Chương 3
Kỹ thuật giải quyết vấn đề
(tiếp)

Lê Thanh Hương

Khoa CNTT – ĐHBKHN

3.6 Biểu diễn bằng logic hình thức và các phương pháp chứng minh

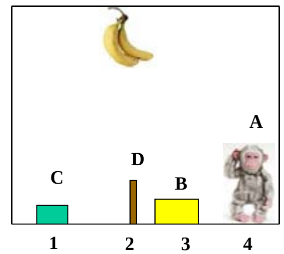
VD1. Bài toán con khỉ - nải chuối

- Tại(O,x): đối tượng O ở tại vị trí x

Ban đầu: tại(A,4), tại(B,3), tại(C,1), tại(D,2)

- Trên(O1,O2): đối tượng O1 nằm trên O2

Muốn: tại(B,2), trên(C,B), trên(A,C), trên(D,A)



Hành động của khỉ:

- tại(A,x) ⇒ tại (A,y)
- tại(A,x) ∧ tại(O,x) ⇒ tại(A,y) ∧ tại(O,y)
- tại(A,x) ∧ tại(O,x) ⇒ trên(A,O)
- tại(A,x) ∧ tại(O1,x) ∧ tại(O2,x) ⇒ trên(O1,O2)

Logic mệnh đề (Propositional Logic)

- 1 mệnh đề p là 1 phát biểu chỉ có nhận giá trị đúng (true, T, 1) hoặc sai (false, F, 0)
- liên kết với nhau tạo thành câu
- Câu (well formed formulas – các công thức đúng ngữ pháp)
  - T và F là câu
  - Các biến mệnh đề là câu: P, Q, R, S
  - Nếu ϕ và ψ là câu thì những biểu thức sau cũng là câu: (ϕ), $\neg\phi$, $\phi\vee\psi$, $\phi\wedge\psi$, $\phi\rightarrow\psi$, $\phi\leftrightarrow\psi$
- Các biểu thức logic mệnh đề được xây dựng trên các tên mệnh đề và các phép toán logic theo quy tắc cú pháp nhất định

Các toán tử

Các phép toán logic

- Hội (∧, and, và)
- Tuyển (∨, or, hoặc)
- Phủ định (¬,~,not, không)
- Kéo theo (⇒)
- Tương đương (⇔)

Thứ tự ưu tiên: ¬ ∧ ∨ → ↔

A∨B∧C	A∨(B∧C)
A∧B→C∨D	(A∧B)→(C∨D)
A→B∨C↔D	(A→(B∨C))↔D

Ngữ nghĩa

- Ý nghĩa của một câu là giá trị chân lý của nó {T,F}. Ví dụ

$P_{1,2}$	$P_{2,2}$	$P_{3,1}$
false	true	false

Một số luật đánh giá giá trị chân lý:

$\neg S$	đúng nếu	S sai
$S_1 \wedge S_2$	đúng nếu	S_1 đúng và S_2 đúng
$S_1 \vee S_2$	đúng nếu	S_1 đúng hoặc S_2 đúng

$\neg P_{1,2} \wedge (P_{2,2} \vee P_{3,1}) = true \wedge (true \vee false)$
$= true \wedge true = true$

Bảng chân lý

- Giá trị chân lý của một biểu thức được tính dựa trên bảng chân lý

P	Q	¬ P	P ∧ Q	P ∨ Q	P → Q	Q → P	P ↔ Q
f	f	t	f	f	t	t	t
f	t	t	f	t	t	f	f
t	f	f	f	t	f	t	f
t	t	f	t	t	t	t	t

- Dễ thấy $a \Rightarrow b \Leftrightarrow \neg a \vee b \Leftrightarrow \neg b \Rightarrow \neg a$
- $\forall$biểu thức logic mệnh đề đều có thể đưa về dạng biểu thức tương đương chỉ chứa phép $\wedge, \neg, \vee$

