

ф. Мурзин Ю.М., проф. Панфилов Д.И.

Лекции по курсу «Электротехника»

Предисловие

Полный комплект лекций по курсу «Электротехника», читаемый в МИЭТ, состоит из трех частей:

1. Линейные электрические цепи.
2. Прикладные вопросы электротехники.
3. Дополнительные главы анализа электрических цепей.

В первой части курса излагается современное состояние теории линейных цепей, необходимое для подготовки инженера электронной техники. Ее изложение рассчитано на 54 лекционных часа. (3 часа в неделю в течение 18-недельного семестра. К этому времени студент должен изучить раздел «Электричество» курса физики и соответствующие главы курса высшей математики: дифференциальное и интегральное исчисление, ряды Фурье, теорию функций комплексного переменного, преобразования Лапласа.

При подготовке бакалавра (36 часов) некоторые разделы курса сокращаются.

Полноценное изучение должно сопровождаться семинарскими занятиями по каждой теме. Кроме того, студент по основным темам курса самостоятельно выполняет задание к лабораторной работе.

Лабораторные работы проводятся с помощью программы Electronics-Workbench на вычислительных машинах, под руководством преподавателя.

График выполнения программы этой части курса приведен в таблице.

Тема	Продолжительность изучения / час	Вид îð÷âðà или контроля
1. Основные понятия электротехники	2	
2. Уравнения электрических цепей	4	Контрольная задача, лаб. работа №1
3. Расчет цепей при постоянных токах и напряжения	4	Контрольная задача, лаб. работа №2
4. Расчет цепей при синусоидальных токах и напряжениях	4	Контрольная задача, лаб. работа №3
5. Анализ сложных цепей	2	Контрольная задача
6. Резонанс и частотные свойства	2	Контрольная задача, лаб. работа №4
7. Несинусоидальные токи и напряжения	2	Контрольная задача, лаб. работа №5
8. Четырехполюсники	6	Лабораторная работа №6
9. Трехфазные цепи	4	Лабораторная работа №7
10. Классические методы расчета переходных процессов	6	Лабораторные работы №8, 9, 10
11. Интеграл Дюамеля	2	Контрольная задача
12. Интегральные преобразования	4	Контрольная задача
13. Синтез электрических цепей	4	Контрольная задача
Всего:	46 часов	Контрольных задач - 9 Лабораторных работ - 10

В связи с особенностями расписания шесть контрольных работ проводятся поточно, в часы лекционных занятий, другая часть (по одному часу) - в часы 4-х часовых лабораторных работ. Семинары (9) посвящены обсуждению результатов решения контрольных задач. Из 9 лабораторных работ 4 и 5, 8 и 9 могут проводиться за одно 4-х часовое занятие.

Вторая часть курса включает темы по изучению трансформаторов, электрических машин и некоторым аспектам нелинейных цепей, связанных с изучением этих разделов. В основном нелинейные цепи изучаются в курсе радиоэлектроники.

Третья часть - дополнительные главы анализа - изучается только на некоторых специальностях, на старших курсах.

Применяемые без особых оговорок обозначения

\vec{H} - вектор напряженности магнитного поля.

$\vec{\delta}$ - вектор плотности тока.

\vec{D} - вектор электрического смещения.

\vec{E} - вектор напряженности электрического поля.

\vec{B} - вектор магнитной индукции.

\vec{P} - вектор плотности мощности.

u - мгновенное значение напряжения.

U - действующее значение напряжения.

\dot{U} - комплекс напряжения.

$i; I; \dot{I}$ - соответствующие значения токов.

$e; E; \dot{E}$ - соответствующие значения ЭДС.

$R; G$ - активные сопротивление и проводимость.

$X; B$ - реактивные сопротивление и проводимость.

$Z; \bar{Z}$ - полное и комплексное сопротивление цепи.

L - индуктивность.

C - емкость.

f - частота.

ω - круговая частота.

$I_m; U_m; E_m$ - максимальное значение тока, напряжения и ЭДС.

•
=

• - знак соответствия.

j - мнимая единица $\sqrt{-1}$.

t - текущее время.

T - период функции.

В конце каждой темы помещены контрольные вопросы и задачи для самопроверки.

Для закрепления пройденного материала рекомендуется решить предложенные задачи. Для задач, не имеющих численного решения, все необходимые пояснения можно отыскать в тексте лекций.

Задачи, требующие численного решения, необходимо смоделировать на компьютере, воспользовавшись программой Electronics WorcBench. В этой же системе можно получить осциллограммы и необходимые данные для построения векторных диаграмм.

Тема 1

Основные понятия электротехники

(вместо введения)

Электротехника - обширная область практического применения электромагнитных явлений, происходящих в электротехническом устройстве.

Электротехническое устройство - система заряженных тел и проводников с током.

Для практического применения электромагнитных явлений в электротехническом устройстве необходимо по крайней мере установить связь между переменными системы (потенциалами, зарядами, токами, магнитными потоками) и параметром системы.

Переменные системы делятся на две категории: известные, независимые (сигналы) и определяемые, зависимые (реакция).

Обозначив сигналы вектором \bar{a} ; реакцию вектором \bar{b} ; параметры системы вектором \bar{c} можно сформулировать две основные задачи электротехники:

1. Анализ: Дано \bar{a} и \bar{c} ; определить \bar{b} ; т.е. при заданной системе (\bar{c}) и возмущениях (\bar{a}) в результате анализа получается реакция системы (\bar{b}).

2. Синтез: Дано \bar{a} и \bar{b} ; определить \bar{c} ; т.е. требуется определить такую систему (\bar{c}), чтобы при заданных возмущениях (\bar{a}) обеспечивала требующую реакцию (\bar{b}).

Для решения задач электротехники (как и задач во многих других областях знаний) исходя из физических процессов в системе переходят к модельному представлению системы, т.е. к такому упрощению системы, которое с одной стороны сохраняла бы все существенные ее свойства, с другой поддавалась бы решению доступными математическими средствами.

Венцом моделирования является составление математической модели.

Наиболее полным описанием электротехнических процессов являются уравнения Максвелла, известные из курса физики.

$$1. \operatorname{rot} \bar{H} = \bar{\delta} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t},$$

$$2. \operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t},$$

$$3. \operatorname{div} \bar{B} = 0,$$

$$4. \operatorname{div} \bar{D} = \bar{\rho},$$

и уравнения Умова-Пойнтинга

$$5. \bar{P} = \bar{E} \times \bar{H}.$$

Первое уравнение утверждает тот факт, что вектор тока ($\bar{\delta}$), равно как и ток, вызванный изменением электрического смещения ($\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$), вызывает появление магнитного поля.

Второе уравнение показывает связь между изменением вектора магнитной индукции ($\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$) и напряженностью электрического поля.

Третье уравнение утверждает, что линии магнитного поля замкнуты, т.е. не существует магнитных зарядов.

Четвертое уравнение вводит понятие электрического заряда, на котором начинаются и заканчиваются линии электрического смещения. Среда, в которой взаимодействуют переменные задается коэффициентами в соотношениях $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$; $\vec{B} = \mu \vec{H}$; $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$.

Пятое уравнение указывает, что энергия локализуется в электрических и магнитных полях.

Если не считаться с квантовыми, статистическими процессами микромира приведенная система уравнений достаточно полно описывает все электромагнитные взаимодействия в электротехнических устройствах и в этом смысле является полной математической моделью любой системы.

Непосредственно для практического расчета целого ряда электротехнических расчетов уравнения Максвелла использовать затруднительно по двум обстоятельствам:

1. Сложность математического аппарата векторного анализа.
2. Громоздкость исходных данных, т.к. требуется задание параметров в виде векторных полей.

В очень многих задачах требуется знание только интегральных понятий:

$$\text{Ток: } i = \int_S \vec{\delta} d\vec{s} = \oint \vec{H} d\vec{l}$$

$$\text{ЭДС: } e = \oint_l (\vec{E}_{\text{стоп}} + \vec{E}_{\text{инд}}) d\vec{l}$$

$$\text{Напряжение: } u = \int_A^B \vec{E} d\vec{l}$$

Эти обстоятельства возникают когда:

1. Пути тока достаточно малого сечения и ток можно считать равномерно распределенными по сечению.
2. Электрические свойства проводников и диэлектриков существенно различны (Ом и МОм).
3. В источниках и приемниках нас интересуют только интегральные эффекты.

Устройство отвечающее этим требованиям называется электрической цепью.

Следует еще остановиться на понятии мощности.

$$P = \int_S \vec{P} d\vec{s}$$

где S - сечение, где взаимодействуют электрическое и магнитное поля.

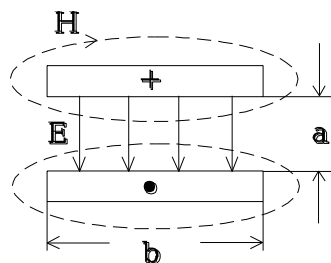


Рис. 1-1

В случае двух проводников с током I, шириной b, расположенных на расстоянии a, при разности потенциалов U получим:

$$U = aE; \quad \oint_l \vec{H} d\vec{l} = I \Rightarrow H_1 2b = I.$$

Значит напряженность магнитного поля от двух токов:

$$H = \frac{I}{2b} \cdot 2 = \frac{I}{b}.$$

Вектор Пойнтинга $\vec{P} = \vec{H} \times \vec{E} = \frac{IU}{ab}$.

Мощность $PS = IU$ (вектора E и H перпендикулярны).

Получаем математическое тождество, благодаря которому мощность можно рассчитывать в виде произведения тока и напряжения.

$$p = ui.$$

Электрическая цепь - это система заряженных тел и проводников с током, которая с достаточной для практических целей точностью может быть описана интегральными понятиями. u, i, e, p, w .

Приведенные интегральные понятия при математическом описании системы выступают как переменные.

Часть переменных может быть независимой (заданной), называемой сигналами, а другая часть - зависимые переменные (реакция системы).

Сама система включает элементы системы, задаваемые их параметрами и характер взаимодействия (соединения) этих элементов. Физически каждый элемент может:

1. Генерировать электрическую энергию, точнее преобразовывать какой-либо вид энергии в электрическую и приносить ее в систему.
2. Рассеивать энергию т.е. необратимо превращать электрическую энергию в какой-либо другой вид энергии.
3. Накапливать и возвращать энергию электрического поля.
4. Накапливать и возвращать энергию магнитного поля.

Очевидно, простейшим элементом электрической цепи может быть двухполюсник, т.е. часть цепи, рассмотренная относительно двух зажимов. В качестве переменных здесь принимается ток $i(t)$ и напряжение $u(t)$. Связь между переменными - математическая модель $i = f(u)$ или $u = f(i)$.

Это означает, что двухполюсник может быть задан вольт-амперной характеристикой, которая может проходить или не проходить через начало координат. В первом случае это пассивный двухполюсник (рис. 1-2,а), во втором - активный (рис. 1-2,б).

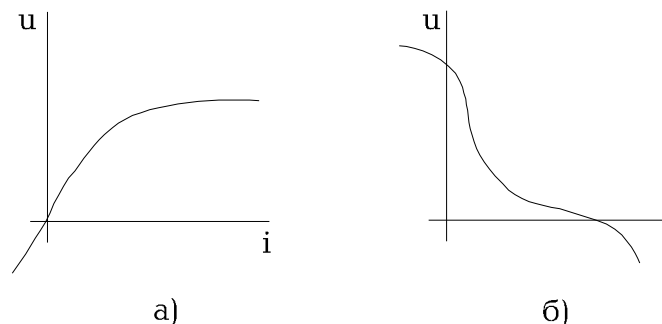


Рис. 1-2

Активный двухполюсник обязательно обладает свойством генерировать электрическую энергию.

Пассивный двухполюсник, если и содержит источники, то они так соединены и имеют такие параметры, что это не проявляется на внешних зажимах. В эксперименте легко различить активный и пассивный двухполюсники. В первом случае вольтметр включенный: на зажимы такого отдельно взятого двухполюсника покажет напряжение $u \neq 0$ (при $i = 0$), а амперметр $i \neq 0$ (при $u = 0$). В случае пассивного двухполюсника $u = 0$ (при $i = 0$) и $i = 0$ (при $u = 0$).

Двухполюсные элементы могут быть линейными и не линейными. Элемент линейный, если его вольт-амперная характеристика выражается прямой линией.

Сейчас и в дальнейшем, пока не будут сделаны оговорки, будем рассматривать линейные элементы. Из них состоят линейные электрические цепи.

Существенное упрощение математических моделей получается если различные свойства элементов можно разделить в пространстве, т.е. пользоваться элементами с сосредоточенными параметрами. Если это невозможно, приходится иметь дело с цепями с распределенными параметрами.

Параметры, характеризующие свойство элементов, могут зависеть или не зависеть от времени.

Из всего многообразия возможных моделей элементов пока выберем линейные элементы с сосредоточенными параметрами. Параметры пассивных элементов будем считать не зависящими от времени, параметры активных элементов (сигналы) в общем случае будем считать функциями времени.

Резюме: Электрическая цепь - такое модельное представление электрического устройства, которое использует в качестве переменных интегральные понятия о токе, напряжении, электродвижущей силе, мощности, энергии (i , u , e , p , w). Математическая модель, т.е. связь между переменными определяется на основе представления системы в виде отдельных элементов, обладающих теми или иными свойствами. Теория электрических цепей - существенная часть электротехники - решает две основные задачи: анализ и синтез.

Контрольные вопросы к теме 1

1. Какова область интересов дисциплины «Электротехника»?
2. Сформулируйте две основные задачи теории цепей.
3. Объясните качественно уравнения Максвелла.
4. В чем физический смысл уравнения Умова-Пойнтинга?
5. В чем качественная разница выражения мощности в уравнениях $\bar{P} = \bar{E} \times \bar{H}$ и $p = u i$?
6. Каково качественное соотношение между электрическим устройством и электрической цепью?
7. Каково принципиальное отличие активного и пассивного двухполюсников?
8. Что такое линейный двухполюсник?

Тема 2

Основные уравнения теории электрических цепей

§ 1. Элементы электрических цепей

Для моделирования электрических цепей плодотворными оказалось применение идеальных элементов, обладающих только одним из четырех перечисленных выше свойств. При этом реальные элементы получаются как соединение идеальных элементов с различными свойствами.

А. Двухполюсные элементы

1. Идеальный источник ЭДС

Схемное изображение и вольт-амперная характеристика приведены на рис. 2-1.

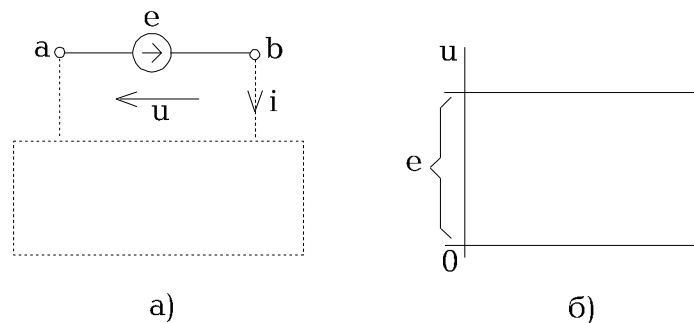


Рис. 2-1

Его единственное свойство - генерировать электрическую энергию так, что напряжение на его зажимах не зависит от протекающего через него тока. По смыслу идеализации $R_{вн}=0$. Стрелка в круге показывает направление внутренних сил, т.е. направлена в сторону точки с большим потенциалом. Напряжение с точки зрения потребителя отмечается стрелкой от точки большего потенциала к меньшему: $U = E$.

В схемах часто вместо идеального источника ЭДС просто рисуют стрелку u , как показано на рис. 2-2.

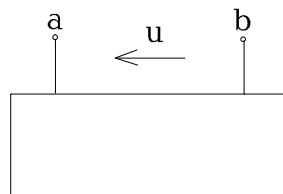


Рис. 2-2

Если ток через источник протекает согласно с направлением внутренних сил, то $p = ui < 0$.

Отрицательная мощность значит то, что источник отдает энергию в остальную часть цепи. Если направление тока таково, что $p = ui > 0$, то источник потребляет энергию (например аккумулятор в режиме заряда).

Коротко говоря, свойства идеального источника ЭДС:

Напряжение: $U = E$ - задано,

Ток: I - любой,

Сопротивление: $R_{вн}=0$.

2. Идеальный источник тока

Изображение на схеме и вольт-амперная характеристика представлены на рис. 2-3.

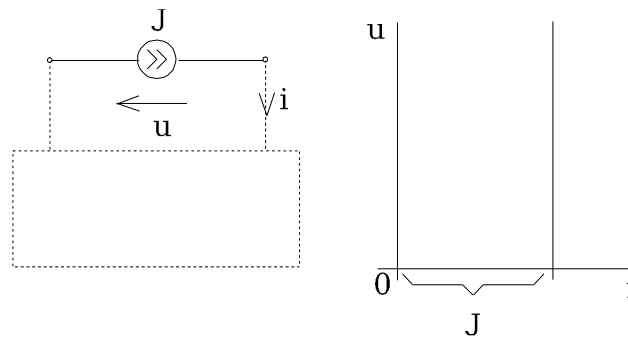


Рис. 2-3

Его свойства можно определить:

Напряжение: u - любое,

Ток: $i = J$ - задан.

Сопротивление: $R_{BH} = \infty$

Приближенно источник тока можно себе представить как реальный источник с большим напряжением и большим внутренним сопротивлением, подключенный к потребителю с малым сопротивлением.

Так же, как и в случае источника ЭДС, если $p = ui < 0$ источник отдает энергию; $p = ui > 0$ источник потребляет энергию.

Подчеркнем еще раз, что параметры идеальных источников в общем случае могут быть функциями времени: $\epsilon(t)$; $J(t)$.

Для уяснения возможности потребления энергии источниками полезно рассмотреть две задачи (рис. 2-4, а и б). (Напряжения и токи на схемах постоянны).

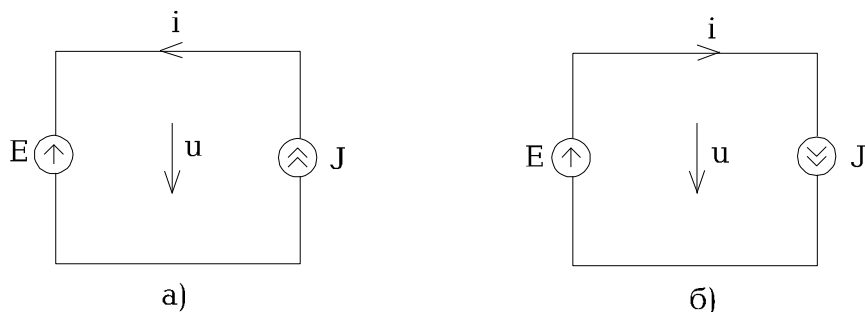


Рис. 2-4

Очевидно при таком соединении один из источников генерирует энергию, а другой потребляет. Обозначив направления токов и напряжений в схемах, становится ясно, что для схемы рис. а) в источнике ЭДС $p = ui > 0$ - потребитель, а в источнике тока $p = ui < 0$ - генератор.

В схеме рис. б) - наоборот.

3. Резистор. (рис. 2-5) элемент, обладающий только свойством рассеивать (потреблять) электрическую энергию.

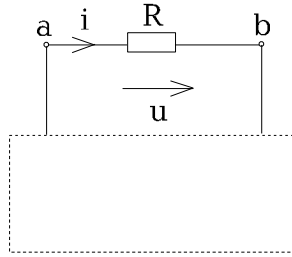


Рис. 2-5

Соотношение между током и напряжением определяется законом Ома $u = Ri$, $i = uG$ - (математическая модель R).

Направление тока и напряжения всегда совпадают, поэтому мощность всегда положительна (энергия потребляется).

$$p = ui = i^2 R = \frac{u^2}{R} = u^2 G > 0.$$

Параметр R - сопротивление [Ом]. Величина обратная R - $G = \frac{1}{R}$ - проводимость.

Следует иметь ввиду, что таким же прямоугольником часто изображают любой двухполюсник.

4. Катушка индуктивности (рис. 2-6) элемент, обладающий только свойством накапливать (и отдавать) энергию магнитного поля.

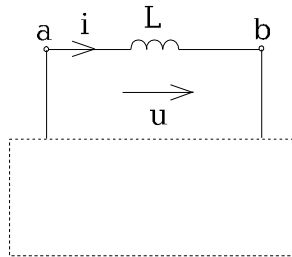


Рис. 2-6

Соотношение между током и напряжением на элементе, известное из курса физики:

$$u_L = L \frac{di}{dt}; i = \frac{1}{L} \int u dt = \frac{1}{L} \int_0^t u dt + i_L(0).$$

Т.е. напряжение на зажимах элемента возникает только тогда, когда есть изменение тока. Если изменения тока нет (ток постоянный), то напряжение $U_0 = 0$ (закоротка), а элемент накопил энергию

$$W = \frac{Li^2}{2}. \text{ В любой момент времени при } i \neq 0 \text{ запасенная энергия } W = \frac{Li^2}{2} > 0.$$

Если напряжение и ток совпадают по направлению $p = ui > 0$, то энергия запасается. В те промежутки времени, когда $p = ui < 0$ энергия возвращается в цепь.

L - параметр элемента, измеряемый в генри [Гн]. Следует обратить внимание, что элемент инерционен относительно тока, т.е. внезапное, скачкообразное изменение тока через индуктивность невозможно.

$$i_L(-t_1) = i_L(+t_1)$$

5. Конденсатором называют емкостный элемент, который обладает свойством только запасать энергию электрического поля (рис. 2-7)

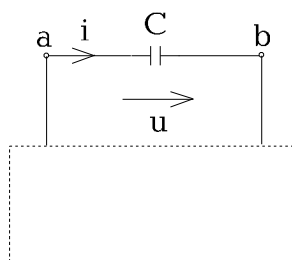


Рис. 2-7

Математическая модель:

$$i_L = C \frac{du_C}{dt}; \quad u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt = \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt + u_C(0).$$

Ток через конденсатор протекает в связи с изменением напряжения на его зажимах. Если изменений напряжения нет: $u = \text{Const} \neq 0$, то $i = 0$ (разрыв цепи), а элемент накопил энергию $W_E = \frac{Cu^2}{2}$. При

изменяющемся напряжении запас энергии $W = \frac{Cu^2}{2}$, а мощность $p = \frac{dW}{dt} = uC \frac{du}{dt} = ui$

положительна в те промежутки времени, когда ток и напряжение совпадают по направлению. В это время энергия в конденсаторе накапливается. C - параметр, измеряемый в фарадах [Ф].

На обкладках конденсатора невозможны скачки напряжения, как невозможны в природе внезапные изменения запасной энергии:

$$u_C(-t_1) = u_C(+t_1).$$

Некоторые авторы, чтобы подчеркнуть идеальность катушки индуктивности и емкостного накопителя употребляют жаргонные термины по наименованию параметра элемента: индуктивность (L) и емкость (C), хотя это, строго говоря, неправильно, но допустимо.

Упомянутые ситуации разрыва цепи и короткую тоже целесообразно определить как элемент цепи.

Закоротка: ток любой; напряжение $u = 0$.

Разрыв: напряжение любое; ток $i = 0$.

В некоторых случаях в радиоэлектронике применяют элементы, реальных аналогов не имеющих. Их получают как математические абстракции.

Нулятор (рис 2-8,а)- напряжение $u = 0$ и ток $i = 0$.

Норатор (рис. 2-8,б) - напряжение u - любое и ток i - любое.

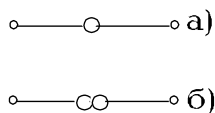


Рис 2-8

С их помощью можно выразить короткую (рис. 2-9,а) и разрыв (рис. 2-9,б).

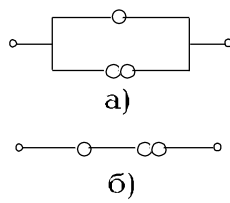


Рис. 2-9

Все перечисленные выше элементы - двухполюсники.

Б. Четырехполюсные элементы

Если напряжения (токи) между двумя узлами зависят не только от тока (напряжения) между этими узлами, а определяются токами и напряжениями на других участках цепи, то математическое описание таких случаев требует введения четырехполюсных элементов.

1. Взаимная индуктивность

Четырехполюсным элементом, имеющим реальный прототип является взаимная индуктивность (рис.2-10).

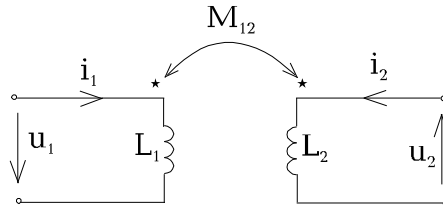


Рис. 2-10

Реально это две катушки индуктивности L_1 и L_2 , имеющие полностью или частично общий магнитный поток. Из физики известно, что напряжение на катушке определяется изменением магнитного потока. Следовательно при наличии общего магнитного потока напряжение на каждой индуктивности определится как сумма двух слагаемых:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

Одно из них напряжение самоиндукции, а другое напряжение взаимной индукции.

$$M_{12} = K \sqrt{L_1 L_2} = M_{21} \text{ [Гн]}$$

$0 < K < 1$ - безразмерный коэффициент, показывающий какая часть магнитного потока, является общей.

Знак “+” в уравнении ставится, если при выбранных направлениях тока магнитные потоки складываются. Для того, чтобы на схеме обозначить это обстоятельство на катушках L_1 и L_2 отмечаются начала обмоток. При этом, если токи в обеих катушках одинаково направлены относительно начал обмоток, то магнитные потоки складываются.

При $K=1$ (совершенный трансформатор).

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm \sqrt{L_1 L_2} \frac{di_2}{dt} = \sqrt{L_1} \left(\sqrt{L_1} \frac{di_1}{dt} + \sqrt{L_2} \frac{di_2}{dt} \right)$$

$$u_2 = \pm \sqrt{L_1 L_2} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} = \sqrt{L_2} \left(\sqrt{L_1} \frac{di_1}{dt} + \sqrt{L_2} \frac{di_2}{dt} \right)$$

Отношение:

$$\frac{u_1}{u_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{w_1}{w_2} = n \text{ - коэффициент трансформации,}$$

где w_1 , w_2 - соответственно числа витков катушек.

У совершенного трансформатора напряжение на вторичных зажимах не зависит от нагрузки, а определяется только первичным напряжением (u_1) и коэффициентом трансформации.

Если предположить $L_1 \rightarrow \infty$ (идеальный трансформатор), то из первого уравнения математической модели следует

$$\frac{di_1}{dt_1} = \frac{u_1}{L_1} - \frac{1}{n} \frac{di_2}{dt}$$

$$L_1 \rightarrow \infty.$$

Добавив сюда уравнение совершенного трансформатора, получим систему уравнений для идеального трансформатора:

$$\begin{cases} i_1 = -\frac{1}{n} i_2 \\ u_1 = n u_2 \end{cases}$$

$$i_1 u_1 + i_2 u_2 = 0$$

Последнее означает, что идеальный трансформатор не накапливает энергии $p_1 + p_2 = 0$. Его основное назначение - изменение масштаба тока и напряжения. В свойства идеального трансформатора входит также изменение масштаба R_1 , L_1 или C_1 , без изменения их характера.

Для пояснения этих свойств включим на выход R, L или C и рассмотрим соотношения между u_1 и i_1 на входе.

$$-\frac{u_2}{i_2} = R_2 = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{u_1}{i_1}; \text{ т.е. } R_{1\dot{y}} = n^2 R_2, \text{ где } R_{1\dot{y}} = \frac{u_1}{i_1}.$$

Со стороны входных зажимов сопротивление R_2 трансформируется в $n^2 R_2 = R_{1\dot{y}}$, знак (-) перед $\frac{u_2}{i_2}$ связан с “несогласованностью” между напряжением и током на вторичных зажимах.

При включении на выход катушки индуктивности

$$-\frac{u_2}{\frac{di_2}{dt}} = L_2 = \frac{\frac{1}{n} u_1}{n \frac{di_1}{dt}}; \text{ т.е. } n^2 L_2 \frac{di_1}{dt} = u_1 = L_{1\dot{y}} \frac{di_1}{dt}$$

Если включен конденсатор

$$-\frac{i_2}{\frac{du_2}{dt}} = C_2 = \frac{n i_1}{\frac{1}{n} \frac{du_1}{dt}}; \text{ т.е. } \frac{1}{n^2} C_2 \frac{du_1}{dt} = i_1 = C_{1\dot{y}} \frac{du_1}{dt}$$

2. Гиратор

Как математическую абстракцию можно представить элемент, описываемый системой уравнений:

$$i_1 = -\frac{1}{n} u_2$$

$$u_1 = n i_2$$

Он так же не накапливает энергию.

$$u_1 i_1 + u_2 i_2 = 0$$

Этот гипотетический элемент называют гиратор (рис. 2-11)

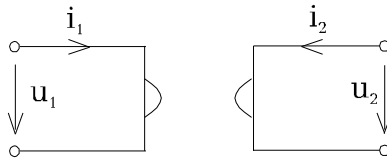


Рис. 2-11

Если бы удалось реализовать элемент с такими свойствами, то получили бы замечательный результат: включение на выходе емкости со стороны входа приводит к эффекту включенной индуктивности. Действительно

$$C_2 = \frac{-i_2}{\frac{du_2}{dt}} = \frac{\frac{1}{n}u_1}{n\frac{di_1}{dt}}; \text{ т.е. } n^2 C_2 \frac{di_1}{dt} = u_1, L_{\text{э}} = n^2 C_2.$$

В радиоэлектронике, автоматике при описании усилительных свойств приборов, наличия обратных связей используются зависимые источники, как четырехполюсные идеальные элементы.

3. Источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН) (рис. 2-12).

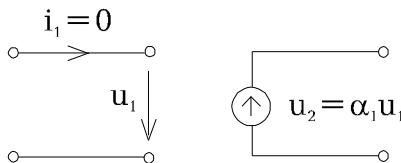


Рис. 2-12

4. Источник напряжения, управляемый током (ИНУТ) (рис. 2-13).

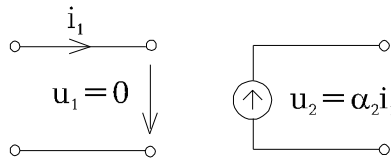


Рис. 2-13

5. Источник тока, управляемый напряжением (ИТУН) (рис. 2-14).

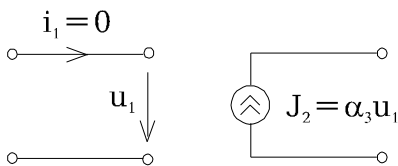


Рис. 2-14

6. Источник тока, управляемый током (ИТУТ) (рис. 2-15).

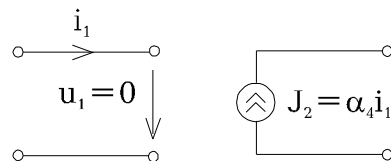


Рис. 2-15

Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и α_4 - размерные или безразмерные количественно характеризуют управление источником со стороны тока или напряжения входных зажимов.

Если параметры R, L, C, M и т.д. постоянны, т.е. не зависят от токов и напряжений, то при этом, как мы увидим в дальнейшем, математическое описание цепи приводит к линейным уравнениям. Такие цепи называются линейными. Если хотя бы один элемент не подчиняется этому правилу, то вся цепь нелинейная.

В нашем курсе мы, если это не оговорено особо, будем иметь дело с линейными элементами. Активно будем использовать источники напряжения и тока, резистор, индуктивность, емкость и взаимную индуктивность.

Знание всех остальных элементов полезно при чтении специальной литературы.

Решение проблемы выражения всех свойств заданной реальной системы сочетанием идеальных элементов рассматривается в спецкурсах на основе анализа физических явлений заданного устройства.

Приведем некоторые примеры:

Пример 1.

В реальном источнике (химическом элементе, машинном генераторе, термопреобразователе и т.д.) часть генерированной электроэнергии теряется на неизбежно имеющихся внутренних сопротивлениях.

На рис. 2-16,а показана вольт-амперная характеристика реального источника, а на рис. 2-16,б - два возможных его схемных выражения.

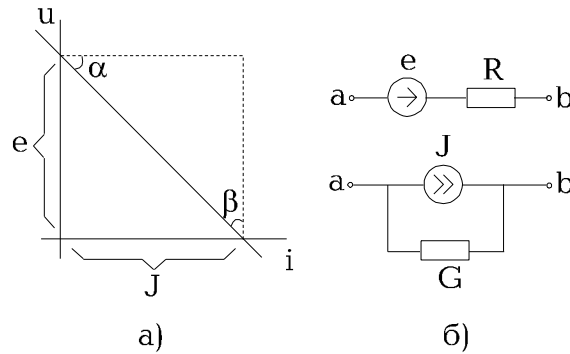


Рис. 2-16

Соотношение между током и напряжением в этих схемах:

$$u = e - iR$$

$$i = J - uG$$

Очевидно эти схемы эквивалентны, если

$$J = \frac{e}{R} \text{ или } e = \frac{J}{G} \text{ и } G = \frac{1}{R} \text{ или } R = \frac{1}{G}$$

$$R = \hat{e}_1 \operatorname{tg} \alpha ; G = \hat{e}_2 \operatorname{tg} \beta .$$

Как видно из вольт-амперной характеристики в режиме холостого хода $u_{\text{ХХ}} = e$ и в режиме короткого замыкания $i_{\text{КЗ}} = J$.

Пример 2.

Реальная катушка с магнитным сердечником.

В первом приближении, когда существенным для анализа всей системы является только накопление энергии магнитного поля, а всеми остальными параметрами можно пренебречь катушку моделируют одной идеальной индуктивностью (рис. 2-17,а). При необходимости учесть потери на нагрев проводов применяют схему рис. 2-17,б.

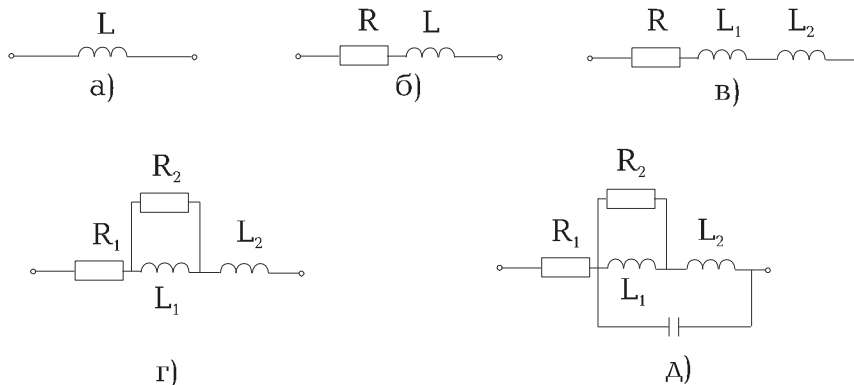


Рис. 2-17

Если требуется различить магнитные потоки, замыкающиеся по сердечнику (L_1) и по воздуху L_2 (индуктивность рассеяния), применяют схему рис. 2-17,в. Учет потерь на перемагничивание сердечника требует включения параллельно L_1 сопротивления R_2 , поскольку потери в сердечнике зависят только от соответствующей части магнитного потока. Если катушка применяется при высокой частоте, может потребоваться учет межвитковой емкости, тогда применяется схема рис. 2-17,д.

Ответить на вопрос какую схему применять в каждом конкретном случае без опыта нельзя. В конечном счете любая модель удовлетворительна, если результат ее применения удовлетворяет потребной точности, т.е. совпадает с экспериментальными данными.

Приведем еще два примера изображения реальных устройств в виде схем. Обоснования будут даны в соответствующих разделах.

Пример 3.

Эквивалентная схема трансформатора (рис. 2-18).

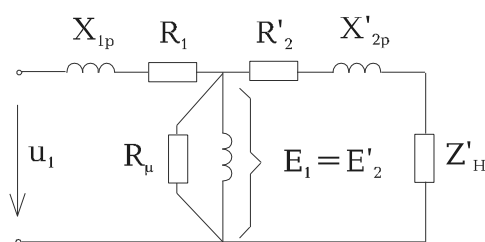


Рис. 2-18

Пример 4.

Эквивалентная схема асинхронного двигателя (рис. 2-19).

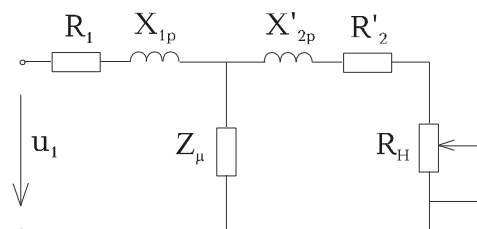


Рис. 2-19

R_H - характеризует превращение электрической энергии в механическую.

И еще один пример, обоснование которого будет дано в курсе радиоэлектроники.

Пример 5.

Эквивалентная схема транзистора (рис. 2-20).

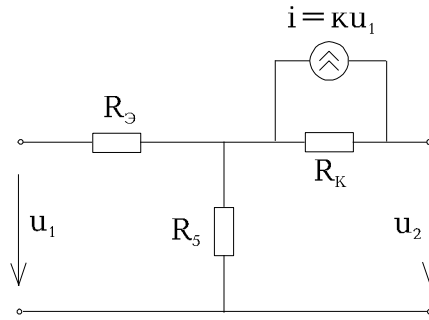


Рис. 2-20

Наличие источника тока, управляемого напряжением, отображает усилительные свойства транзистора.

Предложенная система идеальных элементов избыточна. Кроме приведенных примеров, где с помощью нулятора и норатора выражаются закоротки и разрывы можно привести еще примеры.

Возьмем схему (рис. 2-21), состоящую из ИНУН и ИТУТ.

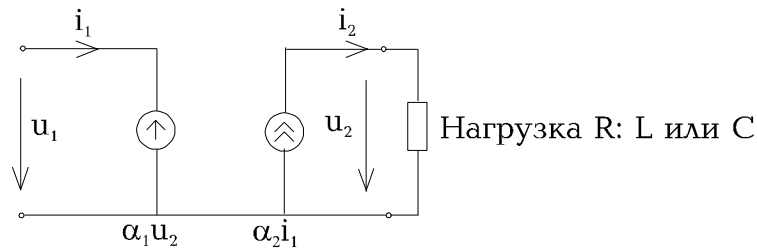


Рис. 2-21

Соотношения между токами и напряжениями на выходе схемы в случае включения резистора, катушки индуктивности и конденсатора выразятся соответственно: $u_2 = R_2 i_2$; $u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt}$; $i_2 = C_2 \frac{du_2}{dt}$.

Учтя зависимость $u_1 = \alpha_1 u_2$ и $i_2 = \alpha_2 i_1$, получим со стороны входа:

$$u_1 = \alpha_1 \alpha_2 R_2 i_1 = R_{\dot{y}} i_1, \text{ т.е. } R_{\dot{y}} = \alpha_1 \alpha_2 R_2$$

$$u_1 = L_2 \alpha_1 \alpha_2 \frac{di_1}{dt} = L_{\dot{y}} \frac{di_1}{dt}; L_{\dot{y}} = \alpha_1 \alpha_2 L_2$$

$$i_1 = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} C_2 \frac{du_1}{dt} = C_{\dot{y}} \frac{du_1}{dt}; C_{\dot{y}} = \frac{C_2}{\alpha_1 \alpha_2}$$

При соответствующем выборе α_1 и α_2 свойства такого четырехполюсника полностью совпадают со свойствами идеального трансформатора.

Нетрудно убедиться, что схема ИНУТ-ИНУТ (рис. 2-22) обладает свойствами инвертора сопротивлений.

