng tin của nguồn tin rời rạc**
  - Nguồn tin rời rạc
  - Biến đổi nguồn tin rời rạc
  - Lượng tin riêng, lượng tin tương hỗ, lượng tin có điều kiện
  - Tính chất của lượng tin
  - Lượng tin trung bình
  - Entropi của nguồn rời rạc
- 2 **Tốc độ lập tin của nguồn và thông lượng kênh rời rạc**
  - Tốc độ lập tin và độ dư của nguồn
  - Khái niệm thông lượng của kênh
  - Thông lượng của kênh rời rạc không nhiễu
  - Thông lượng của kênh rời rạc có nhiễu
- 3 **Entropi của nguồn và thông lượng kênh liên tục**
  - Entropi của nguồn liên tục
  - Thông lượng kênh liên tục

# Cơ sở Lý thuyết Truyền tin

Hà Quốc Trung<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Bộ môn Mạng máy tính và Truyền thông Khoa Công nghệ thông tin  
Đại học Bách khoa Hà nội

## Chương 3: Thông tin và định lượng thông tin

- 1 Lượng tin của nguồn tin rời rạc
- 2 Tốc độ lập tin của nguồn và thông lượng kênh rời rạc
- 3 Entropi của nguồn và thông lượng kênh liên tục

# 1. Lượng tin của nguồn tin rời rạc

- 1 Lượng tin của nguồn tin rời rạc
  - Nguồn tin rời rạc
  - Biến đổi nguồn tin rời rạc
  - Lượng tin riêng, lượng tin tương hỗ, lượng tin có điều kiện
  - Tính chất của lượng tin
  - Lượng tin trung bình
  - Entropi của nguồn rời rạc
- 2 Tốc độ lập tin của nguồn và thông lượng kênh rời rạc
- 3 Entropi của nguồn và thông lượng kênh liên tục

## 1.1.Nguồn tin rời rạc

- Nguồn tin rời rạc *Nguồn tin tạo ra một chuỗi các biến ngẫu nhiên rời rạc*  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$
- Ký hiệu
  - Phần tử nhỏ nhất chứa thông tin, Một giá trị của biến ngẫu nhiên, Ví dụ mã morse, 4 ký hiệu
- Bộ ký hiệu: tập hợp tất cả các ký hiệu có thể (tất cả các giá trị có thể của biến ngẫu nhiên rời rạc), còn gọi là bảng chữ cái  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
- Từ: Tập hợp hữu hạn các ký hiệu
- Bộ từ: Tập hợp tất cả các từ có thể
- Nguồn đặc trưng bởi trường xác suất

$$\{X, p(x)\}, X = \{x_1 x_2 \dots x_n \dots\}$$

# Các loại nguồn tin rời rạc

- Nguồn rời rạc không nhớ: xác suất xuất hiện của các ký hiệu không phụ thuộc vào các ký hiệu đã xuất hiện trước đó

$$p(x_n|x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = p(x_n)$$

- Nguồn rời rạc có nhớ

$$p(x_n|x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) < p(x_n)$$

- Nguồn dừng: Xác suất xuất hiện của các ký tự chỉ phụ thuộc vào vị trí tương quan giữa các ký tự, không phụ thuộc vào vị trí so với gốc

$$p(x_i, n) = p(x_i, n+k) \forall k$$

- Nguồn dừng Ergodic: Nguồn có các giá trị trung bình tập hợp bằng các giá trị trung bình theo thời gian
- Nguồn có tốc độ thông tin điều khiển được (thay đổi)

- Nguồn điện tín
- Telex
- Nguồn có tốc độ thông tin không điều khiển được (không thay đổi)

- Nguồn Markov độ nhớ 1: xác suất của một ký hiệu chỉ phụ thuộc vào ký hiệu trước đó

$$p(x_{i_n} | x_{j_{n-1}}, x_{k_{n-2}} \dots) = p(x_{i_n} | x_{j_{n-1}})$$

- Tại thời điểm  $n$  nguồn có thể ở trạng thái  $x_j$  với xác suất  $p_{ij} = p(x_{j,n} | x_{i,n-1})$  khi ở thời điểm  $n - 1$  nguồn đã ở trạng thái  $x_i$ . Khi đó  $\sum_{j=1}^L p_{ij} = 1$
- Xác suất để ký hiệu thứ  $n$  là  $x_j$

$$p(x_{j_n}) = \sum_{i=1}^L p(x_{j_n}, x_{i_{n-1}}) =$$

$$\sum_{i=1}^L p(x_{i_{n-1}}) p(x_{j_n} | x_{i_{n-1}}) = \sum_{i=1}^L p(x_{i_{n-1}}) p_{ij}$$