Các phép biến đổi tương đương

Hai câu có ý nghĩa tương đương nếu cùng giá trị đúng:

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha \wedge \beta) \equiv (\beta \wedge \alpha) \\ (\alpha \vee \beta) \equiv (\beta \vee \alpha)\end{array}\right\} \text{giao hoán}$$

$$\left.\begin{array}{l}((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \\ ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee (\beta \vee \gamma))\end{array}\right\} \text{kết hợp}$$

$$\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha \quad \text{phủ định kép}$$

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \equiv (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha) \quad \text{tương phản}$$

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \beta)$$

$$(\alpha \Leftrightarrow \beta) \equiv ((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha))$$

$$\left.\begin{array}{l}\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta) \\ \neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta)\end{array}\right\} \text{de Morgan}$$

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)) \\ (\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))\end{array}\right\} \text{phân phối}$$

Các phép biến đổi tương đương

Luật hấp thu:

- $(A \vee (A \wedge B) \equiv A$
- $(A \wedge (A \vee B)) \equiv A$

Các luật về 0, 1:

- $A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$
- $A \vee 0 \Leftrightarrow A$
- $A \vee 1 \Leftrightarrow 1$
- $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$
- $\neg 1 \Leftrightarrow 0$
- $\neg 0 \Leftrightarrow 1$

Luật bài trung:

- $\neg A \vee A \Leftrightarrow 1$

Luật mâu thuẫn:

- $\neg A \wedge A \Leftrightarrow 0$

Hợp giải

- Luật hợp giải (Các câu cần được chuyển sang dạng kết nối chuẩn trước khi hợp giải)

$$\frac{\alpha \vee \beta \qquad \neg\beta \vee \gamma}{\alpha \vee \gamma}$$

- Chứng minh KL: thêm ¬KL vào CSTT để xem có xung đột không
- Áp dụng hợp giải đến khi xuất hiện mâu thuẫn

Hợp giải

Dạng kết nối chuẩn (Conjunctive Normal Form - CNF)

E.g., $(A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg C \vee \neg D)$

- Luật hợp giải cho CNF:

$$\frac{l_1 \vee \ldots \vee l_k, \qquad m_1 \vee \ldots \vee m_n}{l_1 \vee \ldots \vee l_{i-1} \vee l_{i+1} \vee \ldots \vee l_k \vee m_1 \vee \ldots \vee m_{j-1} \vee m_{j+1} \vee \ldots \vee m_n}$$

trong đó l_i và m_j bù nhau

E.g., $\dfrac{P_{1,3} \vee P_{2,2}, \quad \neg P_{2,2}}{P_{1,3}}$

Chuyển đổi sang CNF

$B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$

1. Loại bỏ phép ⇔, thay $\alpha \Leftrightarrow \beta$ bằng $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$.
   $(B_{1,1} \Rightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})) \wedge ((P_{1,2} \vee P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1})$

2. Loại bỏ phép ⇒, thay $\alpha \Rightarrow \beta$ bằng $\neg\alpha \vee \beta$.
   $(\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}) \wedge (\neg(P_{1,2} \vee P_{2,1}) \vee B_{1,1})$

3. Đưa ¬ vào trong sử dụng luật de Morgan và phủ định kép:
   $(\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}) \wedge ((\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}) \vee B_{1,1})$

4. Áp dụng luật phân phối đối với phép ∧ :
   $(\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}) \wedge (\neg P_{1,2} \vee B_{1,1}) \wedge (\neg P_{2,1} \vee B_{1,1})$

Ví dụ

$(A \vee B) \rightarrow (C \rightarrow D)$

1. Loại bỏ phép suy ra
   $\neg(A \vee B) \vee (\neg C \vee D)$
2. Chuyển phủ định vào trong ngoặc
   $(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg C \vee D)$
3. Phân phối
   $(\neg A \vee \neg C \vee D) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee D)$

Ví dụ

Chuyển đổi các công thức sau về dạng kết nối chuẩn:

1. $P \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$
2. $(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$
3. $\neg(P \Rightarrow Q) \vee (P \vee Q)$
4. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$
5. $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \wedge S) \Rightarrow R)$
6. $(P \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow S$
7. $P \wedge Q \Rightarrow R \wedge S$

Thuật toán hợp giải của Robinson

Chứng minh bằng phản chứng: CSTT $\wedge \neg$KL không thoả mãn

function PL-RESOLUTION(KB, α) **returns** *true* or *false*
  clauses ← the set of clauses in the CNF representation of $KB \wedge \neg\alpha$
  new ← { }
  loop do
    for each C_i, C_j **in** *clauses* **do**
      resolvents ← PL-RESOLVE(C_i, C_j)
      if *resolvents* contains the empty clause **then return** *true*
      new ← *new* ∪ *resolvents*
    if *new* ⊆ *clauses* **then return** *false*
    clauses ← *clauses* ∪ *new*

Thuật toán hợp giải của Robinson

Chứng minh bằng phản chứng: CSTT $\wedge \neg$KL không thoả mãn

Giả sử có GT_1, GT_2,…,GT_n. Cần CM KL → phản chứng

$$\left.\begin{array}{l} GT_1 \\ \ldots \\ GT_n \\ \neg KL \end{array}\right\} ><$$

Viết mỗi GT_i, $\neg$KL trên 1 dòng

Đưa GT_i, $\neg$KL về dạng chuẩn CNF

$(p_1 \vee \ldots \vee p_n) \wedge (q_1 \vee \ldots \vee q_n)$ (*)

Tách mỗi dòng (*) thành các dòng con:

$p_1 \vee \ldots \vee p_n$

$q_1 \vee \ldots \vee q_n$

Thuật toán hợp giải của Robinson

Xét 1 cặp dòng

u) $\neg p \vee q$

v) $p \vee r$

Hợp giải:

w) $q \vee r$

Vô lý xuất hiện khi

i) $\neg t$

ii) t

$\Rightarrow$ đpcm

Ví dụ

VD1:
1. a
2. a→b
3. b→(c→d)
4. c

Chứng minh d

VD2:
1. a∧b→c
2. b∧c →d
3. a
4. b

Chứng minh d

Ví dụ

VD3:
1. p
2. p→q
3. q∧r∧s→t
4. p→u
5. v→w
6. u→v
7. v→t

Cho r,s. CM t

VD4:
1. ((a∨b)∧c)→(c∧d)
2. a∧m∧d→f
3. m→b∧c
4. a→c
5. (a∧f)→(¬e∨g)
6. (m∧f)→g

Cho a,m. CM g

Ví dụ 5

1. a1 ∨ a2 ⇒ a3 ∨ a4
2. a1 ⇒ a5
3. a2 ∧ a3 ⇒ a5
4. a2 ∧ a4 ⇒ a6 ∧ a7
5. a5 ⇒ a7
6. a1 ∧ a3 ⇒ a6 ∨ a7

- Cho các mệnh đề a1, a2 đúng.
- Đưa các biểu thức logic trên về dạng chuẩn
- áp dụng phương pháp hợp giải của Robinson, chứng minh a7 đúng.

Logic vị từ cấp 1 (First Order Logic – FOL)

- Logic mệnh đề chỉ xử lý thông tin kiểu sự kiện đúng hoặc sai như "trời mưa".
- Với logic vị từ cấp 1, biến được dùng thay cho các đối tượng cụ thể.
- FOL cho phép biểu diễn các đối tượng, thuộc tính của đối tượng, và quan hệ giữa các đối tượng.
- Vị từ p(x,…y) là một phát biểu chứa các biến x,…y sao cho khi x,…y nhận giá trị cụ thể thì p(x,…y) nhận giá trị đúng hoặc sai.
- VD. Nếu p(x,y,z) nghĩa là x.y = z thì tính chất giao hoán của phép nhân x.y = y.x được biểu diễn dưới dạng