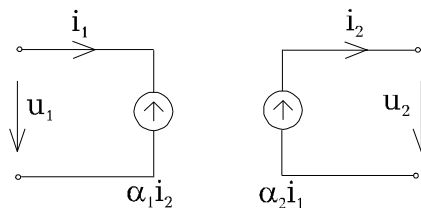


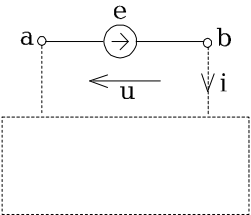
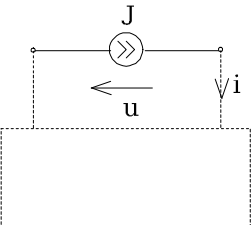
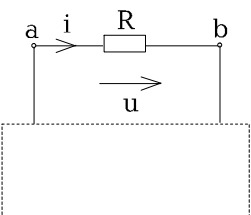
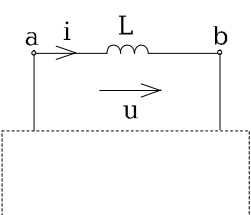
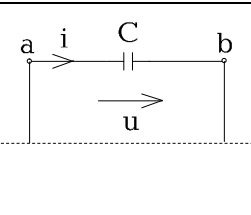

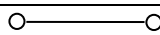
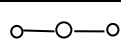
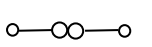
Рис. 2-22

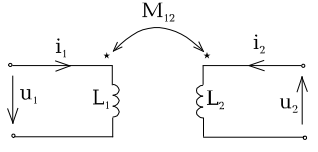
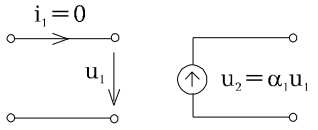
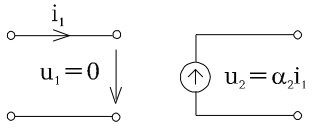
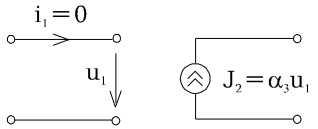
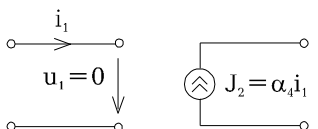
Наконец, полезно всегда иметь ввиду, что резистор можно заменить в схеме напряжением, управляемым собственным током $u = Ri$.

В таблице 1 приводятся сводные данные от идеальных элементов электрических цепей. Знаком “*” отмечены элементы, которые нужно знать свободно.

Сводная таблица элементов

Таблица 1-1

Двухполюсные			Единица измерения
* Источник ЭДС ϵ		$u = \epsilon$	Вольт
* Источник тока J		$i = J; u - \text{любое}$	Ампер
* Резистор R G		$u = Ri; i = Gu; R = \frac{1}{G}$	Ом, Сим.
* Катушка индуктивности L		$u = L \frac{di}{dt};$ $i = \frac{1}{L} \int_0^t u dt + i_L(0)$	Генри-индуктивность
* Конденсатор C		$i = C \frac{du}{dt};$ $u = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0)$	Фарада-емкость
Разрыв		$i = 0; u - \text{любое}$	
Закоротка		$u = 0; i - \text{любой}$	
Нулятор		$i = 0; u = 0$	
Норатор		$i - \text{любой}, u - \text{любое}$	

Четырехполюсные			Единица измерения
* Катушки взаимной индуктивности		$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt}$ $u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{21} \frac{di_1}{dt}$	M12=M21 - генри при изменении направления одной из обмоток относительно тока знак меняется.
ИНУН		$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$	α_1 и α_4 - безразмерные коэффициенты
ИНУТ		$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$	α_2 - имеет размерность сопротивления
ИТУН		$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$	α_2 - имеет размерность проводимости.
ИТУТ		$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$	Матрицы коэффициентов соответствуют А-параметрам четырехполюсника.

§ 2. Законы Ома и Кирхгофа

Закон Ома устанавливает соотношение между током, протекающим через какой-либо двухполюсник и напряжением на его зажимах. Для идеальных пассивных элементов мы их уже записывали:

$$u = Ri; \quad u_L = L \frac{di}{dt}; \quad i_C = C \frac{du}{dt}$$

Эти компонентные уравнения являются основанием для выражения соответствующих соотношений в сколь угодно сложных цепях.

I Закон Кирхгофа

Как следствие непрерывности тока, закон устанавливает, что суммарный ток, втекающий в какой-либо замкнутый объем равен суммарному вытекающему из этого объема тока. В теории цепей под замкнутым объемом понимается узел или отсечение. Чаще всего I закон Кирхгофа формулируют для любого узла:

$$\sum_K i_K = 0$$

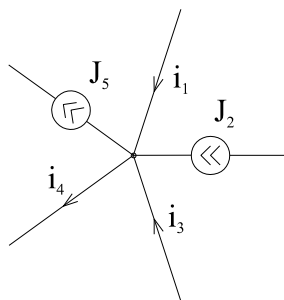


Рис. 2-23

Для узла, изображенного на рис. 2-23 узловое уравнение запишется:

$$i_1 + J_2 + i_3 - i_4 - J_5 = 0.$$

Иногда уравнение записывают, выделяя отдельно источники тока:

$$i_1 + i_3 - i_4 = J_5 - J_2, \text{ т.е. } \sum_K i_K = \sum_K J_K.$$

Важно только соблюдать правило знаков: все истинные направления входящих токов считаются положительными, а выходящие - отрицательными. Можно считать и наоборот. Поскольку часто искомыми являются не только величины, но и направления токов, то последние до получения результатов анализа неизвестны. Практически, как это будет показано ниже, уравнения составляются относительно условных положительных направлений, которые принимаются произвольно, но одинаково во всех уравнениях. Если в результате анализа получатся отрицательные значения токов, то истинное значение будет обратным.

Аналогичные уравнения можно записать для любого отсечения. Пример приведен на рис. 2-24.

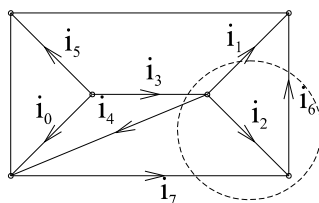


Рис. 2-24

$$i_1 + i_6 - i_3 + i_4 - i_7 = 0$$

или

$$i_5 + i_1 + i_2 + i_4 + i_0 = 0 \text{ и т.д.}$$

Решим задачу характерную для параллельного соединения резисторов (рис. 2-25) по I закону Кирхгофа.

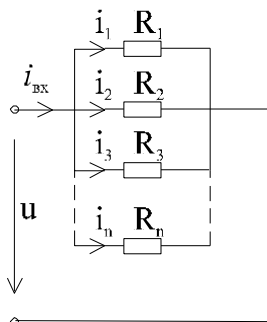


Рис. 2-25

$$\frac{u}{R_{\dot{y}}} = i_{\dot{a}\dot{o}} = \sum_1^n i_K = \sum_1^n \frac{u_K}{R_K} = u \sum_1^n \frac{1}{R_K}$$

Значит и параллельно соединенных резисторов, с точки зрения остальной цепи, можно заменить одним $R_{\dot{y}}$ в соответствии с соотношением.

$$G_{\dot{y}} = \sum_1^n G_K \quad \text{или} \quad \frac{1}{R_{\dot{y}}} = \sum_1^n \frac{1}{R_K}$$

Для двух резисторов часто применяется это соотношение в виде:

$$R_{\dot{y}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Если параллельно соединены конденсаторы, то

$$i_{\dot{a}\dot{o}} = \sum_1^n i = \sum_1^n C_K \frac{du_K}{dt} = \left\{ \sum C_K \right\} \frac{du}{dt};$$

$$\text{т.е. } C_{\dot{y}} = \sum_1^n C_K$$

При соединении катушек индуктивности:

$$i_{BX} = \sum i = \sum \frac{1}{L_K} \int u_K dt = \sum \frac{1}{L_K} \left\{ \int u_K dt \right\}$$

получим:

$$\frac{1}{L_{\dot{y}}} = \sum_1^n \frac{1}{L_K}$$

II Закон Кирхгофа

Напомним, что напряжение на двухполюсных элементах это разность потенциалов на его зажимах:

$$u_{\dot{a}\dot{b}} = (\varphi_{\dot{a}} - \varphi_{\dot{b}}).$$

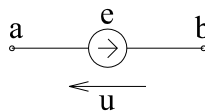
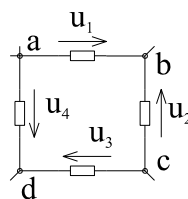


Рис. 2-26

Нетрудно убедиться, что для рис. 2-26

$$\sum u_K = \varphi_a - \varphi_b + \varphi_b - \varphi_c \dots - \varphi_a = 0,$$

т.е. сумма напряжений на двухполюсниках любого замкнутого контура равна нулю. Конечно это будет справедливо, если соблюдать правила знаков:

$$u_1 = u_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$$

$$u_2 = u_{cb} = -u_{bc} \text{ и т.д.}$$

Если какие-либо из двухполюсников представляют из себя источники ЭДС, то с учетом взаимного направления e и u можно записать контурное уравнение:

$$\sum_K u_K = \sum_K e_K$$

В левой части ставятся напряжения со знаком плюс, совпадающие с направлением обхода контура, в правой - ЭДС, совпадающие с тем же направлением обхода. Для представления уравнений II закона Кирхгофа относительно тех же переменных (токов) используются приведенные выше компонентные уравнения.

Пример.

Пусть имеем систему, состоящую из последовательно соединенных резистора, конденсатора и катушки. На этот двухполюсник воздействует ЭДС $e(t)$ (рис. 2-27).

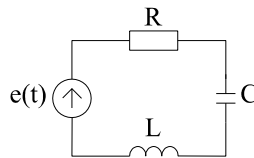


Рис. 2-27

Контурное уравнение запишется:

$$Ri + \frac{1}{C} \int i dt + L \frac{di}{dt} = e(t)$$

Поскольку через все элементы протекает один и тот же ток, то с некоторой условностью можно записать:

$$Z \cdot i = e, \text{ где оператор } Z = R + \frac{1}{C} \int (\cdot) dt + L \frac{d(\cdot)}{dt} \text{ имеет смысл сопротивления и характеризует среду,}$$

где действует возмущение $e(t)$. В этом смысле оператор Z выражает собственное свойство системы.

Применяя II закон Кирхгофа, легко получить выражения для эквивалентной замены последовательно соединенных резисторов, катушек индуктивностей и емкостей:

$$R_{\dot{y}} = \sum_K R_K; \quad L_{\dot{y}} = \sum_K L_K; \quad \frac{1}{C_{\dot{y}}} = \sum_K \frac{1}{C_K}.$$

Для фрагмента некоторой цепи, изображенной на рис. 2-28, контурное уравнение можно записать, суммировав напряжение на группах однотипных элементов:

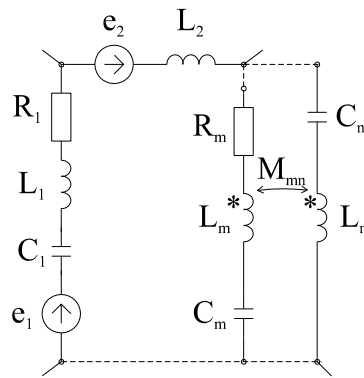


Рис. 2-28

$$\sum e_m = \sum_m i_m R_m + \sum_m \frac{1}{C_m} \int_0^t i_m dt + \sum_m u_{cm}(0) + \sum_m L \frac{di_m}{dt} + \sum_{m,n} M_{mn} \frac{di_n}{dt}$$

Суммы, конечно, везде алгебраические с учетом знаков выбранных (условных) положительных направлений токов по отношению к произвольному направлению обхода контура.

§ 3. Геометрия электрической цепи

Определим ветвь, как совокупность элементов, по которым протекает один и тот же ток (последовательно соединенных). Тогда с точки зрения геометрии электрическая цепь представляет собой совокупность ветвей и узлов. Узлом назовем точку, где сходятся три и более ветвей. Иногда вводится понятие - простой узел: точка соединения двух ветвей. Математический аппарат, описывающий структуры, состоящие из ветвей и узлов излагается в теории графов.

Основные термины теории графов:

Граф схемы - совокупность узлов и ветвей.

Узел-точка, где сходятся три и более ветвей. Путь-совокупность ветвей, проходя по которой, любая ветвь не проходится многократно. Ветви пути, перечисленные в заданном порядке определяют направление пути.

Контур - замкнутый путь, начинающийся и заканчивающийся в одном и том же узле. Перечисление ветвей задает направление обхода контура. Поскольку токи проходят только по замкнутым путям в графах, отображающих электрические цепи, ветви не входящие в замкнутые контуры не учитываются.

Сечение - совокупность ветвей, удаление которых из графа приводит к образованию двух несвязных графов.

Наличие четырехполюсных элементов (трансформаторы, управляемые источники) может приводить к описанию цепей не связанными графами.

Ориентированный граф - такой граф, ветвями которого присвоены определенные направления.

Дерево графа - объединенный подграф (часть графа), содержащий все узлы схемы, но не содержащий ни одного контура. Для выделения дерева графа необходимо удалить такую часть ветвей, чтобы разорвать все контуры, но не расчленять граф. Выделение дерева графа разбивает все множество ветвей на два подмножества: ветви дерева и ветви дополнения или хорды. Разделить ветви на два подмножества можно по-разному. Самое простое задание ориентированного графа состоит в его изображении, нумерации узлов и ветвей и указании направлений (условных) токов в ветвях.

Независимым узлом называется узел, отличающийся от всех остальных хотя бы одной ветвью. Можно показать, что для выделения независимых узлов в графе достаточно исключить из совокупности всей узлов один любой узел. Исключенный из совокупности независимых узлов, узел обычно "заземляют" или обозначают индексом "0".

Независимым сечением называют такое сечение, которое отличается от всех других хотя бы одной ветвью. Для образования системы независимых сечений можно, выделив дерево графа, привести сечения так, чтобы каждое из них пересекало одну ветвь дерева, а остальные хорды.

Независимым контуром называется контур, в который входит хотя бы одна ветвь, не входящая во все остальные независимые контуры. Систему независимых контуров можно получить, если в каждый из них включить хорду (дополнение), а остальные ветви должны состоять из ветвей дерева.

Если ветвь содержит источник тока, то из графа ее исключают (эта ветвь имеет бесконечно большое сопротивление), но для сохранения информации отмечают подтекающие в соответствующие узлы тока.

Пример (рис. 2-29).

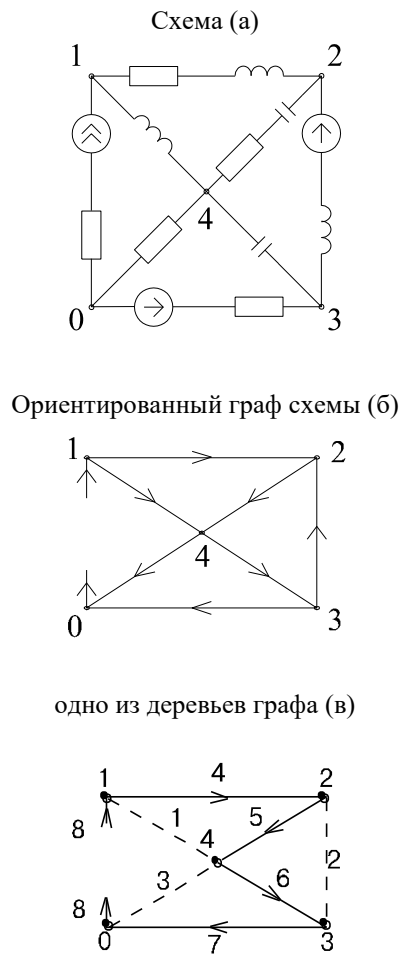


Рис. 2-29

Независимые узлы: 1, 2, 3, 4.

Независимые контуры:

- I 1-4-5
- II 2-5-6
- III 3-6-7

Независимые сечения:

- I 4-1-(8)
- II 5-1-2-(8)
- III 6-3-2-(8)
- IV 7-3-(8)

Указание ветви, содержащей источник тока в сечении (и в узле) понадобится для учета тока источника в узловых уравнениях.

Как видно из примера система независимых контуров и сечений полностью определяется выбранным деревом графа.

Алгебраически граф может быть представлен в виде различных матриц. Рассмотрим три из них.

1. Матрица контур-ветвь, каждый элемент которой $K_{ij} = +1$, если i -я ветвь входит в i -й контур и направление тока в ней совпадает с направлением обхода.

$K_{ij} = -1$, если i -я ветвь входит в i -й контур и направление тока и направление обхода встречны.

$K_{ij} = 0$ - в других случаях.

Пример (рис. 2-30)

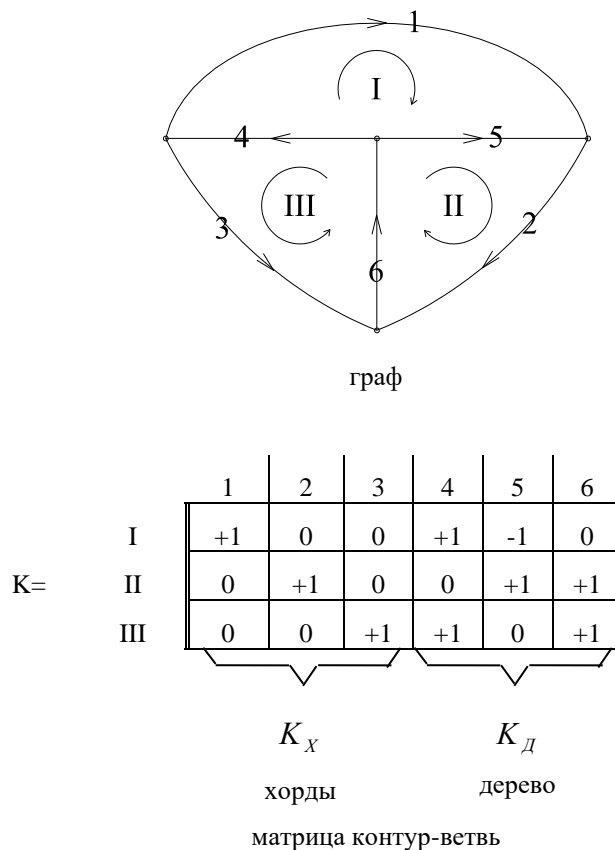


Рис. 2-30

Рассмотрение K -матрицы показывает:

1. Если номера ветвей-хорд и контуров совпадают, а направления обхода контура выбрано одинаковым с направлением токов в хордах, то выделяется единичная подматрица K_X . Это легко достигается, поскольку нумерация ветвей и условные положительные направления токов произвольны.

$$[K] = [K_X \ K_D]$$

При вводе данных и хранении информации о графе можно ограничиться информацией о $[K_D]$.

2. Каждая строка матрицы содержит информацию о ветвях, входящих в контур и знаке тока в них. Т.к. K_X - единичная диагональная матрица, то строки обязательно отличаются друг от друга хотя бы одной ветвью.

3. Количество независимых контуров равно количеству хорд.

Практически матрица очень часто разрежена и нули не пишутся.

2. Матрица сечение-ветвь

$S_{ij} = +1$, если ветвь входит в отсечение и ток направлен к отсечению.

$S_{ij} = -1$ то же, но при противоположном направлении тока.

$S_{ij} = 0$, если ветвь не входит в отсечение.

Пример (рис. 2-31)

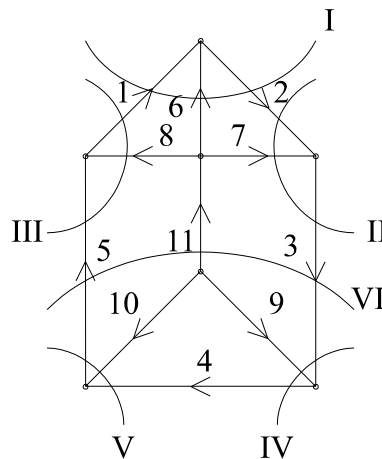


Рис. 2-31

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
I	+1	-1				+1					
II		+1	-1				+1				
III					+1			+1			
IV	-1		+1	-1					+1		
V				+1	-1					+1	
VI			-1		+1						+1

хорды
дерево

1. Если номера отсечениям присваивать в порядке возрастания номеров ветвей дерева, то выделяется единичная подматрица, соответствующая ветвям дерева.

$$[S] = [S_x \ S_A]$$

2. Строка матрицы перечисляет ветви, входящие в отсечение. Если в подматрице дерева все элементы положительны, то легко снимается некоторая неопределенность направления "к отсечению".

3. Количество независимых отсечений равно количеству ветвей дерева, которое в свою очередь на единицу меньше количества узлов. (доказывается по индукции).

3. Матрица узел-ветвь

$P_{ij} = +1$, если i -я ветвь входит в i -й узел

$P_{ij} = -1$, если i -я ветвь выходит из i -го узла

$P_{ij} = 0$, если i -я ветвь не включается в i -й узел

Все, что сказано о матрице Q справедливо и для матрицы P , за исключением того, что квадратную подматрицу, соответствующих ветвей не всегда удастся сделать единичной. Если одну из строк удалить (нулевой узел), то размеры матриц P и S совпадают.

Это обстоятельство не случайно, т.к. количество ветвей графа (N_B), количество независимых контуров (N_{HK}) и количество независимых узлов (N_{HY}) или сечений взаимосвязано:

$$N_6 = N_{\dot{E}} + N_{\dot{O}} = N_{\dot{E}} + N_{\dot{O}} - 1.$$

§ 4. Интегро-дифференциальные уравнения состояния

Электрическая цепь должна быть задана в виде соединенных определенным образом идеальных элементов. Для начала проводится индексация элементов и геометрический анализ.

Изобразив граф схемы, подсчитываем количество узлов схемы, нумеруем узлы, причем один из узлов из перечня независимых исключаем, присвоив ему нулевой номер. Выделяем дерево графа. Вводим номера ветвей так, что первые номера - номера хорд (дополнений), а последние номера ветвей дерева. Номера независимых контуров считаем совпадающими с номерами хорд. Проверяем соотношение $N_A = N_O - 1 + N_E$.

Вводим условные положительные направления токов в ветвях, при этом есть смысл учитывать, что направления обхода контуров будем принимать по направлению тока в хордах. Все элементы, входящие в ветвь равно как и ток этой ветви, естественно, получают индекс в виде номера ветви. Источники тока на графе отмечаются в виде подтекающих и вытекающих токов. Этим током присваиваются индексы следующие за последним номером ветви графа.

Далее записываются уравнения по I закону Кирхгофа в виде: $\sum i = 0$ для каждого узла, или при

наличии источников тока: $\sum i = \sum J$. Знаки токов ветвей в сторону от узла принимаются положительными. Токи источников токов при этом в правую часть уравнения ставятся со знаком “плюс”, если они направлены к узлу.

Составлять уравнения по I закону Кирхгофа удобно по ориентированному графу.

Уравнения по II закону Кирхгофа для каждого из независимых контуров ($\sum u = \sum E$) записывается относительно тех же неизвестных токов с использованием компонентных уравнений:

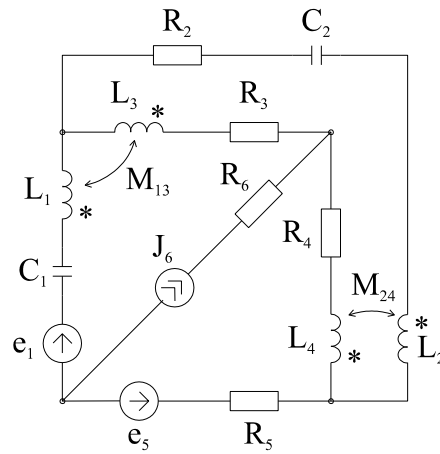
$$\pm u_R = R i; \pm u_L = L \frac{di_L}{dt}; \pm u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt + u_C(0)$$

При наличии индуктивных связей между катушками m -й n -ой ветви:

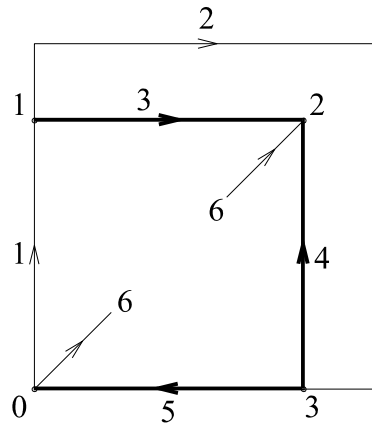
$$\pm u_{Lm} = L_m \frac{di_m}{dt} \pm M_{mn} \frac{di_n}{dt}$$

Правила знаков: соответствующее напряжение ставится со знаком “плюс”, если направление обхода контура совпадает с условным положительным направлением тока; в противном случае ставится знак “минус”. Перед коэффициентом взаимной индукции M_{mn} ставится знак “плюс”, если выбранные условные положительные направления токов обуславливают сложение магнитных потоков в соответствующих индуктивностях; в противном случае ставится знак “минус”.

Пример (рис. 2-32)



схема



граф и дерево

Рис. 2-32

I закон Кирхгофа

$$1. \quad i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$2. \quad i_3 + i_4 = -J_6$$

$$3. \quad i_4 + i_5 - i_2 = 0$$

II закон Кирхгофа

$$4. \quad \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1 dt + u_{C1}(0) + L_1 \frac{di_1}{dt} - M_{13} \frac{di_3}{dt} + L_3 \frac{di_3}{dt} - M_{31} \frac{di_1}{dt} +$$

$$+ R_3 i_3 - R_4 i_4 - L_4 \frac{di_4}{dt} - M_{42} \frac{di_2}{dt} + R_5 i_5 = e_1 - e_5$$

$$5. \quad R_2 i_2 + \frac{1}{C_2} \int_0^t i_2 dt + u_{C2}(0) + L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{24} \frac{di_4}{dt} + L_4 \frac{di_4}{dt} + M_{42} \frac{di_2}{dt} +$$

$$+ R_4 i_4 - R_3 i_3 - L_3 \frac{di_3}{dt} + M_{31} \frac{di_1}{dt} = 0$$

Продифференцировав уравнения 4 и 5, получим систему из пяти независимых дифференциальных уравнений, каждое из которых не выше второго порядка. Такая система разрешима относительно токов ветвей, если известны начальные условия (токи в катушках и напряжения на обкладках конденсаторов).

Трудности решения подобной системы уравнений существенно зависят от следующих обстоятельств:

1. Линейность уравнений, если коэффициенты (параметры цепи) не зависят от токов и напряжений.
2. Параметры цепи не зависят от времени. В этом случае получаем систему интегро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

При этом наличие зависимых источников:

$$e_K = \alpha_1 u_m; e_K = \alpha_2 i_m; J_K = \alpha_3 u_m; J_K = \alpha_4 i_m$$

не нарушают линейность системы, если $\alpha_1 \dots \alpha_4$ - постоянные величины.

3. В зависимости от характера функций времени независимых переменных $e(t)$ и $J(t)$, применяя тот или иной математический аппарат, можно существенно упростить получение результата анализа.

В электротехнике широкое применение находят следующие сигналы (независимые переменные):

1. Постоянные токи и напряжения $E = Const$ и $J = Const$.
2. Синусоидальные сигналы

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e); J = J_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

3. Периодические несинусоидальные сигналы

$$e = f(t) = f(t + \hat{e}T); J = f(t) = f(t + \hat{e}T)$$

4. Обобщенные переменные сигналы комплексной частоты s .

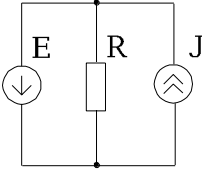
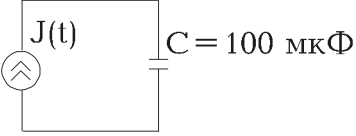
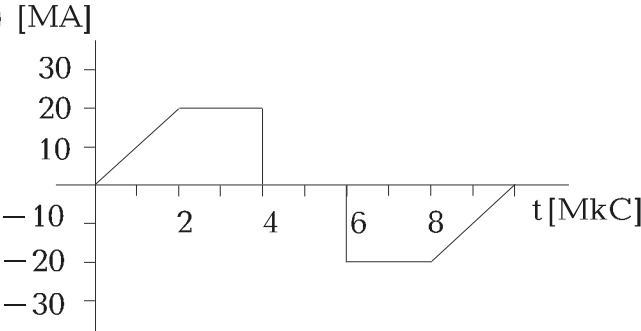
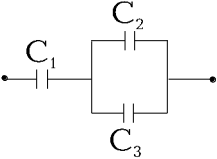
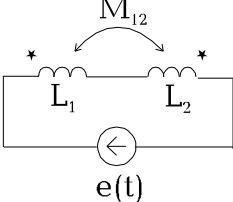
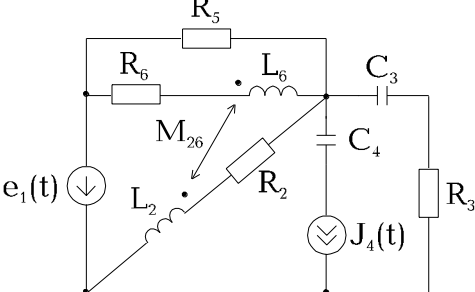
$$e = E_m e^{st}; J = J_m e^{st}$$

Приемы практического отыскания зависимых переменных, если применять соответствующий математический аппарат имеют много общего. Это будет показано при дальнейшем изложении курса.

Контрольные вопросы к теме 2

1. Что такое идеальный элемент электрической цепи?
2. Перечислите идеальные двухполюсные элементы. Назовите их свойства и запишите математические модели.
3. Перечислите известные Вам четырехполюсные идеальные элементы. Запишите их математические модели.
4. Выразите условия эквивалентной замены реального источника тока на источник напряжения.
5. Приведите примеры выражения свойств реальных элементов электротехнического устройства сочетанием идеальных элементов.
6. Сформулируйте основные законы теории электрических цепей: закон Ома и законы Кирхгофа.
7. Покажите условия эквивалентной замены однородных идеальных элементов при последовательном и параллельном соединениях.
8. Можно ли соединять идеальные источники последовательно? Параллельно?
9. Каков порядок записи уравнений для мгновенных значений токов и напряжений по первому закону Кирхгофа? Как выделить из них систему независимых уравнений?
10. Каков порядок записи уравнений для мгновенных значений токов и напряжений по второму закону Кирхгофа? Как выделить систему независимых уравнений?
11. Какие Вы знаете способы выражения системы соединений двухполюсников?

Контрольные задачи к теме 2

1	 <p style="text-align: center;"> $R=20\ \text{Ом};$ $E=10\ \text{В};$ $J=-1\ \text{А}.$ </p>	<p>1. Определить мощности элементов. 2. Показать выполнение баланса мощностей в схеме.</p>
2	 <p style="text-align: center;">$C = 100\ \text{мкФ}$</p> <p style="text-align: center;">$J(t)\ [\text{МА}]$</p>  <p style="text-align: center;">$t\ [\text{МкС}]$</p>	<p>1. Построить осциллограммы $u(t)$, $i(t)$, $p(t)$, $w(t)$ реактивного элемента. 2. Проставить масштабы по осям.</p>
3		<p>1. Определить эквивалентную емкость при $C_1=1\ \text{мкФ},$ $C_2=2\ \text{мкФ},$ $C_3=3\ \text{мкФ}$</p>
4		<p>1. Записать уравнение по второму закону Кирхгофа.</p>
5		<p>1. Определить количество уравнений по законам Кирхгофа. 2. Записать систему независимых уравнений по законам Кирхгофа.</p>

6

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1(t) - i_2(t) - J_3(t) = 0 \\ R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - e_2(t) = - \left[\frac{1}{C2} \int_0^t i_{C2}(t) dt + U_{C2}(0) \right] \\ - \left[\frac{1}{C2} \int_0^t i_{C2}(t) dt + U_{C2}(0) \right] + R_3 i_3(t) = U_{J3}(t) \end{array} \right.$$

1. Восстановить схему,
проставить УПН токов ветвей
и напряжений источников
тока.

Тема 3

Расчет простых цепей при постоянных токах и напряжениях

Система уравнений (дифференциальных), составленная по законам Кирхгофа является достаточной для анализа цепи при любых сигналах. Если $e(t) = E = \text{Const}$ и $J(t) = J = \text{Const}$ не зависят от времени, то и реакции цепи $i_K(t) = I_K = \text{Const}$, $u_K(t) = U_K = \text{Const}$ также будут постоянными, если речь идет об установившемся процессе. В дифференциальных уравнениях $\frac{di_K}{dt} = 0$; $\frac{du_K}{dt} = 0$. Поскольку

$u_{LK} = L \frac{di_K}{dt} \pm M \frac{di_M}{dt}$, то $u_L = 0$, т.е. любая индуктивность должна быть на схеме

заменена закороткой. $i_C = C \frac{du_C}{dt} = 0$, поэтому любая ветвь с конденсатором должна

быть разомкнута. Если в результате анализа требуется определить ток через индуктивность и напряжение на конденсаторе, то надо будет искать ток, протекающий по соответствующей закоротке, и напряжение на разрыве цепи, где был конденсатор.

В результате таких схемных преобразований останутся источники ЭДС и тока и резисторы. Описание преобразованной схемы по Кирхгофу даст систему алгебраических уравнений. Процедура преобразований в схеме конечно проще, чем процедура составления дифференциальных уравнений и затем преобразования их к алгебраическим. Однако идея эквивалентных преобразований схемы имеет гораздо более широкое применение. Ниже приводятся широко распространенные приемы преобразований, используемые при анализе цепей.

Последовательное соединение резисторов (рис. 3-1)

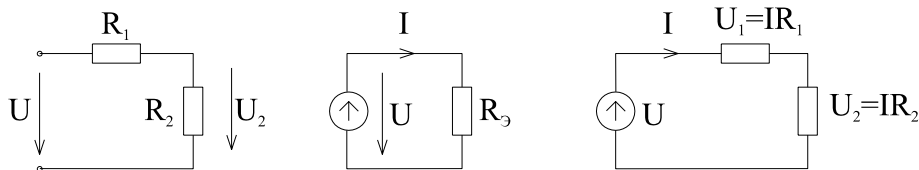


Рис. 3-1

На рисунке показана процедура анализа фрагмента цепи состоящей из двух последовательно соединенных резисторов R_1 и R_2 .

1. $R_{\Sigma} = R_1 + R_2$ эквивалентная замена.

2. $I_2 = I_1 = \frac{E}{R_{\Sigma}}$ - закон Ома.

3. $U_1 = IR_1$, $U_2 = IR_2$ - закон Ома.

4. $U_1 = U \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ и $U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}$.

Конечно, практически нет необходимости так подробно это записывать. Обычно для полного анализа сразу вычисляют:

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2}, \quad U_1 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{и} \quad U_2 = U \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

последние две формулы являются формулами делителя напряжения.

Параллельное соединение элементов - делитель тока

При анализа фрагмента цепи, содержащего два параллельно соединенных резистора (рис. 3-2) можно рассуждать в следующем порядке:

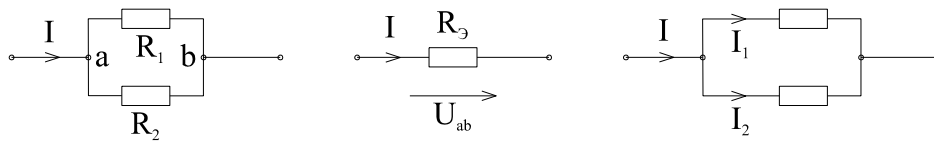


Рис. 3-2

1. Эквивалентная замена:

$$\frac{1}{R_{\gamma}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{или} \quad R_{\gamma} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2};$$

2. По закону Ома:

$$U_{ab} = I R_{\gamma};$$

3. Формулы делителя тока:

$$I_1 = \frac{U_{ab}}{R_1} = I \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2) R_1} = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Используя только эти два приема, можно анализировать довольно сложные схемы.

Например, для лестничной схемы, используя несколько раз преобразования, последовательных и параллельных ветвей можно получить одно эквивалентное сопротивление, как показано на рис. 3-3.

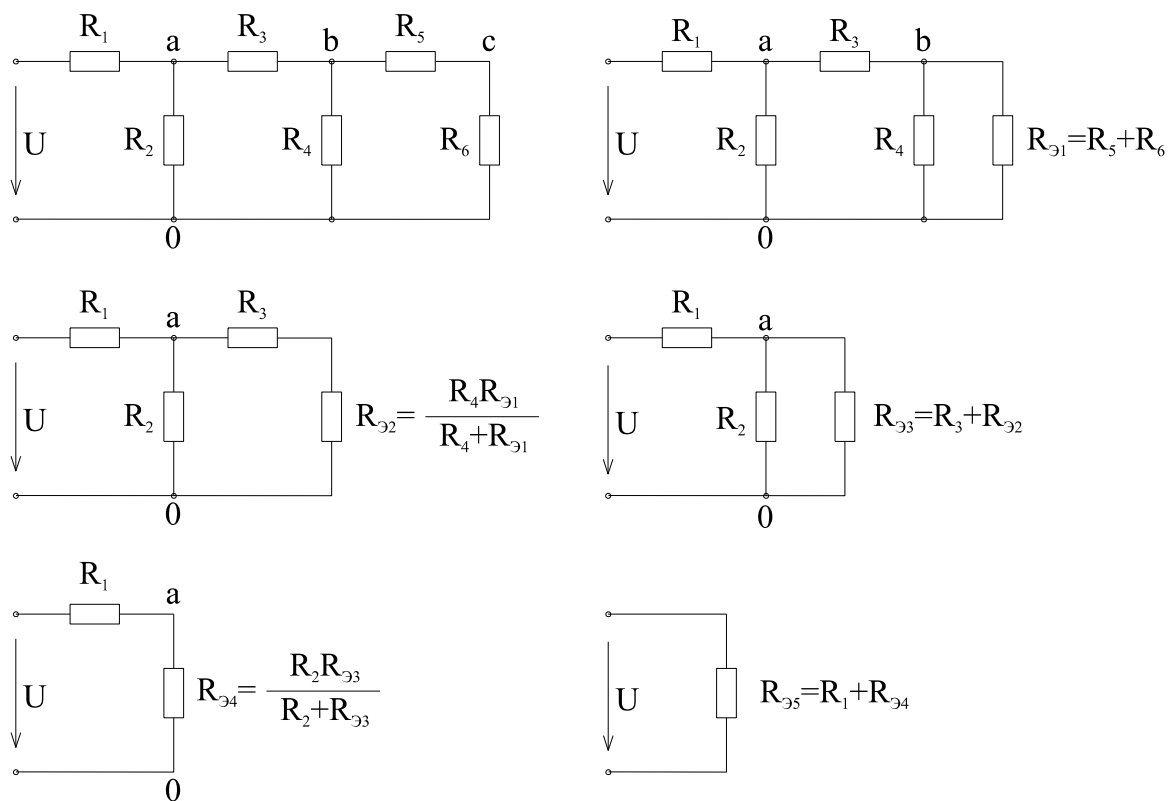


Рис. 3-3

Иногда, выразив параллельные ветви проводимостями: $G_2 = \frac{1}{R_2}$; $G_4 = \frac{1}{R_4}$ и т.д., получают ответ в виде лестничной дроби:

$$R_{э5} = R_1 + \frac{1}{G_2 + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{G_4 + \frac{1}{R_5 + \frac{1}{G_6}}}}}$$

Дальнейший анализ проводится в обратной последовательности:

1. Находится ток $I_1 = \frac{U}{R_{э5}}$

2. По формуле делителя напряжения находится напряжение:

$$U_{a0} = U \frac{R_{э4}}{R_1 + R_{э4}}$$

3. По формуле делителя тока находятся токи:

$$I_2 = I_1 \frac{R_{э3}}{R_2 + R_{э3}}; I_3 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_{э3}}$$

4. Продолжая подобную процедуру:

$$U_{b0} = I_3 R_{\dot{Y}2}; I_4 = I_3 \frac{R_{\dot{Y}1}}{R_4 + R_{\dot{Y}1}} \text{ и т.д. находятся все остальные токи и напряжения.}$$

При известных навыках методом преобразований легко решаются задачи анализа довольно сложных цепей с последовательно-параллельным соединением резисторов.

Существенно расширяются возможности применения метода преобразований, если освоить применение преобразований треугольника в трехлучевую звезду.