- Biểu diễn bằng ma trận

$$P_n = \begin{bmatrix} p(x_{1n}) \\ p(x_{1n}) \\ \dots \\ p(x_{Ln}) \end{bmatrix} P_{n-1} = \begin{bmatrix} p(x_{1n-1}) \\ p(x_{1n-1}) \\ \dots \\ p(x_{Ln-1}) \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1L} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2L} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{L1} & p_{L2} & \dots & p_{LL} \end{bmatrix}$$

- Phân bố xác suất tại thời điểm  $n$

$$P_n = T^T P_{n-1} = (T^T)^n P_0$$

## 1.2. Biến đổi nguồn tin rời rạc

- Biến đổi cấu trúc thống kê của nguồn tin rời rạc

$$\{X, p(x)\} \rightarrow \{Y, p(y)\}$$

- Nếu không có nhiễu, phép biến đổi là 1-1, ánh xạ có thể biểu diễn theo bảng:

$A \rightarrow 00$

$B \rightarrow 01$

$C \rightarrow 10$

$D \rightarrow 11$

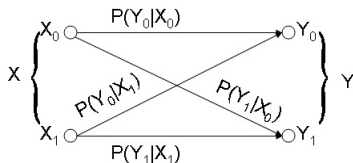
- Tổng quát, phép biến đổi biểu diễn bằng một trường xác suất

$$\{XY, p(X, Y)\}, X = \{A, B, C, D\}, Y = \{00, 01, 10, 11\}$$

mô tả xác suất có thể để có một đầu vào  $x$  và một đầu ra  $y$  đồng thời  $p(x, y)$

- Có thể sử dụng các xác suất có điều kiện  $p(y|x)$

# Ví dụ: kênh nhị phân đối xứng



	$Y=X$	$Y=\bar{X}$
$P(Y_0 X_0)$	1	0
$P(Y_1 X_0)$	0	1
$P(Y_1 X_1)$	1	0
$P(Y_0 X_1)$	0	1

- Tập vào gồm 2 ký hiệu, Tập ra gồm hai ký hiệu
- Một phép biến đổi bất kỳ có thể biểu diễn bằng bộ 4 xác suất có điều kiện (xác suất chuyển đổi):
  - $x_0$  chuyển thành  $y_0$
  - $x_0$  chuyển thành  $y_1$
  - $x_1$  chuyển thành  $y_1$
  - $x_1$  chuyển thành  $y_0$

## Ví dụ: kênh nhị phân đối xứng (Tiếp)

- Phân bố xác suất của đầu ra bằng phân bố xác suất của đầu vào và xác suất chuyển đổi:  $p(x, y) = p(x)p(y|x)$
- Khi gửi một tin  $x$ , xác suất để có tin  $y$  ở đầu ra sẽ là

$$p(y|x) = \frac{p(x, y)}{p(x)}$$

Các xác suất này gọi là xác suất chuyển đổi, có thể dùng để đặc trưng cho phép biến đổi

- Theo công thức về xác suất đồng thời và có điều kiện

$$p(x) = \sum_Y (p(x, y)), p(y) = \sum_X (p(x, y))$$

$$p(x|y) = \frac{p(x)p(y|x)}{\sum_Y p(x)p(y|x)}$$

## Ví dụ: kênh nhị phân đối xứng (Tiếp)

- Từ công thức cuối cùng, có thể tính được xác suất gửi tin  $x$  khi nhận được tin  $y$ : *Giải quyết bài toán thu tin*
- $p(x)$ : xác suất tiên nghiệm,  $p(x|y)$  xác suất hậu nghiệm, sử dụng để xác định các lượng tin

Một nguồn tin gồm 8 tin  $U$ , mỗi tin là một ký hiệu  $u_i, i = 1 \dots 8$  được biến đổi bởi một kênh truyền tin thành tập 8 tin, mỗi tin gồm 3 ký hiệu  $x, y, z$ , mỗi ký hiệu nhận 2 giá trị 0 hoặc 1. Ký hiệu

$x_0 = y_0 = z_0 = 0, x_1 = y_1 = z_1 = 1$

Khi nhận tin, nhận lần lượt từng ký tự  $x, y, z$ . Mỗi lần nhận được một ký hiệu, xác suất hậu nghiệm của tin  $u$  thay đổi

Tin $u$	$p(u)$	$xyz$	$p(u)$ khi nhận được ký hiệu		
			$x_1$	$y_0$	$z_1$
$u_0$	1/4	$x_0 y_0 z_0$	0	0	0
$u_1$	1/4	$x_1 y_0 z_0$	1/2	4/5	0
$u_2$	1/8	$x_0 y_1 z_0$	0	0	0
$u_3$	1/8	$x_1 y_1 z_0$	1/4	0	0
$u_4$	1/16	$x_0 y_0 z_1$	0	0	0
$u_5$	1/16	$x_1 y_0 z_1$	1/8	1/5	1
$u_6$	1/16	$x_0 y_1 z_1$	0	0	0
$u_7$	1/16	$x_1 y_1 z_1$	1/8	0	0

