模型四：考虑旋转球型模型的三维质点数学动力学仿真模型

在圆球、自转地球假设条件下，三自由度质点再入动力学方程可以表示为

$$\dot{r} = v\sin\gamma\ ;$$
$$\dot{\theta} = \frac{v\cos\gamma\sin\psi}{r\cos\phi};$$
$$\dot{\phi} = \frac{v\cos\gamma\cos\psi}{r}$$
$$\dot{v} = -\frac{D}{m} - g\sin\gamma + \omega^2 r\cos\phi\left(\sin\gamma\cos\phi - \cos\gamma\cos\psi\sin\phi\right)$$
$$\dot{\gamma} = \frac{L\cos\sigma}{mv} - \left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right)\cos\gamma + 2\omega\sin\psi\cos\phi + \frac{\omega^2 r}{v}\cos\phi\left(\cos\gamma\cos\phi + \sin\gamma\cos\psi\sin\phi\right)$$
$$\dot{\psi} = \frac{L\sin\sigma}{vm\cos\gamma} + \frac{v}{r}\cos\gamma\sin\psi\tan\phi - 2\omega\left(\tan\gamma\cos\psi\cos\phi - \sin\phi\right) + \frac{\omega^2 r}{v\cos\gamma}\sin\psi\sin\phi\cos\phi$$

其中，所有的动力学方程都是对时间的导数，r表示为飞行器质心到地球圆心的地心距离，单位为m；在以后的章节中，h表示飞行器质心到地球表面的高度，且地球的半径为6378245 m。θ和ϕ分别表示飞行器所在位置的经度和纬度，其单位为°；v表示飞行器相对于地球的速度，其单位为m/s；γ表示为飞行器相对于地球速度矢量与当地水平面的夹角，称之为弹道倾角，ψ表示为飞行器相对于地球速度矢量在当地水平面的投影与正北方向的夹角，并以顺时针旋转为正，称之为航向角，它们的单位都为°；m表示飞行器的质量，其单位为kg；$g = \mu / r^2$表示为飞行器所受的重力加速度，其中，μ是地球重力常数，重力加速度的单位为m/s^2；σ表示飞行器沿速度方向旋转的角度，称之为倾侧角，其单位为°；ω表示地球自转角速度，其值等于7.2921×10-5 rad/s；L和D分别表示飞行器所承受的升力和阻力，其表达式表示为：

$$L = \frac{1}{2}\rho v^2 C_l S_{ref}, D = \frac{1}{2}\rho v^2 C_d S_{ref} \tag{1}$$

其中，$\rho = \rho_0 \exp(-h/H)$表示大气密度，ρ_0表示为海平面标准大气压，其值等于1.225kg/m^3，H表示大气密度常数，其值等于7200；S_{ref}表示飞行器的特征面积，Cl和Cd分别表示飞行器的升力系数和阻力系数，它们只与马赫数（Ma）和攻角（AOA）有关。

飞行器模型：

通用航空飞行器（CAV）是迄今为止最具代表性的高升阻比再入飞行器，仅仅依靠气动力控制，就能在无动力条件下滑翔穿越大气层。从Phillips的研究报告中获知，当前存在高升力CAV和低升力CAV两类通用航空飞行器，高升力CAVH具有更大的升力系数和更高的升阻比，因此，我们将以它作为研究模型，用以测试再入制导算法。CAV-H的质量为907Kg，特征面积为0.4839 m2，最大升阻比在10度攻角附近，且接近3.5。为了使我们的研究更为直观、简单，我们将CAV-H的升力系数和阻力系数采用高阶的多项式函数进行拟合，获得以马赫数和攻角为输入的升力系数函数和阻力系数函数。除此之外，因为最大升阻比所在的攻角为10度附近，我们将攻角的变化范围拓展到至5~20度。

CAV-H是美国“猎鹰计划”中提出的一种高超声速再入机动滑翔飞行器，它采用乘波体构型，依靠升力进行长距离，并采用倾斜转弯进行横向机动（Bank to Turn, BTT）。CAV-H的气动数据如下：

表 CAV-H 气动数据表

升阻比(L/D)							
AOA	Mach 3.5	Mach 5	Mach 8	Mach 10	Mach 15	Mach 20	Mach 23
10º	2.2000	2.5000	3.1000	3.5000	3.3846	3.2692	3.2000
15º	2.5000	2.6616	2.9846	3.2000	3.0846	2.9692	2.9000
20º	2.2000	2.3616	2.6846	2.9000	2.7846	2.6692	2.6000
升力系数(C_L)							
AOA	Mach 3.5	Mach 5	Mach 8	Mach 10	Mach 15	Mach 20	Mach 23
10º	0.4500	0.4250	0.4000	0.3800	0.3700	0.3600	0.3500
15º	0.7400	0.7000	0.6700	0.6300	0.600	0.5700	0.557
20º	1.0500	1.0000	0.9500	0.9000	0.8500	0.8000	0.7800
阻力系数(C_D)							
AOA	Mach 3.5	Mach 5	Mach 8	Mach 10	Mach 15	Mach 20	Mach 23
10º	0.2045	0.1700	0.1290	0.1090	0.1090	0.1090	0.1090
15º	0.2960	0.2630	0.2240	0.1970	0.1950	0.1920	0.1920
20º	0.4770	0.4230	0.3540	0.3100	0.3050	0.3000	0.3000

备注：AOA表示攻角，Mach表示马赫数，CAV-H的气动参考面积0.4839m2，质量907.186kg。

仿真条件：

高度，h_0(m)	经度，θ_0(deg)	纬度，ϕ_0(deg)	速度，v_0(m/s)	弹道倾角 γ_0(deg)
80132	180	35	6700	0

四阶龙格库塔积分

龙格库塔法是常用于计算常微分方程数值解的一类重要隐式或显式迭代法。该技术是由数学家C. Runge和M.W. Kutta于1900年发明，由于此算法计算精度高，形式简单方便，被大规模应用在物理、工程、控制、动力学仿真中。

本章不给出推导，只给出更新公式

对于初值问题如下

$$\dot{x} = f(x), x(t_0) = x_0$$

可以通过数值积分获得不同时间历程上的状态变化情况，求解过程如下：

（1）首先在时间历程上进行离散，将时间$\begin{bmatrix} t_0 & t_f \end{bmatrix}$上进行离散，一般采用等间距分割，确定分割段数N，$h = \frac{t_f - t_0}{N}$，获得时间序列

$$t_i = t_0 + ih$$

（2）以初值x_0为开始状态，逐步实现以下四阶龙格库塔，逐次更新时间序列上的状态，直到结束，更新过程如下

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

其中：

$$k_1 = f(y_n, t_n)$$

$$k_2 = f\left(y_n + h\frac{k_1}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(y_n + h\frac{k_2}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_4 = f(y_n + hk_3, t_n + h)$$

以上方法可以拓展至多个状态量的情况，对于N元微分方程

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(y_1, \ldots, y_N, t) \\ y_2'(t) = f_2(y_1, \ldots, y_N, t) \\ \qquad \vdots \\ y_N'(t) = f_N(y_1, \ldots, y_N, t) \end{cases}$$

可以按照矢量的形式进行计算更新

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$$