Например, решить задачу анализа мостовой схемы непосредственно затруднительно. Но если три сопротивления R_{12} , R_{23} , R_{31} преобразовать в сопротивления R_1 , R_2 , R_3 , то дальше задача решается просто. (См. рис. 3-4). Часто требуется и обратное преобразование

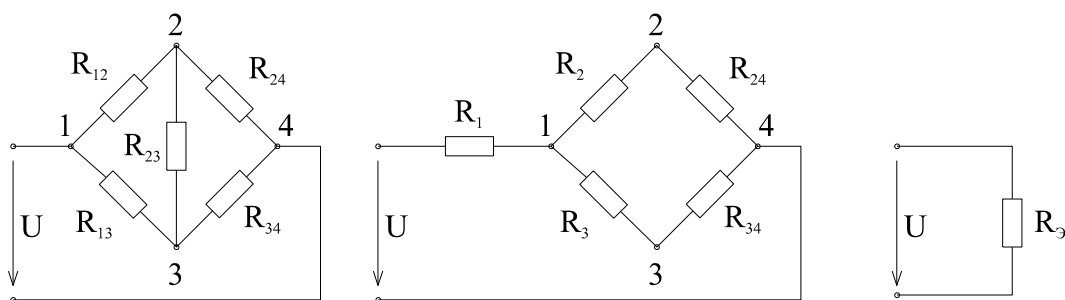


Рис. 3-4

Рассмотрим это преобразование:

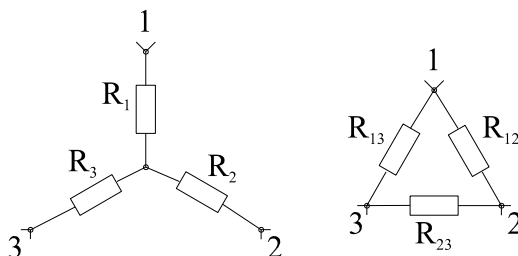


Рис. 3-5

Принцип эквивалентности требует, чтобы замена сопротивлений R_1 , R_2 , R_3 на R_{12} , R_{23} , R_{31} (рис. 3-5) во фрагменте схемы не повлияла на распределение токов и напряжений в остальной части схемы.

Рассмотрим сопротивление между точкой 2 и 3 в обеих схемах при обрыве первого резистора:

$$R_3 + R_2 = \frac{R_{23} (R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

при обрыве второго:

$$R_1 + R_3 = \frac{R_{31} (R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

при обрыве третьего:

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12} (R_{31} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Решая систему полученных уравнений (например сложить второе и третье уравнения и вычесть из них первое), получим:

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

Используя соображения симметрии, путем круговой замены индексов:

$$R_2 = \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_3 = \frac{R_{31} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

Если последовательно вычислить проводимости в обеих схемах при закорачивании зажимов 1-2; 2-3; 3-1, то получим подобные уравнения для проводимостей при обратном переходе от “звезды” к “треугольнику”:

$$G_{31} + G_{23} = \frac{G_3 (G_1 + G_2)}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$G_{31} + G_{12} = \frac{G_1 (G_2 + G_3)}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$G_{12} + G_{23} = \frac{G_2 (G_1 + G_3)}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

Далее (1+2-3)

$$G_{31} = \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}; \quad G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}; \quad G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

В связи с простотой получения формул преобразования из “треугольника” в “звезду” и обратно, нет особой необходимости запоминать их.

Любой пассивный двухполюсник можно представить как некоторое эквивалентное сопротивление, что с очевидностью доказывается, если представить резистор как отношение $R_Y = \frac{U_{\dot{A}\dot{O}}}{I_{\dot{A}\dot{O}}}$. Отсюда следует, что свертка различным образом соединенных

двухполюсников в эксперименте равнозначна измерению входного тока при произвольно выбранном напряжении.

Следующим, часто применяемым преобразованием, является метод эквивалентного генератора.

Докажем теорему: любой активный двухполюсник можно заменить реальным источником напряжения с величиной ЭДС равной напряжению холостого хода и внутренним сопротивлением равным сопротивлению короткого замыкания.

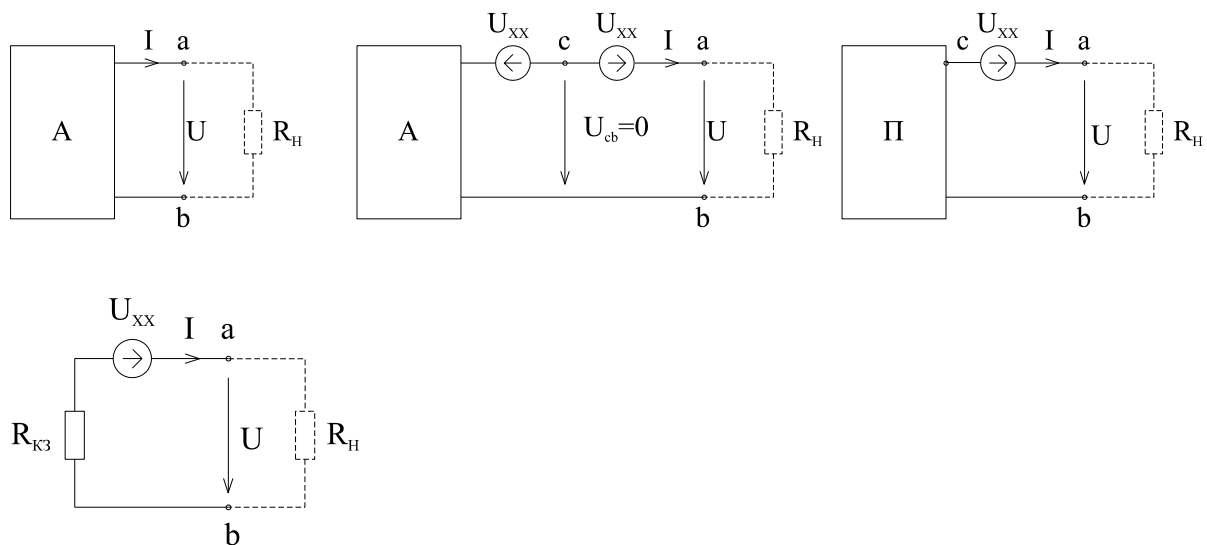


Рис. 3-6

Доказывается эта теорема показом эквивалентности изображенных на рис. 3-6 схем с точки зрения напряжения и тока нагрузки (R_H). Действительно, включение двух одинаковых идеальных источников с разнонаправленным напряжением, в частности равным напряжению холостого хода (при $R_l = \infty$) не изменит тока и напряжения нагрузки. При этом $U_{cb} = 0$, поэтому активный двухполюсник вместе со встречно направленным источником U_{XX} можно заменить пассивным двухполюсником. Последний заменяется сопротивлением короткого замыкания, названным так потому, что в эксперименте оно может быть получено, если измерить ток короткого замыкания ($R_H = 0$) $R_{K.3} = \frac{U_{XX}}{I_{KS}}$.

Теорема доказана.

Преобразования источников

От реального источника ЭДС легко перейти к источнику тока (рис. 3-7).

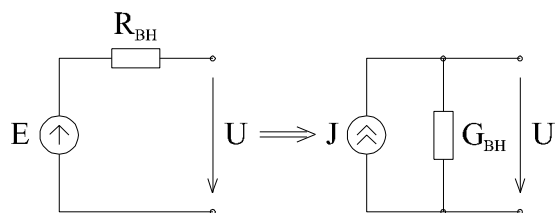


Рис. 3-7

$$J = \frac{E}{R_{BH}}; G_{BH} = \frac{1}{R_{BH}}.$$

Пример:

Определить условие передачи максимальной мощности от активного двухполюсника в нагрузку.

По теореме об эквивалентном генераторе схема преобразуется к виду, изображенному на рис. 3-8.

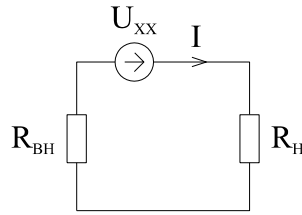


Рис. 3-8

$$I = \frac{U_{XX}}{R_{BH} + R_H}; P_H = I^2 R_H = \frac{U_{XX}^2 R_H}{(R_{BH} + R_H)^2}$$

Максимум P_H при $\frac{d P_H}{d R_H} = 0$

$$\frac{d P_H}{d R_H} = U_{XX}^2 \frac{(R_{BH} + R_H)^2 - R_H 2(R_{BH} + R_H)}{(R_{BH} + R_H)^4} = 0, R_H = R_{BH}.$$

Максимум мощности передается в нагрузку при сопротивлении нагрузки равном внутреннему сопротивлению источника (один из вариантов согласования генератора и нагрузки).

Эквивалентные преобразования при последовательном соединении реальных источников ЭДС и параллельном соединении реальных источников тока не представляют трудностей и показаны на рис. 3-9.

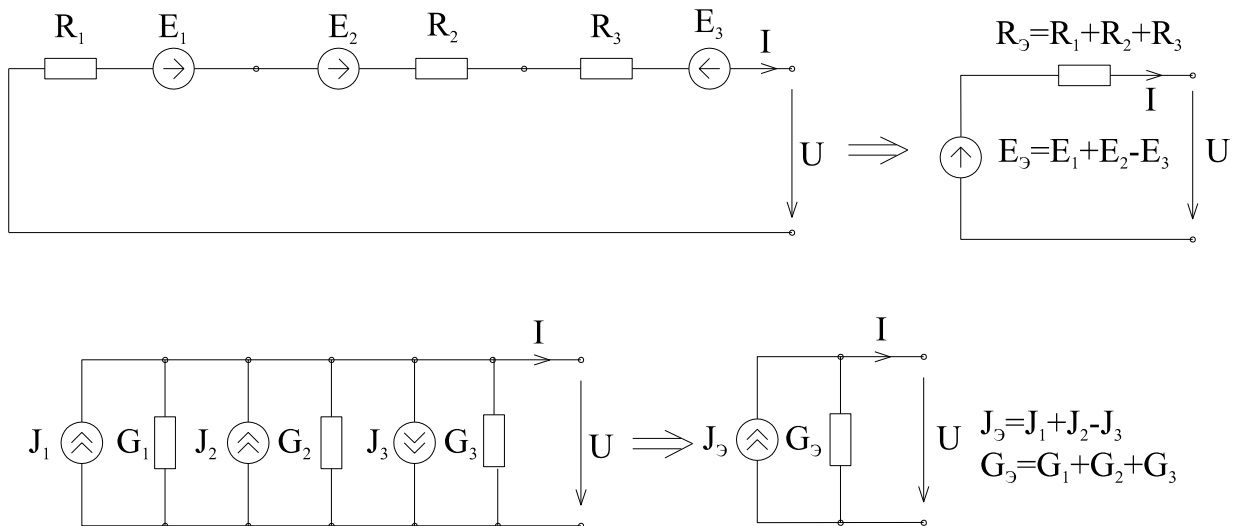


Рис. 3-9

Если же требуется, например, преобразовать схему при параллельном соединении активных двухполюсников, то здесь полезно перейти предварительно к источникам тока (рис. 3-10).

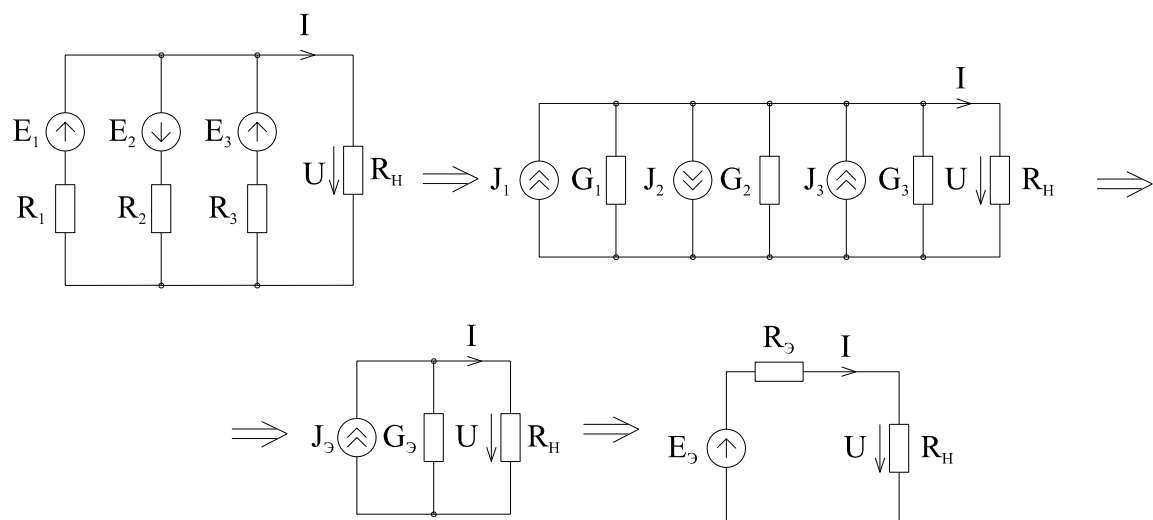


Рис. 3-10

$$J_K = \frac{E_K}{R_H}; G_K = \frac{1}{R_K}; J_{\Sigma} = \sum J_K; G_{\Sigma} = \sum G_K$$

Наконец

$$E_{\Sigma} = \frac{J_{\Sigma}}{G_K}; R_{\Sigma} = \frac{1}{G_{\Sigma}}.$$

Обобщения закона Ома

1. Для пассивной ветви (рис. 3-11).

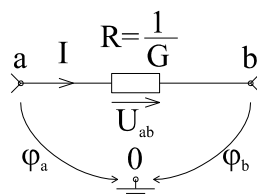


Рис. 3-11

$$I = U_{ab} G$$

или, если ввести понятие потенциал узла - напряжение между заданным узлом и узлом, потенциал которого принят за ноль:

$$I = (\varphi_a - \varphi_b) G$$

2. Для ветви с источником ЭДС. (рис. 3-12).

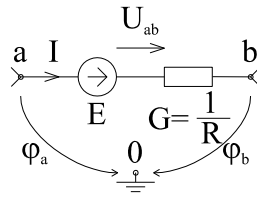


Рис. 3-12

По контуру: a-0-b-a

$$\varphi_a - \varphi_b \stackrel{\text{по}}{\sim} IR = -E$$

или

$$I = [(\varphi_a - \varphi_b) + E] G$$

При записи требуется, конечно, обращать внимание на выбранные положительные направления токов, потенциалов и ЭДС.

3. Для ветви с источником тока. (рис. 3-13).

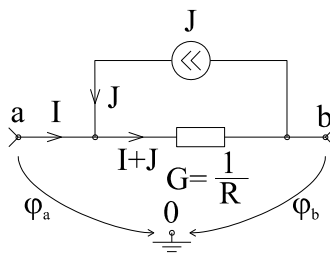


Рис. 3-13

По контуру: a-0-b-a

$$\varphi_a - \varphi_b \stackrel{\text{по}}{\sim} (I + J) R = 0$$

$$I = (\varphi_a - \varphi_b) G - J.$$

4 Для обобщенной ветви. (рис. 3-14).

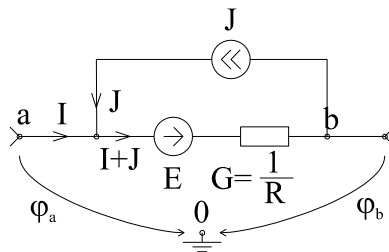


Рис. 3-14

По контуру: : a-0-b-a

$$(\varphi_a - \varphi_b) \stackrel{\text{по}}{\sim} (I + J) R = -E$$

$$I = [(\varphi_a - \varphi_b) \stackrel{\text{по}}{\sim} E] G - J.$$

Метод двух узлов

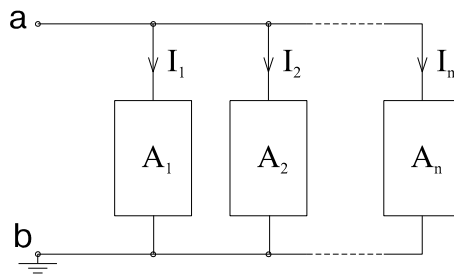


Рис. 3-15

Часто встречаются схемы, в которых все двухполюсники включены параллельно (рис. 3-15). Двухполюсники могут быть как активными, так и пассивными. В этом случае можно принять потенциал одного из узлов за ноль ($\varphi_b \approx 0$) и определить потенциал φ_a . Если потенциал φ_a определен, то в зависимости от конкретного содержания двухполюсника, ток через него определяется по одной из форм записи закона Ома. Для определения потенциала узла φ_a , приняв в формуле для обобщенной ветви $\varphi_b \approx 0$ и просуммировав все токи, получим по первому закону Кирхгофа:

$$\sum_1^n I_K = \sum_1^n [\varphi_a + E_K] G_K - J_K = 0$$

отсюда $\varphi_a = \frac{-\sum_1^n E_K G_K + J_K}{\sum_1^n G_K}$

По этой формуле определяется потенциал узла. В литературе часто встречается формула при отсутствии источников тока в предположении, что источники ЭДС, направленные к узлам, положительны:

$$\varphi_a = \frac{\sum_1^n E_K' G_K}{\sum_1^n G_K}$$

Пример. Определить ток в R_H . (рис. 3-16)

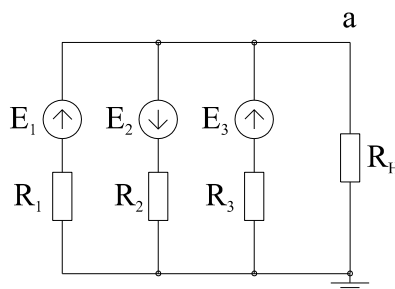


Рис. 3-16

1. Находим потенциал:

$$\varphi_a = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_H}}$$

2. Находим ток I_H :

$$I_H = \frac{\varphi_a}{R_H}.$$

Принцип наложения (суперпозиции)

Принцип наложения вытекает из физического принципа независимости действия сил в линейной системе. По этому принципу в схеме, где имеется два и более независимых источника, можно задачу анализа (поиск токов в ветвях и напряжений на элементах) искать отдельно для каждого источника, а результат алгебраически суммировать. При удалении какого-либо источника надо сохранять его внутреннее сопротивление. Это, практически, означает, что идеальный источник ЭДС закорачивается, а ветвь с идеальным источником тока разрывается.

Пример. Определить токи в ветвях (рис. 3-17).

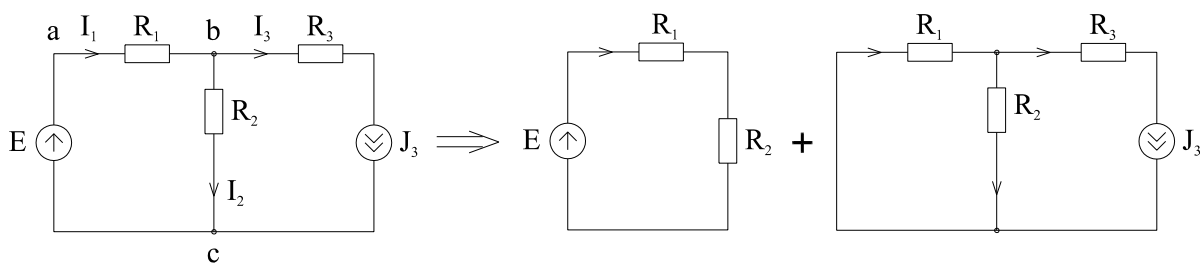


Рис. 3-17

Представляем схему, как результат “сложения” двух схем с источником ЭДС и с источником тока. Расчетные данные удобно свести в таблицу токов:

	R_1	R_2	R_3
Ток через резистор R_K от действия источника E_1	$\frac{E_1}{R_1 + R_2}$	$\frac{E_1}{R_1 + R_2}$	0
Ток через резистор R_K от действия источника J_3	$J \frac{R_2}{R_1 + R_2}$	$-J \frac{R_1}{R_1 + R_2}$	J
Ток через резистор R_K	$\frac{E_1 + JR_2}{R_1 + R_2}$	$\frac{E_1 - JR_1}{R_1 + R_2}$	J

Примечания:

1. Знаки токов принимаются относительно одинаково выбранных для всех схем условных направлений.

2. Квадратичные формы (мощность, энергия) рассчитываются только для суммарных токов.

Хорошей проверкой результатов анализа цепи является расчет баланса мощности. Как и для любой замкнутой системы $\sum P_K = 0$. Подсчитывается мощность, рассеиваемая каждым резистором $P_K = I_K^2 R_K > 0$ и каждым источником $P_K = UI$. Токи, конечно, берутся суммарные. Следует обратить внимание, что для резисторов P_K всегда положительны. Что касается мощности источника, то если истинное напряжение (а не ЭДС) и ток источника направлены встречно, то $P_K < 0$, что означает отдачу энергии цепи. Если $P_K > 0$, то источник потребляет энергию. Для определения величины и знака напряжения на источнике тока необходимо составить контурное уравнение по любому контуру, содержащему источник тока:

$$\sum U = 0.$$

Контурное уравнение наглядно можно представить на потенциальной диаграмме. Для ее составления по оси абсцисс откладывают сопротивления соответствующих участков цепи, а по оси ординат - потенциалы в соответствующих точках. Составим диаграмму для контура а b с а предыдущего примера (рис. 3-18).

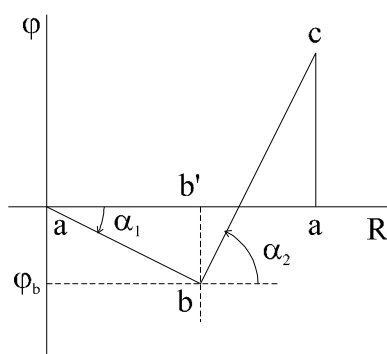


Рис. 3-18

Для точки а примем потенциал $\varphi_a = 0$. Отрезок ab' равен в выбранном масштабе сопротивлению R_1 . Поскольку ток течет в направлении ab , потенциал точки b меньше, чем точки a $\varphi_b < \varphi_a$.

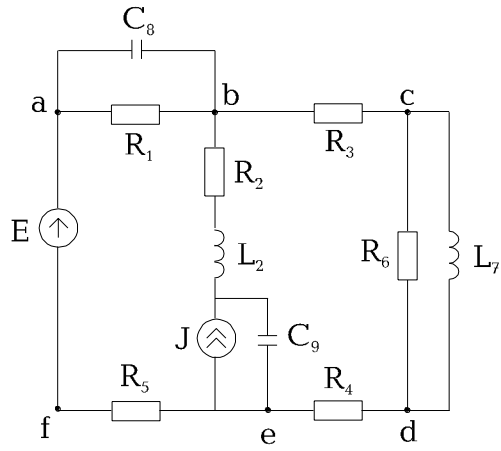
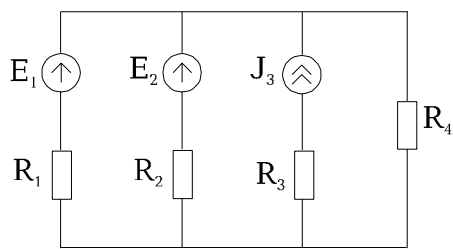
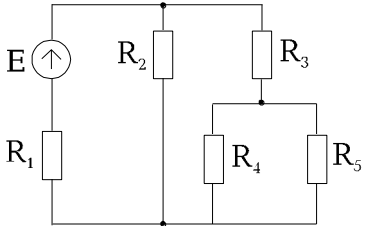
Пусть $E_1 - IR_1 < 0$, тогда потенциал точки c больше, чем b $\varphi_c > \varphi_b$. Величина отрезка ca соответствует $(-U_{ac})$; $\kappa \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = I_1 < 0$, а $\kappa \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = I_2 > 0$.

Изложенные в настоящей главе приемы расчета в различных сочетаниях, оставляя большие возможности для творчества, при известных навыках, позволяют быстро, без специальных вычислительных средств анализировать довольно сложные цепи.

Контрольные вопросы к теме 3

1. Как преобразовать электрическую цепь, если в ней действуют постоянные токи и напряжения?
2. Запишите формулы делителя тока и делителя напряжения.
3. В чем сущность метода эквивалентных преобразований при анализе электрических цепей?
4. Как выразить эквивалентную замену треугольника в звезду и обратно?
5. Докажите теорему об эквивалентном генераторе.
6. Как проводится эквивалентная замена при различных соединениях активных двухполюсников?
7. Выразите математические соотношения для обобщенного закона Ома.
8. В чем сущность принципа наложения? Каковы ограничения для применения этого принципа?
9. Что означает отрицательная мощность для активного двухполюсника?
10. Что такое потенциальная диаграмма?

Контрольные задачи к теме 3

<p>1</p>	 <p>$E_1=30\text{ В}$, $J=3\text{ А}$, $L_2=L_7=10\text{ Гн}$, $R_1=R_2=R_5=R_6\text{ Ом}$, $R_3=2\text{ Ом}$, $R_4=3\text{ Ом}$, $C_8=C_9=1\text{ мФ}$</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Определить токи через резисторы (методом наложения). 2. Определить напряжения на конденсаторах. 3. Определить токи через катушки. 4. Составить баланс мощности. 5. Составить потенциальную диаграмму по контуру a, b, c, d, e, f.
<p>2</p>	 <p>$E_1=5\text{ В}$, $E_2=10\text{ В}$, $J=1\text{ А}$, $R_1=1\text{ Ом}$, $R_2=3\text{ Ом}$, $R_3=10\text{ Ом}$, $R_4=5\text{ Ом}$</p>	<p>Определить напряжение и ток резистора R_4.</p>
<p>3</p>	 <p>$R_1=3\text{ Ом}$, $R_2=10\text{ Ом}$, $R_3=5\text{ Ом}$, $R_4=10\text{ Ом}$, $R_5=10\text{ Ом}$, $E=16\text{ В}$</p>	<p>Определить (устно!):</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Входное сопротивление. 2. Входной ток. 3. Мощность источника. 4. Напряжение на резисторе R_5.

Тема 4

Анализ простых цепей при синусоидальных токах и напряжениях

§ 1. Характеристики и свойства синусоидальных сигналов

Синусоидальный сигнал это периодические, изменяющиеся во времени ток, напряжение или ЭДС.

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$$

I_m ; U_m ; E_m - соответствующие амплитудные значения $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ - круговая частота.

f- частота

T - период.

ψ_i ; ψ_u ; ψ_e - начальные фазы функций.

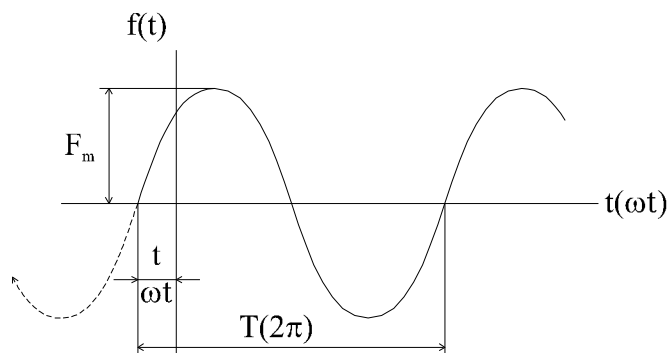


Рис. 4-1

Поскольку анализ цепи проводится в установившемся режиме, допускается, что с момента начала включения сигнала прошло времени достаточно, чтобы амплитуды токов и напряжений перестали изменяться. После этого за начало отсчета можно принять произвольный момент. Неопределенность ψ_i ; ψ_u ; ψ_e ликвидируется тем, что одну из начальных фаз сигнала (или реакции) принимают за нулевую. Ось абсцисс градуируют либо в единицах времени t, либо в единицах углов - градусах или радианах (ωt) .

Выяснение вопроса: какому постоянному току с энергетической точки зрения соответствует заданный синусоидальный ток, приводит к понятию среднеквадратичного, эффективного значения тока (напряжения или ЭДС).

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_m^2 \cdot \sin^2 \omega t \cdot d(\omega t)} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) \cdot d(\omega t)} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m$$

Этот ток (напряжение) имеют еще наименование действующих - важнейшая характеристика синусоидального сигнала. Действующее значение принято обозначать соответствующей буквой без всякого индекса (как постоянный ток и напряжение). Говоря о величине переменного тока или напряжения, если нет специальной оговорки, имеют ввиду именно эту характеристику.

Среднее по модулю значение функции (среднее значение равно нулю):

$$I'_{CP} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \cdot \sin \omega t dt = \frac{-2}{T} \cdot \frac{I_m T}{2\pi} \Big|_0^{T/2} \cos \omega t = \frac{2}{\pi} I_m = 0,636 I_m$$

Встречаются характеристики:

- коэффициент амплитуды: $K_a = \frac{I_m}{I} = \sqrt{2} = 1,41$
- коэффициент формы: $K_{\hat{o}} = \frac{I}{I'_{\hat{o}}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$

Из многих свойств синусоидальных функций выделим важнейшие для дальнейшего изложения:

1. Сложение двух (и более) синусоидальных функций одинаковой частоты дает также синусоидальную функцию той же частоты. Действительно, сложим, например, два тока:

$$\begin{aligned} I_{m1} \sin(\omega t + \psi_1) + I_{m2} \sin(\omega t + \psi_2) &= I_{m1} \sin \omega t \cos \psi_1 + \\ &+ I_{m1} \cos \omega t \sin \psi_1 + I_{m2} \sin \omega t \cos \psi_2 + I_{m2} \cos \omega t \sin \psi_2 = \\ &= (I_{m1} \cos \psi_1 + I_{m2} \cos \psi_2) \sin \omega t + (I_{m1} \sin \psi_1 + I_{m2} \sin \psi_2) \cos \omega t = \\ &= I_m \sin(\omega t + \psi) \end{aligned}$$

$$\text{где } I_m = \sqrt{(I_{m1} \cos \psi_1 + I_{m2} \cos \psi_2)^2 + (I_{m1} \sin \psi_1 + I_{m2} \sin \psi_2)^2}$$

$$\psi = \arctg \frac{I_{m1} \sin \psi_1 + I_{m2} \sin \psi_2}{I_{m1} \cos \psi_1 + I_{m2} \cos \psi_2}$$

Заметим, что операция сложения двух токов в таком виде, хотя и доказывает выделенное свойство, оказывается очень громоздкой.

2. Дифференцирование синусоидальной функции даст синусоидальную функцию той же частоты. Если $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$, то

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \omega I_m \cos(\omega t + \psi_i) = \omega I_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= A \cdot \sin(\omega t + \psi) \end{aligned}$$

$$\text{где } A = \omega I_m$$

$$\psi = \left(\psi_i + \frac{\pi}{2} \right).$$

3. Интегрирование синусоидальной функции дает синусоидальную функцию той же частоты. Для определенности вычислим напряжение на конденсаторе при синусоидальном токе.

$$\begin{aligned}
U_C &= \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) = \frac{1}{C} \int_0^t I_m \sin(\omega t + \psi_i) dt + u_C(0) = \\
&= \frac{-1}{\omega C} I_m \Big|_0^t \cos(\omega t + \psi_i) + u_C(0) = \frac{I_m}{\omega C} \left(\sin\left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}\right) \right) = \\
&= \frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t + \psi)
\end{aligned}$$

Необходимо принять $\frac{I_m \cos \psi_i}{\omega C} + u_C(0) = 0$, т.к. при синусоидальном токе, протекающем через

конденсатор, среднее напряжение равно нулю (заряды не могут накапливаться).

Если вспомнить, что интегро-дифференциальные уравнения по Кирхгофу представляют из себя суммы синусоидальных функций их производных и интегралов, то можно сделать важный вывод: если в цепи действуют источники синусоидального тока одной и той же частоты, то все реакции будут синусоидальными токами и напряжениями той же частоты.

§ 2. Изображение синусоидальных функций в виде векторов и комплексных чисел

Изображение синусоидальной функции в виде вращающегося с угловой скоростью ω вектора заложено в самом определении синуса как ординаты конца радиуса окружности единичного радиуса, проведенной через начало координат.

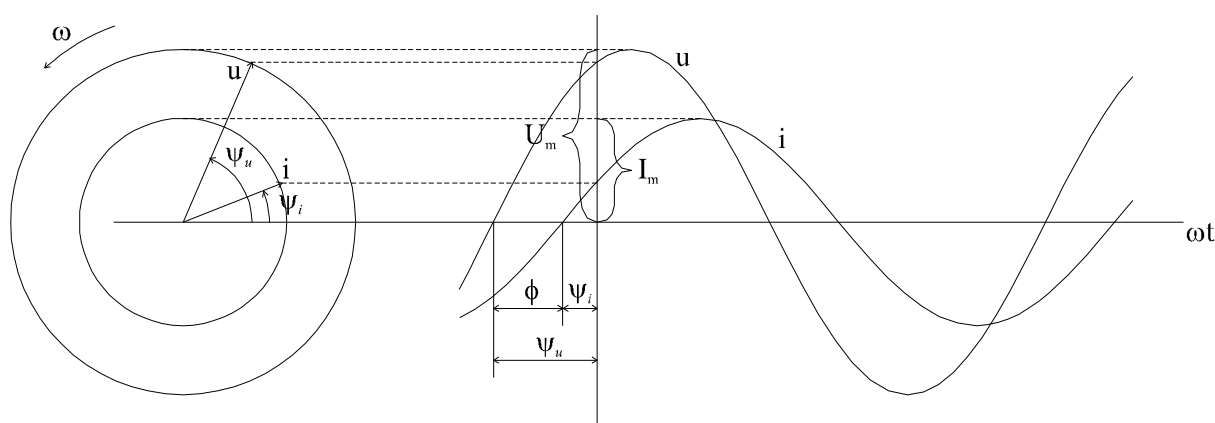


Рис. 4-2

На рис. 4-2 изображены две синусоидальные функции $u(t)$ и $i(t)$ одинаковой частоты. Слева проведены (из одного центра) две окружности радиусом I_m и U_m и обозначены вращающиеся с угловой скоростью ω два вектора с учетом начальных фаз ψ_u и ψ_i . Угол между ними равен $\psi_u - \psi_i = \varphi$.

Принято $\varphi > 0$, если $\psi_u > \psi_i$. Если подразумевать, что вектора вращаются с угловой скоростью ω , то они содержат всю информацию о синусоидальных функциях $i(t)$ и $u(t)$ - их величины равны I_m и U_m , а начальные фазы - ψ_i и ψ_u .

Изобразив не величины I_m и U_m , а $\frac{U_m}{\sqrt{2}} = U$, $\frac{I_m}{\sqrt{2}} = I$, получим векторную диаграмму, т.е.

относительное расположение векторов \dot{I} и \dot{U} , которое сохраняет угол φ не зависимо от конкретного значения t . Это называется векторной диаграммой.

Перенесем вектора на комплексную плоскость (рис. 4-3).

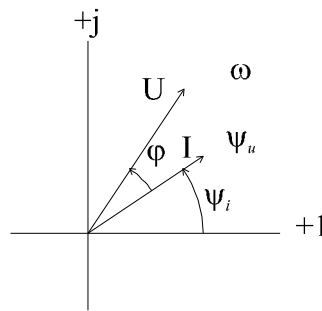


Рис. 4-3

Если иметь ввиду, что оператор $e^{j\alpha}$ означает поворот вектора на комплексной плоскости на угол α

против часовой стрелки, то получим для тока $I \cdot e^{j(\omega t + \psi_i)} = I \cdot e^{j\psi_i} \cdot e^{j\omega t} = \dot{I} \cdot e^{j\omega t}$, где $\dot{I} = I \cdot e^{j\psi_i}$,

вектор \dot{I} полностью сохраняет информацию о синусоидальной функции $i(t)$: $I_m = \sqrt{2} I$ - амплитуда, ψ_i - начальная фаза. Это обычно записывается:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \doteq \dot{I}.$$

Множитель $e^{j\omega t}$ можно опускать т.к. эти вектора будут применяться в законах Ома и Кирхгофа (и их комбинациях), и он содержится как в левой, так и в правой части уравнений и в результате сокращения просто излишен.

В тригонометрической форме:

$$\sqrt{2} \dot{I} e^{j\omega t} = I_m \cos(\omega t + \psi_i) + j \sin(\omega t + \psi_i)$$

поэтому для обратного перехода от комплексного изображения к функции времени достаточно с учетом $\sqrt{2}$ и $e^{j\omega t}$ взять коэффициент при мнимой части комплексного изображения.

Практически применяются комплексные изображения в различных формах:

$\dot{A} = a + jb$ - алгебраическая,

$\dot{A} = A \cdot \cos \psi + j A \sin \psi$ - тригонометрическая,

$\dot{A} = A \cdot e^{j\psi}$ - показательная,

где $A = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\psi = \arctg \frac{b}{a}$

Иногда применяют условную запись:

$$\dot{A} = A \angle \psi.$$

Вспомним операцию дифференцирования:

$$\frac{di}{dt} = \omega I_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right) \doteq \frac{\omega \dot{I}_m}{\sqrt{2}} e^{j\omega t} e^{j\psi} e^{j\frac{\pi}{2}},$$

с учетом того, что

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j$$

получим $\frac{di}{dt} \doteq j\omega I e^{j\psi} e^{j\omega t} = j\omega \dot{I} e^{j\omega t}$

т.е. изображению производной на комплексной плоскости соответствует умножение на $j\omega$.

Аналогично интегрированию в области изображений соответствует деление на $j\omega$.

$$\int i dt \doteq \frac{\dot{I}}{j\omega}$$

Эти обстоятельства приводят к алгебраизации интегро-дифференциальных уравнений.

Решим для примера задачу нахождения тока в схеме (рис. 4-4) с применением разного математического аппарата.

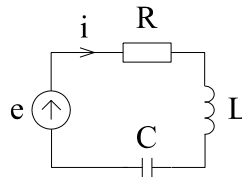


Рис. 4-4

1. Непосредственное интегрирование.

Интегро-дифференциальное уравнение

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_c(0) = E_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

Приняв $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$,

получим:

$$RI_m \sin(\omega t + \psi_i) + \omega LI_m \cos(\omega t + \psi_i) + \frac{1}{\omega C} \cos(\omega t + \psi_i) + \frac{I_m}{\omega C} + U_c(0) = E_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

т.к. в правой части уравнения синусоидальная функция надо потребовать

$$\frac{I_m}{\omega C} + U_c(0) = 0$$

$$I_m \left[R \sin(\omega t + \psi_i) + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos(\omega t + \psi_i) \right] = E_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Дальнейшие преобразования:

$$I_m \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \left[\cos \alpha \sin(\omega t + \psi_i) + \sin \alpha \cos(\omega t + \psi_i) \right] = E_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

$$\text{где } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}; \quad \operatorname{Cos} \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \quad \operatorname{Sin} \alpha = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$I_m \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \operatorname{Sin}(\omega t + \alpha + \psi_i) = E_m \operatorname{Sin}(\omega t + \psi_u)$$

Из этого уравнения вытекает:

$$I_m \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = E_m; \quad \alpha + \psi_i = \psi_u; \quad \psi_u - \psi_i = \alpha = \varphi.$$

$$\text{Следовательно } i = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \operatorname{Sin}(\omega t + \psi_i), \text{ если } \psi_u = 0 \text{ (выбор начала отсчета}$$

$$\text{времени), то } i = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \operatorname{Sin}(\omega t - \varphi) - \text{задача решена.}$$

$$\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = Z - \text{имеет размерность сопротивления.}$$

R - активное сопротивление.

$$X = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) - \text{реактивное сопротивление.}$$

ωL и $\frac{1}{\omega C}$ - соответственно индуктивное и емкостное сопротивления.

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X}{R} - \text{сдвиг по фазе между напряжением и током}$$

если $\omega L - \frac{1}{\omega C} > 0$, то $\varphi > 0$ - ток отстает от напряжения по фазе.

если $\omega L - \frac{1}{\omega C} < 0$, то $\varphi < 0$ - ток опережает напряжение по фазе.

Комплексный метод

В интегро-дифференциальном уравнении заменим функции времени их комплексными изображениями:

$$R\dot{i} + j\omega L\dot{i} + \frac{1}{j\omega C}\dot{i} = \dot{E}; \quad \dot{i} \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] = \dot{E}$$

$$i = \frac{\dot{E}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{-j\varphi}, \text{ где } \varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Для принятых выше обозначений

$\dot{I}(R + jX) = \dot{E}$ - закон Ома в комплексной форме.

комплекс $R + jX = \bar{Z}$ - комплексное сопротивление

$\bar{Z} = Z \cdot e^{j\varphi} = Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi$, т.е.

$R = Z \cdot \cos \varphi$; $X = Z \cdot \sin \varphi$.