# 1.3. Lượng tin riêng, lượng tin tương hỗ, lượng tin có điều kiện

- Lượng tin của mỗi tin  $x_i \in X$ :  $I(x_i) = -\log(p(x_i))$  gọi là *lượng tin riêng* của tin  $x_i$
- Bài toán thu tin
  - Các tin của nguồn tin  $X$  truyền qua một hệ thống biến đổi thành đầu ra  $Y$ . Cho biết
    - Cấu trúc thống kê của nguồn
    - Cấu trúc thống kê của tập nhiễu và phép biến đổi (cho bằng các xác suất chuyển đổi)
  - Với mỗi đầu ra  $y \in Y$  xác định đầu vào  $x \in X$  đã sinh ra  $y \in Y$
- Lời giải
  - Chính xác: không có
  - Xác suất: Xác định đầu vào có khả năng nhất
  - Thông tin: (lọc)tách thông tin của đầu vào chứa trong đầu ra
    - Xác định lượng thông tin của mỗi  $x_i$  chứa trong  $y_j$ : *lượng tin tương hỗ* = **Lượng tin ban đầu - lượng tin còn lại**
    - chọn ra đầu vào lượng tin tương hỗ lớn nhất

# Giải quyết bài toán thu tin

- Lượng tin của  $x_i$  khi đã nhận được  $y_j$ 
  - Xác suất của  $x_i$  khi biết  $y_j$ :  $p(x_i|y_j)$
  - Lượng tin của  $x_i$  khi có  $y_j$  là

$$I(x_i|y_j) = -\log(p(x_i|y_j))$$

- Lượng tin tương hỗ của  $x_i$  trong  $y_j$

$$I(x_i; y_j) = I(x_i) - I(x_i|y_j) = \log \frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)} = \log \frac{p(y_j|x_i)}{\sum_j (p(y_j)p(y_j|x_i))}$$

$p(x_i)$

chính là sự thay đổi thông tin về  $x_i$  do  $y_j$  gây ra

- Lượng tin tương hỗ tính theo các xác suất chuyển đổi và đầu vào

$$I(x_i; y_j) = \log \frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)} = \log \frac{p(y_j|x_i)}{\sum_j (p(x_i) * p(y_j|x_i))}$$

- $I(x_i|y_j)$  là lượng tin của  $x_i$  không nằm trong  $y_j$ , do bị tạp nhiễu ảnh hưởng, không đến đầu thu, gọi là *lượng tin có điều kiện*



## 1.4. Tính chất của lượng tin

- Tính chất 1

*Lượng tin riêng của một tin  $x_i$  luôn lớn hơn lượng tin tương hỗ trong một tin khác  $y_j$*

- Nếu hai tin này độc lập thống kê, lượng tin tương hỗ bằng 0
- Nếu từ  $y_j$  xác định được  $x_i$  lượng tin tương hỗ là cực đại
- Lượng tin riêng chính là lượng tin tương hỗ cực đại

$$I(x_i) = -\log p(x_i) \geq I(x_i; y_j) = \log \frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)} = \log \frac{p(y_j|x_i)}{p(y_j)}$$

- Tính chất 2

*Lượng tin tương hỗ có thể âm*

- Tính chất 3: **Lượng tin của một cặp tin  $x_i y_j$**

$$I(x_i y_j) = I(x_i) + I(y_j) - I(x_i; y_j)$$

Nếu hai cặp tin độc lập thống kê

$$I(x_i y_j) = I(x_i) + I(y_j)$$

## 1.5. Lượng tin trung bình

- Lượng tin của nguồn: lượng tin của một tập hợp tin
- Ví dụ: nguồn nhị phân,  $p(x_0) = 0.99$ ,  $p(x_1) = 0.01$ , Tin  $x_1$  có lượng tin lớn ( $\log 100 \simeq 6.5 \text{ bit}$ ), nhưng thông tin của nguồn này ít có giá trị
- Lượng tin riêng trung bình

$$I(X) = - \sum_x p(x) \log p(x)$$

Trong ví dụ trên  $I(X) \simeq 0.01$

- Lượng tin tương hỗ trung bình

$$I(X, Y) = \sum_{xy} p(x, y) \log \frac{p(x|y)}{p(x)}$$

- Lượng tin riêng trung bình có điều kiện

$$I(X|Y) = \sum_{xy} p(x, y) \log p(x|y)$$

## 1.5. Lượng tin trung bình (Tiếp)

- Tính chất của lượng tin trung bình

$$I(X, Y) = I(X) - I(X|Y)$$

$$I(X; Y) = I(Y; X) \geq 0$$

# Khái niệm entropi

- Độ bất định của một nguồn tin = độ bất ngờ của tin, xác định vào trước thời điểm nhận tin
- Khi nhận tin, độ bất ngờ được giải thoát (tin đã biết, độ bất ngờ = 0), đồng thời nhận được một lượng tin
- *Độ bất ngờ của tin = lượng tin của tin về số đo*

$$H(x_i) = -\log p(x_i) = I(x_i)$$

- Độ bất định trung bình của một nguồn tin

$$H(X) = - \sum_x p(x) \log p(x) = I(X)$$

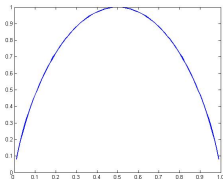
phản ánh chất lượng của nguồn tin.