  ∀x,y p(x,y,z) ⇒ p(y,x,z)
- Logic vị từ cấp 1 còn sử dụng thêm các toán tử ∃, ∀

Chuyển đổi câu sang dạng logic vị từ

a. John owns a dog
$\exists x.\ D(x) \wedge O(J,x)$
$D(Fido) \wedge O(J, Fido)$

b. Anyone who owns a dog is a lover-of-animals
$\forall x.\ (\exists y.\ D(y) \wedge O(x,y)) \rightarrow L(x)$
$\forall x.\ (\neg\exists y.\ (D(y) \wedge O(x,y)) \vee L(x)$
$\forall x.\ \forall y.\ \neg(D(y) \wedge O(x,y)) \vee L(x)$
$\forall x.\ \forall y.\ \neg D(y) \vee \neg O(x,y) \vee L(x)$
$\neg D(y) \vee \neg O(x,y) \vee L(x)$

c. Lovers-of-animals do not kill animals
$\forall x.\ L(x) \rightarrow (\forall y.\ A(y) \rightarrow \neg K(x,y))$
$\forall x.\ \neg L(x) \vee (\forall y.\ A(y) \rightarrow \neg K(x,y))$
$\forall x.\ \neg L(x) \vee (\forall y.\ \neg A(y) \vee \neg K(x,y))$
$\neg L(x) \vee \neg A(y) \vee \neg K(x,y)$

21

Các phép biến đổi tương đương

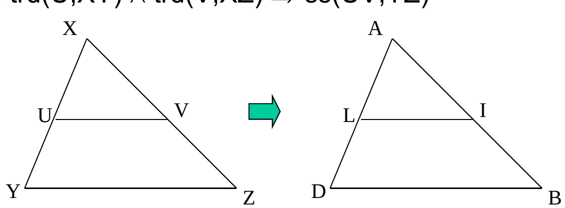
1. Loại bỏ dấu suy ra
   $\alpha \leftrightarrow \beta \Rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$
   $\alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \neg\alpha \vee \beta$
2. Chuyển phủ định vào trong ngoặc
   $\neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta$
   $\neg(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$
   $\neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha$
   $\neg\forall x, \alpha \Rightarrow \exists x, \neg\alpha$
   $\neg\exists x, \alpha \Rightarrow \forall x, \neg\alpha$
3. Đặt tên các biến khác nhau
   $\forall x, \exists y, (\neg P(x) \vee \exists x, Q(x,y)) \Rightarrow \forall x_1, \exists x_2, (\neg P(x_1) \vee \exists x_3, Q(x_3, y_2))$

22

Phép gán trị

VD: Định lý đường trung bình:

r_1: trđ(U,XY) $\wedge$ trđ(V,XZ) $\Rightarrow$ ss(UV,YZ)



Phép gán trị θ ={A/X,B/Z,D/Y,L/U,I/V}:

- $r_1\theta$: trđ(L,AD) $\wedge$ trđ(I,AB) $\Rightarrow$ ss(LI,DB)

23

Hợp giải Robinson cho logic vị từ

1. Viết mỗi GT_i, $\neg$KL trên 1 dòng
2. Đưa GT_i, $\neg$KL về dạng chuẩn CNF

$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n\ [p_1(\ldots) \vee \ldots \vee p_n(\ldots)] \wedge [q_1(\ldots) \vee \ldots \vee q_m(\ldots)]$ (*)

3. Tách mỗi dòng (*) thành các dòng con:

$\cancel{\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n}\ [p_1(\ldots) \vee \ldots \vee p_n(\ldots)]$