После нахождения комплекса тока \dot{I} легко выразить i , взяв мнимую часть без j (конечно с учетом множителя $e^{j\omega t}$, показывающего вращение вектора и множителя $\sqrt{2}$, если расчет велся в эффективных значениях).

$$i = \frac{E\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

Очень наглядное решение можно получить путем построения векторной диаграммы (рис. 4-5):

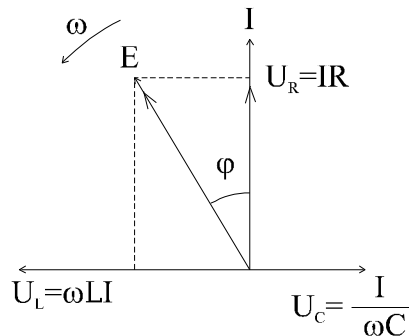


Рис. 4-5

1. Отложим вектор \dot{I} в выбранном масштабе в произвольном направлении.
2. Напряжение на активном сопротивлении $\dot{U}_R = \dot{I}R$ совпадает по фазе с током.
3. Напряжение на катушке индуктивности

$$\dot{U}_L = \dot{I} j \omega L = \omega L \dot{I} e^{j\pi/2}$$

Опережает вектор тока на $\frac{\pi}{2}$.

4. Напряжение на конденсаторе отстает от тока на $\frac{\pi}{2}$:

$$\dot{U}_C = \frac{\dot{I}}{j\omega C} = \frac{\dot{I}}{\omega C} e^{-j\pi/2}$$

5. Суммируя вектора \dot{U}_R и \dot{U}_L и \dot{U}_C получаем по закону Кирхгофа вектор \dot{E} .

6. Из геометрических соотношений получаем все приведенные выше формулы

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}; E = I \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}; i = \sqrt{2} E \sin(\omega t - \varphi).$$

Рассмотрим другой пример (рис 4-6) параллельного соединения.

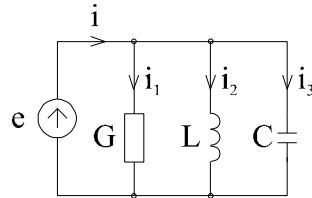


Рис. 4-6

1. Непосредственное интегрирование по первому закону Кирхгофа:

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = e G + \frac{1}{L} \int_0^t e dt + i_L(0) + C \frac{de}{dt}$$

$$I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = E_m \cdot G \cdot \sin(\omega t + \psi_U) + \frac{1}{L} \int_0^t E_m \cdot \sin(\omega t + \psi_U) dt + i_L(0) + C \frac{d[E_m \cdot \sin(\omega t + \psi_U)]}{dt}$$

$$I_m \sin(\omega t + \psi_i) = E_m \left[G \cdot \sin(\omega t + \psi_U) - \frac{1}{\omega L} \cos(\omega t + \psi_U) + \frac{1}{\omega L} + \frac{i_L(0)}{E_m} + \omega \cdot C \cdot \cos(\omega t + \psi_U) \right]$$

Как и в предыдущем примере $i_L(0)$ такое, что $\frac{E_m}{\omega L} + i_L(0) = 0$

$$I_m \sin(\omega t + \psi_i) = E_m \sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - C \right)^2} \cdot \sin(\omega t + \psi_U - \alpha)$$

$$\alpha = \arctg \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{G}$$

Если $\psi_U = 0$ $\psi_i = -\alpha$, т.е. ток отстает от напряжения, если $\frac{1}{\omega L} - \omega C > 0$

Здесь принята следующая терминология:

$$G = \frac{1}{R} \text{ - активная проводимость}$$

$$\frac{1}{\omega L} \text{ - индуктивная проводимость}$$

ωC - емкостная проводимость

$\frac{1}{\omega L} - \omega C = B$ - реактивная проводимость

$\sqrt{G^2 + B^2} = Y$ - полная проводимость.

В этих терминах решение задачи можно записать

$$I_m \sin(\omega t - \varphi) = Y E_m \sin \omega t$$

т.е. $I_m = Y E_m$ и $\varphi = \arctg \frac{B}{G}$

Решение задачи комплексным методом

Вместо интегро-дифференциального уравнения запишем алгебраическое, применив комплексный метод.

$$\dot{I} = \dot{E}G + \frac{\dot{E}}{j\omega L} + j\omega C\dot{E} = \dot{E} \left[G - j \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \right] =$$

$$= \dot{E} (G - jB) = \dot{E} Y e^{-j\varphi}$$

$$\bar{Y} = Y e^{-j\varphi} = G - j \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) - \text{комплексная проводимость.}$$

Получим закон Ома в комплексной форме, записанный в терминах проводимостей.

$$\dot{I} = \dot{E} \bar{Y}.$$

Решение с помощью векторной диаграммы

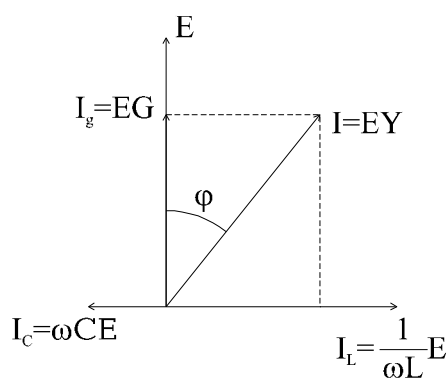


Рис. 4-7

1. За начало отсчета приняв \dot{E}_m , проводим этот вектор произвольно.
2. Вектор тока через активную проводимость $\dot{E} \cdot G$ совпадает по фазе с напряжением (ЭДС).
3. Вектор тока через катушку индуктивности отстает по фазе от напряжения на $\frac{\pi}{2}$.
4. Вектор тока через конденсатор опережает напряжение на $\frac{\pi}{2}$.

5. Суммируя токи, получаем результат. Из геометрии получаем:

$$i = \dot{E} Y e^{-j\varphi}, \text{ где } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{G}.$$

При необходимости ток можно выразить в виде функции времени ($\varphi_U = 0$)

$$i = E_m \sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2} \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

Еще больший эффект от комплексного метода можно получить, если еще на уровне схемы заменить индуктивности и емкости их комплексными сопротивлениями

$$Z_L = j\omega L; Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$$

или проводимостями

$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{j\omega L}; Y_C = \frac{1}{Z_C} = j\omega C.$$

§ 3. Мгновенная, активная, реактивная и полная мощность

Мощность при синусоидальных токах и напряжениях может выражаться по-разному:

1. Мгновенное значение мощности.

При синусоидальных токах и напряжениях

$$p(t) = u \cdot i, \text{ как и для любой цепи.}$$

Подставив в это выражение синусоидальный ток через какой-либо участок цепи и напряжение на этом участке, получим, приняв, что ток отстает от напряжения на угол φ :

$$\begin{aligned} P &= U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi) = \\ &= \frac{1}{2} U_m I_m [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] = \\ &= UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi) \end{aligned}$$

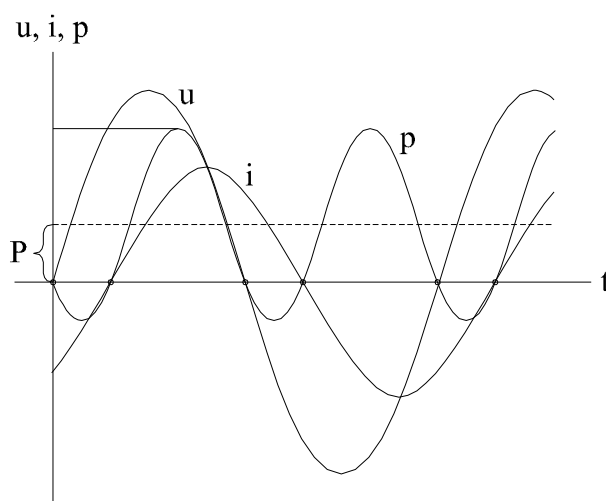


Рис. 4-8

Из формулы и осциллограммы видно, что мгновенная мощность состоит из двух слагаемых: одно, не зависящее от времени, - постоянная составляющая, а другое - синусоидальная функция времени двойной частоты. График p проходит через ноль в точках, где пересекают ось абсцисс либо ток, либо напряжение (рис. 4-8).

Интересно отметить, что если ток и напряжение сдвинуты по фазе на угол $\frac{\pi}{2}$ (чисто емкостная или чисто индуктивная цепь), то первое слагаемое равно нулю (рис. 4-9).

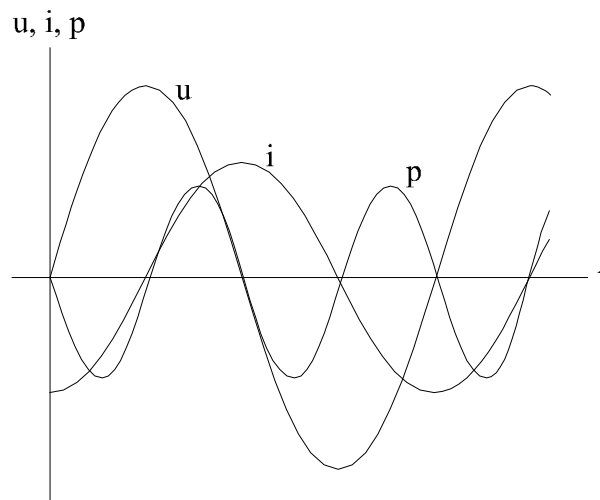


Рис. 4-9

2. Активная мощность

Это мощность (для любых периодических сигналов) определяется как среднее значение мощности за период.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \frac{1}{T} \int_0^T [U I \cos \varphi - U I \cos(r\omega t - \varphi)] dt = U I \cos \varphi$$

т.к. интеграл от второго слагаемого равен нулю.

На графике рис. 4-9 легко отыскать значение активной мощности. График рис. 4-9 полностью согласуется с представлением о реактивных элементах, которые не рассеивают энергии ($P=0$), а только запасают ее и отдают обратно в цепь. В те промежутки времени, когда $p > 0$ - реактивный элемент запасает энергию, а когда $p < 0$ отдает энергию обратно. Этому колебанию энергии соответствует реактивная мощность, которую можно определить чисто формально:

$$Q = U I \sin \varphi$$

Т.к. для пассивной цепи $-\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}$, то активная мощность всегда положительна:

$$P = U I \cos \varphi = I^2 R = U^2 G.$$

Реактивная мощность может быть как положительна, так и отрицательна

$$Q = U I \sin \varphi = I^2 X = U^2 B.$$

В соответствии в принятым ранее обозначением $\psi_u - \psi_i = \varphi > 0$ - $Q < 0$ соответствует индуктивной цепи.

Реактивная мощность индуктивной катушки считается положительной, а конденсатора отрицательной. Это, в числе прочего, означает, что в одной и той же цепи, если катушка индуктивности потребляет реактивную мощность, то конденсатор ее генерирует, и лишь разница передается извне.

Так же в известной мере формально вводится понятие полной или кажущейся мощности, как параметра отражающего предельные возможности устройства по току и напряжению

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Все три характеристики мощности имеют одинаковую размерность (ватт), но в технике получили разное наименование:

P - выражается в ваттах (BT).

Q - в вольт-амперах реактивных (BAP).

S - в вольт-амперах (BA).

Поскольку в выражениях для мощности имеет значение разность фаз $\psi_U - \psi_i = \varphi$ (а не сумма), в комплексной форме для получения мощности напряжение умножают на сопряженный комплекс тока:

$$\dot{U}I^* = UIe^{j\varphi} = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + jQ = Se^{j\varphi}$$

Измерение активной мощности при периодических токах и напряжениях:

Из формулы:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T iudt$$

следует, что для измерения мощности требуется иметь прибор перемножающий две функции времени и вычисляющий среднее значение (постоянную составляющую) такой функции.

При моделировании электрических цепей на ЭВМ в программах типа Electronics Workbench имеется элемент-перемножитель. При его использовании совместно с вольтметром (Д.С.), регистрирующим среднее значение напряжения можно получить требуемое преобразование. Возможная «схема» включения такого прибора приведена на рис. 4-10.

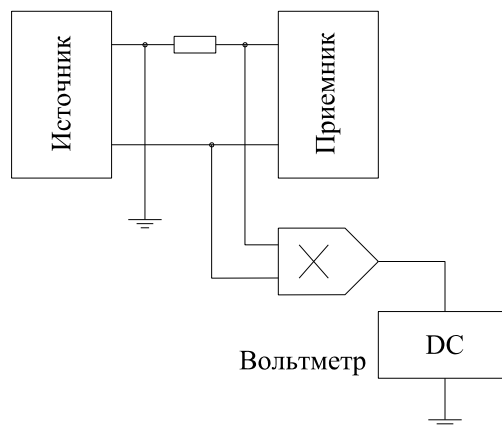


Рис. 4-10

Для измерения мощности в реальных цепях применяют электродинамические ваттметры. Они состоят из двух магнитно-связанных катушек, одна из которых может вращаться вокруг оси. С подвижной катушкой связана стрелка, показывающая на шкале угол ее отклонения от нулевого положения, которое поддерживается специальной пружинкой.

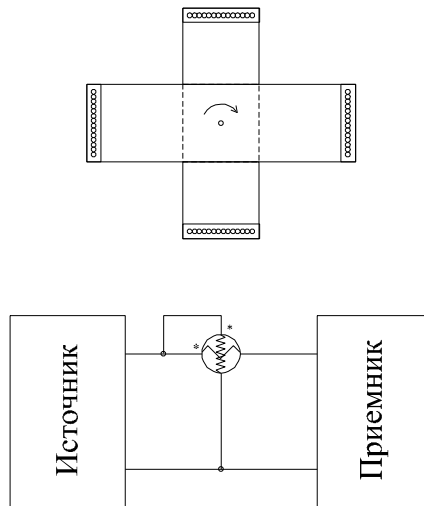


Рис. 4-11

Противодействующий момент пружинки по закону Гука пропорционален углу отклонения стрелки - α .

$$M_{\text{пр}} = K_1 \alpha$$

Вращающий момент определяется изменением энергии запасенной системой при пропускании токов через катушки при повороте подвижной катушки.

$$M_{\text{в}} = K_2 \frac{dW}{d\alpha}$$

Равновесие достигается при $M_{\text{в}} = M_{\text{пр}}$.

$$\alpha = \frac{K_2}{K_1} \frac{dW}{d\alpha}$$

Энергия запасенная системой двух катушек:

$$W = L_1 \frac{i_1^2}{2} + L_2 \frac{i_2^2}{2} + M_{12} i_1 i_2$$

Первые два слагаемых от угла α не зависят.

$$\alpha = \left\{ K_3 \frac{1}{T} \int_0^T i_1 i_2 dt \right\} \frac{dM}{d\alpha}$$

Т.к. механическая инерционность системы приведет к тому, что угол отклонения стрелки будет пропорционален среднему значению момента.

Таким образом, если через одну из катушек пропускать ток пропорциональный току приемника, а через другую - пропорциональный его напряжению, получим (в предположении $\frac{dM}{d\alpha} = \text{Const}$), что угол α

будет пропорционален активной мощности

$$\alpha = K_4 I U \cos \varphi.$$

На рис. 4-11 показана схема включения ваттметра. Точками (или звездочками) отмечены зажимы, которые следует объединить, т.к. направление вращающегося момента зависит от согласования направлений тока и напряжения.

§ 4. Эквивалентные параметры пассивного двухполюсника

Если в двухполюснике неизвестна его внутренняя структура, то можно формально назвать полным эквивалентным сопротивлением отношение действующих значений напряжения и тока:

$$Z = \frac{U}{I}$$

Потребляемая активная мощность отображается наличием в двухполюснике эквивалентного резистора:

$$R = \frac{P}{I^2}$$

Реактивное сопротивление будет соответствовать:

$$X = \pm \sqrt{Z^2 - R^2}.$$

При этом, если $\varphi > 0$, то знак «плюс», а если $\varphi < 0$, то знак «минус».

Если известна потребляемая мощность и сдвиг по фазе между током и напряжением, то

$$R = Z \cos \varphi ; X = Z \sin \varphi ; \operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}.$$

Для того, чтобы эти соотношения соответствовали реальной схеме минимально, необходимо два элемента R и L или C, соединенных последовательно. Это и есть эквивалентная схема.

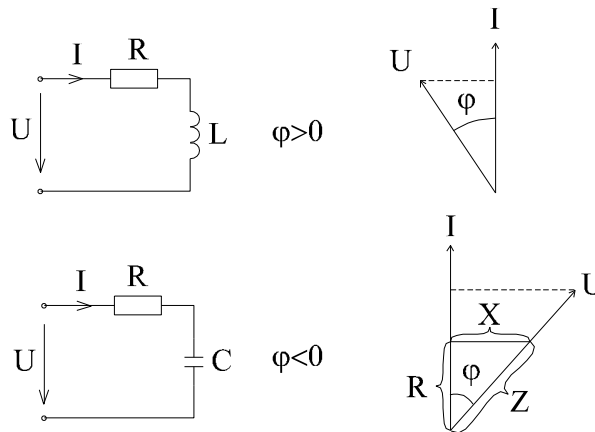


Рис. 4-12

На рис. 4-12 представлены два варианта эквивалентных схем и соответствующие векторные диаграммы.

Разложение вектора напряжения по направлению тока на два взаимно перпендикулярных дает напряжение на активном и реактивном элементе схем. Треугольник подобный треугольнику напряжения дает прямоугольный треугольник сопротивлений из которого легко можно получить все приведенные выше соотношения.

Отношение комплексов напряжения и тока дает комплекс сопротивления, содержащий всю информацию об эквивалентных параметрах двухполюсника.

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U e^{j\psi_u}}{I e^{j\psi_i}} = Z e^{j(\psi_u - \psi_i)} = Z e^{j\varphi} = \\ &= Z \cos \varphi + j Z \sin \varphi = R + jX \end{aligned}$$

Приведенные соотношения (различные формы записи комплексного числа) удобны в различных случаях:

$\bar{Z} = Z e^{j\varphi}$ - если сопротивление участвует в произведениях.

$\bar{Z} = R + jX$ - если сопротивления складываются.

$\bar{Z} = Z \cos \varphi + j Z \sin \varphi$ - для перехода от геометрической формы к алгебраической.

Из этих формул вытекают и все другие соотношения.

Заметим, что в отличие от обозначения комплексных изображений функций времени \dot{I} , \dot{U} , \dot{E}

комплексные выражения для сопротивлений обозначаются \bar{Z} , т.к. они не являются функциями времени, т.е. вращающимися векторами.

Если за основу принять отношение тока к напряжению, то получим аналогичные соотношения для проводимостей.

$$\bar{Y} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{I e^{j\psi_i}}{U e^{j\psi_u}} = Y e^{-j(\psi_u - \psi_i)} = Y e^{-j\varphi} =$$

$$= Y \cos \varphi - j Y \sin \varphi = G - jB$$

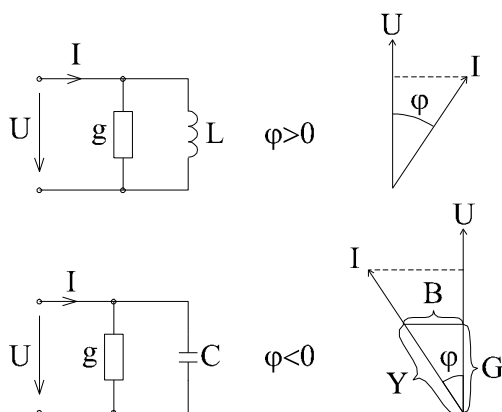


Рис. 4-13

Из этого следует:

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$$

$$G = Y \cos \varphi$$

$$B = Y \sin \varphi$$

$$\varphi = \arctg \frac{B}{G}$$

$$G = \frac{P}{U^2};$$

$$Y = \frac{I}{U}$$

$$B = \pm \sqrt{Y^2 - G^2}$$

Параметры параллельных эквивалентных схем удобнее выражать в виде проводимостей, т.к. в таких схемах реально разложение вектора тока по направлению напряжения на две взаимно перпендикулярные составляющие:

$$\dot{I} = I e^{j\varphi} = I \cos \varphi + j I \sin \varphi = I_a + j I_p.$$

Треугольник подобный треугольнику токов называют треугольником проводимостей (рис. 4-13).

Практически можно пользоваться любой эквивалентной схемой (последовательной или параллельной) двухполюсника, если соблюдать соотношения:

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}}; Y = \frac{1}{Z}; G = \frac{R}{Z^2} = \frac{R}{R^2 + X^2}; B = \frac{X}{R^2 + X^2}$$

или при переходе от проводимостей к сопротивлениям:

$$\bar{Z} = \frac{1}{\bar{Y}}; Z = \frac{1}{Y}; R = \frac{G}{G^2 + B^2}; X = \frac{B}{G^2 + B^2}.$$

§ 5. Особенности расчетов электрических цепей при синусоидальных токах и напряжениях

Если в схеме элементы цепи заменить их комплексными сопротивлениями, то полученную схему всегда можно представить как соединение различных пассивных двухполюсников, характеризуемых парой чисел $\{R; X\}$ или $\{G; B\}$, а источник тока и напряжения выразить в комплексной форме:

$$\dot{J} = J e^{j\psi} i = J_a + j J_p; \dot{E} = E e^{j\psi} e = E_a + j E_p.$$

При этом, как изложено выше, сохраняются все соотношения, полученные для схем постоянного тока, но в комплексном виде:

$$\text{Закон Ома } \dot{U} = \dot{I} \bar{Z};$$

$$\text{Законы Кирхгофа } \sum \dot{I}_K \bar{Z}_K = \sum \dot{E}; \sum \dot{I}_K = \sum \dot{J}_K.$$

Применяются также все правила знаков. Следовательно можно пользоваться и всеми приемами: преобразования цепей, делитель тока, делитель напряжения, принцип наложения, преобразование «треугольника» в «звезду», метод эквивалентного генератора и т.д. Пользуясь правилами алгебры комплексных чисел, при анализе получаются результаты так же в комплексном виде:

$$\bar{Z}_\Sigma = R_\Sigma + j X_\Sigma; \dot{I}_K = I_{a_K} + j I_{p_K}; \dot{U}_K = I_{a_K} + j I_{p_K}.$$

При необходимости получения результатов вычисления токов и напряжений в виде действительных функций времени записывают сигналы в показательной форме, добавляют множитель вращения вектора $e^{j\varphi}$ и $\sqrt{2}$, выражают комплекс в тригонометрической форме и берут коэффициент при мнимой части. Например:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} (I_a + j I_p) e^{j\omega t} &= \sqrt{2} I e^{j\psi_i} e^{j\omega t} = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \psi_i) + j \sqrt{2} I \sin(\omega t + \psi_i) \\ &\doteq I_m \sin(\omega t + \psi_i) \end{aligned}$$

Баланс мощностей подводится отдельно для активных и реактивных мощностей:

$$\sum P_K = 0 \text{ и } \sum Q_K = 0.$$

Существенную помощь в расчетах оказывает построение векторных диаграмм, как своеобразной замены потенциальных диаграмм при постоянных токах и напряжениях.

Примеры:

I. Последовательное соединение двухполюсников (рис. 4-14) $e = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$

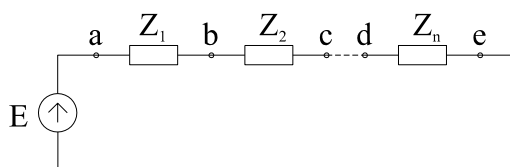


Рис. 4-14

По второму закону Кирхгофа

$$\dot{E} = \sum_1^n \dot{U}_K = \sum_1^n \dot{I}_K \bar{Z}_K = \dot{I} \sum_1^n \bar{Z}_K,$$

где $Z_K = R_K + jX_K$,

значит
$$\dot{E} = \dot{I}_K \left\{ \sum_1^n R_n + j \sum_1^n X_K \right\} = \dot{I}_K \bar{Z}_{\Sigma}.$$

$$R_{\Sigma} = \sum_1^n R_K; X_{\Sigma} = \sum_1^n X_K \quad (X_K - \text{берется с учетом знака}).$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{\bar{Z}_{\Sigma}} = \frac{\dot{E}}{Z e^{i\varphi}} = \frac{E}{Z} e^{j(\psi - \varphi)},$$

где $\varphi = \arctg \frac{X_{\Sigma}}{R_{\Sigma}}.$

Мощности:

$$P = I^2 R_{\Sigma} = I^2 \sum_1^n R_K = \sum_1^n I^2 R_K = \sum P_K$$

$$Q = I^2 X_{\Sigma} = I^2 \sum_1^n X_K = \sum_1^n I^2 X_K = \sum Q_K.$$

Если векторную диаграмму напряжений на двухполюсниках изобразить относительно общего тока в соответствии с топологией схемы, получим т.н. топографическую диаграмму, из которой легко определить напряжения между любыми точками схемы (рис. 4-15).

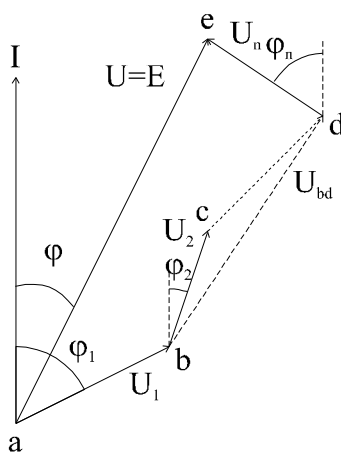


Рис. 4-15

Вычислив при произвольном токе (например $\dot{I} = I e^{j0}$) напряжения на каждом элементе $\dot{U}_K = \dot{I} \bar{Z}_K$ и построив векторную диаграмму, можно, изменив масштаб \dot{E} в соответствии с заданным, получить из геометрических соотношений решение всей задачи анализа.

II. Параллельное соединение двухполюсников (рис. 4-16).

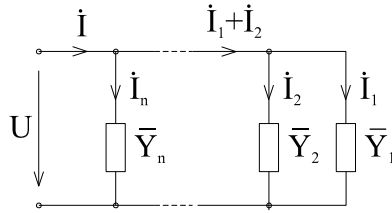


Рис. 4-16

Здесь удобно пользоваться характеристикой двухполюсников в виде проводимостей:

$$\bar{Y}_K = G_K - jB_K$$

По первому закону Кирхгофа

$$\dot{I} = \sum_1^n \dot{I}_K = \sum_1^n \dot{U}_K Y_K = \dot{U} \sum_1^n Y_K = \dot{U} \left\{ \sum_1^n G_K - j \sum_1^n B_K \right\}$$

Напомним, что $B_K > 0$, если двухполюсник индуктивный ($\varphi > 0$) и $B_K < 0$, если двухполюсник емкостный ($\varphi < 0$).

Таким образом $G_{\Sigma} = \sum_1^n G_K$; $B_{\Sigma} = \sum_1^n B_K$; $\varphi = \arctg \frac{B_{\Sigma}}{G_{\Sigma}}$.

Топографическая диаграмма токов, построенная относительно общего напряжения, представлена на рис. 4-17.

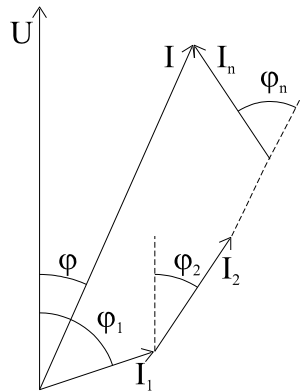


Рис. 4-17

Из топографической диаграммы удобно находить токи в соответствующих соединениях (например $\dot{I}_1 + \dot{I}_2$).

Баланс мощности:

$$P = U^2 G_{\Sigma} = \sum_1^n U_K^2 G_K = \sum_1^n P_K$$

$$Q = U^2 X_{\dot{Y}} = \sum_1^n U_K^2 X_K = \sum_1^n Q_K.$$

III. Смешанное соединение (рассмотрим поподробнее) (рис. 4-18) при $U = U_m \sin(\omega t + \psi_U)$

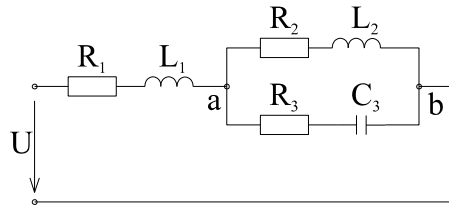


Рис. 4-18

Комплексные сопротивления двухполюсников:

$$\bar{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 = R_1 + jX_1$$

$$\bar{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 = R_2 + jX_2$$

$$\bar{Z}_3 = R_3 - j\frac{1}{\omega C} = R_3 - jX_3.$$

Сопротивление двухполюсника ab:

$$\bar{Z}_{ab} = \frac{\bar{Z}_2 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} = \frac{(R_2 + jX_2)(R_3 - jX_3)}{R_2 + R_3 + j(X_2 - X_3)} = R_{ab} + jX_{ab}.$$

Эквивалентное сопротивление всей цепи:

$$\bar{Z}_{\dot{Y}} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_{ab} = R_{\dot{Y}} + jX_{\dot{Y}}.$$

Входной ток - ток через первый двухполюсник:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\bar{Z}_{\dot{Y}}} = \frac{U}{Z_{\dot{Y}}} e^{j(\psi_U - \varphi)}, \text{ где } \varphi = \arctg \frac{X_{\dot{Y}}}{R_{\dot{Y}}}$$

$$\dot{U}_{ab} = \dot{I}_1 \bar{Z}_{ab}; \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{ab}}{\bar{Z}_2}; \dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{ab}}{\bar{Z}_3}$$

или по формуле делителя тока:

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{\bar{Z}_3}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3}; \dot{I}_3 = \dot{I}_1 \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3}$$

Мощности:

$$P_1 = I_1^2 R_1; P_2 = I_2^2 R_2; P_3 = I_3^2 R_3;$$

$$Q_1 = I_1^2 X_1; Q_2 = I_2^2 X_2; Q_3 = -I_3^2 X_3.$$

Мощности источника U:

$$P_U = P_1 + P_2 + P_3$$

$$Q_U = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

«Успех» построения векторной диаграммы (желательно не зависимо от алгебраического расчета) определяется порядком построения (рис. 4-19).

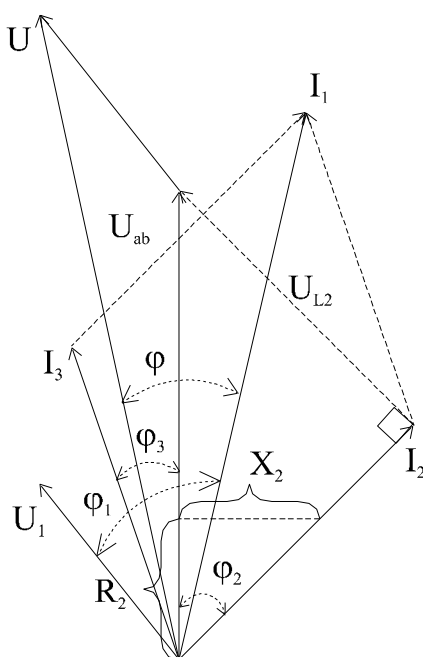


Рис. 4-19

1. Возьмем за основу вектор \dot{U}_{ab} произвольной величины.

2. Вектор тока \dot{I}_2 отстает от него на угол $\varphi_2 = \arctg \frac{X_2}{R_2}$.

3. Вектор тока \dot{I}_3 опережает напряжение \dot{U}_{ab} на угол $\varphi_3 = \arctg \frac{X_3}{R_3}$.

Для построения углов нет необходимости их вычислять. Достаточно построить треугольники сопротивлений. Соотношение между величинами векторов \dot{I}_2 и \dot{I}_3 надо соблюсти в соответствии с пропорцией: $\frac{I_2}{I_3} = \frac{Z_3}{Z_2}$.

4. Сложив вектора \dot{I}_2 и \dot{I}_3 в соответствии с первым законом Кирхгофа, получим: $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$.

5. Угол $\varphi_1 = \arctg \frac{X_1}{R_1}$ определит направление вектора напряжения \dot{U}_1 , относительно тока \dot{I}_1 ,

величина вектора U_1 определится из соотношения $\frac{U_1}{U_{ab}} = \frac{I_1 Z_1}{I_2 Z_2}$.

6. Геометрическим сложением определим $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_{ab}$, остается задаться конкретным масштабом,

приравняв $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$, и выбрать масштаб тока. Полученная диаграмма с точностью до геометрических построений дает ответы о всех величинах токов и напряжений и их относительных фазах. Например, перпендикуляр из конца вектора U_{ab} на направление тока I_2 даст напряжение на катушке L_2 .

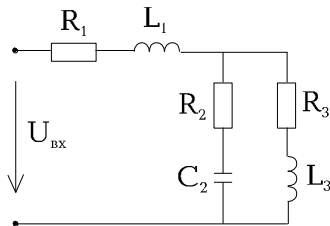
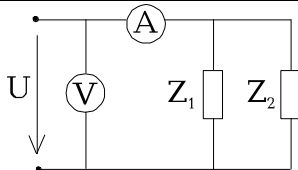
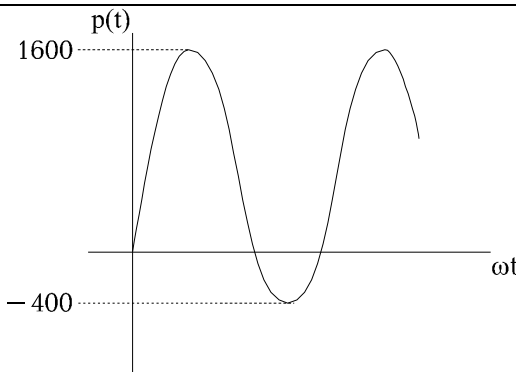
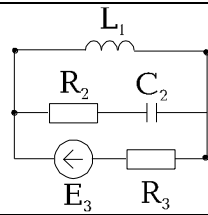
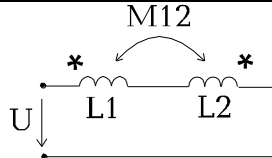
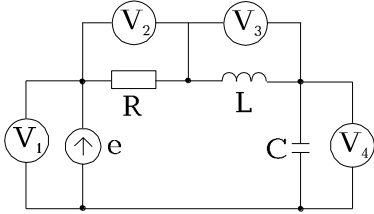
Векторную диаграмму можно использовать для проверки правильности алгебраических расчетов.

Например, угол φ между током \dot{I}_1 и входным напряжением \dot{U}_1 должен быть равен $\varphi = \arctg \frac{X_{\dot{Y}}}{R_{\dot{Y}}}$.

Контрольные вопросы к теме 4

1. Каковы основные характеристики синусоидальных сигналов?
2. Что такое фазовый сдвиг? Начальная фаза?
3. Какова связь между действующим, средним по модулю и амплитудным значениями синусоидальных сигналов?
4. Какие понятия выражает частота f и круговая частота ω ?
5. Как представить синусоидальный сигнал вектором? Что такое векторная диаграмма?
6. Как взаимно расположены векторы напряжения и тока при индуктивных, емкостных и резистивных цепях?
7. Сформулируйте сущность комплексного метода расчета.
8. Что такое входное сопротивление? Какие способы выражение входного сопротивления Вы знаете? Что такое входная проводимость?
9. Как по входным проводимости и сопротивлению определить сдвиг по фазе между током и напряжением?
10. Как по комплексному выражению для тока и напряжения определить синусоидальный сигнал?
11. Что такое мгновенная мощность? Как построить график мгновенной мощности по заданным напряжению и току?
12. Что такое активная мощность?
13. Что такое реактивная мощность?
14. Как устроен электродинамический ваттметр?
15. Как определяются эквивалентные параметры пассивного двухполюсника?
16. Что такое треугольник проводимости и треугольник сопротивлений?
17. Какова связь между эквивалентными сопротивлениями и проводимостями для пассивного двухполюсника?
18. Как записать законы Ома и Кирхгофа при применении комплексного метода?
19. Как построить векторную диаграмму при последовательном соединении двухполюсников? При параллельном соединении?
20. Что такое топографическая диаграмма?
21. Как провести анализ цепи при смешанном соединении двухполюсников?
22. Каков порядок построения векторной диаграммы при смешанном соединении двухполюсников?
23. Обоснуйте применимость методов расчета цепей для постоянного тока к цепям синусоидальных токов и напряжений при применении комплексного метода.

Контрольные задачи к теме 4

1	 <p> $R_1 = R_3 = 3 \text{ Ом. } R_2 = 1 \text{ Ом. } L_1 = L_3 = 3 \text{ мГн.}$ $C_2 = 333 \text{ мкФ. } e = 4\sqrt{2} \sin(1000t - 20^\circ)$ </p>	<p>Определить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $Z_{\text{вх}}; \bar{Z}_{\text{вх}}; Y_{\text{вх}}; \bar{Y}_{\text{вх}}.$ 2. $I_{\text{вх}}; \dot{I}_{\text{вх}}; i_{\text{вх}}(t).$ 3. Построить векторную диаграмму токов и напряжений.
2	 <p> Показание амперметра - 10 А. Показания вольтметра - 100 В. $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = R + jX; R = 0,25Z_1$ </p>	<p>Включить ваттметр для определения активной мощности двухполюсника Z_1 и определить его показание.</p>
3		<p>Определить полную, активную и реактивную мощность.</p>
4		<p>Записать выражения для \dot{E}_r и \bar{Z}_r для определения тока в ветви L_1 методом эквивалентного генератора.</p>
5	 <p> $U = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ </p>	<p>Определить $Z_{\text{вх}}.$</p>
6	 <p> $R = 1 \text{ Ом. } L = 0,01 \text{ Гн. } C = 0,005 \text{ Ф.}$ $e = 20 \sin(100t + 10^\circ)$ </p>	<p>Определить показания электростатических вольтметров.</p>

Тема 5

Анализ сложных цепей *

§ 1. Топологические и компонентные уравнения

Анализ сложных цепей, как изложенные выше примы и методы расчета, основан на трех уравнениях: законе Ома, первом и втором законах Кирхгофа. По мере роста числа элементов схемы, а современные требования в области микроэлектроники требуют порой анализа схем, содержащих 10^5 элементов, сначала возникают трудности в решении систем уравнений, а затем и в их составлении. Решение столь больших систем уравнений производится на ЦВМ по стандартным программам. Здесь мы покажем приемы систематизации представления данных о схеме и формирования из этих данных систем уравнений, т.е. математических моделей схемы.

Выше было показано, что геометрию схемы можно описать в виде матриц:

К - контур-ветвь

Р - узел-ветвь

С - сечение-ветвь.

Непосредственно с помощью каждой из этих матриц можно записать оба закона Кирхгофа (см. Таблицу 1).

Таблица 1

	I закон	II закон
К-матрица	$K^t I_X = I_B$	$KU_B = E_K$
Р-матрица	$PI_B = J_y$	$P^t U_{K0} = U_B$
С-матрица	$CI_B = J_{отс}$	$C^t U_D = U_e$

В таблице обозначено K^t ; C^t ; P^t - соответственно транспонированные **К**, **С** и **Р** матрицы.

I_B ; U_B - токи и напряжения всех ветвей, сгруппированные в виде матриц-столбцов.

E_K - матрица-столбец сумм ЭДС, действующих в к-ом контуре.

J_y - матрица-столбец сумм токов источников токов, присоединенных к узлу.

U_{K0} - матрица-столбец узловых напряжений, т.е. напряжений узлов относительно “заземленного”.

I_X - матрица-столбец токов хорд (дополнений).

U_D - матрица-столбец напряжения на ветвях дерева.

$J_{отс}$ - матрица-столбец токов источников токов входящих в отсечение.

* Для чтения этой темы требуются хорошие знания матричной алгебры
 Это чисто топологические уравнения, конечно не могут быть решены т.к. не содержат связи между токами и напряжениями, т.е. не содержат информации о параметрах среды. Такую связь дают компонентные уравнения (закон Ома для участка цепи).

Введем матрицы параметров цепей. Для цепей постоянного тока после удаления индуктивностей и емкостей, как указано выше, и возможно некоторых эквивалентных преобразований (объединения последовательных и иногда параллельных резисторов) матрица представляет собой диагональную матрицу сопротивлений или проводимостей:

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} R_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & R_K \end{vmatrix}; \mathbf{G} = \begin{vmatrix} G_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & G_K \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}^{-1}, \text{ причем вследствие диагональности } G_K = \frac{1}{R_K}.$$

При синусоидальных токах и напряжениях при отсутствии взаимных индуктивностей получаются такие же матрицы с комплексными элементами:

$$\mathbf{Z} = \begin{vmatrix} \bar{Z}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{Z}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{Z}_K \end{vmatrix}; \mathbf{Y} = \begin{vmatrix} \bar{Y}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{Y}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{Y}_K \end{vmatrix}$$

$$\bar{Y} = \bar{Z}^{-1}; \bar{Y}_K = \frac{1}{\bar{Z}_K}; \bar{Z}_K = R + jX = R + j\omega L \text{ или } \bar{Z} = R - j\frac{1}{\omega C}.$$

При наличии взаимных индуктивностей в матрице параметров появляются недиагональные члены: на месте пересечения m -ой строки и n -го столбца и n -й строки и m -го столбца: $j M_{mn}\omega$ и $j M_{nm}\omega$. Появление недиагональных членов несколько затрудняет вычисление обратной матрицы. Помогает делу группирование элементов со взаимной индуктивностью в начале матрицы.