- Độ bất ngờ  $H(X)$  gọi là *Entropi* của nguồn
- Thông số phản ánh khả năng phát tin (trung bình) của một nguồn
- Đo bằng lượng tin trung bình của các tin do nguồn phát ra

# Tính chất của Entropi

- Entropi luôn không âm  $H(X) \geq 0$
- Entropi bằng 0 khi và chỉ khi
  - Một ký hiệu có xác suất bằng 1
  - Tất cả các ký hiệu khác có xác suất 0
- Entropi có giá trị cực đại khi tất cả các ký hiệu có cùng xác suất,  $H(X)_{max}$

- Nguồn có hai ký hiệu, xác suất  $p, 1 - p$ . Entropi của nguồn là  $H(X) = -p \log p - (1 - p) \log(1 - p)$  đạt giá trị cực đại là  $\log_2 2 = 1$  khi  $p = 1 - p = 1/2$



- Tổng quát nếu nguồn  $X$  có  $m$  ký hiệu, entropi sẽ có giá trị lớn nhất khi các ký hiệu đẳng xác suất:

$$p_1 = p_2 = \dots = p_m = p = \frac{1}{m}$$

$$H(X)_{\max} = - \sum_{i=1}^m p_i \log p_i = \log_2 m$$



# Entropi đồng thời và có điều kiện

- Xét tập tin của nguồn là  $X$ , tập tin của đích là  $Y$
- Entropi đồng thời: độ bất định trung bình của tất cả các cặp  $x, y$

$$H(XY) = - \sum_{XY} p(x, y) \log p(x, y)$$

- Độ bất định trung bình của một ký hiệu  $x_j$  thuộc  $X$  khi biết một ký hiệu  $y_j$  thuộc  $Y$  gọi là Entropi có điều kiện

$$H(X|Y) = - \sum_{XY} p(x, y) \log p(x|y)$$

$$H(Y|X) = - \sum_{XY} p(x, y) \log p(y|x)$$

- Tính chất

$$H(XY) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y)$$

$$H(Y) \geq H(Y|X), H(X) \geq H(X|Y)$$

- Thay đổi về độ bất định của tin  $X$

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y)$$

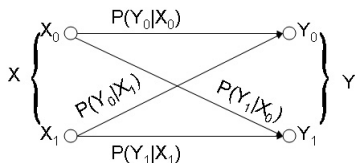
- Tương tự

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

- Lượng tin tương hỗ

$$I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(XY)$$

# Ví dụ: kênh nhị phân đối xứng



- Giả sử  $p(y_0|x_0) = p(y_1|x_1) = p_d$ ,  $p(y_0|x_1) = p(y_1|x_0) = p_s$ ,  $p(x_0) = p$ ,  $p(x_1) = q$ . Khi đó  $p_d + p_s = 1$ ,  $p + q = 1$
- Tìm lượng tin tương hỗ trung bình giữa  $X$ ,  $Y$ ?
- Sử dụng công thức  $I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X)$ 
  - Tính  $H(Y)$
  - Tính  $H(Y|X)$

- Xác định xác suất của các tin đầu ra

$$p(y) = \sum_x p(x, y) = \sum_x p(x)p(y|x)$$

$$\begin{aligned} p(y_0) &= p(x_0)p(y_0|x_0) + p(x_1)p(y_0|x_1) = \\ &= p(1 - p_s) + (1 - p)p_s = p - 2pp_s + p_s \\ p(y_1) &= 1 - (p - 2pp_s + p_s) \end{aligned}$$

- Entropi đầu ra

$$\begin{aligned} H(Y) &= -p(y_0) \log p(y_0) - p(y_1) \log p(y_1) = \\ &= -(p - 2pp_s + p_s) \log(p - 2pp_s + p_s) - \\ &= -(1 - (p - 2pp_s + p_s)) \log(1 - (p - 2pp_s + p_s)) \end{aligned}$$

## Ví dụ: kênh nhị phân đối xứng (Tiếp)

- Entropi có điều kiện

$$\begin{aligned}H(Y|X) &= - \sum_{XY} p(x, y) \log(p(y|x)) = - \sum_{XY} p(x)p(y|x) \log(p(y|x)) \\&= -\{pp(y_0|x_0) \log p(y_0|x_0) + qp(y_1|x_1) \log p(y_1|x_1) + \\&\quad pp(y_1|x_0) \log p(y_1|x_0) + qp(y_0|x_1) \log p(y_0|x_1)\} = \\&= -\{p \cdot p_d \log p_d + (1-p) \cdot p_d \log p_d + p \cdot p_s \log p_s + (1-p) \cdot p_s \log p_s\} = \\&= -\{p_d \log p_d + p_s \log p_s\} = -(p_s \log p_s + (1-p_s) \log(1-p_s))\end{aligned}$$