$\cancel{\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n}\ [q_1(\ldots) \vee \ldots \vee q_m(\ldots)]$

tất cả đều với $\forall$

4. Hợp giải:

$$\left.\begin{array}{l} u)\ \neg p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee q(\ldots) \\ v)\ p(y_1, y_2, \ldots, y_n) \vee r(\ldots) \end{array}\right\} \Rightarrow w)\ q(\ldots) \vee r(\ldots) \text{ với phép gán trị}$$

$$\theta = \left\{\frac{z_1}{x_1}, \frac{z_1}{y_1}, \ldots, \frac{z_n}{x_n}, \frac{z_n}{y_n}\right\}$$

5. Vô lý xảy ra khi

i) $\neg p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

ii) $p(y_1, y_2, \ldots, y_n)$

với phép gán trị $\theta = \left\{\frac{z_1}{x_1}, \frac{z_1}{y_1}, \ldots, \frac{z_n}{x_n}, \frac{z_n}{y_n}\right\}$

24

Ví dụ về bước 4

- Sử dụng phép gán trị nào để hợp giải
  - P(a,x,b), và
  - ¬P(y,z,z)

Phép gán trị $\theta = \left\{\frac{a}{y}, \frac{b}{z}, \frac{b}{x}\right\}$

- P(a,b,b)
- ¬P(a,b,b)

25

Ví dụ về bước 4 (tiếp)

- Sử dụng phép gán trị nào để hợp giải
  - P(a,x,x,b), và
  - ¬P(y,y,z,b)

26

Ví dụ về bước 4 (tiếp)

- Cho các sự kiện p(a,b), p(c,d), q(d,c,c) đúng
- Cho luật
  - p(x,y) ∧ q(y,x,x) ⇒ r(x,y)
- Sử dụng các phép gán trị với luật trên, hãy đưa ra các sự kiện mới đúng.
- Gợi ý:
  - Thử với p(x,y) ≡ p(a,b) hoặc p(x,y) ≡ p(c,d)

27

Ví dụ về hợp giải

$\forall x \quad P(x) \rightarrow Q(x)$

$\forall x \quad \neg P(x) \rightarrow R(x)$

$\forall x \quad Q(x) \rightarrow S(x)$

$\forall x \quad R(x) \rightarrow S(x)$

Chuyển về dạng chuẩn

1. $\neg P(x) \vee Q(x)$
2. $P(x) \vee R(x)$
3. $\neg Q(x) \vee S(x)$
4. $\neg R(x) \vee S(x)$

Hợp giải 1 và 3

$5. \neg P(x) \vee S(x)$

Hợp giải 2 và 5

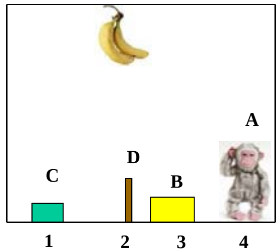
$6. R(x) \vee S(x)$

Hợp giải 4 và 6

$7. S(x)$

28

Bài toán con khỉ - nải chuối



- tại(C,1)
- tại(B,3)
- tại(A,4)
- tại(D,2)
- tại(A,x) ⇒ tại (A,y)
- tại(A,x) ∧ tại(O,x) ⇒ tại(A,y) ∧ tại(O,y)
- tại(A,x) ∧ tại(O,x) ⇒ trên(A,O)
- tại(A,x) ∧ tại(O1,x) ∧ tại(O2,x) ⇒ trên(O1,O2)

KL: tại(B,2) ∧ trên(C,B) ∧ trên(A,C) ∧ trên(D,A)

¬KL: ¬ tại(B,2) ∨ ¬ trên(C,B) ∨ ¬ trên(A,C) ∨ ¬ trên(D,A)

Bài tập

- Cho tập các phát biểu:
  - John owns a dog
  - Anyone who owns a dog is a lover of animals
  - Lovers of animals do not kill animals
- Chứng minh:
  - John does not kill animals.

Bài tập

- Nếu xem một ai đó lừa dối người khác là kẻ bịp bợm và bất kỳ ai đồng tình với kẻ bịp bợm cũng là kẻ bịp bợm. Trong tập thể có một người nhút nhát đồng tình với kẻ lừa dối thì chắc chắn có 1 tên bịp bợm tính tình nhút nhát.