Например матрица:

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{vmatrix} j\omega L_1 & \pm M_{12}\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ jM_{21}\omega & \pm j\omega L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{-j\omega C_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{-j\omega C_5} \end{vmatrix}$$

относится к любой цепи, содержащей пару катушек, связанных общим магнитным потоком, пару сопротивлений и пару емкостей. Очевидно, такая матрица не содержит информации о соединениях этих элементов. Для записи компонентных уравнений эту матрицу умножают на матрицу-столбец токов и получают столбец напряжений. Запись $\bar{\mathbf{Z}}\dot{\mathbf{I}}_3 = \dot{\mathbf{U}}_3$ соответствует шести компонентным уравнениям:

$$1. \dot{U}_1 = j\omega L_1 I_1 \pm jM\omega I_2$$

$$3. \dot{U}_3 = R_3 I_3$$

$$6. \dot{U}_6 = -j \frac{1}{\omega C} I_6$$

Матрица проводимостей:

$$\bar{Y} = \left\| \begin{array}{ccc} [jL\omega]^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & [R]^{-1} & 0 \\ 0^K & 0 & \left[-j \frac{1}{\omega C} \right]^{-1} \end{array} \right\| = \bar{Z}^{-1}$$

служит для записи уравнений: $\bar{Y} \dot{U}_B = \dot{I}_B$.

Конечно все, что касается синусоидальных токов и напряжений требует выражения в комплексном виде не только \bar{Z}_K и \bar{Y}_K , но и токов \dot{I}_B и напряжений \dot{U}_B .

Заметим кстати, что в матрицу параметров можно вводить и другие операторы. Например, если ввести операторы дифференцирования и интегрирования, а токи и напряжения выразить в виде мгновенных значений произвольных функций времени, то получаем уравнения типа:

$$U_L = L \frac{di}{dt} \text{ или } U_C = \frac{1}{C} \int i dt \text{ и т.д.}$$

Часть топологического уравнения, например уравнение

$$K^t I_X = I_B = \left\| \begin{array}{c} [K_X^t] \\ K_D^t \end{array} \right\| I_X = I_B$$

содержит тривиальные равенства типа $I_{KX} = I_{\hat{a}x}$, т.к. K_X^t - единичная подматрица.

Таким образом, каждая пара уравнений содержит $N_y - 1 + N_K = N_B$ - содержательных уравнений и при включении в них компонентных уравнений ($\dot{U}_B = \bar{Z}_B \dot{I}_B$) может быть преобразована в систему независимых уравнений по количеству равных количеству независимых переменных.

Для схемы, содержащей только ветви с сопротивлениями (R или \bar{Z}), уравнения первой строки таблицы 1 можно получить, если все источники тока преобразованы в источники ЭДС.

§ 2. Уравнения по методу контурных токов

$$K \dot{U}_B = \dot{E}_K \Rightarrow K \bar{Z} \dot{I}_B = \dot{E}_K \Rightarrow K \bar{Z} K^t \dot{I}_X = \dot{E}_K \Rightarrow ;$$

$$\Rightarrow [\bar{Z}_K] \dot{I}_X = \dot{E}_K$$

$$\dot{I}_X = \bar{Z}_K^{-1} \dot{E}_K$$

Получив \dot{I}_x - контурные токи, остальные токи можно найти:

$$\mathbf{K}_d^t \dot{\mathbf{I}}_x = \dot{\mathbf{I}}_d.$$

Остановимся поподробнее на тройном матричном произведении $\mathbf{K}\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{K}^t = [\bar{\mathbf{Z}}_k]$ -матрице контурных сопротивлений. Она обладает следующими особенностями:

1. Матрица симметрична относительно диагонали.
2. Диагональные члены матрицы \bar{Z}_{kk} представляют собой сумму сопротивлений всех ветвей, входящих в k-й контур. Направление обхода контура выбирается совпадающим с направлением тока хорды, соответствующей этому контуру:

$$\bar{Z}_{kk} = \sum R_k + j \sum X_k.$$

3. Недиagonalные члены матрицы - это \bar{Z}_{km} сопротивления общие для k-го и m-го контуров.

$$\bar{Z}_{km} = \pm (R_{km} + jX_{km}).$$

Знак “+” ставится в том случае, когда направления обхода контуров k и m в общей ветви совпадают. Если направления встречны, то ставится знак “-”.

В развернутом виде матричное уравнение, по методу контурных токов, можно записать для схемы с n независимыми контурами.

$$\begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} & \dots & \bar{Z}_{1n} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} & \dots & \bar{Z}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{Z}_{n1} & \bar{Z}_{n2} & \dots & \bar{Z}_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \vdots \\ \dot{E}_n \end{bmatrix}$$

Это соответствует системе контурных уравнений:

$$\bar{Z}_{11}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{12}\dot{I}_2 + \dots + \bar{Z}_{1n}\dot{I}_n = \dot{E}_1$$

$$\bar{Z}_{21}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{22}\dot{I}_2 + \dots + \bar{Z}_{2n}\dot{I}_n = \dot{E}_2$$

$$\bar{Z}_{n1}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{n2}\dot{I}_2 + \dots + \bar{Z}_{nn}\dot{I}_n = \dot{E}_n$$

Элементы матрицы \mathbf{E}_k представляют собой алгебраическую сумму ЭДС источников ветвей. Со знаком “+” в суммы входят те ЭДС, направление которых совпадает с направлением обхода контура. Остальные входят со знаком “-”.

Систему уравнений можно получить и непосредственно из второго закона Кирхгофа, если ввести понятие контурного тока, как неизвестного тока, замыкающегося по контуру. Поскольку в ветви, которая отличается от всех других, в системе независимых контуров протекает только контурный ток, то понятие контурный ток и ток хорды совпадают. Во всех других ветвях (ветвях дерева) протекают два и более контурных токов. В этих терминах и формулируется второй закон Кирхгофа. Например для первого контура: первое слагаемое это сумма напряжений во всех ветвях контура от протекания контурного тока. Остальные слагаемые - это напряжения в

соответствующих ветвях от действия остальных контурных токов. Если m -й и k -й контур общей ветви не имеют, то $\bar{Z}_{\hat{e}m} = 0$.

Получив контурные токи

$\dot{I}_k = \dot{E}_1 \frac{\Delta_{k1}}{\Delta} + \dot{E}_2 \frac{\Delta_{k2}}{\Delta} + \dots + \dot{E}_n \frac{\Delta_{kn}}{\Delta}$, из уравнения $\mathbf{K}^t \mathbf{I}_x = \mathbf{I}_{\hat{A}}$ - легко получить остальные токи.

§ 3. Метод узловых потенциалов

В качестве определяемых переменных часто принимают потенциалы узлов относительно "заземленного" узла, потенциал которого принят за ноль. Получим систему уравнений, которая выражает метод узловых потенциалов.

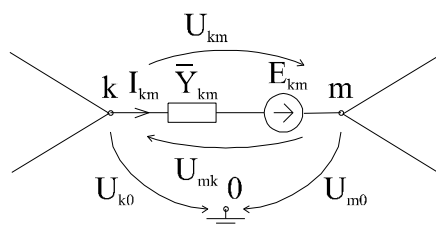


Рис. 5-1

Рассмотрим ветвь между двумя узлами "к" "м" (рис. 5-1). Для определенности будем считать, что она единственная. Если это не так, то можно провести предварительные преобразования параллельных ветвей. Второй закон Кирхгофа справедлив для сумм потенциалов точек (даже если между точками нет ветвей):

$$(\dot{U}_{k0} - \dot{U}_{m0}) - \frac{\dot{I}_{km}}{\bar{Y}_{km}} = -\dot{E}_{km}.$$

Отсюда

$$\dot{I}_{km} = (\dot{U}_{k0} - \dot{U}_{m0}) \bar{Y}_{km} + \dot{E}_{km} \bar{Y}_{km} - \text{обобщенный закон Ома.}$$

По первому закону Кирхгофа:

$$\sum_m \dot{I}_{km} = 0, \text{ т.е. сумма токов всех ветвей } k\text{-го узла.}$$

Значит для каждого узла:

$$\sum_m \dot{U}_{k0} \bar{Y}_{km} - \sum_m \dot{U}_{m0} \bar{Y}_{km} = -\dot{E}_{km} \bar{Y}_{km}$$

или $\dot{U}_{k0} \sum_m \bar{Y}_{km} - \sum_m \dot{U}_{m0} \bar{Y}_{km} = \dot{J}$.

Поскольку \dot{U}_{k0} от индекса "м" не зависит, а \dot{J} - сумма токов всех источников тока входящих в узел, если источники ЭДС преобразовывать в источники тока. Получим систему уравнений для схемы с $(n+1)$ узлами:

$$\begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} & \dots & \bar{Y}_{1n} \\ \bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{22} & \dots & \bar{Y}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{Y}_{n1} & \bar{Y}_{n2} & \dots & \bar{Y}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \vdots \\ \dot{U}_{n0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{J}_1 \\ \dot{J}_2 \\ \vdots \\ \dot{J}_n \end{bmatrix}$$

или в матричном виде:

$$\bar{Y}_y \dot{U}_{\kappa 0} = \dot{J}_\kappa.$$

Матрица \bar{Y} - симметричная относительно диагонали, по которой расположены суммы проводимостей всех ветвей, идущих от k -го узла:

$$\bar{Y}_{kk} = G_{kk} + jB_{kk}.$$

Все недиагональные члены матрицы отрицательны:

$\bar{Y}_{km} = -(G_{km} - jB_{km})$ и равны по величине проводимостям ветвей между k -ым и m -ым узлами.

После нахождения узловых потенциалов по обобщенному закону Ома находятся токи в ветвях. Формально систему уравнений легко получить из второй строки таблицы 1:

$$P \dot{I}_B = \dot{J}_y = P \dot{Y} U_B = P \bar{Y} P^t U_{\kappa 0}$$

$P \bar{Y} P^t$ и есть матрица узловых проводимостей.

Системы уравнений по методу контурных токов и узловых потенциалов применяются широко для доказательства некоторых теорем теории цепей и часто составляются непосредственно по заданной схеме.

Например, вывод формулы “двух узлов” при применении метода узловых потенциалов получается непосредственно:

$$\dot{U}_{10} \sum \bar{Y} = \sum \dot{E} \bar{Y} \Rightarrow U_{10} = \frac{\sum \dot{E} \bar{Y}}{\sum \bar{Y}}.$$

Тому или другому методу отдается предпочтение в зависимости от того, чего больше в схеме: независимых узлов или независимых контуров.

§ 4. Метод сечений при более общей модели ветви

При введении обобщенной модели ветви, содержащей и источник ЭДС и источник тока, можно получить систему уравнений без каких-либо ограничений.

Покажем это на примере применения метода сечений.

Обобщенная ветвь показана на рис. 5-2.

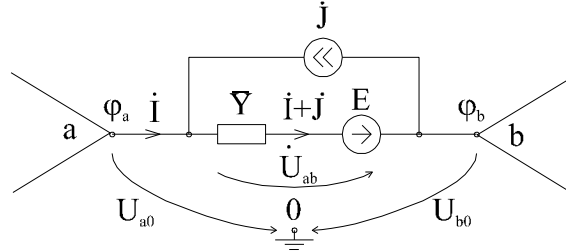


Рис. 5-2

Выражение, связывающее ток ветви с параметрами обобщенной ветви, можно получить, обойдя контур $a \rightarrow 0 \rightarrow b \rightarrow a$:

$$(\dot{\phi}_a - \dot{\phi}_b) = \frac{\dot{J} + \dot{I}}{\bar{Y}} = -\dot{E}$$

$\dot{\phi}_a - \dot{\phi}_b = U_B$ - напряжение ветви.

Получим ток ветви:

$$\dot{I} = (\dot{U}_B + \dot{E})\bar{Y} - \dot{J}.$$

Такое же начертание формулы остается, если считать

\dot{I}_B - матрица-столбец токов ветвей.

\dot{U}_B - матрица-столбец напряжений ветвей.

\dot{E}_B - матрица-столбец ЭДС ветвей.

\dot{J}_B - матрица-столбец токов источников тока “ветвей”.

\bar{Y} - матрица параметров ветвей.

Конечно, при этом надо записать уравнение так, чтобы согласовать число столбцов и строк в матричных произведениях:

$$\bar{Y}\dot{U}_B + \bar{Y}\dot{E}_B - \dot{J}_B = \dot{I}_B.$$

Умножим это уравнение (матричное) на топологическую матрицу сечение-ветвь C слева и помня, что $C\dot{I}_B = 0$

$$\text{получим } C\bar{Y}\dot{U}_B + C\bar{Y}\dot{E}_B - C\dot{J}_B = 0$$

подставим соотношение $\dot{U}_B = C^t\dot{U}_A$, где \dot{U}_A - матрица-столбец напряжений ветвей

дерева получим $C\bar{Y}C^t\dot{U}_A + C\bar{Y}\dot{E}_B - C\dot{J}_B = 0$

или уравнение аналогичное уравнению по методу узловых потенциалов:

$$\mathbf{C}\bar{\mathbf{Y}}\mathbf{C}^t\dot{\mathbf{U}}_{\bar{\mathbf{A}}} = \mathbf{C}\mathbf{J} - \mathbf{C}\bar{\mathbf{Y}}\dot{\mathbf{E}}_{\mathbf{B}}$$

Решив уравнение относительно $\dot{\mathbf{U}}_{\bar{\mathbf{A}}}$: $\dot{\mathbf{U}}_{\bar{\mathbf{A}}} = (\mathbf{C}\bar{\mathbf{Y}}\mathbf{C}^t)^{-1} \mathbf{C}(\mathbf{J} - \bar{\mathbf{Y}}\dot{\mathbf{E}})$, по формуле:

$$\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{B}} = \mathbf{C}^t\dot{\mathbf{U}}_{\bar{\mathbf{A}}} \text{ найдем напряжение всех ветвей.}$$

Наконец, используя уравнение для обобщенной ветви, получим токи:

$$\dot{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{Y}}\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{Y}}\dot{\mathbf{E}}_{\mathbf{B}} - \mathbf{J}_{\mathbf{B}}.$$

При работе с массивами информации в системах машинного проектирования электронных схем достигают еще большего обобщения, вводя в модели ветви зависимые источники, это характерно для моделей транзисторов.

В учебном пособии вряд ли есть необходимость излагать эти методы, т.к. пользователь получает их вместе с соответствующими машинными программами. Если у читателя возникает необходимость в разработке или модернизации подобных программ, то придется обратиться к специальной литературе.

При наличии ветвей, состоящих только из идеальных источников тока или ЭДС в формальных методах построения уравнений приходится прибегать к специальным приемам расщепления ветви или узла. При составлении уравнений вручную можно поступать так, как показано на примерах.

Пример 1. Составить уравнение по МКТ для схемы рис. 5-3.

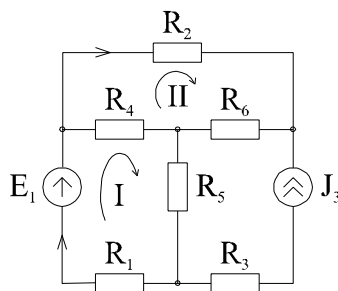


Рис. 5-3

При формировании независимых контуров, контур с источником тока считаем, как контур с известным током. Получим два уравнения. Третье уравнение составить невозможно, т.к. $R_{33} = \infty$, но в нем нет необходимости, т.к. ток J_3 известен.

$$\begin{cases} (R_1 + R_4 + R_5)I_1 - R_4I_2 + R_5J_3 = E_1 \\ -R_4I_1 + (R_2 + R_4 + R_6)I_2 + R_6J_3 = 0 \end{cases}.$$

Пример 2. Составить уравнение по МУП для схемы рис. 5-4.

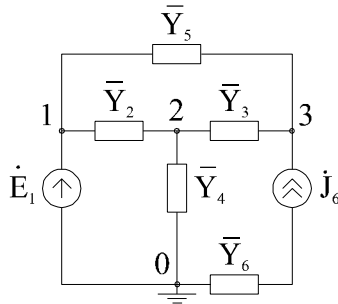


Рис. 5-4

Если заземлить один из узлов, к которому присоединен идеальный источник ЭДС, то потенциал другого сразу определится:

$$\dot{U}_{10} = \dot{E}_1$$

Для двух других узлов:

$$\begin{cases} -\dot{U}_{10} \bar{Y}_2 + \dot{U}_{20} (\bar{Y}_2 + \bar{Y}_3 + \bar{Y}_4) - \dot{U}_{30} \bar{Y}_3 = 0 \\ -\dot{U}_{10} \bar{Y}_5 - \dot{U}_{20} \bar{Y}_3 + \dot{U}_{30} (\bar{Y}_5 + \bar{Y}_3) = \dot{J}_6 \end{cases}.$$

Первое уравнение составить не удастся, т.к. $Y_1 = \infty$, но в нем нет необходимости, т.к. в схеме только два неизвестных узловых потенциала.

Интересно, что система уравнений в первом примере не изменится, если изменить схему как показано на рис. 5-5.

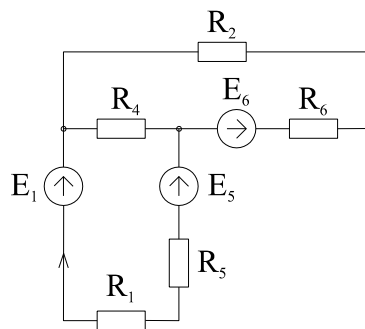


Рис. 5-5

Таким образом можно осуществить эквивалентную замену идеального источника тока на несколько источников ЭДС, расположенных в ветвях дерева, образующих с источником тока контур:

$$E_6 = R_6 J_3; E_5 = R_5 J_3.$$

Образовавшиеся реальные источники $\{E_6; R_6\}$ и $\{E_5; R_5\}$ можно преобразовать и в источники тока, если в этом есть необходимость.

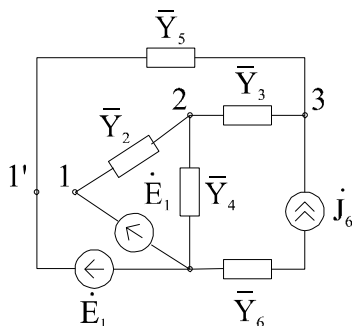


Рис. 5-6

В свою очередь образовавшиеся ветви $\{\dot{E}_1; \dot{Y}_2\}$ и $\{\dot{E}_1; Y_5\}$ можно преобразовать в источники тока.

На основе матричных уравнений, являющихся математическими моделями электрических цепей, часто доказываются те или иные общие соотношения. Для примера рассмотрим часто применяемый в анализе линейных цепей принцип взаимности.

Пусть в сколь угодно сложной цепи действует единственный источник ЭДС, включенный в m -ю цепь (рис. 5-7).

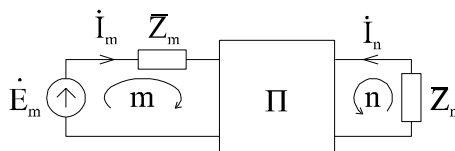


Рис. 5-7

Для нахождения тока в n -ой ветви составим уравнения по методу контурных токов, приняв m -ю и n -ю ветви за хорды.

$$\bar{\mathbf{Z}}_K \dot{\mathbf{I}}_K = \dot{\mathbf{E}}_K.$$

Ток в n -ой ветви определится

$$\dot{I}_n = \frac{\Delta mn}{\Lambda} \dot{E}_m,$$

где Δ - определитель системы $|\bar{Z}_K|$,

$\dot{E}_m = \dot{E}_K$ - поскольку источник единственный,

 Δmn - дополнение определителя.

Перенесем источник в п-ю ветвь (рис. 5-8).

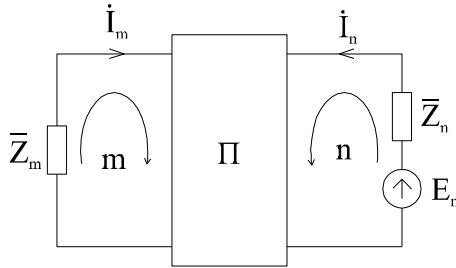


Рис. 5-8

Определим ток в m -ой ветви.

$$\dot{I}_m = \frac{\Delta_{nm}}{\Delta} \dot{E}_n.$$

Отношение токов:

$$\frac{\dot{I}_n}{\dot{I}_m} = \frac{\Delta_{mn}}{\Delta_{nm}} \cdot \frac{\dot{E}_m}{\dot{E}_n}.$$

Поскольку матрица контурных сопротивлений симметрична относительно главной диагонали

$$\Delta_{mn} = \Delta_{nm},$$

получаем

$$\frac{\dot{I}_n}{\dot{I}_m} = \frac{\dot{E}_m}{\dot{E}_n}.$$

Если источники $\dot{E}_m = \dot{E}_n$ (по величине и по знаку), то

$$\dot{I}_n = \dot{I}_m.$$

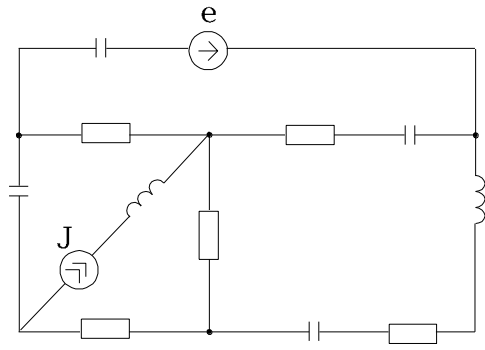
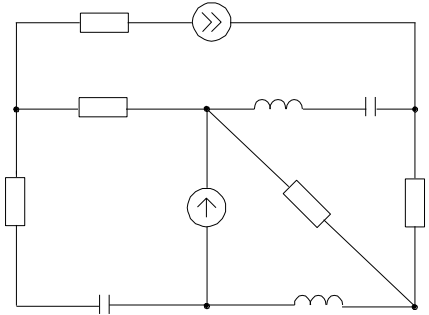
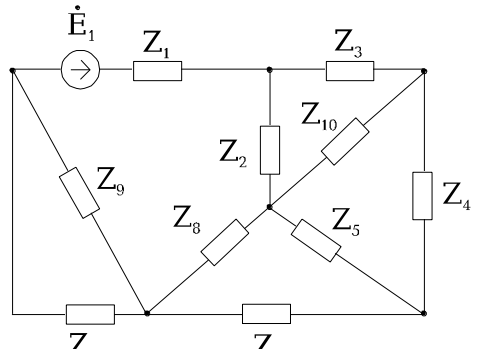
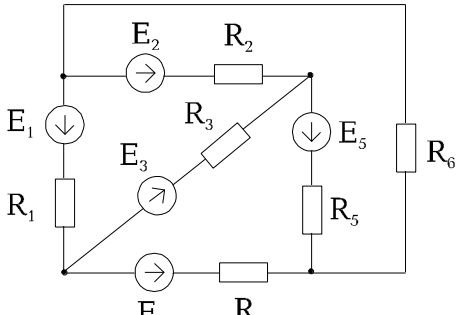
Поэтому принцип взаимности можно сформулировать так. Если источник ЭДС, расположенный в m -ой ветви, создает в n -ой ток I_n , то тот же источник, перенесенный в n -ую ветвь создает в m -ой такой же ток.

Схемы, отвечающие этому принципу, называются взаимными цепями. Все линейные цепи взаимны.

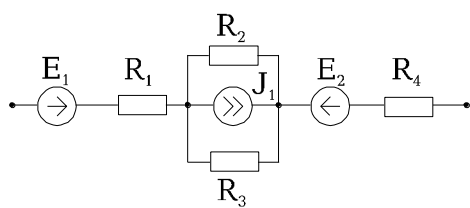
Контрольные вопросы к теме 5

1. Как записать топологические уравнения с помощью различных матриц соединений?
2. Что такое компонентные уравнения? Как записать компонентные уравнения в матричном виде?
3. Как с помощью топологических и компонентных уравнений выразить уравнения по методу контурных токов?
4. Как составить уравнения по методу контурных токов по заданной схеме?
5. Дайте ответ на вопросы 3 и 4 для метода узловых потенциалов.
6. Каков порядок представления матричных уравнений для обобщенной модели двухполюсника по методу сечений?
7. В чем особенности составления уравнений по методу контурных токов и узловых потенциалов при наличии идеальных источников тока и напряжения?

Контрольные задачи к теме 5

1	 <p style="text-align: center;">$J = I_m \cos \omega t; e = E_m \sin \omega t$</p>	Ввести обозначения и составить систему уравнений по методу контурных токов.
2	 <p style="text-align: center;">$J = J_m \sin(\omega t + \varphi)$</p> <p style="text-align: center;">$\dot{E} = E e^{j\varphi}$</p>	Ввести обозначения и составить систему уравнений по методу узловых потенциалов.
3		Составить матрицу соединений по методу сечений и записать с ее помощью первый закон Кирхгофа.
4		Составить порядок определения тока через резистор R6, используя принцип взаимности и принцип наложения.

5



Записать закон Ома для данной ветви.

Тема 6

Резонанс и частотные свойства

В предыдущих главах введено понятие реактивного сопротивления конденсатора

$X_C = \frac{1}{\omega C}$ и катушки индуктивности $X_L = \omega L$. Эти сопротивления зависят от величин

C и L и от частоты ω . Отсюда следует, что распределение токов и напряжений электрической цепи определяется не только параметрами цепи, но и частотой возмущающего воздействия. Эти зависимости характеризуют частотные свойства электрических цепей переменного тока.

§ 1. Резонанс напряжений

Рассмотрим двухполюсники, содержащие L и C . Различные сочетания индуктивностей и емкостей в цепи при заданной частоте, либо изменение частоты при заданной схеме могут привести к тому, что входная проводимость или входное сопротивление двухполюсника будут иметь чисто активный характер. При этом напряжение и ток на входе двухполюсника совпадают по фазе. Такое явление называют резонансом.

Основное определение резонанса: $\varphi(\omega) = 0$ (на входе двухполюсника).

Рассмотрим некоторые характеристики цепи при резонансе. Для последовательной RLC-цепи (рис. 6-1) ток и сдвиг по фазе между током и напряжением равны:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}};$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

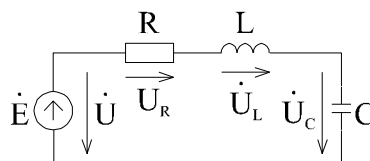


Рис. 6-1

Резонанс в цепи возникает при выполнении условий

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \text{ или } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Частота в этом случае называется резонансной или собственной, а ток имеет максимальное значение:

$$I = \frac{U}{R}.$$

Векторная диаграмма цепи при резонансе представлена на рис. 6-2.

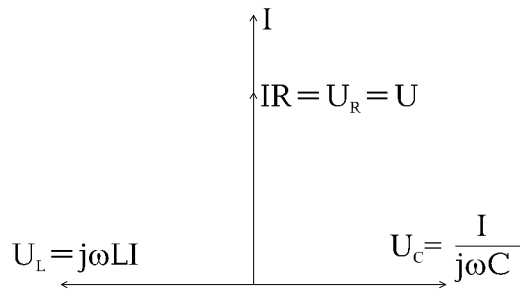


Рис 6-2

Векторы \dot{U}_L и \dot{U}_C равны по величине и противоположно направлены. Поэтому резонанс в последовательной RLC-цепи называют также резонансом напряжений.

Условие резонанса можно записать в другой форме

$$\omega^2 LC = 1.$$

Эта формула удобна для анализа цепи, когда резонанс достигается изменением одной из трех величин: ω , L или C , т.е. при постоянстве двух величин изменяемая величина должна получить значения:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; L_0 = \frac{1}{\omega^2 C}; C_0 = \frac{1}{\omega^2 L},$$

$$X_{L0} = X_{C0} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho - \text{волновое сопротивление.}$$

Действующее значение напряжения на реактивных элементах при резонансе

$$U_C = U_L = I \omega_0 L = \frac{I}{\omega_0 C} = \frac{\omega_0 L U}{R} = \frac{\rho}{R} U$$

может существенно превышать питающее напряжение в зависимости от добротности контура Q :

$$Q = \frac{\rho}{R}; U_L = U_C = QU.$$

Величина, обратная добротности $d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\rho}$ - затухание контура. Для выяснения

физической сущности явления резонанса рассмотрим мгновенные значения мощностей на элементах L , R , C .

$$p_R = \sqrt{2} I \sin \omega t \cdot \sqrt{2} U \sin \omega t = UI(1 - \cos 2\omega t) = I^2 R(1 - \cos 2\omega t);$$

$$p_L = \sqrt{2} I \sin \omega t \cdot \sqrt{2} U_L \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = IU_L \sin 2\omega t;$$

$$p_C = \sqrt{2} I \sin \omega t \cdot \sqrt{2} U_C \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -IU_C \sin 2\omega t.$$

Поскольку $U_L = U_C$, то $p_L = -p_C$. Это значит, что происходит обмен энергией между магнитным полем катушки и электрическим полем конденсатора. Источник в этом случае расходует энергию только на потери в активном сопротивлении $I^2 R$.

Суммарная энергия магнитного и электрического полей:

$$W = W_L + W_C = \frac{L I_m^2}{2} \sin^2 \omega t + \frac{C U_m^2}{2} \cos^2 \omega t;$$

учитывая, что

$$L I_m^2 = L \frac{U_C^2}{x_C^2} = L \frac{U_C^2}{\left(\frac{\sqrt{LC}}{C}\right)^2} = C U_C^2,$$

получаем

$$W = \frac{L I_m^2}{2} = \frac{C U_m^2}{2} = \text{const},$$

т.е. суммарная энергия полей конденсатора и катушки индуктивности остается постоянной.

§ 2. Частотные свойства R, L, C двухполюсников

1. Последовательная RLC-цепочка при условии $J = \text{const}$ (рис. 6-3).

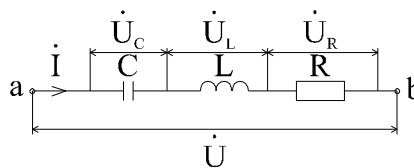


Рис. 6-3

Напряжение двухполюсника $\dot{U} = Z \dot{I}$, где $Z = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$, или в действующих

значениях $U = Z I$, где $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$.

Для каждого элемента частотные характеристики $T(\omega) = \frac{U(\omega)}{I(\omega)}$ представляют собой зависимости модуля сопротивления элемента от частоты. Для АЧХ двухполюсника

$T_1(\omega) = \frac{U(\omega)}{I(\omega)}$ характер зависимости совпадает с зависимостью модуля сопротивления двухполюсника $Z = f(\omega)$, т.е. $T_1(\omega) = Z_{ab}(\omega)$.

АЧХ элемента и всего двухполюсника представлены на рис. 6-4.

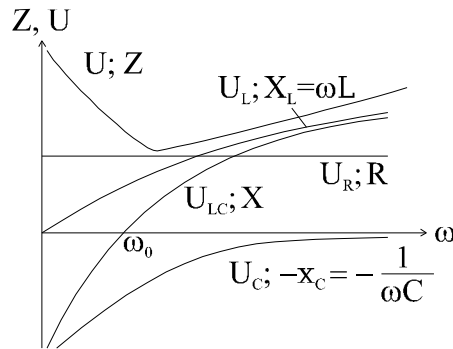


Рис 6-4

Реактивное сопротивление двухполюсника $X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} = \frac{L}{\omega} (\omega^2 - \omega_0^2)$ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, проходя через 0 в точке ω_0 . Используя понятие нуля и полюса системной функции, заметим, что у функции $X(\omega)$ два полюса: $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ и один ноль $\omega = \omega_0$. Характерное свойство функции $X(\omega)$ состоит в том, что $\frac{dX(\omega)}{d\omega} > 0$, так как при увеличении частоты растут (алгебраически) оба слагаемых. ФЧХ получаем из выражения:

$$U = \dot{I} e^{j\varphi_i} Z e^{j \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}} = U e^{j\varphi_u};$$

т.е., считая $\varphi_i = 0$, имеем

$$\varphi_u - \varphi_i = \varphi(\omega) = \arctg \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right).$$

Зависимость $\varphi(\omega)$ показана на рис. 6-5. Если $\varphi < 0$ (при $\omega < \omega_0$), то цепь имеет емкостный характер; если $\varphi > 0$ (при $\omega > \omega_0$) - индуктивный характер.

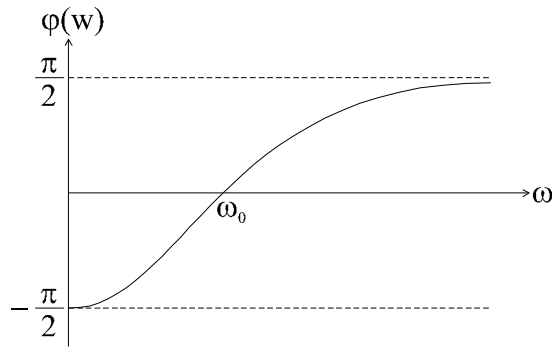


Рис. 6-5

2. Последовательная RLC-цепочка; приложенное напряжение постоянно по величине $U = \text{const}$.

Ток в цепи

$$\dot{I} = \dot{U} \bar{Y} = \dot{U} \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)};$$

$$\dot{U}_R = R \dot{I}; \dot{U}_C = \bar{Z}_C \dot{I}; \dot{U}_L = \bar{Z}_L \dot{I}$$

или для действующих значений:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; U_R = \frac{U R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}};$$

$$U_C = U \frac{1/\omega C}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; U_L = U \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}};$$

$$U_{LC} = \frac{U \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

При построении графиков частотных зависимостей учитывается, что при резонансе $X=0$, тогда

$$I = \frac{U}{R}; U_C = \frac{U \frac{1}{\omega_0 C}}{R}; U_L = \frac{U \omega_0 L}{R};$$

$$U_R = U; U_L = U_C.$$

При $\omega = 0$ $I = 0$; $U_R = 0$; $U_L = 0$; $U_C = U$; $X = \infty$.

При $\omega = \infty$ $I = 0$; $U_R = 0$; $U_L = U$; $U_C = 0$; $X = \infty$.

Зависимость тока и напряжений элементов от частоты приведены на рис. 6-6.

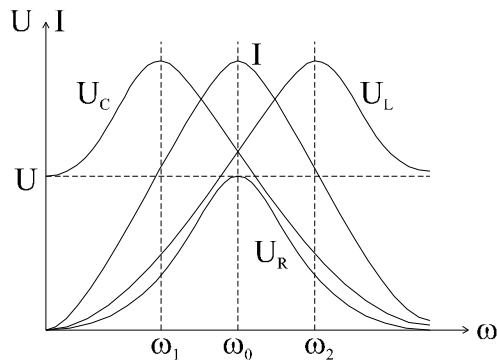


Рис 6-6

Рассмотрим влияние частоты на проводимость данной цепи

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{Z^2} - j \frac{X}{Z^2} = G - jB.$$

Предположим $R = 0$ (цепь без потерь), тогда

$$B = \frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{1}{X} = \frac{1}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} = \frac{\omega}{L} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Функция $B(\omega)$ имеет два нуля $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ и один полюс $\omega = \omega_0$. Производная $\frac{dB(\omega)}{d\omega} < 0$, т.е. в цепях без потерь проводимость всегда убывает, что соответствует пунктирной кривой рис. 6-7.

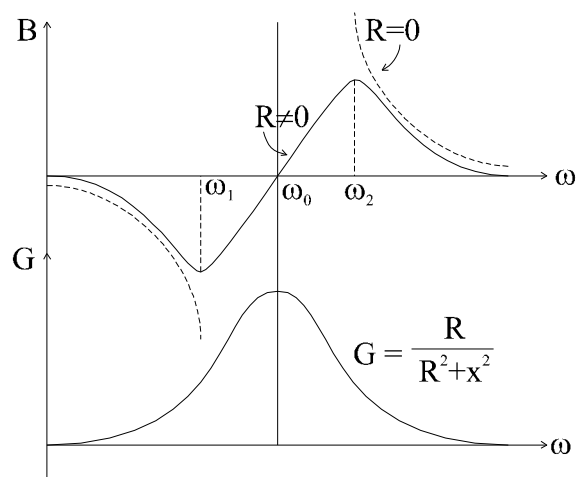


Рис 6-7

В реальной цепи сопротивление $R \neq 0$

$$B = \frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Полученная зависимость предоставлена на рис. 6-7 сплошной линией. Значения частот ω_1 и ω_2 можно найти из условия

$$\frac{dB(\omega)}{d\omega} = 0.$$

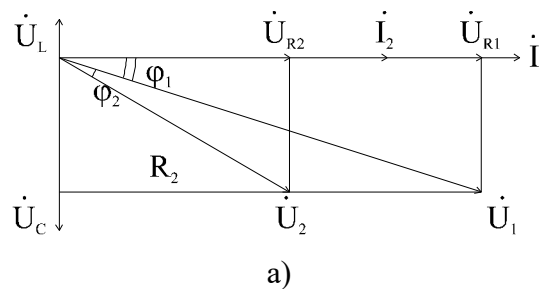
Решение уравнений приводит к соотношению:

$$R^2 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2.$$

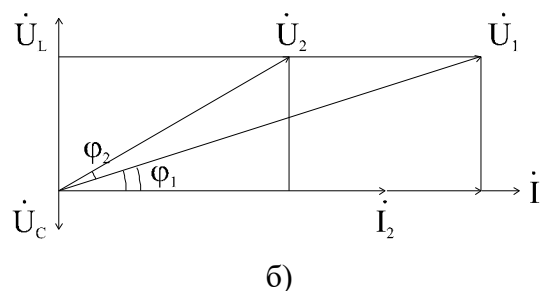
Откуда экстремальные значения $B_{\max} = -B_{\min} = \frac{1}{2R}$, а $\omega_{1,2} = \omega_0 \left(\frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + 1} \right)$, где

$d = \frac{1}{Q}$ - затухание контура.

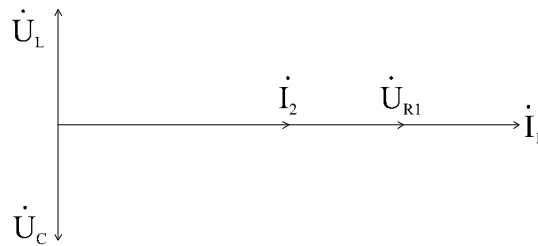
Рассмотрим влияние параметров двухполюсника на частотные характеристики цепи. На рис. 6-8 приведены векторные диаграммы RLC-цепи при $X_C > X_L$ (а); $X_C < X_L$ (б) и $X_C = X_L$ (в). При неизменных X_C и X_L уменьшение R приводит к увеличению сдвига фаз между током и напряжением всей цепи, при этом сохраняется характер двухполюсника. В точке резонанса величина R не влияет на фазу.



$$\varphi \leq 0; R_1 > R_2; -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < 0.$$



$$\varphi > 0; R_1 > R_2; \frac{\pi}{2} \geq \varphi > 0.$$



в)

$$\varphi = 0.$$

Рис. 6-8

Влияние параметров цепи на частотные характеристики выводится из зависимостей

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $Q = \frac{\sqrt{L}}{R}$. Откуда видно, что R не влияет на ω_0 , увеличение R уменьшает добротность, т.е. кривые $I(\omega)$ и $U_R(\omega)$, приведенные на рис. 6-6, будут более пологими. Частота ω_1 , при которой $U_C(\omega)$ максимальна, уменьшается, а ω_2 , соответствующая $U_L(\omega)$, увеличивается.

Изменение C влияет на резонансную частоту: увеличение C в n раз уменьшает ω_0 и добротность Q в \sqrt{n} раз и наоборот.