- Lượng tin tương hỗ

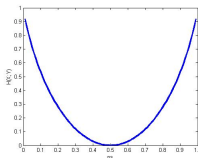
$$\begin{aligned}I(X; Y) &= H(Y) - H(Y|X) = \\&= -(p - 2pp_s + p_s) \log(p - 2pp_s + p_s) - \\&= -(1 - (p - 2pp_s + p_s)) \log(1 - (p - 2pp_s + p_s)) + \\&\quad +(p_s \log p_s - (1 - p_s) \log(1 - p_s))\end{aligned}$$

## Ví dụ: kênh nhị phân đối xứng (Tiếp)

- Xét trường hợp  $p = q = 1/2$ ,  $H(Y) = 1$

$$I(X; Y) = 1 + (1 - p_s) \log_2(1 - p_s) + p_s \log_2(p_s)$$

Đồ thị theo  $p_s$



- $p_s = 0$ : không có sai số, lượng tin tương hỗ là 1, đạt cực đại
- $p_s = 1$ : Sai số hoàn toàn, lượng tin tương hỗ là 1, đạt cực đại
- $p_s = 0.5$ : lượng tin tương hỗ là 0,  $X, Y$  độc lập thống kê, sự truyền tin bị nhiễu phá hủy hoàn toàn

# Entropi của nguồn Markov



## 1.6. Entropi của nguồn rời rạc

- Xét nguồn ở trạng thái  $i$
- Độ bất định trong trường hợp này

$$H_i = - \sum_{j=1}^L p_{ij} \log p_{ij}$$

- Vậy độ bất định trung bình của nguồn là

$$H = \sum_{i=1}^L p(x_i) H_i = - \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L p(x_i) p_{ij} \log p_{ij}$$



$$H(\mathcal{S}) = - \sum_i p_i \sum_j p_i(j) \log_2 p_i(j)$$

## 2. Tốc độ lập tin của nguồn và thông lượng kênh rời rạc

- 1 Lượng tin của nguồn tin rời rạc
- 2 **Tốc độ lập tin của nguồn và thông lượng kênh rời rạc**
  - Tốc độ lập tin và độ dư của nguồn
  - Khái niệm thông lượng của kênh
  - Thông lượng của kênh rời rạc không nhiều
  - Thông lượng của kênh rời rạc có nhiều
- 3 Entropi của nguồn và thông lượng kênh liên tục

## 2.1. Tốc độ lập tin và độ dư của nguồn

- Tốc độ tạo ra các tin (ký hiệu) của nguồn (vật lí) là hữu hạn
- Lượng tin nguồn có thể tạo ra trong một đơn vị thời gian

$$R = n_0 H(X)$$

gọi là tốc độ lập tin của nguồn. Ký hiệu  $R$

- Để có tốc độ lập tin lớn với  $n_0$  (nguồn vật lí) cố định, cần  $H(X)$  lớn nhất
- Để  $H(X)$  lớn nhất: thay đổi cấu trúc thống kê của nguồn: *mã hóa thống kê*

- Một nguồn  $X$  có 4 ký hiệu và có phân bố xác suất

$$X = x_1, x_2, x_3, x_4$$

$$p(x_1) = 1/2, p(x_2) = 1/4, p(x_3) = 1/8, p(x_4) = 1/8$$

- Entropi của  $X$  là

$$H(X) = - \sum_x p(x) \log p(x) = 7/4$$

- Để có Entropi cực đại  $H(X)_{max} = \log_2 4 = 2$  cần có phân bố xác suất đều cho các ký hiệu

- Thực hiện liên tiếp hai phép biến đổi. Phép biến đổi thứ nhất

$$x_1 \rightarrow y_0$$

$$x_2 \rightarrow y_1 y_0$$

$$x_3 \rightarrow y_1 y_1 y_0$$

$$x_4 \rightarrow y_1 y_1 y_1$$

Xác suất của  $y_0$  và  $y_1$  là bằng nhau:  $(7/8)/(7/4) = 1/2$

- Biến đổi nguồn tin thu được thành một nguồn có 4 ký hiệu

$$y_0 y_0 \rightarrow z_1$$

$$y_1 y_0 \rightarrow z_2$$

$$y_0 y_1 \rightarrow z_3$$

$$y_1 y_1 \rightarrow z_4$$

- Cả hai phép biến đổi đều bảo toàn lượng tin cho mỗi tin
- Entropi của nguồn  $Z$  là 2, do đó tốc độ lập tin của nguồn  $Z$  sẽ lớn hơn nguồn  $X$

