

### 三维质点数学动力学仿真模型

模型一：平面大地假设下的过载控制三维质点动力学数学仿真模型

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V \cos \gamma \sin \psi \\ \dot{y} &= V \cos \gamma \cos \psi \\ \dot{z} &= V \sin \gamma \\ \dot{V} &= -D / m - g \sin \gamma \\ \dot{\gamma} &= n_y / V \\ \dot{\psi} &= n_z / (V \cos \gamma)\end{aligned}$$

其中， $x, y, z$  表示平面大地坐标系下的位置， $V$  表示飞行器的速度， $\gamma$  表示弹道倾角，单位为弧度， $\psi$  表示弹道偏角，单位为弧度， $m$  为飞行器的质量， $D$  表示气动阻力，其具体表达式为

$$D = 0.5 \rho V^2 S_{ref} C_d$$

其中， $\rho$  表示大气密度，随高度变化，其表达式为  $\rho = \rho_0 \exp(-z/H)$ ， $\rho_0$  为海平面空气密度，其数值是 1.225， $H$  表示计算常值，为 7200； $S_{ref}$  为飞行器特征面积，与气动计算相关，此时可以取为 1； $C_d$  为飞行器阻力系数，由于本仿真模型主要考虑过载控制，可以将其取为常数进行计算，可以取为 0.25； $g$  表示重力加速度，在平面大地假设下可以近似为常数，取为 9.8061； $n_y$  和  $n_z$  表示垂直于速度方向的两个加速度过载，为动力学模型的控制输入。

模型二：进一步考虑飞行器气动特性的平面大地三维质点动力学数学仿真模型（STT 侧滑转弯控制）

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V \cos \gamma \sin \psi \\ \dot{y} &= V \cos \gamma \cos \psi \\ \dot{z} &= V \sin \gamma \\ \dot{V} &= -D / m - g \sin \gamma \\ \dot{\gamma} &= L / (mV) - g \cos \gamma / V \\ \dot{\psi} &= N / (mV \cos \gamma)\end{aligned}$$

其中， $D$  表示气动阻力， $L$  表示气动升力， $N$  表示气动侧向力，其具体表达式为

$$D = 0.5\rho V^2 S_{ref} C_d(\alpha, \beta, Ma, z)$$

$$L = 0.5\rho V^2 S_{ref} C_l(\alpha, \beta, Ma, z)$$

$$N = 0.5\rho V^2 S_{ref} C_n(\alpha, \beta, Ma, z)$$

其中， $C_d, C_l, C_n$  为飞行器阻力系数，升力系数和侧向力系数，他们此时不再是常数，是随着攻角  $\alpha$ ，侧滑角  $\beta$ ，马赫数  $Ma$  和高度  $z$  变化的量，其中，马赫数和高度是环境变量，其大小主要受攻角和侧滑角控制，因此，该动力学模型的控制输入为攻角和侧滑角。

模型三：进一步考虑飞行器气动特性的平面大地三维质点动力学数学仿真模型（BTT 滚转转弯控制）

$$\dot{x} = V \cos \gamma \sin \psi$$

$$\dot{y} = V \cos \gamma \cos \psi$$

$$\dot{z} = V \sin \gamma$$

$$\dot{V} = -D/m - g \sin \gamma$$

$$\dot{\gamma} = L \cos \sigma / (mV) - g \cos \gamma / V$$

$$\dot{\psi} = L \sin \sigma / (mV \cos \gamma)$$

其中， $D$  表示气动阻力， $L$  表示气动升力，其具体表达式为

$$D = 0.5\rho V^2 S_{ref} C_d(\alpha, Ma, z)$$

$$L = 0.5\rho V^2 S_{ref} C_l(\alpha, Ma, z)$$

注意，此时的气动系数没有侧滑角，仅仅存在攻角，通过速度滚转角， $\sigma$ ，将升力进行分解，因此，该动力学模型的控制输入为攻角和速度滚转角。

### 三维质点数学动力学仿真模型数值仿真

(1) 针对模型一，考虑以下仿真条件，采用数值积分进行仿真

仿真时间 50 秒，质量为 100kg，初始状态为

$$x(t_0) = 0, y(t_0) = 0, z(t_0) = 300, V(t_0) = 280, \gamma(t_0) = 0^\circ, \psi(t_0) = 0^\circ$$

分别设置不同的过载常值（如  $n_y=10$  和  $n_z=10$ ）进行数值仿真，并输出仿真结果。

(2) 针对模型二和三, 考虑以下仿真条件, 采用数值积分进行仿真  
仿真时间 50 秒, 初始状态为

$$x(t_0)=0, y(t_0)=0, z(t_0)=300, V(t_0)=280, \gamma(t_0)=0^\circ, \psi(t_0)=0^\circ$$

进行控制输入为常值的数值仿真, 并输出仿真结果。

其中, 总体气动参数如下所示:

$$C_d = 0.000508(\alpha^2 + \beta^2) + 0.004228\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + 0.0161$$

$$C_l = 0.04675\alpha - 0.10568$$

$$C_n = 0.04675\beta - 0.10568$$

质量为 100kg, Sref 为 0.48。