Изменение L аналогично влияет на резонансную частоту и противоположно на добротность. Если, например, необходимо увеличить ω_0 , не уменьшая добротности, то нужно уменьшить величину L . При уменьшении ω_0 для сохранения добротности не ниже заданной величины увеличивают L . ФЧХ последовательной RLC-цепи при уменьшении R становится более крутой и при $R=0$ вырождается в ломаную прямую (рис. 6-9). Изменение L или C в соответствии с формулой $\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$ смещает и изменяет крутизну кривой. При уменьшении L ω_0 смещается вправо и кривая становится более полой, при уменьшении C кривая смещается в ту же сторону, но становится более крутой.

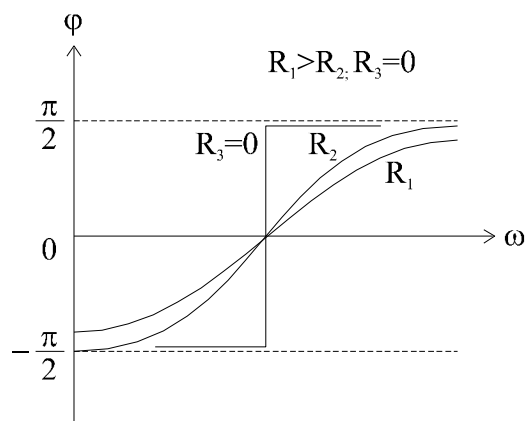


Рис 6-9

§ 3. Резонанс токов

Рассмотрим двухполюсник, содержащий параллельно соединенные RLC (GLC) (рис. 6-10,а). Условие резонанса:

$$\omega_0^2 LC = 1 \text{ или } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Значение параметров при резонансе:

$$L_0 = \frac{1}{\omega_0^2 C}; C_0 = \frac{1}{\omega_0^2 L}.$$

Векторная диаграмма цепи показана на рис. 6-10,б.

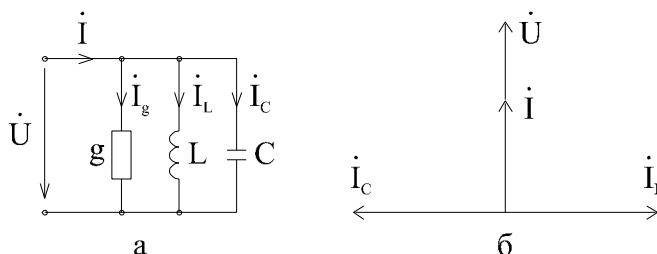


Рис. 6-10

Поскольку в данном случае равны и противоположны по фазе векторы токов, резонанс в параллельной цепи называют резонансом токов.

При резонансе реактивная проводимость двухполюсника равна нулю и полная проводимость минимальна, поэтому полный ток при резонансе минимален.

Величина

$$\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \gamma \text{ называется волновой проводимостью.}$$

Если $G < \gamma$, то ток $I_L = I_C > I$.

Отношение

$$Q = \frac{I_{L0}}{I_0} = \frac{I_{C0}}{I_0} = \frac{U\omega_0 C}{UG} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{\gamma}{G},$$

определяющее степень превышения тока в реактивных элементах суммарного тока при резонансе - добротность контура. $d = \frac{1}{Q}$ - затухание контура.

Энергетические процессы в параллельном контуре аналогичны процессам в последовательной RLC-цепи. В любой момент времени $p_L = -p_C$, т.е. энергия переходит из катушки в конденсатор и обратно. Источник компенсирует потери энергии в проводимости G.

§ 4. Частотные свойства параллельного контура

При построении частотных характеристик параллельной цепи наглядно прослеживается принцип дуальности цепей.

1. Параллельное соединение GLC.

Величина тока $J = \text{const}$. Характеристики в этом случае дуальны последовательному соединению RLC при постоянстве приложенного напряжения $U = \text{const}$.

$$\dot{U} = \frac{\dot{I}}{Y}; Y = G - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right); Y = \sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}.$$

Напряжение двухполюсника (действующее значение)

$$U = \frac{I}{\sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}}.$$

Токи элементов

$$I_{LC} = \frac{I\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}{\sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}}; I_L = \frac{I\left(\frac{1}{\omega L}\right)}{\sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}};$$

$$I_G = \frac{IG}{\sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}}; I_C = \frac{I\omega C}{\sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}}.$$

При построении АЧХ следует учитывать, что для резонанса:

$$U = \frac{I}{G}; I_C = \frac{I}{G}(\omega_0 C); I_L = \frac{I}{G}\left(\frac{1}{\omega_0 L}\right); I_G = I;$$

$$I_L = I_C; \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \frac{1}{\omega_0 L} = \sqrt{\frac{C}{L}};$$

$$\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{\rho} = \gamma;$$

при $\omega = 0$

$$U = 0; I_G = 0; I_L = I;$$

при $\omega = \infty$

$$U = 0; I_G = 0; I_C = I.$$

График характеристик цепи представлен на рис. 6-10.

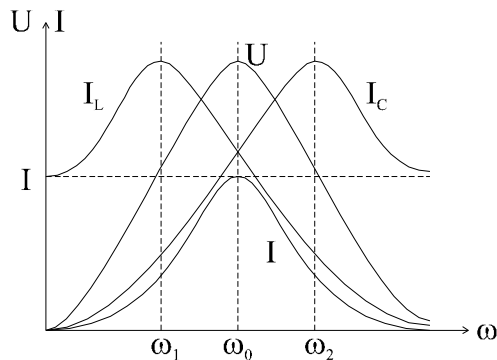


Рис. 6-10

2. Параллельное соединение GLC, приложенное напряжение постоянно по величине $U = \text{const}$. Частотные характеристики дуальны характеристикам цепи с последовательным соединением RLC при $I = \text{const}$. АЧХ элементов и двухполюсника соответствуют зависимостям проводимостей элементов от частоты (рис. 6-11,а).

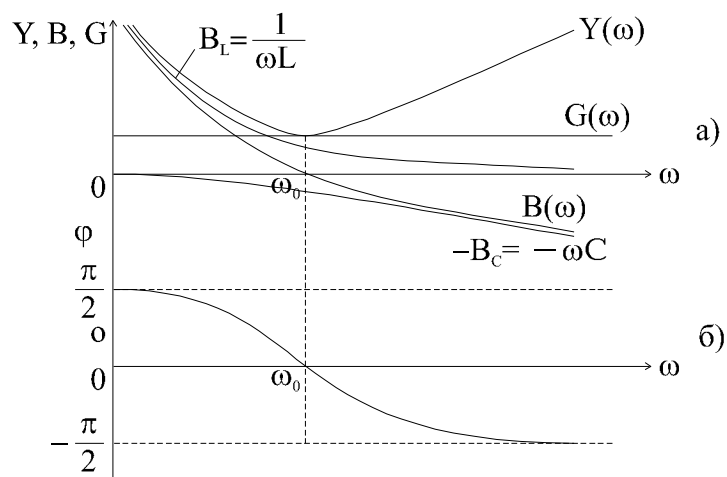


Рис. 6-11

Реактивная проводимость, равная

$$B = B_L - B_C = \frac{1}{\omega L} - \omega C = \frac{C}{\omega}(\omega_0^2 - \omega^2),$$

имеет два полюса $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ и один ноль $\omega = \omega_0$. Реактивная проводимость с увеличением частоты уменьшается:

$$\frac{dB}{d\omega} = -\frac{1}{\omega^2 L} - C < 0.$$

При переходе частоты через точку резонанса изменяется характер проводимости: при $\omega < \omega_0$ проводимость имеет индуктивный характер $B > 0$; при $\omega > \omega_0$ проводимость становится емкостной $B < 0$. ФЧХ представлена на рис. 6-11,б.

Найдем характеристики сопротивления параллельно соединенных RLC. Реактивное сопротивление цепи

$$\bar{Z} = \frac{1}{\bar{Y}} = \frac{1}{G - jB} = \frac{G}{G^2 + B^2} + j \frac{B}{G^2 + B^2} = R + jX.$$

Если $G=0$,

$$X = \frac{1}{B} = \frac{1}{\omega C - \frac{1}{\omega L}} = \frac{\frac{\omega}{C}}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

График зависимостей $X(\omega)$ и $R(\omega)$ представлены на рис. 6-12.

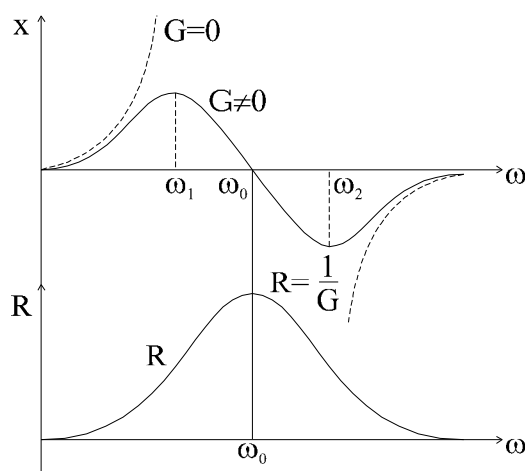


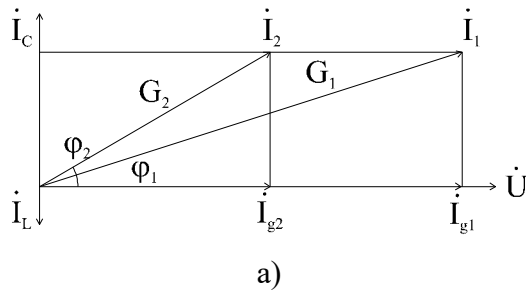
Рис. 6-12

Заметим, что при $G = 0$ $\frac{dX}{d\omega} > 0$, т.е. с увеличением частоты сопротивление в цепях без потерь всегда возрастает. В момент перехода частоты через точку резонанса сопротивление становится бесконечным и изменяет свой характер от индуктивного к емкостному (пунктирная линия). При $G \neq 0$ характер зависимости X от ω показан сплошной линией. Прохождение $X(\omega)$ через ноль не означает, что сопротивление всей

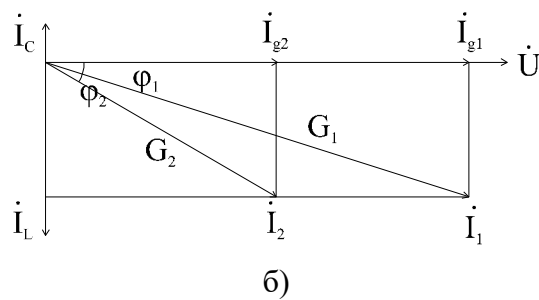
цепи равно нулю, так как активное сопротивление, зависящее в этом случае от частоты, имеет максимум в момент резонанса:

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{1}{G}.$$

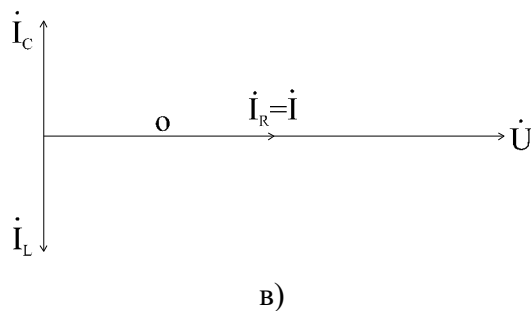
Влияние величины активной проводимости G на характер зависимостей показано векторными диаграммами для различных соотношений B_C ; B_L и G (рис. 6-13, а, б, в).



$$G_1 > G_2; B_C > B_L; 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$



$$G_1 > G_2; B_C < B_L; -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0.$$



$$\varphi = 0; B_C = B_L.$$

Рис. 6-13

Влияние G , L , C на АЧХ и ФЧХ исследуется по аналитическим зависимостям.

§ 5. Резонансные эффекты в сложных цепях

В общем случае условие резонанса $X = 0$ или $B = 0$. Активное сопротивление зависит от частоты. Условие $X = 0$ или $B = 0$ в двухполюсниках произвольной сложности может привести к наличию нескольких корней ω_p . Методика отыскания этих корней остается такой же, как и в простых случаях: записывается комплексное выражение для сопротивления или проводимости, приравняется нулю коэффициент при мнимой части. По полученному уравнению отыскиваются резонансные частоты, а по виду соответствующих функций $Z(\omega)$; $R(\omega)$; $X(\omega)$ строятся частотные характеристики. Рассмотрим пример (рис. 6-14).

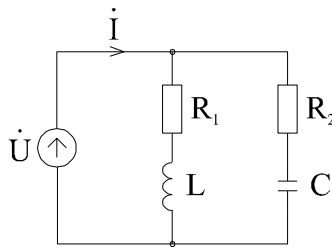


Рис. 6-14

Комплексная проводимость цепи

$$\begin{aligned}\bar{Y} &= \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 = \frac{1}{R_1 + j\omega L} + \frac{1}{R_2 - j\frac{1}{\omega C}} = \\ &= \frac{R_1}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} - j \left(\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} - \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \right) = G - jB\end{aligned}$$

Условие резонанса ($B = 0$)

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} - \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}},$$

откуда

$$\omega_p = \frac{1}{LC} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}},$$

или

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}.$$

Рассматривая полученный результат, можно выделить три случая соотношения параметров:

$$1. R_1^2 > \frac{L}{C} > R_2^2 \text{ или } R_1^2 < \frac{L}{C} < R_2^2.$$

Подкоренное выражение отрицательно. Частоты мнимая, т.е. резонанс невозможен.

$$2. R_1 = R_2 \neq \sqrt{\frac{L}{C}}; \omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

Частота совпадает с резонансной частотой контура

$$3. R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Резонанс наблюдается на всех частотах, так как R не зависит от ω .

Действительно, пусть $R_1 = R_2 = R$, тогда

$$\begin{aligned} \bar{Z}_\Sigma &= \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = \frac{(R + j\omega L) \left(R - j \frac{1}{\omega C} \right)}{2R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = \frac{R^2 + \frac{L}{C} + j \left(R\omega L - \frac{R}{\omega C} \right)}{2R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = \\ &= R \frac{2R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{2R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = R. \end{aligned}$$

Для цепей, являющихся пассивными двухполюсниками, можно проследить некоторые общие закономерности в частотных характеристиках.

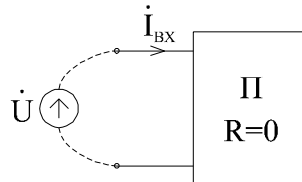


Рис. 6-15

Составляя систему контурных уравнений, можно предусмотреть, чтобы источник входил в первый контур (рис. 6-15). Тогда входной ток определится

$$I_{BX} = I_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \dot{U} = \bar{Y}_{BX} \dot{U} = \frac{\dot{U}}{\bar{Z}_{BX}} = \frac{\dot{U}}{\bar{X}_{BX}}.$$

Определитель Δ n-го порядка с элементами типа

$$\bar{Z}_{ki} = j \left(\omega L_{ki} - \frac{1}{\omega C_{ki}} \right) = j \frac{L_{ki}}{\omega} \left(\omega^2 - \frac{1}{L_{ki} C_{ki}} \right)$$

Δ_{11} - (n-1)-го порядка с такими же элементам.

В общем случае

$$X = \frac{1}{\omega} \frac{a_1 \omega^{2n} + a_2 \omega^{2n-2} + \dots + a_0}{b_1 \omega^{2n-2} + b_2 \omega^{2n-4} + \dots + b_0}.$$

Найдя корни полиномов числителя и знаменателя, дробь представим в виде

$$X = \frac{1}{\omega} \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2) \dots (\omega^2 - \omega_{2n}^2)}{(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2) \dots (\omega^2 - \omega_{2n-2}^2)}.$$

Поскольку в цепях без потерь угол сдвига фаз между током и напряжением может быть только $\pm \frac{\pi}{2}$, а в то же время при резонансе $\varphi = 0$, так как в момент резонанса φ скачком меняет свой знак (рис. 6-16).

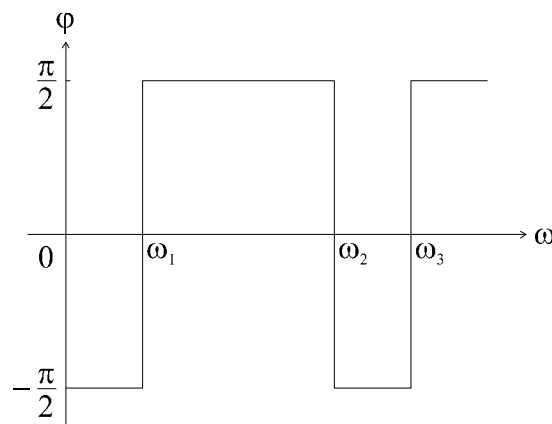


Рис. 6-16

Точками резонанса также будут значения частот $\omega = 0$ и $\omega = \infty$.

Далее, поскольку, $\frac{dX(\omega)}{d\omega} > 0$, неравенство усиливается, то справедливы соотношения

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_{2n} < \infty.$$

Для любой цепи без потерь первой резонансной частотой является $\omega = 0$ и последней $\omega = \infty$. Однако в зависимости от того, будет ли при этих частотах ноль или полюс функции, можно представить четыре разновидности характеристик (рис. 6-17).

1. Если в двухполюснике существует путь, проходящий только по индуктивностям, то зависимость $X(\omega)$ начинается с нуля (рис. 6-17,а,в).
2. При отсутствии такого пути $X(\omega)$ начинается с полюса (рис. 6-17,б,г).
3. Если в двухполюснике существует путь, проходящий только по емкостям, то зависимость $X(\omega)$ заканчивается нулем (рис. 6-17,а,б).
4. При отсутствии такого пути частотная характеристика заканчивается полюсом (рис. 6-17,в,г).

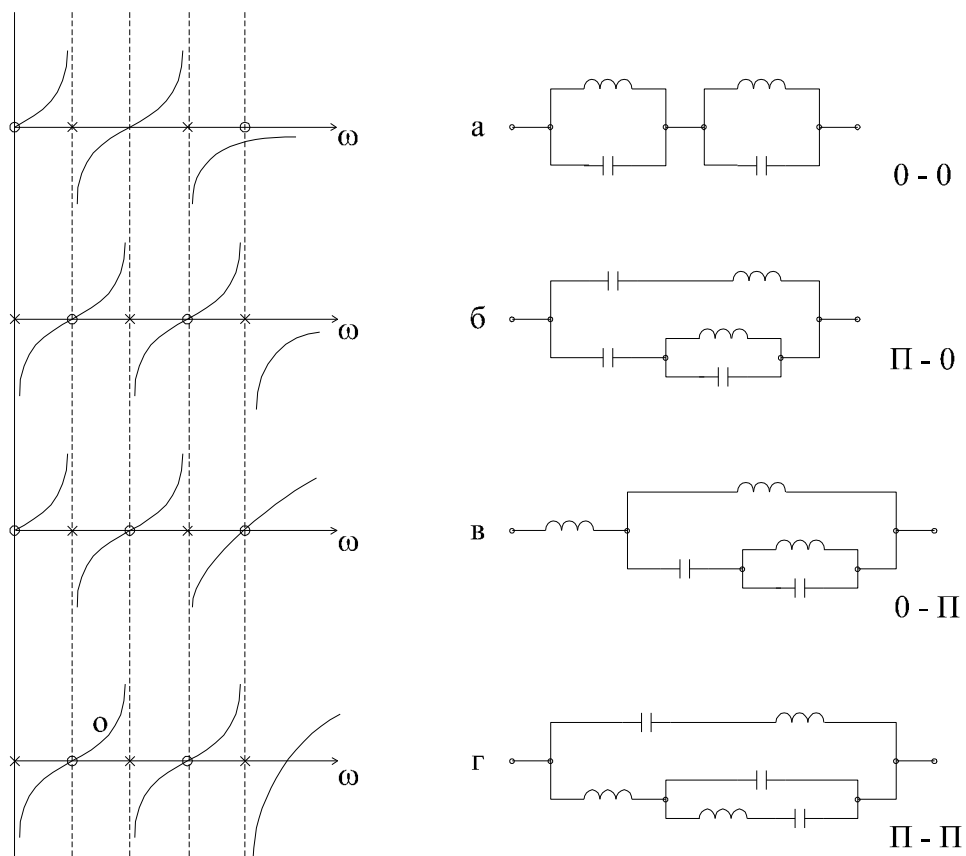
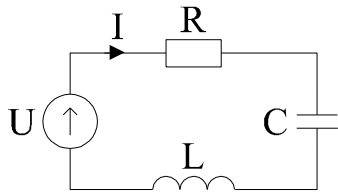
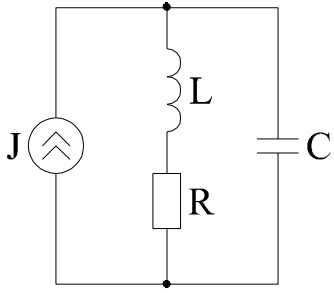
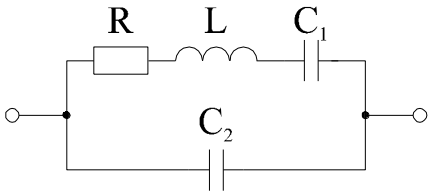
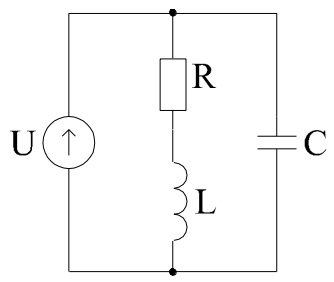
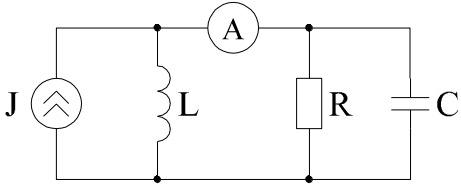


Рис. 6-17

Контрольные вопросы к теме 6

1. Каковы условия возникновения резонанса в цепи? Как подсчитать резонансную частоту?
2. Как выглядит векторная диаграмма при последовательном соединении RLC цепи? При параллельном соединении?
3. Назовите примеры использования резонансных явлений.
4. Что такое частотные характеристики?
5. Что такое амплитудно-частотная характеристика? Фазо-частотная характеристика?
6. Как экспериментально определить резонансную частоту?
7. Как изменяются частотные характеристики при изменении добротности?
8. Что такое двухполосник без потерь? Как по виду схемы качественно представить характеристики $Z(\omega)$ для двухполосника без потерь?

Контрольные задачи к теме 6

1	 <p>$U_C = 100 \text{ В}; U = 1 \text{ В}; \omega = 10^4 \text{ сек}^{-1};$ $I = 1 \text{ А}.$</p>	Определить U_R ; U_L ; L ; C ; R при резонансе.
2	 <p>$L = 1 \text{ мГн}; C = 0,1 \text{ мкФ}; R = 60 \text{ Ом}.$</p>	Определить резонансную частоту и зависимости напряжения на элементах от тока источника тока.
3	 <p>$R = 24 \text{ Ом}; L = 0,1 \text{ мГн}; C_1 = 0,1 \text{ мкФ}.$</p>	Определить C_2 для достижения резонанса токов при частоте 500 кГц . Определить при этом частоту резонанса напряжений.
4	 <p>$I_{\text{ВХ}} = 1 \text{ А}; I_C = 1 \text{ А}.$</p>	Определить I_L при резонансе.
5	 <p>$I_L = 5 \text{ А}; I_R = 2 \text{ А}.$</p>	Определить показание амперметра при резонансе.

Тема 7

Расчет электрических цепей при несинусоидальных периодических токах и напряжениях.

В большинстве устройств электроники, радиотехники, автоматики, вычислительной техники токи и напряжения имеют отличную от синусоидальной форму, оставаясь периодическими функциями времени. Расчет цепей при несинусоидальных периодических возмущающих воздействиях в курсе электротехники составляет самостоятельный раздел, не зависимо от того, чем вызвана несинусоидальность. Причиной несинусоидальности могут быть паразитные явления, протекающие в электротехнических установках: несимметричность генераторов, нелинейность характеристик элементов и т.д.

Широко применяются устройства, в которых несинусоидальность возмущающих воздействий создается преднамеренно и несет определенную информацию: вычислительные устройства, системы связи и т.п.

Метод расчета электрических цепей при несинусоидальных периодических токах и напряжениях основан на разложении кривой в гармонический ряд Фурье и применении принципа наложения.

§ 1. Разложение несинусоидальной функции в тригонометрический ряд

Всякая периодическая функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, т.е. имеющая на конечном интервале изменения аргумента конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов, может быть разложена в тригонометрический ряд:

$$F(\omega t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots + A_K \sin(\hat{e} \omega t + \varphi_{\hat{e}}) \dots$$

или

$$F(\omega t) = \sum_{K=0}^{\infty} A_K \sin(\hat{e} \omega t + \varphi_K).$$

Первый член ряда называют постоянной составляющей, второй член ряда - основной синусоидальной или первой гармоникой, остальные - высшими гармониками.

Основная частота $\omega = \frac{2\pi}{T}$ равна частоте несинусоидальной периодической функции.

Для удобства подсчета коэффициентов ряда, его обычно представляют в форме:

$$F(\omega t) = A_0 + B_1 \sin \omega t + C_1 \cos \omega t + B_2 \sin 2\omega t + C_2 \cos 2\omega t + \dots + B_K \sin k\omega t + C_K \cos k\omega t + \dots$$

Эту формулу получают, если для каждого члена ряда

$$\sin(k\omega t + \varphi_K) = \sin k\omega t \cos \varphi_K + \cos k\omega t \sin \varphi_K.$$

Таким образом,

$$B_K = A_K \cos \varphi_K; C_K = A_K \sin \varphi_K;$$

$$A_K = \sqrt{B_K^2 + C_K^2}; \varphi_K = \arctg \frac{C_K}{B_K}.$$

Коэффициенты вычисляются по следующей формуле:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega t) d(\omega t).$$

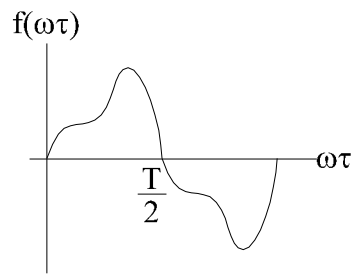
A_0 - среднее значение функции за период (постоянная составляющая тока, напряжения или ЭДС).

$$B_K = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega t) \sin k\omega t d(\omega t);$$

$$C_K = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega t) \cos k\omega t d(\omega t).$$

Периодические функции сигналов, используемых в электротехнике, могут обладать различными видами симметрии:

1. Симметрия относительно оси абсцисс (рис. 7-1):



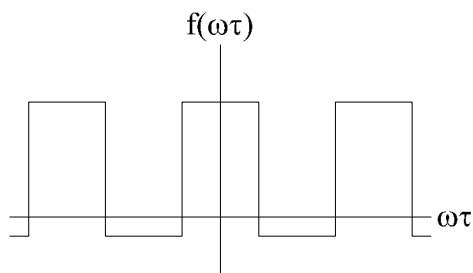
$$f(\omega t) = -f\left(\omega t + \frac{T}{2}\right)$$

Рис. 7-1

Такие функции при разложении в гармонический ряд не имеют постоянной составляющей и не содержат четных гармоник.

Эти положения в математике строго доказываются.

2. Симметрия относительно оси ординат (рис 7-2).



$$f(\omega t) = -f(-\omega t)$$

Рис. 7-2

В этом случае разложение не содержит синусов, так как синус - функция нечетная.

3. Симметрия относительно начала координат (рис 7-3).

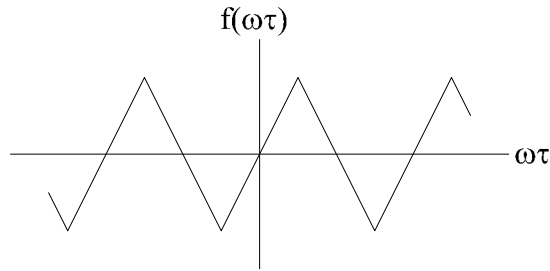


Рис. 7-3

При этом разложении функции в ряд не содержит косинусов и постоянной составляющей.

Первый вид симметрии не зависит от начала отсчета времени, т.е. является свойством самой кривой. Второй и третий связаны с началом отсчета.

Рассмотрим несколько примеров разложения.

Пример 1. Трапеция, симметричная относительно оси абсцисс и начала координат (рис. 7-4).

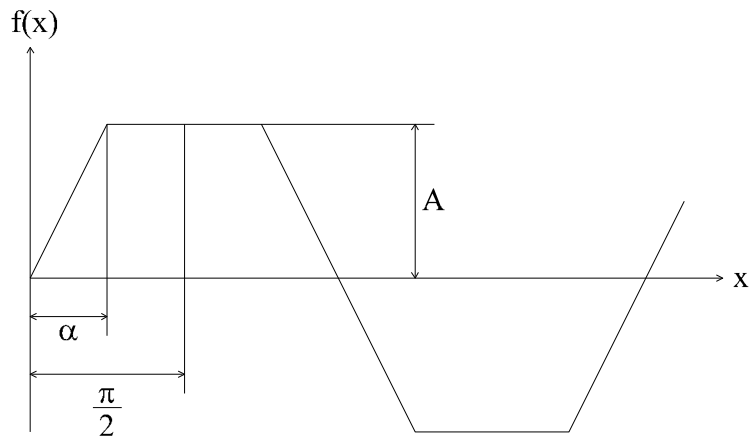


Рис. 7-4

Учитывая симметрию, можно заключить, что ряд будет состоять из нечетных синусоид. Интегрируем функцию $f(x)$ на отрезке, равном четверти периода, умножая интеграл на 4. Определим коэффициенты B_K :

$$B_K = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin Kx dx =$$

$$= \frac{L}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} A \frac{x}{\alpha} \sin Kx dx + \frac{4}{\pi} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} A \sin Kx dx$$

Разделение интеграла на два связано с тем, что значение функции на участке от 0 до α равно $A \frac{x}{\alpha}$; на

участке от α до $\frac{\pi}{2}$ равно A .

По таблицам интегралов находим:

$$\int x \sin kx dx = \frac{\sin kx}{k^2} - \frac{x \cos kx}{k},$$

тогда

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{4A}{\alpha} \int_0^\alpha \left\{ \frac{\sin kx}{k^2} - \frac{x \cos kx}{k} \right\} - \int_\alpha^{\pi/2} \frac{4A}{\pi k} \cos kx = \\ &= \frac{4A}{\pi \alpha k^2} \{ \sin k\alpha - k\alpha \cos k\alpha + k\alpha \cos k\alpha \} = \frac{4A}{\pi \alpha k^2} \sin k\alpha \end{aligned}$$

В результате имеем ряд:

$$f(x) = \frac{4A}{\pi \alpha} \left\{ \sin \alpha \sin x + \frac{1}{9} \sin 3\alpha \sin 3x \dots \right\}.$$

Пример 2. Рассмотрим сигнал треугольной формы (рис. 7-5)

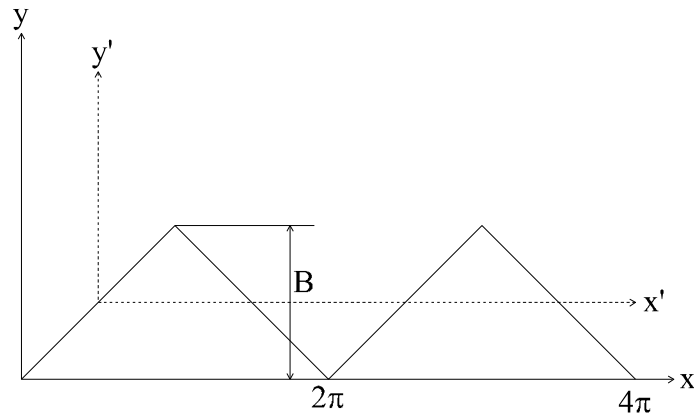


Рис. 7-5

Сместим начало координат в точку $x = \frac{\pi}{2}$; $y = \frac{B}{2}$ и примем $\alpha = \frac{\pi}{2}$; $A = \frac{B}{2}$. Получим ряд:

$$y'(x') = \frac{4B}{\pi^2} \left(\sin x' + \frac{1}{9} \sin 3x' + \frac{1}{25} \sin 5x' + \dots \right).$$

Для обозначения ряда первоначальных координат необходимо в ряду прибавить $\frac{B}{2}$ и вместо x' записать

$$\left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right):$$

$$y(x) = \frac{B}{2} + \frac{4B}{\pi^2} \left(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \dots \right).$$

Пример 3. Серия прямоугольных импульсов (рис. 7-6.):

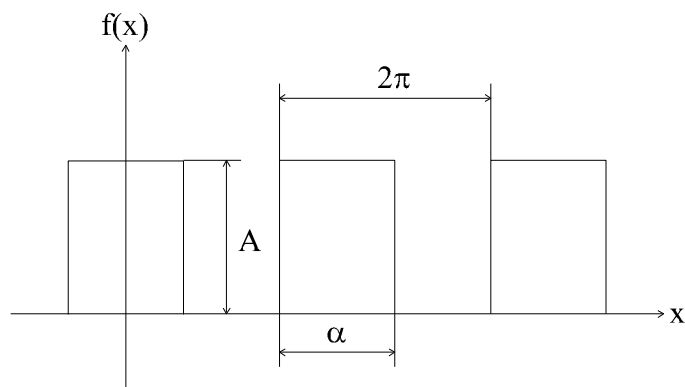


Рис. 7-6

Функция симметрична относительно оси ординат, поэтому содержит только члены ряда с косинусами.

Ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = Ak \frac{2A}{\pi} \left(\sin \pi k \cos x + \frac{1}{2} \sin 2\pi k \cos 2x \dots \right),$$

где $k = \frac{\alpha}{2\pi}$ - коэффициент импульса.

Из приведенных примеров разложения в ряд Фурье видно, что при отсутствии постоянной составляющей функции полностью определяется величинами амплитуд соответствующих гармоник. Поэтому функцию $f(\omega)$ представляют амплитудно-частотным спектром (рис. 7-7).

Если добавить фазочастотный спектр, то эти две характеристики полностью определяют несинусоидальную периодическую функцию.

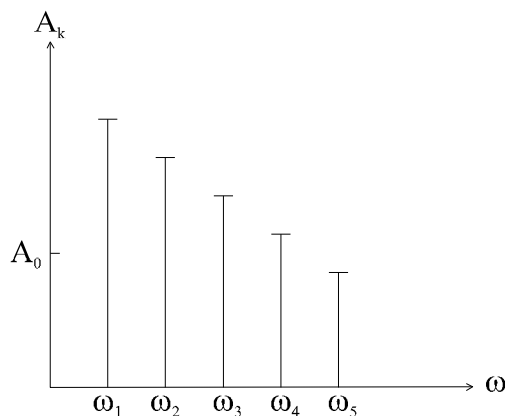


Рис. 7-7

§ 2. Общие характеристики несинусоидальных токов, напряжений и ЭДС

Несинусоидальные токи, напряжения и ЭДС характеризуются следующими параметрами:

1. Максимальным значением за период:

$$I_{\max}, U_{\max}, E_{\max};$$

2. Действующим (эффективным), т.е. среднеквадратичным значением за период:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}; \quad U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}; \quad E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt}.$$

После разложения в ряд (например тока) при $k = 0$, $\varphi_k = \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, получим:

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T (i_0 + i_1 + i_2 + \dots + i_k + \dots)^2 dt = \\ &= \sum_{\substack{\hat{e}=0 \\ \hat{e}=\infty}}^{\hat{e}=\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_k^2 dt + \sum_{\substack{s=\infty \\ g=0 \\ s=0 \\ g \neq s}}^{s=\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_g i_s dt = \\ &= \sum_{\hat{e}=0}^{\hat{e}=\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_k^2 dt = \sum_{\hat{e}=0}^{\hat{e}=\infty} I_k^2 = I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2 + \dots \end{aligned}$$

так как при $g \neq s$:

$$\begin{aligned} \int_0^T i_g i_s dt &= \int_0^T I_{gm} I_{sm} \sin(g\omega t + \varphi_g) \sin(s\omega t + \varphi_s) dt = \\ &= \frac{1}{2} I_{gm} I_{sm} \left\{ \int_0^T \cos[(g-s)\omega t + \varphi_g - \varphi_s] dt - \cos[(g+s)\omega t + \varphi_g + \varphi_s] dt \right\} = 0 \end{aligned}$$

тогда:

$$I^2 = \frac{1}{T} \sum_0^\infty i_k^2 dt = \sum_0^\infty I_k^2 = I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2 + \dots$$

или

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2 + \dots}$$

Действующее значение периодического несинусоидального тока равно квадратному корню из суммы квадратов действующих значений всех гармоник и квадрата постоянной составляющей. Аналогично,

$$U^2 = \sum_0^\infty U_k^2; E^2 = \sum_0^\infty E_k^2.$$

3. Как указывалось выше, среднее значение равно постоянной составляющей:

$$A_{CP} = A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt;$$

среднее значение по модулю

$$A'_{CP} = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt.$$

Указанные характеристики получают непосредственно из приведенных формул, содержащих интегралы, или из их разложения в ряды.

Периодические токи, напряжения и ЭДС характеризуют следующие коэффициенты:

Коэффициент формы кривой - отношение действующего значения к среднему по модулю:

$$K_{\hat{0}} = \frac{A}{A'_{CP}},$$

для синусоиды

$$K_{\delta} = \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{2}{\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11.$$

Коэффициенты амплитуды - отношение максимального значения к действующему:

$$K_a = \frac{A_{\max}}{A},$$

для синусоиды

$$K_a = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = 1,414.$$

Коэффициент искажения - отношение действующего значения основной гармоники к действующему значению функции:

$$K_u = \frac{A_1}{A},$$

для синусоиды $K_u = 1$.

Коэффициент гармоник - отношение действующего значения высших гармоник к действующему значению основной гармоники

$$K_{\bar{A}} = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} A_k^2}}{A_1}.$$

Если постоянная составляющая отсутствует, то

$$K_{\bar{A}} = \frac{\sqrt{1 - K_u^2}}{K_u},$$

для синусоиды $K_{\bar{A}} = 0$.

§ 3. Особенности измерений при несинусоидальных сигналах

Разные системы приборов переменного тока регистрируют разные величины, но шкала их отградуирована так, что при синусоидальном воздействии они показывают эффективное значение измеряемой величины.

Приборы электродинамической, электромагнитной и тепловой систем отградуированы в действующих значениях. Приборы магнитоэлектрической системы реагируют только на постоянную составляющую.

Магнитоэлектрические приборы с детекторным преобразователем реагируют на средние по модулю значения, а отградуированы на эффективные значения при синусоидальном возмущении.

Электронные амплитудные приборы регистрируют максимальные значения, а отградуированы также на эффективные значения для синусоидального возмущения.

Рассмотрим конкретные примеры.

Пусть имеем различные формы напряжений при одинаковом эффективном значении, равном 10 В.

синусоидальная (рис. 7-8,а);

прямоугольная (рис. 7-8,б);

серия импульсов при $\frac{\tau}{T} = 0,5$ (рис. 7-8,в).

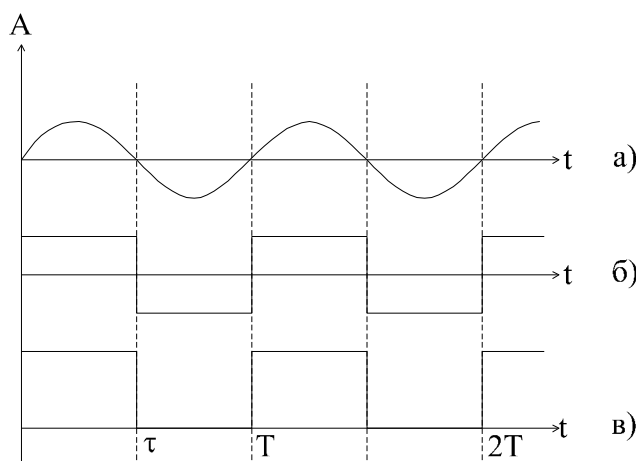


Рис. 7-8

Поскольку эффективные значения всех напряжений одинаковы, то приборы электродинамической, электромагнитной и тепловой систем покажут 10 В.