## 2.2. Khái niệm thông lượng của kênh

- Lượng tin tối đa kênh cho đi qua trong một đơn vị thời gian mà không gây sai nhầm. Ký hiệu  $C$
- Là tốc độ lập tin tối đa ở đầu ra của kênh
- Tốc độ lập tin thường nhỏ hơn nhiều so với thông lượng

$$R \ll C$$

- Tận dụng thông lượng của kênh
  - Tối đa tốc độ lập tin của nguồn cho phù hợp với kênh: Mã hóa thống kê để có tốc độ lập tin cực đại, gần với thông lượng (đồng bộ kênh-nguồn)  
**Cơ sở lý thuyết:** định luật Shannon cho kênh không nhiễu
  - Sử dụng phần còn lại của thông lượng để chống nhiễu (mã chống nhiễu)  
**Cơ sở lý thuyết:** Định luật Shannon cho kênh có nhiễu

## 2.3. Thông lượng của kênh rời rạc không nhiễu

- Kênh không có nhiễu:
  - Thông tin do nguồn thiết lập được truyền không có sai nhẫm
  - Thông lượng kênh khi đó bằng tốc độ lập tin cực đại

$$C = R_{max} = n_0 H(X)_{max} (bit/sec)$$

- Để tối ưu hệ thống cần cực đại entropi của nguồn
  - Tồn tại một phương pháp mã hóa với entropi cực đại?
  - Giới hạn của tốc độ truyền tin khi đó là bao nhiêu



# Định lý Shannon cho kênh rời rạc không nhiễu

- Giả định
  - Nguồn có entropi  $H(\text{bit/ký hiệu})$
  - Kênh có thông lượng  $C(\text{bit/sec})$
  - Chú ý  $C = R_{\max} = n_0 H(X)_{\max} (\text{bit/sec})$
- Kết luận
  - 1 Có thể mã hóa nguồn để truyền tin với tốc độ trung bình  $\frac{C}{H} - \epsilon$  (ký hiệu/s),  $\epsilon$  bé tùy ý
  - 2 Không thể truyền tin nhanh hơn  $\frac{C}{H}$  (ký hiệu/s)
- Chứng minh
  - 1 ??? (Bài tập)
  - 2 Hiển nhiên?
- Tốc độ lập tin tối đa tiệm cận và có thể bằng với thông lượng kênh. Phép mã hóa tương ứng gọi là *phép mã hóa tối ưu*.
- Phép mã hóa tối ưu không sử dụng hết thông lượng của kênh

- Khi tốc độ lập tin của nguồn chưa đạt cực đại, còn khả năng để tối ưu nguồn. Khả năng này đo bằng *độ dư của nguồn*
- Độ dư của nguồn

$$H(X)_{max} - H(X)$$

- Độ dư tương đối

$$r_s = \frac{H(X)_{max} - H(X)}{H(X)_{max}} = 1 - \frac{H(X)}{H(X)_{max}}$$

- Để có thể xây dựng mã chống nhiễu, điều kiện đầu tiên là phải có độ dư

- Khi tốc độ lập tin của nguồn chưa đạt cực đại, còn khả năng để tối ưu nguồn. Khả năng này đo bằng *độ dư của nguồn*
- Độ dư của nguồn

$$H(X)_{max} - H(X)$$

- Độ dư tương đối

$$r_s = \frac{H(X)_{max} - H(X)}{H(X)_{max}} = 1 - \frac{H(X)}{H(X)_{max}}$$

- Để có thể xây dựng mã chống nhiễu, điều kiện đầu tiên là phải có độ dư

## 2.4. Thông lượng của kênh rời rạc có nhiễu

- Xét kênh không nhớ, có nhiễu
- Các tin nhận được bị sai lệch
  - Nếu vẫn phân biệt được các tin đầu vào: không có sai nhầm
  - Nếu các tin đầu vào bị lẫn nhau ở đầu ra (nhiều tin đầu vào cho một tin đầu ra): giảm độ chính xác truyền tin
  - Xuất hiện sai số truyền tin, đo bằng bit/s
- Xét hệ thống gồm đầu vào  $X = \{x_i, i = 1 \dots m\}$ , đầu ra  $Y = \{y_j, j = 1 \dots n\}$ . Do kênh có nhiễu, nên phép biến đổi giữa  $X$  và  $Y$  được biểu diễn bằng ma trận xác suất chuyển đổi  $p(y_j|x_i)$
- Lượng tin tương hỗ khi đó có thể tính theo

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y)$$

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

## 2.4. Thông lượng của kênh rời rạc có nhiễu (Tiếp)

- Tốc độ lập tin ở đầu ra của kênh

$$R = n_0 I(X; Y) = n_0 (H(X) - H(X|Y)) (\text{bit/sec})$$

Trong đó  $n_0 H(X|Y)$  (bit/sec) là lượng tin bị nhiễu phá hủy trong một đơn vị thời gian