Nhận xét

- Thuật giải Robinson vẫn vấp phải sự bùng nổ tổ hợp. Có thể áp dụng các heuristics:
  - Chiến lược ưu tiên các biểu thức đơn
  - Chiến lược đơn giản hóa các biểu thức
  - Chiến lược giảm số lần hợp giải
  - Chiến lược sắp thứ tự các hợp giải
  - Chiến lược tập tựa
- Thuật giải Robinson được áp dụng trong CM định lý tự động. 2 nhược điểm:
  - con người không tư duy theo cách này
  - chúng ta bị mất ngữ nghĩa và nội dung thông tin khi chuyển về dạng câu CNF

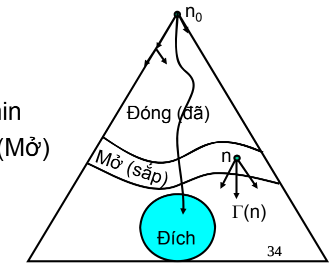
3.7 Một số phương pháp GQVĐ khác

- Phương pháp thử và sai (test & set)
- Phương pháp giải quyết bài toán tổng quát (General Problem Solving - GPS)
- Phương pháp thỏa mãn ràng buộc (Constraint Satisfication Method)

3.7.1 Phương pháp thử và sai (test & set)

- Xuất phát từ n_0 : Mở = {n_0}; Đóng = ∅
- Lan dần xuống
- Bí quyết: tại mỗi thời điểm, chọn n ∈ Mở để xét:

- Mở = queue: d(n) min
- Mở = stack: d(n) ?
- TKCT: g(n) = c(n0,n) min
- TKCT*: f(n) = g(n) + h(n) min
- Thử và sai: n ← get random(Mở)



3.7.2 Phương pháp GPS

Về lý thuyết tốt nhất, trên thực tế không tốt lắm
TKCT*: Lấy n ∈ Mở: f(n) = g(n) + h(n) min

GPS:

- Với ∀n ∈ Mở, xác định sự khác biệt giữa n và Đích:
  $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$
- Chọn sự khác biệt quan trọng nhất δ_i.
- Chọn biện pháp O_j phù hợp để giảm sự khác biệt δ_i bằng cách:
  – Xác định tập các phép biến đổi (toán tử) trong không gian
    $O=\{O_1, \ldots, O_n\}$
  – Xây dựng ma trận M với các cột là các toán tử, các hàng là các sự khác biệt:
    $M = (m_{ij})$, $i=1 \div m$, $j = 1 \div n$
    $$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } O_j \text{ làm giảm } \delta_i \\ 0 \text{ nếu ngược lại} \end{cases}$$

3.7.3 Phương pháp thỏa mãn ràng buộc

- Mục đích: Tìm các trạng thái bài toán sao cho thỏa mãn tập ràng buộc nào đó
- Quá trình tìm lời giải gồm 2 phần:
  – Tìm kiếm trong KGBT các ràng buộc
  – Tìm kiếm trong KGBT ban đầu

Nội dung:
Thực hiện 1 → 5 cho đến khi tìm được lời giải đầy đủ hoặc khi tất cả các đường đều đã duyệt nhưng không cho kết quả.

1. Cho 1 đỉnh n ∈ MO
2. Áp dụng các luật suy dẫn với các ràng buộc vào đỉnh đã chọn để sinh ra tất cả các ràng buộc mới có thể có
3. Nếu tập các ràng buộc mới có mâu thuẫn → thông báo đường đi hiện tại đi vào ngõ cụt
4. Nếu tập ràng buộc mô tả lời giải đầy đủ của bài toán → dừng, thông báo “thành công”. Ngược lại sang bước 5.
5. AD các luật trong KGTT, tạo các lời giải bộ phận phù hợp với tập các ràng buộc hiện thời. Thêm các lời giải bộ phận này vào đồ thị tìm kiếm.