Амплитудные значения:

синусоидальная 14,1 В;

прямоугольная 10 В;

серия импульсов $x = 10 \cdot \sqrt{2} = 14,1$ В.

Амплитудные приборы, отградуированные на эффективное значение, показывают:

синусоидальная 10 В;

прямоугольная $10 / \sqrt{2} = 7,1$ В;

серия импульсов $14,1/1,41 = 10$ В.

Детекторные приборы реагируют на средние по модулю значения, но цена деления шкалы увеличена в 1,11:

синусоидальная 10 В;

прямоугольная $10 \cdot 1,11 = 11,1$ В;

серия импульсов $14,1/21,11 = 7,8$ В.

Магнитоэлектрические приборы:

синусоидальная 0;

прямоугольная 0;

серия импульсов $14,1/2 = 7,05$ В.

§ 4. Расчет линейных цепей при несинусоидальных токах, напряжениях и ЭДС

Расчет цепей содержит следующие этапы:

1. Разложение заданных ЭДС или токов источников на гармонические составляющие.
2. Расчет токов и напряжений для каждой составляющей отдельно (на основе принципа наложения).
3. Квадратичное суммирование решений для каждой составляющей.

Обычно ряды Фурье сходятся довольно быстро и в зависимости от требуемой точности решения задачи с учетом характера цепи ограничиваются определенным количеством членов разложения. таким образом, расчет сводится к решению столько же однотипных задач, сколько гармониками ограничиваются. При этом учитывается, что для различных частот сопротивления элементов схемы неодинаковы.

Сопротивление катушки индуктивности для постоянной составляющей $X_{L0} = 0$; сопротивление для k -й гармоники в k раз больше, чем для основной:

$$X_{Lk} = k\omega L = kX_{L1}.$$

Конденсатор не пропускает постоянную составляющую ($X_{C0} = \infty$); для k -й гармоники сопротивления емкости в k раз меньше, чем для основной:

$$X_{Ck} = \frac{1}{k\omega C} = \frac{1}{k}X_{C1}.$$

Активное сопротивление также зависит от частоты, возрастая с ее увеличением из-за поверхностного эффекта. Однако для цепей, рассматриваемых в электротехнике, зависимость обычно не учитывают, считая $R_k = \text{const}$.

Вследствие зависимости реактивных сопротивлений от частоты тока и падения напряжений в цепях, содержащих емкости, имеют больший коэффициент гармоник, чем ЭДС генератора. Иными словами, отклонение от синусоиды в емкостных цепях усиливается.

В индуктивных цепях происходит обратное явление, т.е. индуктивность подавляет проявление высших гармоник.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. В цепи с последовательно соединенными R и L подведено несинусоидальное напряжение

$$u = U_0 + U_{m1} \sin \omega t + U_{m3} \sin(3\omega t + \psi_3),$$

найдем мгновенное и действующее значения тока для схемы (рис.7-9.)

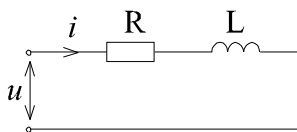


Рис. 7-9

Постоянная составляющая тока

$$I_0 = \frac{U_0}{R}.$$

Для первой гармоники:

$$\text{ток } i_1 = \frac{U_{m1}}{Z_1} \sin(\omega t - \varphi_1)$$

$$\text{модуль сопротивления } Z_1 = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{R^2 + X_{L1}^2};$$

$$\text{фаза } \varphi_1 = \arctg \frac{\omega L}{R} = \arccos \frac{R}{Z_1}.$$

Действующее значение тока

$$I_1 = \frac{U_{m1}}{\sqrt{2} Z_1}.$$

Для третьей гармоники:

$$\text{ток } i_3 = \frac{U_{m3}}{Z_3} \sin(\omega t + \psi_3 - \varphi_3)$$

$$\text{модуль сопротивления } Z_3 = \sqrt{R^2 + (3\omega L)^2} = \sqrt{R^2 + X_{L3}^2};$$

$$\text{фаза } \varphi_3 = \arctg \frac{3\omega L}{R}.$$

Действующее значение тока

$$I_3 = \frac{U_{m3}}{Z_3 \sqrt{2}}.$$

Мгновенное значение общего тока

$$i(t) = I_0 + \sqrt{2} I_1 \sin(\omega t - \varphi_1) + \sqrt{2} I_3 \sin(3\omega t + \psi_3 - \varphi_3).$$

Действующее значение общего тока

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_3^2}.$$

Поскольку $Z_1 < Z_3$, относительное влияние третьей гармоники в кривой тока меньше, чем в кривой напряжения.

Пример 2. Пусть то же напряжение действует в последовательной RC-цепи (рис. 7-10).

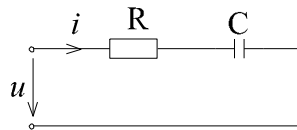


Рис. 7-10

Постоянная составляющая

$$I_0 = 0.$$

Для первой гармоники:

$$\text{ток } i_1 = \frac{U_{m1}}{Z_1} \sin(\omega t + \varphi_1);$$

$$\text{модуль сопротивления } Z_1 = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X_{C1}^2};$$

$$\text{фаза } \varphi_1 = \arctg \frac{1}{\omega R C}.$$

Действующее значение тока

$$I_1 = \frac{U_{m1}}{Z_1 \sqrt{2}}.$$

Для третьей гармоники:

$$\text{ток } i_3 = \frac{U_{m3}}{Z_3} \sin(3\omega t + \psi_3 + \varphi_3);$$

модуль сопротивления

$$Z_3 = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{3\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X_{C3}^2}; \text{ фаза } \varphi_3 = \arctg \frac{1}{3\omega CR}.$$

Действующее значение

$$I_3 = \frac{U_{m3}}{\sqrt{2} Z_3};$$

ток в цепи

$$i(t) = \sqrt{2} I_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \sqrt{2} I_3 \sin(3\omega t + \varphi_3 + \varphi_3).$$

Действующее значение тока

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2};$$

так как $Z_3 < Z_1$, третья гармоника в кривой тока выражена сильнее, чем в кривой напряжения.

§ 5. Активная мощность при периодических несинусоидальных токах и напряжениях

Общее правило определения активной мощности P:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \frac{1}{T} \int_0^T (u_0 + u_1 + u_2 + \dots)(i_0 + i_1 + i_2 + \dots) dt.$$

После перемножения под интегралом получаем сумму произведений двух видов: $u_K i_K$ и $u_g i_s$.

Интеграл от слагаемых первого вида:

$$\frac{1}{T} \int_0^T u_K i_K dt = P_K = U_K I_K \cos \varphi_K.$$

Интегралы от слагаемых второго вида обращаются в ноль, так как они представляют собой интегралы от синусоидальных функций за целое число периодов.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \sum_{K=0}^{\infty} P_K = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots$$

Активная мощность при периодических несинусоидальных токах и напряжениях равна сумме активных мощностей постоянной и всех гармонических составляющих тока и напряжения.

Понятие коэффициента мощности при несинусоидальных токах и напряжениях не совпадает с понятием $\cos \varphi$:

$$\cos \alpha = \frac{P}{UI} = \frac{\sum_0^{\infty} P_K}{\sqrt{\sum_0^{\infty} U_K^2} \sqrt{\sum_0^{\infty} I_K^2}}.$$

Появление высших гармоник в цепях, содержащих реактивные сопротивления, приводит к снижению коэффициента мощности, $\alpha = 1$ только при чисто резистивной цепи.

α - угол сдвига фаз между эквивалентными синусоидами тока и напряжения, действующие значения которых такие же как у несинусоидальных.

§ 6. Резонанс в цепи при несинусоидальных токах и напряжениях

При несинусоидальных токах и напряжениях явления резонанса значительно усложняются, так как резонанс возникает для каждой гармоники отдельно.

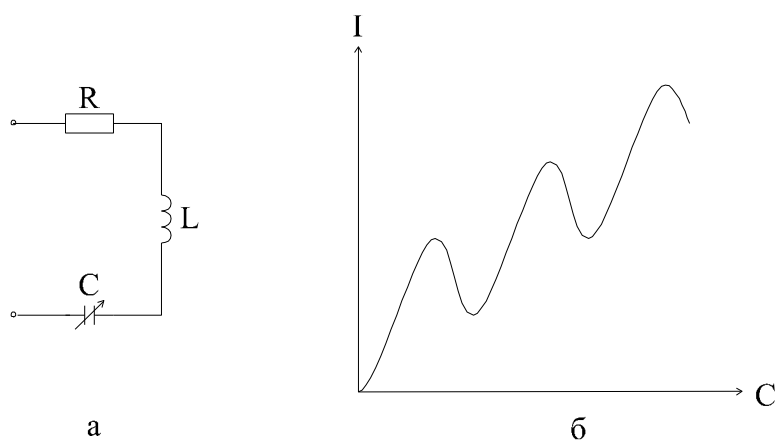


Рис. 7-11

В цепи RLC (рис. 7-11,а), например, несинусоидальное напряжение вызовет ток k -й гармоники

$$I_k = \frac{U_k}{\sqrt{R^2 + \left(\kappa \omega L - \frac{1}{\kappa \omega C} \right)^2}}.$$

Характер кривой $I(C)$ показан на рис. 7-11,б, причем $C_1 > C_2 > C_3$, так как $C_k = \frac{1}{\kappa^2 \omega^2 C}$.

Аналогичные явления можно наблюдать и при параллельном соединении элементов.

Явлениями резонанса пользуются для создания фильтров, т.е. схем для выделения требуемых частот и подавления нежелательных частот.

Рассмотрим несколько конкретных схем.

1. LC участок схемы рис 7-12, настроенный в резонанс на k -ю гармонику, будет оказывать сопротивление для всех гармоник, кроме k -й, и следовательно, в токе нагрузки определяющая роль принадлежит току этой гармоники.

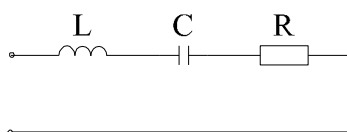


Рис. 7-12

2. Если эту схему дополнить LC-цепочкой параллельно нагрузке, то она, составляя малое сопротивление для всех гармоник, кроме k -й, не пропустит в нагрузку гармоники, кроме k -й. Практически такая схема пропускает полосу частот и поэтому называется полосовым фильтром (рис. 7-13).

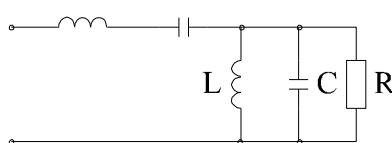


Рис. 7-13

Для уменьшения k -й гармоники в нагрузке резонансные фильтры включаются по схеме рис. 7-14.

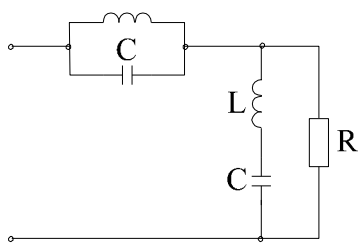


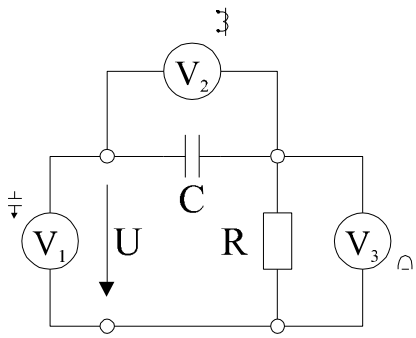
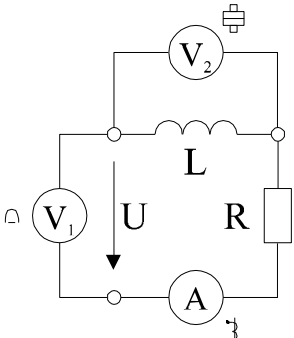
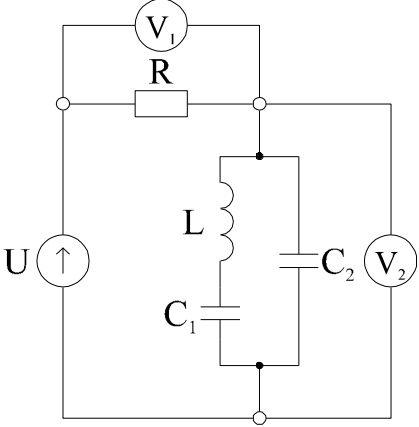
Рис. 7-14

Конечно, эффект действия фильтра зависит от согласования с нагрузкой.

Контрольные вопросы к теме 7

1. Каков порядок расчета линейных цепей при несинусоидальных токах и напряжениях?
2. Как представить несинусоидальный периодический сигнал в виде суммы гармонических составляющих?
3. Каков физический смысл нулевого члена ряда Фурье?
4. Как рассчитать действующее значение несинусоидального периодического сигнала?
5. Какими коэффициентами характеризуются несинусоидальные сигналы?
6. Как рассчитать сопротивление цепи для постоянной составляющей? Для первой гармоники? Для n -ой гармоники?
7. Каковы особенности измерений при несинусоидальных сигналах приборами различных систем?
8. Какое значение несинусоидального напряжения покажет авометр магнитоэлектрической системы в режиме постоянного напряжения, переменного напряжения?

Контрольные вопросы к теме 7

1	 $u = a + b \sin \omega t - d \sin(2\omega t + 9)$	Определить показания приборов разных систем, считая a, b, d, R, C заданными.
2	 $u = a + b \sin \omega t - d \cos 5\omega t$	Определить показания приборов разных систем, считая L, R, a, b, d заданными.
3	 $u = 150 + 50\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ);$ $\omega L = \frac{1}{\omega C_1}$	Определить показания приборов электромагнитной системы.

Примечание: Приборы:

- ⌋ - электромагнитная система
- ▽ - электростатическая система
- ⊞ - электродинамическая система
- ∆ - магнитоэлектрическая система

показывают действующее значение измеряемой величины

показывает среднее значение измеряемой величины

Тема 8

Общие свойства четырехполюсников

§ 1. Уравнения четырехполюсников

Электротехническое устройство, служащее для передачи энергии (сигналов) и имеющие по два входных и выходных зажима, называется четырехполюсником.

Если внутри четырехполюсника нет источников энергии или они взаимно компенсируют друг друга, то такой четырехполюсник называют пассивным (рис. 8-1: а - идеальный трансформатор; б - частотный фильтр; в - мостовая схема).

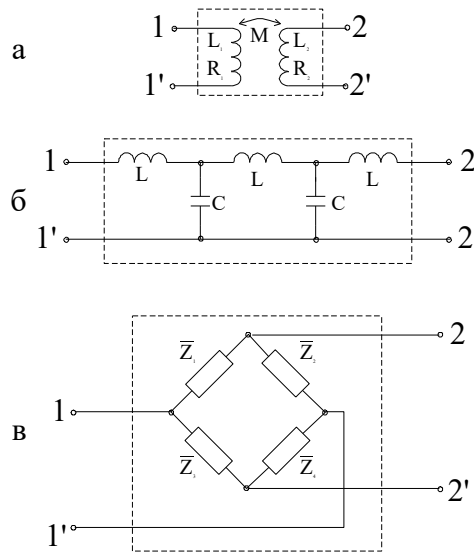


Рис. 8-1

Рассмотрим свойства четырехполюсников в установившемся режиме при периодических синусоидальных токах и напряжениях. Это позволит в дальнейшем применить полученные результаты для анализа цепей при других формах сигналов.

Для анализа свойств четырехполюсника установим зависимость между входным напряжением \dot{U}_1 и токами \dot{I}_1 и входными \dot{U}_2 и \dot{I}_2 (рис. 8-2, где П - пассивная схема).

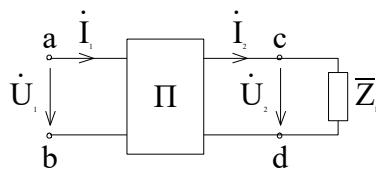


Рис. 8-2

При выборе направлений напряжений и токов, указанных на рисунке, энергия передается от входа (клемма а-б) к сопротивлению нагрузки Z_H (клеммы с-д).

Составим уравнение цепи методом контурных токов. В первый контур включим входные зажимы, во второй контур включим сопротивление нагрузки \bar{Z}_H .

$$\bar{Z}_H \dot{I}_1 + \bar{Z}_{12} \dot{I}_2 + \bar{Z}_{13} \dot{I}_3 + \dots + \bar{Z}_{1n} \dot{I}_n = \dot{U}_1$$

$$\bar{Z}_{21} \dot{I}_1 + \bar{Z}_{22} \dot{I}_2 + \bar{Z}_{23} \dot{I}_3 + \dots + \bar{Z}_{2n} \dot{I}_n = 0$$

$$\bar{Z}_{n1} \dot{I}_1 + \bar{Z}_{n2} \dot{I}_2 + \bar{Z}_{n3} \dot{I}_3 + \dots + \bar{Z}_{nn} \dot{I}_n = 0.$$

Обозначим $\bar{Z}_{22} = \bar{Z}'_{22} + \bar{Z}_H$,

где \bar{Z}'_{22} - часть сопротивления второго контура, входящая в состав четырехполюсника.

Учитывая, что $\dot{I}_2 \bar{Z}_H = \dot{U}_2$:

$$\bar{Z}_{11} \dot{I}_1 + \bar{Z}_{12} \dot{I}_2 + \dots + \bar{Z}_{1n} \dot{I}_n = \dot{U}_1$$

$$\bar{Z}_{21} \dot{I}_1 + \bar{Z}_{22} \dot{I}_2 + \dots + \bar{Z}_{2n} \dot{I}_n = -\dot{U}_2$$

$$\bar{Z}_{n1} \dot{I}_1 + \bar{Z}_{n2} \dot{I}_2 + \dots + \bar{Z}_{nn} \dot{I}_n = 0.$$

Все остальные уравнения содержат в правой части нули, что соответствует пассивному четырехполюснику.

Решение системы уравнений:

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \dot{U}_1 - \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \dot{U}_2;$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} \dot{U}_1 - \frac{\Delta_{22}}{\Delta} \dot{U}_2.$$

Отношения $\frac{\Delta_{11}}{\Delta}$, $\frac{\Delta_{12}}{\Delta}$ имеют размерность проводимости.

Обозначим

$$\frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \bar{Y}_{11}; \quad \frac{\Delta_{12}}{\Delta} = \bar{Y}_{21}; \quad -\frac{\Delta_{22}}{\Delta} = \bar{Y}_{22}; \quad -\frac{\Delta_{21}}{\Delta} = \bar{Y}_{12},$$

тогда уравнения четырехполюсника принимают вид:

$$\dot{I}_1 = \bar{Y}_{11} \dot{U}_1 + \bar{Y}_{12} \dot{U}_2;$$

$$\dot{I}_2 = \bar{Y}_{21} \dot{U}_1 + \bar{Y}_{22} \dot{U}_2.$$

В матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} \\ \bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix},$$

или

$$\bar{Y} \dot{U} = \dot{I}.$$

Для линейных уравнений, соответствующих линейным цепям $\Delta_{12} = \Delta_{21}$, поэтому $\bar{Y}_{12} = -\bar{Y}_{21}$.

Указанные коэффициенты называются Y-параметрами, а матрица \mathbf{Y} -матрицей четырехполюсника. Как видно из записи уравнений четырехполюсников в Y-параметрах с учетом уравнения $Y_{12} = -Y_{21}$, пассивный четырехполюсник характеризуется тремя независимыми параметрами. Физический смысл Y-параметров можно определить по режимам короткого замыкания на выходе ($U_2 = 0$) и на входе ($U_1 = 0$).

$$Y_{11} = \left(\frac{I_1}{U_1} \right)_{U_2=0} \text{ - входная проводимость при коротком замыкании на выходе.}$$

$$Y_{12} = \left(\frac{I_2}{U_1} \right)_{U_2=0} \text{ - передаточная (взаимная) проводимость при коротком замыкании на входе.}$$

$$Y_{21} = \left(\frac{I_1}{U_2} \right)_{U_1=0} \text{ - передаточная проводимость при коротком замыкании на выходе.}$$

$$Y_{22} = \left(\frac{I_2}{U_2} \right)_{U_1=0} \text{ - выходная проводимость при коротком замыкании на входе.}$$

Решим систему уравнений относительно напряжений:

$$\dot{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{Y}}^{-1} \mathbf{i} = \bar{\mathbf{Z}} \mathbf{i},$$

где

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\bar{Y}_{11}\bar{Y}_{22} - \bar{Y}_{12}\bar{Y}_{21}} \begin{bmatrix} \bar{Y}_{22} & -\bar{Y}_{12} \\ -\bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{11} \end{bmatrix}$$

Или в развернутом виде

$$\dot{U}_1 = \bar{Z}_{11} i_1 + \bar{Z}_{12} i_2$$

$$\dot{U}_2 = \bar{Z}_{21} i_1 + \bar{Z}_{22} i_2$$

Два из четырех параметров связаны между собой:

$$\bar{Z}_{12} = -\bar{Z}_{21}$$

Физический смысл Z-параметров четырехполюсника можно определить по режимам холостого хода на выходе ($i_2 = 0$) и на входе ($i_1 = 0$).

$$\bar{Z}_{11} = \left(\frac{E_1}{I_1} \right)_{I_2=0} \text{ - входное сопротивление в режиме холостого хода на выходе.}$$

$$\bar{Z}_{12} = \left(\frac{E_1}{I_2} \right)_{I_1=0} \text{ - передаточное (взаимное) сопротивление в режиме холостого хода на входе.}$$

$\bar{Z}_{21} = \left(\frac{E_2}{I_1} \right)_{I_2=0}$ - передаточное сопротивление в режиме холостого хода на выходе.

$\bar{Z}_{22} = \left(\frac{E_2}{I_2} \right)_{I_1=0}$ - выходное сопротивление зажимов 22' в режиме холостого хода на входе.

Во многих практических случаях удобно когда система уравнений решена относительно выходных напряжений и тока:

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2$$

$$\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2$$

Параметры A, B, C, D в общем случае комплексные. Их можно выразить, например, через Z-параметры.

Решая второе уравнение Z-параметров относительно тока \dot{I}_1 , получим:

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{\bar{Z}_{21}} \dot{U}_2 - \frac{\bar{Z}_{22}}{\bar{Z}_{21}} \dot{I}_2$$

Сопоставив со вторым уравнением в A-параметрах, получаем:

$$C = \frac{1}{\bar{Z}_{21}}; D = -\frac{\bar{Z}_{22}}{\bar{Z}_{21}}$$

Подставим \dot{I}_1 в первое уравнение в Z-параметрах:

$$\dot{U}_1 = \bar{Z}_{11}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{12}\dot{I}_2 = \frac{\bar{Z}_{11}}{\bar{Z}_{21}} \dot{U}_2 - \frac{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{21}\bar{Z}_{12}}{\bar{Z}_{21}} \dot{I}_2$$

Таким образом

$$A = \frac{\bar{Z}_{11}}{\bar{Z}_{21}}; B = \frac{\bar{Z}_{21}\bar{Z}_{12} - \bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22}}{\bar{Z}_{21}}$$

Нетрудно убедиться, что AD-BC=1.

Физический смысл A-параметров:

$A = \left(\frac{U_1}{U_2} \right)_{I_2=0}$ - передаточное отношение напряжений в режиме холостого хода на выходе.

$B = \left(\frac{U_1}{I_2} \right)_{\dot{U}_2=0}$ - передаточное сопротивление при коротком замыкании на выходе.

$C = \left(\frac{I_1}{U_2} \right)_{\dot{I}_2=0}$ - передаточная проводимость в режиме холостого хода на выходе.

$D = \left(\frac{I_1}{I_2} \right)_{\dot{U}_2=0}$ - передаточное отношение токов при коротком замыкании на выходе.

При обратном питании с учетом изменения знаков токов получим:

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = D\dot{U}_1 + B\dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 = C\dot{U}_1 + A\dot{I}_1 \end{cases}$$

При этом сохраняется соотношение

$$AD - BC = 1$$

Для формирования уравнений при смешанном соединении четырехполюсников применяются еще два уравнения в Н-параметрах и G-параметрах:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

$$H_{12} = H_{21}$$

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = G_{11}\dot{U}_1 + G_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = G_{21}\dot{U}_1 + G_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

$$G_{12} = G_{21}$$

Физический смысл предлагаем установить читателю.

§ 3. Эквивалентные схемы четырехполюсника

Поскольку любая система уравнений, описывающая пассивный четырехполюсник, имеет три независимых параметра, то всякий четырехполюсник можно свести к любой из трех эквивалентных схем: Т-образной (рис. 8-3,а); П-образной (рис. 8-3,б); Х-образной (рис. 8-3,в), содержащих также три параметра: \bar{Z}_1 ; \bar{Z}_2 ; \bar{Z}_3 .

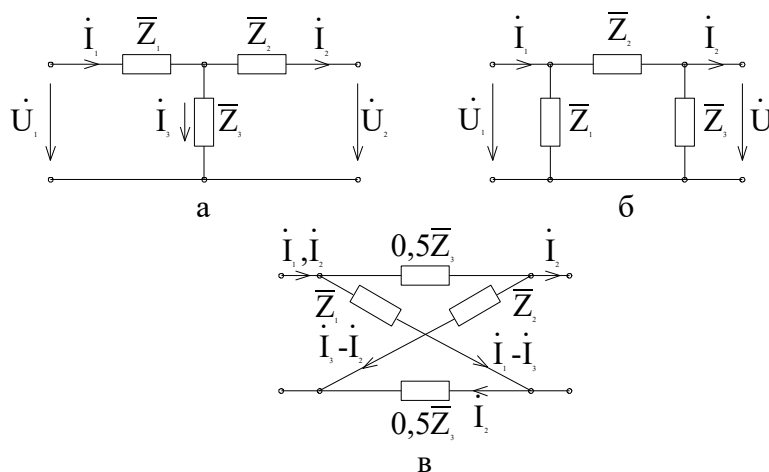


Рис. 8-3

Заметим, что переход от $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3$ к $H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22}$ и $G_{11}, G_{12}, G_{21}, G_{22}$ осуществляется по формулам:

$$\bar{Z}_1^T = \frac{\bar{Z}_1^i \bar{Z}_3^i}{\bar{Z}_1^i + \bar{Z}_2^i + \bar{Z}_3^i}.$$

Выразим элементы эквивалентных схем через параметры четырехполюсника. Например, для Т-образной схемы непосредственно из уравнений Кирхгофа следует

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= i_1 \bar{Z}_1 + (i_1 - i_2) \bar{Z}_3 \\ \dot{U}_2 &= -i_2 \bar{Z}_2 + (i_1 - i_2) \bar{Z}_3,\end{aligned}$$

где

$$i_1 - i_2 = i_3$$

или

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3) i_1 - \bar{Z}_3 i_2 \\ \dot{U}_2 &= \bar{Z}_3 i_1 - (\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3) i_2.\end{aligned}$$

Сравнивая полученные уравнения в Z-параметрах для Т-образной эквивалентной схемы, получим

$$\bar{Z}_{11} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_3; \bar{Z}_{12} = \bar{Z}_3 = -\bar{Z}_{21}; \bar{Z}_{22} = -(\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3).$$

Используя уравнения связи между А-параметрами и Z-параметрами четырехполюсника, выразим А-параметры эквивалентной Т-образной схемы:

$$A = \frac{\bar{Z}_{11}}{\bar{Z}_{21}}; B = -\frac{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}(-\bar{Z}_{21})}{\bar{Z}_{21}}; C = \frac{1}{\bar{Z}_{21}}; D = -\frac{\bar{Z}_{22}}{\bar{Z}_{21}}.$$

Откуда

$$\begin{aligned}A &= \frac{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3}{\bar{Z}_3} = 1 + \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_3}; B = \frac{\bar{Z}_1\bar{Z}_2 + \bar{Z}_2\bar{Z}_3 + \bar{Z}_3\bar{Z}_1}{\bar{Z}_3}; \\ C &= \frac{1}{\bar{Z}_3}; D = \frac{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3}{\bar{Z}_3}.\end{aligned}$$

При решении обратной задачи, т.е. по заданным А-параметрам определить сопротивления Т-образной схемы, воспользуемся следующими формулами:

$$\bar{Z}_3 = \frac{1}{C}; \bar{Z}_1 = \frac{A-1}{C}; \bar{Z}_2 = \frac{D-1}{C}.$$

Для П-образной схемы справедливы соотношения:

$$\bar{Z}_3 = B; \bar{Z}_1 = \frac{B}{D-1}; \bar{Z}_2 = \frac{B}{A-1}; A = 1 + \frac{\bar{Z}_3}{\bar{Z}_2}; B = \bar{Z}_3; C = \frac{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3}{\bar{Z}_1\bar{Z}_2}; D = 1 + \frac{\bar{Z}_3}{\bar{Z}_1}.$$

§ 3. Экспериментальное определение параметров четырехполюсника

Поскольку все параметры четырехполюсника связаны между собой, то достаточно для каждого четырехполюсника найти одну из систем параметров. Существует два способа определения параметров: расчетный, использующий схему электрической цепи и

экспериментальный, рассматривающий четырехполюсник как «черный ящик» с четырьмя выводами. В первом случае не существует принципиальных различий между анализом свойств четырехполюсника на постоянном и переменном токе. Однако при экспериментальном определении параметров такие различия отмечаются.

Поскольку в каждой системе параметров только три независимых параметра, необходимо составить три уравнения для их вычисления. С этой целью используют эксперименты в режимах холостого хода (ХХ) и короткого замыкания (КЗ).

В режиме холостого хода (рис. 8-4,а) на выходе

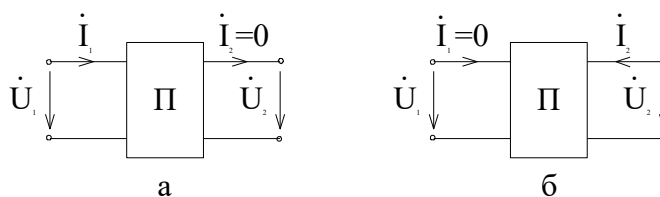


Рис. 8-4

ток равен нулю $\dot{I}_{2\text{ХХ}} = 0$.

При обратном питании в режиме холостого хода на входе четырехполюсника $\dot{I}_{1\text{ХХ}} = 0$.

При коротком замыкании на выходе или входе соответственно напряжения равны нулю $\dot{U}_{2\text{КЗ}} = 0$; $\dot{U}_{1\text{КЗ}} = 0$ (рис. 8-5, а - режим короткого замыкания на выходе, б - то же на входе).

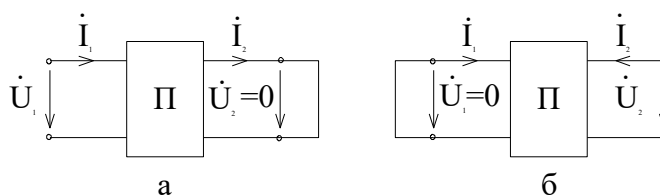


Рис. 8-5

Указанные опыты представляют частные случаи состояния четырехполюсника, которые не нарушают справедливости уравнений четырехполюсника. Этот факт позволяет достаточно просто определить параметры четырехполюсника.

Запишем уравнения в А-параметрах:

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2;$$

В режиме короткого замыкания на выходе четырехполюсника напряжения $U_2 = 0$, тогда

$$U_1 = BI_2;$$

$$I_1 = DI_2.$$

Откуда

$$B = \frac{\dot{U}_1}{I_{2\text{КЗ}}}, D = \frac{\dot{I}_{1\text{КЗ}}}{I_{2\text{КЗ}}}.$$

В режиме холостого хода на выходе четырехполюсника ток $\dot{I}_2 = 0$, тогда уравнения принимают вид:

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2,$$

$$\dot{I}_1 = C\dot{U}_2,$$

откуда

$$A = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_{2XX}}; C = \frac{\dot{I}_{1XX}}{\dot{U}_{2XX}}.$$

Любой из А-параметров четырехполюсника можно вычислить по трем другим из соотношения $AD - BC = I$.

Аналогично, проводя три эксперимента в режимах холостого хода и короткого замыкания можно определить параметры Z, Y или H. При этом необходимо помнить, что для линейных цепей \dot{U}_1 - в режиме холостого хода и \dot{I}_2 - в режиме короткого замыкания выбираются произвольными по величине, которая определяется мощностью рассеяния элементов. Однако, чтобы не допустить повреждений элементов и не нарушить линейный режим, в режиме холостого хода \dot{U}_1 выбирают таким, чтобы $U_{2XX} = U_{2N}$, т.е. номинальному напряжению; в режиме короткого замыкания $U_{1KЗ}$ выбирают таким, чтобы $I_{2KЗ} = I_{2N}$, т.е. номинальному току. Под номинальными значениями тока или напряжения понимают такие величины, на которые рассчитано устройство, представленное в виде четырехполюсника. Например, для трансформатора - это напряжение сети, в которую он включается, и номинальный ток нагрузки.

Пример:

Определить Z-параметры четырехполюсника, представленного на рис. 8-6. в режимах холостого хода на выходе (а) и входе (б)

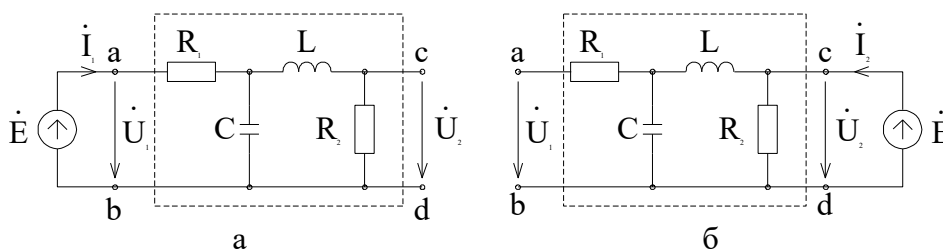


Рис. 8-6

Запишем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \bar{Z}_{11}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= \bar{Z}_{21}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{22}\dot{I}_2 \end{aligned} \right\}$$

Учитывая, что $\dot{I}_{2XX} = 0$, имеем

$$\bar{Z}_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_{1XX}}; \bar{Z}_{21} = \frac{U_{2XX}}{\dot{I}_{1XX}}.$$

Вычислим ток \dot{I}_1 , предполагая, что на входе схем действует напряжение \dot{U}_1 :

$$i_1 = \frac{\dot{U}_1}{R_1 + \frac{-j\frac{1}{\omega C}(R_2 + j\omega L)}{R_2 + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}}},$$

откуда

$$\bar{Z}_{11} = R_1 + \frac{-j\frac{1}{\omega C}(R_2 + j\omega L)}{R_2 + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}}$$

\bar{Z}_{21} определяем из выражения для U_2 , считая что на входе протекает ток \dot{I}_1

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_1 \frac{-j\frac{1}{\omega C}(R_2 + j\omega L)}{R_2 + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}} \cdot \frac{R_2}{(R_2 + j\omega L)} = \frac{-j\frac{R_2}{\omega C}\dot{I}_1}{R_2 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)},$$

откуда

$$\bar{Z}_{21} = -\bar{Z}_{12} = -\frac{\frac{jR_2}{\omega C}}{R_2 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

Для нахождения \bar{Z}_{22} проведем расчет в режиме холостого хода на входе (рис. 8-6,б) и из второго уравнения имеем, полагая $\dot{I}_{1XX} = 0$:

$$\bar{Z}_{22} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_{2XX}}.$$

Если к выходу четырехполюсника приложено напряжение \dot{U}_2 , ток определяется выражением

$$i_2 = \frac{\dot{U}_2}{\frac{R_2\left(j\omega L - j\frac{1}{\omega C}\right)}{R_2 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}},$$

откуда

$$\bar{Z}_{22} = \frac{jR_2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R_2 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

Таким образом, принимая во внимание $\bar{Z}_{21} = -\bar{Z}_{12}$, определили все Z-параметры четырехполюсника.

Для экспериментального определения параметров четырехполюсника используются: амперметр, вольтметр, омметр, ваттметр или фазометр.

Рассмотрим сначала определение параметров четырехполюсника в режиме холостого хода на выходе и входе представлена на рис. 8-7, а, б.

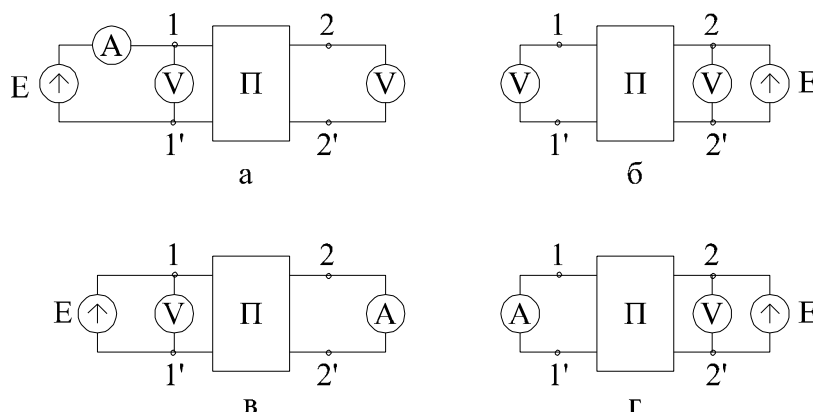


Рис. 8-7

При проведении экспериментов на постоянном токе достаточно измерить напряжение и ток.

В случае синусоидального возмущающего воздействия (на переменном токе), используя амперметр и вольтметр, можно найти только действующие значения. Для установления разности фаз между различными комплексами применяют фазометр или ваттметр.

Фазометры имеют общую точку между входом и выходом. Поэтому при их присоединении к четырехполюснику надо соблюдать правила регулярности (см. ниже).