- Khi các thông số của kênh đã xác định, muốn nâng cao tốc độ lập tin đầu ra, cần phải tăng entropi bằng cách thay đổi phương pháp mã hóa. Thông lượng kênh chính là tốc độ lập tin tối đa ở đầu ra kênh:

$$C = R_{\max} = n_0 I(X; Y)_{\max} = n_0 (H(X) - H(X|Y))_{\max} (\text{bit/sec})$$

Nếu xem giải thông của kênh  $\Delta f = n_0$  thì thông lượng kênh có nhiều là

$$C = \Delta f (H(X) - H(X|Y))_{\max} (\text{bit/sec})$$

đảm bảo truyền tin không có sai nhầm

# Định lý Shannon cho kênh có nhiễu

- Với nguồn tin có tốc độ lập tin  $R$ , kênh tin có thông lượng  $C$ , có thể truyền tin với độ chính xác tối đa là bao nhiêu?
- Định lý
  - 1 Với kênh rời rạc có thông lượng  $C$ , tốc độ lập tin của nguồn là  $R < C$  có thể có phương pháp mã hóa để truyền tin với một độ sai nhầm bé tùy ý.
  - 2 Nếu  $R > C$  có thể mã hóa nguồn với sai số  $R - C + \epsilon$ ,  $\epsilon$  bé tùy ý.
  - 3 Không tồn tại cách mã hóa với sai số nhỏ hơn  $R - C$
- Ý nghĩa
  - Nếu  $R < C$  phần dư của nguồn được dùng để bổ sung các thông tin chống nhiễu. Cần truyền lượng tin lớn hơn so với lượng tin cần truyền.
  - Nếu  $R > C$ , phần thông tin không được truyền đi sẽ trở thành sai số (tối thiểu). Tồn tại cách mã hóa để có (tiệm cận) sai số tối thiểu

### 3. Entropi của nguồn và thông lượng kênh liên tục

- 1 Lượng tin của nguồn tin rời rạc
- 2 Tốc độ lập tin của nguồn và thông lượng kênh rời rạc
- 3 Entropi của nguồn và thông lượng kênh liên tục
  - Entropi của nguồn liên tục
  - Thông lượng kênh liên tục

### 3.1. Entropi của nguồn liên tục

- Nguồn liên tục là một quá trình ngẫu nhiên liên tục. Để có thể nghiên cứu, xem xét nguồn liên tục cần *rời rạc hóa nguồn liên tục*
- Với điều kiện nguồn có phổ hữu hạn, có thời gian tồn tại hữu hạn, nguồn liên tục có thể được lấy mẫu với tần số  $2\Delta f$  tại các điểm  $\{t_i\}, i = 1 \dots n$
- Mỗi một thể hiện của nguồn liên tục là một hàm  $x(t)$  theo thời gian, được đặc trưng bởi  $n$  giá trị tức thời  $\{x_i\}, i = 1 \dots n$
- Tính chất thống kê của nguồn đặc trưng bởi phân bố xác suất đồng thời

$$p(x_1, x_2 \dots, x_n)$$

- Với nguồn dừng, phân bố xác suất này không phụ thuộc thời gian

$$p(x_{t_i}) = p(x_{t_i+\tau})$$

- Nguồn đặc trưng bằng một phân bố xác suất chung  $p(x)$



### 3.1.Entropi của nguồn liên tục (Tiếp)

- Entropi của nguồn liên tục dừng

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log p(x) dx$$

- Entropi của nguồn không dừng

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_{t_1}, x_{t_2} \dots x_{t_n}) \log p(x_{t_1}, x_{t_2} \dots x_{t_n}) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

- Tốc độ lập tin của nguồn

$$R = n_0 H(X) = 2\Delta f H(X)$$

# Entropi có điều kiện, Lượng tin tương hỗ

- Entropi có điều kiện

$$H(X|Y) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) \log p(x|y)$$

$$H(Y|X) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) \log p(y|x)$$

- Lượng tin tương hỗ

$$I(X; Y) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) \log \frac{p(x|y)}{p(x)} dx dy$$

$$I(X; Y) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) \log \frac{p(y|x)}{p(y)} dx dy$$

# Quan hệ giữa lượng tin tương hỗ, lượng tin đồng thời và Entropi

$$H(X; Y) = H(X) - H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y)$$

$$H(XY) = H(X) + H(Y|X), \quad H(XY) = H(Y) + H(X|Y)$$

## Ví dụ 1: Entropi của nguồn có công suất cực đại hạn chế

- Với công suất cực đại hạn chế bởi  $P_{max}$ ,  $x(t)$  biến đổi trong phạm vi  $x_{min} \sim x_{max}$ ,  $x_{min} = -\sqrt{P_{max}}$ ,  $x_{max} = \sqrt{P_{max}}$
- (*Không chứng minh*) Phân bố đều sẽ cho Entropi cực đại

$$p(x) = \frac{1}{2\sqrt{P_{max}}} = \frac{1}{2x_{max}}$$

$$H(X) = - \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{1}{2x_{max}} \log \frac{1}{2x_{max}} dx = \log(2x_{max})$$

## Ví dụ 2: Entropi của nguồn có công suất trung bình hữu hạn

- Công suất trung bình hữu hạn

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = P_{av}^2$$

- Entropy cực đại khi  $p(x)$  là phân bố gauss chuẩn

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi P_{av}}} e^{-\frac{x^2}{2P_{av}}}$$

và có giá trị là

$$H(X) = H(X)_{max} = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \left[ \frac{x^2}{2P_{av}} + \ln \sqrt{2\pi P_{av}} \right] dx$$

## Ví dụ 2: Entropi của nguồn có công suất trung bình hữu hạn (Tiếp)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2P_{av}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx + \ln \sqrt{2\pi P_{av}} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx \\ &= \frac{1}{2} + \ln \sqrt{2\pi P_{av}} = \ln \sqrt{2\pi e P_{av}} \end{aligned}$$

- Các nguồn nhiễu trắng có phân bố gauss chuẩn. Tốc độ lập nhiễu

$$R = 2\Delta f H(N) = 2\Delta f \ln \sqrt{2\pi e P_N} = \Delta f \ln 2\pi e P_N =$$

- Để có thể có entropi lớn nhất, cần mã hóa thông tin sử dụng các tín hiệu có phân bố chuẩn (giống nhiễu trắng): mã hóa giả nhiễu

## 3.2. Thông lượng kênh liên tục

- Xét kênh truyền tin có nhiễu cộng. Tín hiệu đầu ra là

$$y(t) = x(t) + n(t), x \in X, y \in Y, n \in N$$

giả thiết  $X$  và  $N$  độc lập thống kê

- Vậy

$$H(X, Y) = H(X, X + N) = H(X, N) = H(X) + H(N)$$

Độ bất định của đầu ra bằng tổng độ bất định đầu vào và nhiễu

- Mặt khác

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X)$$

Vậy  $H(N) = H(Y|X)$

## 3.2. Thông lượng kênh liên tục (Tiếp)

- Tốc độ lập tin

$$R = n_0[H(Y) - H(Y|X)] = 2\Delta f[H(Y) - H(N)]$$

- Thông lượng kênh bằng tốc độ lập tin cực đại đầu ra

$$C = R_{max}$$

- Cần có  $H(Y)$  cực đại để có thông lượng cực đại
- Các tin của  $Y$  gồm hai thành phần từ  $X$  và  $N$ . Phụ thuộc vào các hạn chế của  $X, N$  có thể xác định qui luật phân bố của  $X$  để thông lượng kênh cực đại



- Công suất trung bình đầu ra

$$P_Y = P_X + P_N$$

- Để  $H(Y)$  cực đại,  $Y$  có phân bố chuẩn. Nhiều có quá trình phân bố chuẩn, vậy  $X$  phải có quá trình phân bố chuẩn. Khi đó

$$H(Y) = H(Y)_{\max} = \ln \sqrt{2\pi e(P_X + P_N)}, H(N) = \ln \sqrt{2\pi eP_N}$$

$$C = R_{\max} = 2\Delta f(H(Y) - H(N)) = \Delta f\left(1 + \frac{P_X}{P_N}\right)$$

gọi là công thức Shannon

- Vậy muốn tăng thông lượng của kênh cần tăng giải thông  $\Delta f$  hoặc tăng công suất tín hiệu

- Giải thông không thể tăng vô hạn. Khi giải thông tăng, công suất nhiễu cũng tăng

$$P_N = \Delta f N_0^2$$

- Khi đó

$$C = \Delta f \log_2 \left( 1 + \frac{P_S}{\Delta f} N_0^2 \right)$$

Giới hạn của thông lượng

$$\lim_{\Delta f \rightarrow \infty} (C) = \frac{P_X}{N_0^2} \log_2 e = 1.443 \frac{P_X}{N_0^2}$$

- Các hệ thống truyền tin trong thực tế còn cách rất xa giới hạn trên

# Chương 3: Thông tin và định lượng thông tin

- 1 **Lượng tin của nguồn tin rời rạc**
  - Nguồn tin rời rạc
  - Biến đổi nguồn tin rời rạc
  - Lượng tin riêng, lượng tin tương hỗ, lượng tin có điều kiện
  - Tính chất của lượng tin
  - Lượng tin trung bình
  - Entropi của nguồn rời rạc
- 2 **Tốc độ lập tin của nguồn và thông lượng kênh rời rạc**
  - Tốc độ lập tin và độ dư của nguồn
  - Khái niệm thông lượng của kênh
  - Thông lượng của kênh rời rạc không nhiễu
  - Thông lượng của kênh rời rạc có nhiễu
- 3 **Entropi của nguồn và thông lượng kênh liên tục**
  - Entropi của nguồn liên tục
  - Thông lượng kênh liên tục