Включить фазометр между входом и выходом, не нарушая структуры четырехполюсника, не всегда возможно. Поэтому, при экспериментальном определении параметров, исходной информацией являются входные сопротивления четырехполюсника, измеренные при холостом ходе и коротком замыкании на входе и выходе:

$$\bar{Z}_{1X} = \frac{\dot{U}_{1X}}{\dot{I}_{1X}}; \bar{Z}_{1X} = Z_{1X} e^{j\varphi_{1X}}; \varphi_{1X} = \arccos \frac{P_{1X}}{U_{1X} I_{1X}};$$

$$\bar{Z}_{1K} = \frac{\dot{U}_{1K}}{\dot{I}_{1K}}; \bar{Z}_{1K} = Z_{1K} e^{j\varphi_{1K}}; \varphi_{1K} = \arccos \frac{P_{1K}}{U_{1K} I_{1K}};$$

$$\bar{Z}_{2X} = \frac{\dot{U}_{2X}}{\dot{I}_{2X}}; \bar{Z}_{2X} = Z_{2X} e^{j\varphi_{2X}}; \varphi_{2X} = \arccos \frac{P_{2X}}{U_{2X} I_{2X}};$$

$$\bar{Z}_{2K} = \frac{\dot{U}_{2K}}{\dot{I}_{2K}}; \bar{Z}_{2K} = Z_{2K} e^{j\varphi_{2K}}; \varphi_{2K} = \arccos \frac{P_{2K}}{U_{2K} I_{2K}}.$$

Знаки фаз устанавливают по схеме или из результатов измерений. Запишем систему уравнений в А-параметрах:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= A\dot{U}_2 + BI_2 \\ \dot{I}_1 &= C\dot{U}_2 + DI_2 \end{aligned} \right\}$$

Из указанной системы найдем выражения для входного и выходного сопротивления в режимах холостого хода и короткого замыкания через А-параметры

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{1XX} &= \frac{A}{C}; \quad \bar{Z}_{2XX} = \frac{D}{C}; \\ \bar{Z}_{1\hat{E}\hat{C}} &= \frac{B}{D}; \quad \bar{Z}_{2\hat{E}\hat{C}} = \frac{B}{A}. \end{aligned}$$

Или

$$\frac{\bar{Z}_{1XX}}{\bar{Z}_{2XX}} = \frac{\bar{Z}_{\hat{E}\hat{C}}}{\bar{Z}_{\hat{E}\hat{C}}}$$

Для определения параметра А запишем тождество

$$\frac{\bar{Z}_{1X}}{\bar{Z}_{2X} - \bar{Z}_{2K}} = \frac{A}{C\left(\frac{D}{C} - \frac{B}{A}\right)} = \frac{A^2 C}{C(AD - BC)} = A^2,$$

откуда

$$A = \sqrt{\frac{\bar{Z}_{1X}}{\bar{Z}_{2X} - \bar{Z}_{2K}}}.$$

После соответствующих математических преобразований получаем

$$B = A\bar{Z}_{2K}; \quad D = C\bar{Z}_{2K}; \quad C = \frac{A}{\bar{Z}_{1X}}.$$

Аналогичным образом, используя амперметр, вольтметр и ваттметр, можно определить другие параметры четырехполюсника. Если, например, известны показания приборов:

$$U_{1X} = 100 \text{ В}, \quad P_{1K} = 0,5 \text{ Вт},$$

$$I_{1X} = 20 \text{ А}, \quad U_{2K} = 56,6 \text{ В},$$

$$P_{1X} = 2 \text{ Вт}, \quad I_{2K} = 8 \text{ А},$$

$$U_{1K} = 70,7 \text{ В}, \quad \varphi_{1K} > 0; \quad \varphi_{2K} < 0;$$

$$I_{1K} = 10 \text{ А}, \quad P_{2K} = 320 \text{ Вт},$$

то можно определить

$$\bar{Z}_{1X} = \frac{U_{1X}}{I_{1X}} = 5 \angle 0^\circ; \quad \cos \varphi_{1X} = \frac{2000}{100 \cdot 20} = 1; \quad \varphi_{1X} = 0; \quad \bar{Z}_{1X} = 50 e^{j0};$$

$$\bar{Z}_{1K} = \frac{U_{1K}}{I_{1K}} = \frac{70,7}{10} = 7,07 \angle 0^\circ; \quad \cos \varphi_{1K} = \frac{P_{1K}}{U_{1K} \cdot I_{1K}} = \frac{500}{707} = 0,707;$$

$$\varphi_{1K} = \frac{\pi}{4}; \quad \bar{Z}_{1K} = 5\sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \angle 0^\circ;$$

$$\bar{Z}_{2K} = \frac{U_{2K}}{I_{2K}} = \frac{56,6}{8} = 7,07 \hat{i} ; \cos \varphi_{2K} = \frac{320}{56,6 \cdot 8} = 0,707 ;$$

$$\varphi_{2K} = -\frac{\pi}{4} ; \bar{Z}_{2K} = 5\sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} ;$$

$$\frac{\bar{Z}_{1X}}{\bar{Z}_{2X}} = \frac{\bar{Z}_{1K}}{\bar{Z}_{2K}} ; \bar{Z}_{2X} = \frac{\bar{Z}_{1X} \cdot \bar{Z}_{2K}}{\bar{Z}_{1K}} ;$$

$$\bar{Z}_{2X} = \frac{5 \cdot 5\sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}}{5\sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}} = 5 e^{-j\frac{\pi}{2}} ,$$

откуда

$$A = \sqrt{\frac{\bar{Z}_{1X}}{\bar{Z}_{2X} - \bar{Z}_{2K}}} = \sqrt{\frac{5}{-j5 - 5\sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}}} = \sqrt{\frac{1}{-j - 1 + j}} = j$$

$$B = (5 - 5j)j = (5 + 5j) \hat{i} ; C = \frac{A}{\bar{Z}_{1X}} = \frac{j}{5} = 0,2 j \hat{i}^{-1} ;$$

$$D = C\bar{Z}_{2X} = 0,2 j (-5j) = 1.$$

Вспомнив, что для Т-образной эквивалентной схемы:

$$\bar{Z}_1 = \frac{A-1}{C} ; \bar{Z}_2 = \frac{D-1}{C} ; \bar{Z}_3 = \frac{1}{C}$$

получим:

$$\bar{Z}_3 = -5j ; \bar{Z}_1 = 5 + 5j ; \bar{Z}_2 = 0$$

Такой четырехполюсник изображен на рис. 8-8.

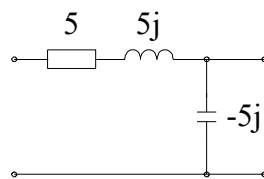


Рис. 8-8

§ 4. Соединения четырехполюсников

Теория четырехполюсников позволяет представить сложную схему в виде комбинаций четырехполюсников и анализировать свойства общей схемы на основе свойств составляющих четырехполюсников.

При соединении четырехполюсников в общую схему иногда нарушаются индивидуальные свойства (регулярность) составляющих четырехполюсника, например на рис. 8-9 сопротивление \bar{Z}_3'' четырехполюсника закорачивается при соединении в общую схему, что приводит к изменению его свойств.

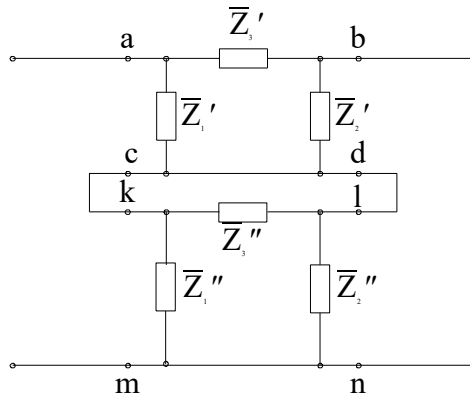


Рис. 8-9

Рассмотрим свойства схем при различных способах соединения четырехполюсников. Задача нахождения четырехполюсника, эквивалентного сложному четырехполюснику, сводится к определению параметров этого эквивалентного четырехполюсника по заданным параметрам соединенных четырехполюсников. Способы соединения четырехполюсников рассмотрим на примерах объединения двух четырехполюсников в один:

1. Последовательное соединение двух четырехполюсников (рис. 8-10)

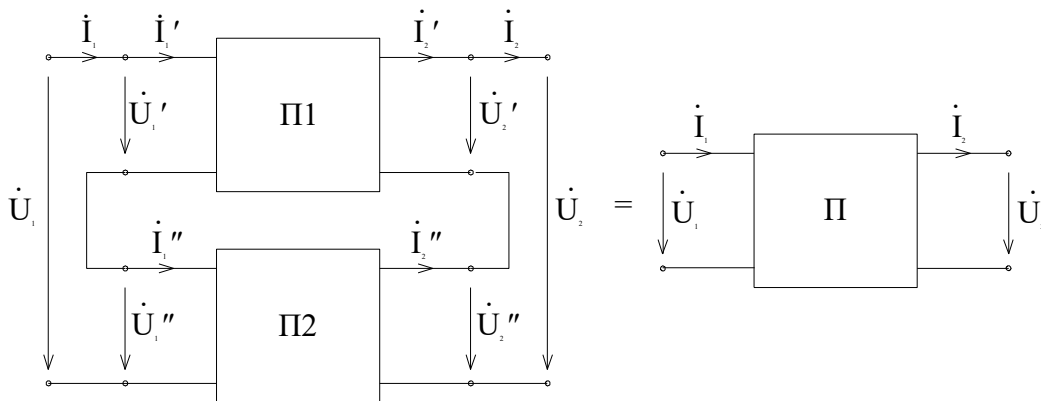


Рис.8-10

При таком соединении должны выполняться следующие соотношения (уравнения связи):

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_1' + \dot{U}_1'' \\ \dot{U}_2 &= \dot{U}_2' + \dot{U}_2'' \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} I_1 &= I_1' = I_1'' \\ I_2 &= I_2' + I_2'' \end{aligned} \right\}$$

Используем запись уравнений четырехполюсника в Z-параметрах:

для четырехполюсника П1

$$\dot{U}_1' = I_1' \bar{Z}_{11}' + I_2' \bar{Z}_{12}' ;$$

$$\dot{U}_2' = I_1' \bar{Z}_{21}' + I_2' \bar{Z}_{22}' ;$$

для четырехполюсника П2

$$\dot{U}_1'' = I_1'' \bar{Z}_{11}'' + I_2'' \bar{Z}_{12}'' ;$$

$$\dot{U}_2'' = \dot{I}_1'' \bar{Z}_{21}'' + \dot{I}_2'' \bar{Z}_{22}''.$$

Исключим внутренние переменные \dot{U}_1' ; \dot{U}_2' ; \dot{U}_1'' ; \dot{U}_2'' в соответствии с уравнениями связи:

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 (\bar{Z}_{11}' + \bar{Z}_{11}'') + \dot{I}_2 (\bar{Z}_{12}' + \bar{Z}_{12}'');$$

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_1 (\bar{Z}_{21}' + \bar{Z}_{21}'') + \dot{I}_2 (\bar{Z}_{22}' + \bar{Z}_{22}'');$$

Откуда параметры общего четырехполюсника выразятся через параметры составляющих четырехполюсников:

$$\bar{Z}_{11} = \bar{Z}_{11}' + \bar{Z}_{11}''; \bar{Z}_{12} = \bar{Z}_{12}' + \bar{Z}_{12}''; \bar{Z}_{21} = \bar{Z}_{21}' + \bar{Z}_{21}''; \bar{Z}_{22} = \bar{Z}_{22}' + \bar{Z}_{22}''.$$

В матричной форме

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{U}_1' \\ \dot{U}_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{U}_1'' \\ \dot{U}_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11}' & \bar{Z}_{12}' \\ \bar{Z}_{21}' & \bar{Z}_{22}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1' \\ \dot{I}_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11}'' & \bar{Z}_{12}'' \\ \bar{Z}_{21}'' & \bar{Z}_{22}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1'' \\ \dot{I}_2'' \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11}' + \bar{Z}_{11}'' & \bar{Z}_{12}' + \bar{Z}_{12}'' \\ \bar{Z}_{21}' + \bar{Z}_{21}'' & \bar{Z}_{22}' + \bar{Z}_{22}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

или $\dot{\mathbf{U}} = [\bar{\mathbf{Z}}' + \bar{\mathbf{Z}}''] \dot{\mathbf{I}}$.

Итак, при последовательном соединении двух четырехполюсников матрица Z-параметров эквивалентного четырехполюсника равна сумме матриц Z-параметров отдельных четырехполюсников.

2. Параллельное соединение четырехполюсников (рис. 8-11)

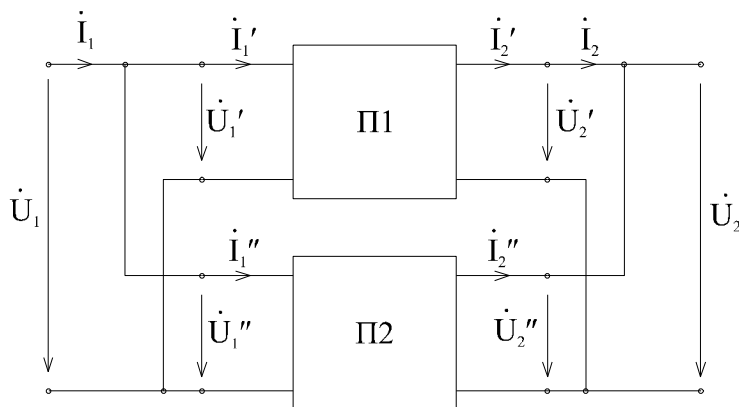


Рис. 8-11

Уравнения связи

$$\dot{I}_1' = \dot{I}_1 + \dot{I}_1'';$$

$$\dot{I}_2' = \dot{I}_2 + \dot{I}_2'';$$

$$\dot{U}_1' = \dot{U}_1 = \dot{U}_1'';$$

$$\dot{U}_2' = \dot{U}_2 = \dot{U}_2''.$$

Запишем уравнения четырехполюсников П1 и П2 в Y-параметрах:

для П1

$$\left. \begin{aligned} i_1' &= Y_{11}' \dot{U}_1' + Y_{12}' \dot{U}_2' \\ i_2' &= Y_{21}' \dot{U}_1' + Y_{22}' \dot{U}_2' \end{aligned} \right\}$$

Для П2

$$\left. \begin{aligned} i_1'' &= Y_{11}'' \dot{U}_1'' + Y_{12}'' \dot{U}_2'' \\ i_2'' &= Y_{21}'' \dot{U}_1'' + Y_{22}'' \dot{U}_2'' \end{aligned} \right\}$$

Учтя уравнения связи:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= (Y_{11}' + Y_{11}'') \dot{U}_1 + (Y_{12}' + Y_{12}'') \dot{U}_2 \\ i_2 &= (Y_{21}' + Y_{21}'') \dot{U}_1 + (Y_{22}' + Y_{22}'') \dot{U}_2 \end{aligned} \right\}$$

В матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = [Y' + Y''] \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$

Поскольку для всего четырехполюсника (рис. 8-11) справедливо уравнение $[I] = Y[U]$, то можно заключить, что $Y = Y' + Y''$.

Таким образом, матрица результирующего четырехполюсника равна сумме Y-матриц параллельно соединенных четырехполюсников.

3. Каскадное соединение (цепное соединение) рис. 8-12

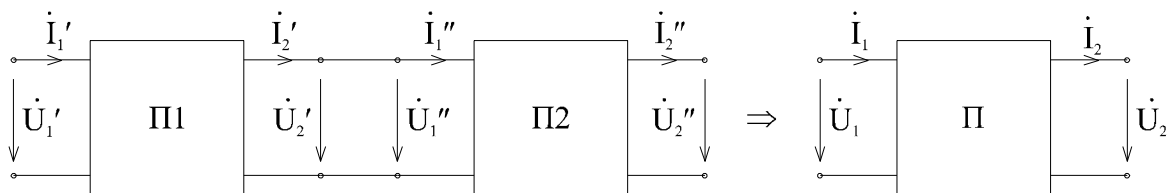


Рис. 8-12

Уравнение связи для этого соединения:

$$i_2' = i_1''; \dot{U}_2' = \dot{U}_1''.$$

Используя запись уравнений четырехполюсника в A-параметрах для четырехполюсника П1

$$\dot{U}_1' = A' \dot{U}_2' + B' i_2';$$

$$i_1' = C' \dot{U}_2' + D' i_2';$$

для четырехполюсника П2

$$\dot{U}_1'' = A'' \dot{U}_2'' + B'' i_2'' = \dot{U}_2';$$

$$I_1'' = C'' \dot{U}_2'' + D'' I_2'' = I_2'.$$

Исключая внутренние переменные, получаем

$$\dot{U}_1 = A' (A'' \dot{U}_2'' + B'' i_2'') + B' (C'' \dot{U}_2'' + D'' i_2'');$$

$$i_1 = C' (A'' \dot{U}_2'' + B'' i_2'') + D' (C'' \dot{U}_2'' + D'' i_2'');$$

или

$$\dot{U}_1 = (A' A'' + B' C'') \dot{U}_2'' + (A' B'' + B' D'') i_2';$$

$$i_1 = (C' A'' + D' C'') \dot{U}_2'' + (C' B'' + D' D'') i_2';$$

откуда

$$A = A' A'' + B' C''; B = A' B'' + B' D'';$$

$$C = C' A'' + D' C''; D = C' B'' + D' D''.$$

Учитывая матричную форму записи для исходных четырехполюсников в соответствии с уравнениями связи, имеем

$$\begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ i_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{U}_1' \\ i_1' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{U}_2' \\ i_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_1'' \\ i_1'' \end{Bmatrix}$$

Принимая во внимание

$$\begin{Bmatrix} \dot{U}_1'' \\ i_1'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_2'' \\ i_2'' \end{Bmatrix}$$

получаем

$$\begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ i_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_2 \\ i_2 \end{Bmatrix}$$

Внешние переменные сложного четырехполюсника при каскадном соединении связаны следующим уравнением:

$$\begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ i_1 \end{Bmatrix} = \mathbf{A}' \mathbf{A}'' \begin{Bmatrix} \dot{U}_2 \\ i_2 \end{Bmatrix}$$

Раскрывая произведение матриц, получаем значения А-параметров:

$$\mathbf{A}' \mathbf{A}'' = \begin{Bmatrix} A' A'' + B' C'' & A' B'' + B' D'' \\ C' A'' + D' C'' & C' B'' + D' D'' \end{Bmatrix}$$

Матрица А-параметров двух и более каскадно-соединенных четырехполюсников равна произведению матриц А-параметров отдельных четырехполюсников.

4. Смешанное последовательно-параллельное соединение (рис. 8-13).

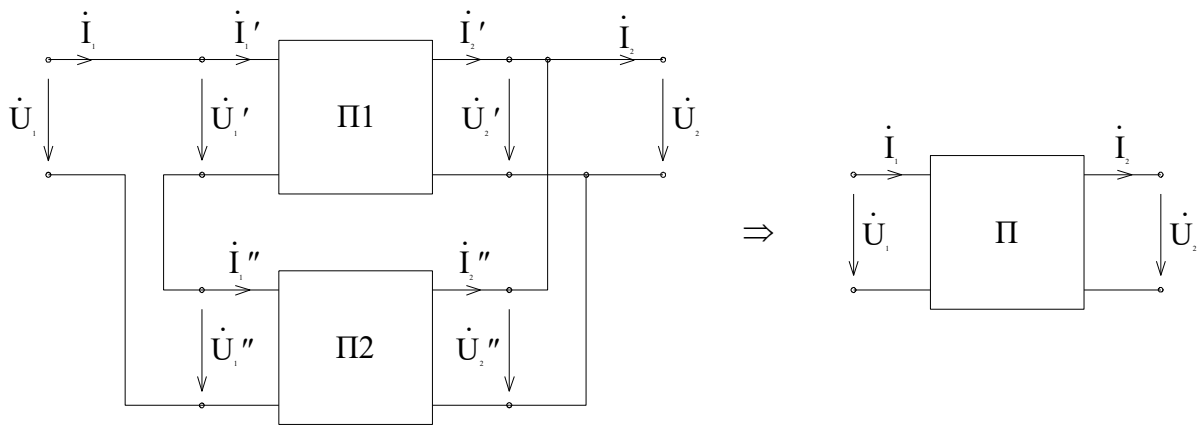


Рис. 8-13

Уравнения связи

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_1' + \dot{U}_1'',$$

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_2' = \dot{U}_2'',$$

$$\dot{i}_1 = \dot{i}_1' = \dot{i}_1'',$$

$$\dot{i}_2 = \dot{i}_2' + \dot{i}_2'',$$

Уравнения в Н-параметрах четырехполюсника П1

$$\begin{Bmatrix} \dot{U}_1' \\ \dot{i}_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_{11}' & H_{12}' \\ H_{21}' & H_{22}' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{i}_1' \\ \dot{U}_2' \end{Bmatrix},$$

четырёхполюсника П2

$$\begin{Bmatrix} \dot{U}_1'' \\ \dot{i}_2'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_{11}'' & H_{12}'' \\ H_{21}'' & H_{22}'' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{i}_1'' \\ \dot{U}_2'' \end{Bmatrix}.$$

Складывая эти уравнения, согласно уравнениям связи получаем

$$\begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{i}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{U}_1' \\ \dot{i}_2' + \dot{i}_2'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_{11}' + H_{11}'' & H_{12}' + H_{12}'' \\ H_{21}' + H_{21}'' & H_{22}' + H_{22}'' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix}.$$

При смешанном соединении четырехполюсников матрица Н-параметров равна сумме матриц Н-параметров исходных четырехполюсников.

При параллельно-последовательном соединении четырехполюсников используется система G-параметров.

Заметим еще раз, что все вышеизложенное справедливо, если удовлетворяются уравнения связи, т.е. четырехполюсники регулярны.

Каскадные соединения всегда регулярны.

Рассмотрим несколько примеров формирования уравнений четырехполюсников

1. Одноэлементный (последовательный) четырехполюсник (рис. 8-14).

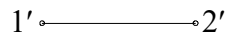
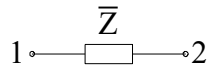


Рис. 8-14

На основе рассмотрения режимов холостого хода и короткого замыкания получим соотношения:

$$A = \frac{\dot{U}_{1X}}{\dot{U}_{2X}} = 1, \quad C = \frac{\dot{I}_{1X}}{\dot{U}_{2X}} = 0,$$

$$B = \frac{\dot{U}_{1K}}{\dot{I}_{2K}} = \bar{Z}, \quad D = \frac{\dot{I}_{1K}}{\dot{I}_{2K}} = 1.$$

В этом случае матрица А-параметров запишется:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Для четырехполюсника рис. 8-15

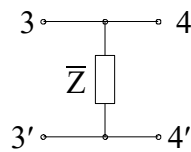


Рис. 8-15

матрица А-параметров:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\bar{Z}} & 1 \end{bmatrix}$$

3. Составим Г-образный четырехполюсник, соединив каскадно два предыдущие четырехполюсника (рис. 8-16).

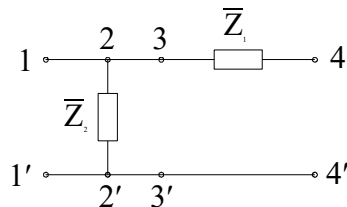


Рис. 8-16

Матрица А-параметров результирующего четырехполюсника

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{1}{\bar{Z}_2} & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 1 & \bar{Z}_1 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & \bar{Z}_1 \\ \frac{1}{\bar{Z}_2} & 1 + \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} \end{array} \right\|$$

4. Присоединим каскадно еще один одноэлементный четырехполюсник, тогда получим схему рис. 8-17.

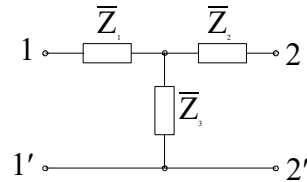


Рис. 8-17

А-матрица результирующего Т-образного четырехполюсника.

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{cc} 1 & \bar{Z}_1 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 1 & \bar{Z}_2 \\ \frac{1}{\bar{Z}_3} & 1 + \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_3} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 + \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_3} & \bar{Z}_2 + \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_3} + \bar{Z}_1 \\ \frac{1}{\bar{Z}_3} & 1 + \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_3} \end{array} \right\|$$

5. Аналогично можно получить А-матрицу П-образного четырехполюсника, соединив каскадно четырехполюсники рис. 8-14 и рис. 8-15, тогда имеем схему рис. 8-18.

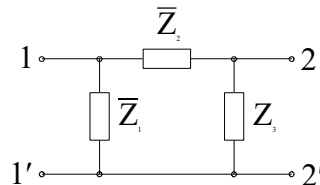


Рис. 8-18

А-матрица результирующего П-образного четырехполюсника

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{cc} 1 & \bar{Z}_2 \\ \frac{1}{\bar{Z}_1} & 1 + \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{1}{\bar{Z}_3} & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 + \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_3} & -\bar{Z}_2 \\ \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_3} + \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 \bar{Z}_3} & 1 + \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1} \end{array} \right\|$$

Те же самые результаты можно получить, исследуя общий четырехполюсник в режимах холостого хода и короткого замыкания.

§ 5. Активный четырехполюсник

Активным называют четырехполюсник, содержащий источники электрической энергии, причем их действия взаимно не компенсируются внутри четырехполюсника.

На рис. 8-19 изображен такой четырехполюсник. Его характерной особенностью является то, что при отсутствии внешних источников на входных и выходных зажимах будут не нулевые напряжения \dot{U}_{1X} и \dot{U}_{2X} .

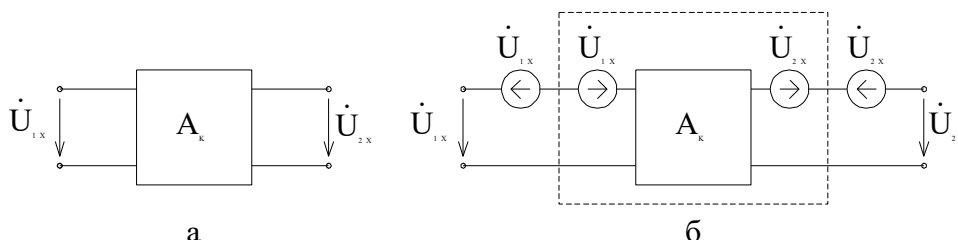


Рис. 8-19

Очевидно, что этот четырехполюсник можно заменить эквивалентным, если на входе и выходе включить соответственно по паре одинаковых источников ЭДС \dot{U}_{1X} и \dot{U}_{2X} , направленных встречно, как показано на рис. 8-19,б. При соответствующем выборе направлений, пара напряжений \dot{U}_{1X} и \dot{U}_{2X} уравнивают внутренние источники ЭДС, поэтому часть четырехполюсника, обведенная на рис. 8-19, б пунктирной линией, может быть заменена пассивным четырехполюсником, т.е. получим пассивный четырехполюсник, эквивалентный исходному, если на входе его включены соответственно источники \dot{U}_{1X} и \dot{U}_{2X} (рис. 8-20).

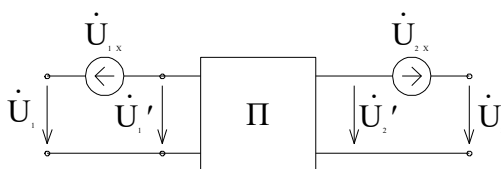


Рис. 8-20

Теорему об активном четырехполюснике можно сформулировать:

Активный четырехполюсник можно заменить пассивным четырехполюсником, который получают из данного путем удаления всех источников с сохранением их внутренних сопротивлений, с введенными во входную и выходную цепи дополнительными источниками. ЭДС последних равны напряжению на разомкнутых зажимах данного активного четырехполюсника.

Из схемы рис. 8-20 следует, что

$$\dot{U}'_1 = \bar{Z}_{11} \dot{I}_1 + \bar{Z}_{12} \dot{I}_2,$$

$$\dot{U}'_2 = \bar{Z}_{21} \dot{I}_1 + \bar{Z}_{22} \dot{I}_2,$$

где

$$\dot{U}'_1 = \dot{U}_1 - \dot{U}_{1X}, \quad \dot{U}'_2 = \dot{U}_2 - \dot{U}_{2X}.$$

Уравнения активного четырехполюсника в Z-параметрах с учетом \dot{U}_{1X} и \dot{U}_{2X} :

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \bar{Z}_{11}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{12}\dot{I}_2 + \dot{U}_{1X} \\ \dot{U}_2 &= \bar{Z}_{21}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{22}\dot{I}_2 + \dot{U}_{2X}.\end{aligned}$$

§ 6. Характеристические параметры четырехполюсника

На практике четырехполюсники используют для анализа передачи мощности от источника к нагрузке.

Для упрощения анализа согласованности четырехполюсников вводятся характеристические параметры.

Рассмотрим входное сопротивление четырехполюсника, нагруженного на сопротивление \bar{Z}_2 (рис. 8-21).

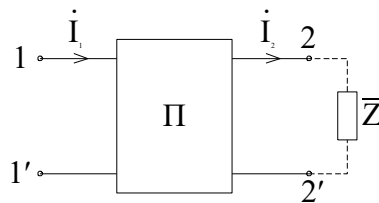


Рис. 8-21

$$\bar{Z}_{BX} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2}{C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2}$$

Если учесть, что $\bar{Z}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}$, то

$$\bar{Z}_{1BX} = \frac{A\bar{Z}_2 + B}{C\bar{Z}_2 + D}.$$

Если на вход четырехполюсника включить нагрузку \bar{Z}_1 , изменить направление передачи мощности, внешнее напряжение \dot{U}_2 подать со вторичных зажимов, как показано на рис. 8-22.

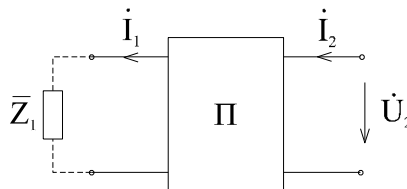


Рис. 8-22

С учетом указанных направлений токов и напряжений

$$\begin{aligned}\dot{U}_2 &= D\dot{U}_1 + B\dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 &= C\dot{U}_1 + A\dot{I}_1\end{aligned}$$

При обратном питании получаем, что коэффициенты А и D основной системы уравнений взаимно заменяются, откуда

$$\bar{Z}_{2BX} = \frac{D\bar{Z}_1 + B}{C\bar{Z}_1 + A}.$$

Выберем сопротивления \bar{Z}_{1C} и \bar{Z}_{2C} с величинами:

$$\bar{Z}_{1BX} = \bar{Z}_{1C}, \text{ если } \bar{Z}_2 = \bar{Z}_{2C},$$

$$\bar{Z}_{2BX} = \bar{Z}_{2C}, \text{ если } \bar{Z}_1 = \bar{Z}_{1C}.$$

Входное сопротивление четырехполюсника \bar{Z}_{1BX} , нагруженного сопротивлением \bar{Z}_{2C} , равно \bar{Z}_{1C} (рис. 8-23).

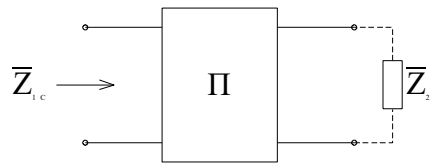


Рис. 8-23

и входное сопротивление \bar{Z}_{2BX} равно \bar{Z}_{2C} , если четырехполюсник при обратном питании нагружен сопротивлением \bar{Z}_{1C} (рис. 8-24).

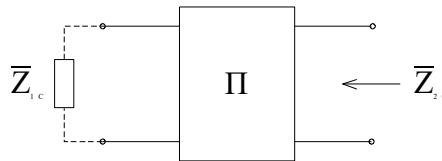


Рис. 8-24

Указанные сопротивления называются характеристическими сопротивлениями.

Условие, когда четырехполюсник нагружен характеристическим сопротивлением, называют условием согласованной нагрузки.

$$\bar{Z}_{1BX} = \bar{Z}_1 = \bar{Z}_{1C},$$

$$\bar{Z}_{2BX} = \bar{Z}_2 = \bar{Z}_{2C}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \bar{Z}_{1C} &= \frac{A\bar{Z}_{2C} + B}{C\bar{Z}_{2C} + D} \\ \bar{Z}_{2C} &= \frac{D\bar{Z}_{1C} + B}{C\bar{Z}_{1C} + A} \end{aligned} \right\}$$

Решая совместно эти уравнения, получаем

$$\bar{Z}_{1C} = \frac{AD\bar{Z}_{1C} + AB + BC\bar{Z}_{1C} + AB}{CD\bar{Z}_{1C} + CB + CD\bar{Z}_{1C} + AD}.$$

После преобразования

$$\bar{Z}_{1C} = \sqrt{\frac{AB}{CD}}; \bar{Z}_{2C} = \sqrt{\frac{DB}{CA}}.$$

Введем третий параметр g , выражаемый по условию $chg = \sqrt{AD}$, где ch - гиперболический косинус.

Из тригонометрии известно, что $ch^2 g - sh^2 g = 1$, следовательно, $shg = \sqrt{BC}$ - гиперболический синус.

Параметр g в общем случае комплексный, его можно представить в виде:

$$g = a + jb,$$

где

g - мера передачи четырехполюсника;

a - собственное затухание четырехполюсника;

b - коэффициент фазы.

Из выражений для \bar{Z}_{1C} и \bar{Z}_{2C} можно получить

$$\frac{\bar{Z}_{1C}}{\bar{Z}_{2C}} = \frac{A}{D}; \bar{Z}_{1C}\bar{Z}_{2C} = \frac{B}{C}.$$

Умножая первое равенство на chg , а второе на shg , получаем

$$A = \sqrt{\frac{\bar{Z}_{1C}}{\bar{Z}_{2C}}} chg \text{ и } B = \sqrt{\frac{\bar{Z}_{1C}\bar{Z}_{2C}}{1}} shg.$$

Аналогично

$$D = \sqrt{\frac{\bar{Z}_{2C}}{\bar{Z}_{1C}}} chg \text{ и } C = \frac{1}{\sqrt{\bar{Z}_{1C}\bar{Z}_{2C}}} shg.$$

Уравнения четырехполюсника запишем в гиперболической форме:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \sqrt{\frac{\bar{Z}_{1C}}{\bar{Z}_{2C}}} \dot{U}_2 chg + \sqrt{\bar{Z}_{1C}\bar{Z}_{2C}} shg \dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 &= \sqrt{\frac{1}{\bar{Z}_{1C}\bar{Z}_{2C}}} \dot{U}_2 shg + \sqrt{\frac{\bar{Z}_{2C}}{\bar{Z}_{1C}}} chg \dot{I}_2 \\ \dot{U}_1 &= \sqrt{\frac{\bar{Z}_{1C}}{\bar{Z}_{2C}}} (\dot{U}_2 chg + \bar{Z}_{2C} \dot{I}_2 shg) \\ \dot{I}_1 &= \sqrt{\frac{\bar{Z}_{2C}}{\bar{Z}_{1C}}} \left(\frac{1}{\bar{Z}_{2C}} \dot{U}_2 shg + \dot{I}_2 chg \right) \end{aligned}$$

При согласованной нагрузке $\bar{Z}_{2C} \dot{I}_2 = \dot{U}_2$, $\frac{\dot{U}_2}{\bar{Z}_{2C}} = \dot{I}_2$.

Следовательно,

$$\dot{U}_1 = \sqrt{\frac{\bar{Z}_{1C}}{\bar{Z}_{1C}}} U_2 (chg + shg) = \sqrt{\frac{\bar{Z}_{1C}}{\bar{Z}_{2C}}} U_2 e^g,$$

$$\dot{I}_1 = \sqrt{\frac{\bar{Z}_{2C}}{\bar{Z}_{1C}}} \dot{I}_2 e^g.$$

При согласованно подобранной нагрузке найдем отношение амплитуд

$$\frac{U_1}{U_2} = \sqrt{\frac{\bar{Z}_{1C}}{\bar{Z}_{2C}}} e^a; \quad \frac{I_1}{I_2} = \sqrt{\frac{\bar{Z}_{2C}}{\bar{Z}_{1C}}} e^a,$$

где e^a - коэффициент амплитуд.

Если углы комплексных сопротивлений \bar{Z}_{1C} и \bar{Z}_{2C} обозначить через φ_{1C} и φ_{2C} , то сдвиг фаз между напряжениями входа и выхода равен $B + \frac{1}{2}(\varphi_{1C} - \varphi_{2C})$. Сдвиг фаз между токами $B + \frac{1}{2}(\varphi_{2C} - \varphi_{1C})$.

При согласованной нагрузке

$$\frac{\dot{U}_1 \dot{I}_1}{\dot{U}_2 \dot{I}_2} = e^{2g} \quad \text{и} \quad g = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\dot{U}_1 \dot{I}_1}{\dot{U}_2 \dot{I}_2} \right).$$

Для симметричного четырехполюсника $\bar{Z}_{1C} = \bar{Z}_{2C}$; откуда $\dot{U}_1 = \dot{U}_2 e^g$ и $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 e^g$.

Коэффициент амплитуд

$$e^a = \frac{U_1}{U_2} \quad \text{или} \quad \frac{I_1}{I_2}.$$

Определим затухание четырехполюсника

$$a = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2}.$$

Затуханию в один непер соответствует уменьшение амплитуды (и действующего значения) в $e=2,718$ раза, так как

$$\ln \frac{U_1}{U_2} = 1, \quad \frac{U_1}{U_2} = 2,718.$$

В радиотехнике существует другая единица затухания. Если полная мощность на выходе в 10 раз меньше входной, то затухание равно одному белу (1 Б), если в 100 раз меньше, то 2 Б и т.д.

$$a_{\text{Б}} = \lg \frac{S_1}{S_2} = \lg \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2}.$$

В случае согласованно нагруженного симметричного четырехполюсника

$$a_{\text{дБ}} = \lg \left(\frac{U_1}{U_2} \right)^2 = 2 \lg \frac{U_1}{U_2} = 2 \lg \frac{I_1}{I_2}.$$

На практике чаще применяют децибел, единицу в 10 раз меньше.

$$a_{\text{дБ}} = 20 \lg \frac{I_1}{I_2}; \quad \frac{I_1}{I_2} = 10^{\frac{a}{20}}$$

при

$$a_{\text{дБ}} = 1, \quad \frac{I_1}{I_2} = 10^{\frac{1}{20}} = 1,12,$$

$$a_{\text{дБ}} = 20 \lg \frac{U_1}{U_2} = 20 \lg e^a = 20 a \lg e = 20 \cdot 0,4343 a = 8,686 a \text{ Hn}$$

$$\left. \begin{aligned} 1 \text{ Hn} &= 8,686 \text{ дБ} \\ 1 \text{ дБ} &= 0,115 \text{ Hn} \end{aligned} \right\}$$

§ 7. Круговые диаграммы

При изменении одного из параметров цепи искомые величины тока, напряжения $\cos \varphi$, P , Q и т.д. можно выразить графически.

Пусть в схеме (рис. 8-25) индуктивность $X_L = \text{const}$, а сопротивление $R = \text{var}$.

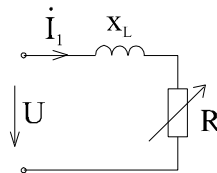


Рис. 8-25

Уравнение второго закона Кирхгофа:

$$\dot{U} = iR + jX_L \dot{I}.$$

Разделим jX_L обе части уравнения:

$$\frac{\dot{U}}{jX_L} = \frac{R}{jX_L} \dot{I} + \dot{I}; \quad -j \frac{\dot{U}}{X_L} = -j \frac{R}{X_L} \dot{I} + \dot{I}$$

При $R = 0$ ток (называемый током короткого замыкания) равен:

$$\dot{I}_K = \frac{\dot{U}}{jX_L} = -j \frac{\dot{U}}{X_L}$$

Входной ток через ток короткого замыкания выразится:

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_K}{1 - j \frac{R}{X_L}},$$

Ток короткого замыкания:

$$\dot{I}_K = \dot{I} - j \frac{R}{X_L} \dot{I}.$$

Из приведенной формулы видно, что вектор тока \dot{I}_K не зависит от R и равен сумме двух взаимно перпендикулярных векторов. Это может быть только в том случае, когда конец вектора \dot{I} описывает полуокружность, диаметром которой является вектор \dot{I}_K .

Изобразим вектор \dot{U} (рис. 8-26), перпендикулярно к нему (с отставанием на $\frac{\pi}{2}$) строим вектор \dot{I}_K . Принимая вектор \dot{I}_K за диаметр, опишем полуокружность, которая будет геометрическим местом конца вектора \dot{I} при изменении R от 0 до ∞ . По направлению вектора \dot{I}_K в произвольном масштабе откладываем X_L , а по линии XR откладываем в том же масштабе R (допустим R_1), тогда

$$\varphi = \arctg \frac{X_L}{R_1}.$$

Проведем произвольную вертикальную линию P . Проекция вектора \dot{I} на эту линию равна $I \cos \varphi$, при $U = \text{const}$ в определенном масштабе равна активной мощности:

$$P = UI \cos \varphi.$$

Аналогично, линия Q - линия реактивной мощности.

Если из точки O провести полуокружность на вертикальной линии (диаметром равным I), то отрезок OK равен $\cos \varphi$.

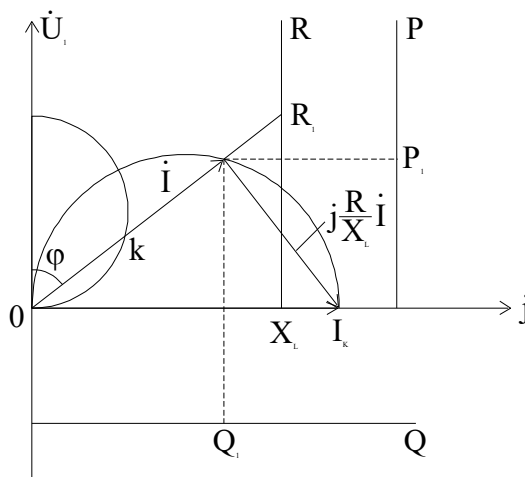


Рис. 8-26

Таким образом, определив $I_K = \frac{U}{jX_L}$ и построив круговую диаграмму, можно найти для любого R величины \dot{I} , φ , $\cos \varphi$, P и Q .

Для схемы RC (рис. 8-27,а) круговая диаграмма представлена на рис. 8-27,б.

На рисунке вектор \dot{I}_K повернут относительно \dot{U} на угол $\frac{\pi}{2}$ в положительную сторону (ток опережает напряжение).

Уравнение цепи

$$\dot{U} = -\dot{I} j X_C + \dot{I} R.$$

Ток короткого замыкания

$$\dot{I}_K = \frac{\dot{U}}{-j X_C}.$$

Подставляя ток короткого замыкания в уравнение цепи, получаем

$$\dot{I}_K = \dot{I} + j \frac{R}{X_C} \dot{I},$$

откуда

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_K}{1 + j \frac{R}{X_C}}.$$

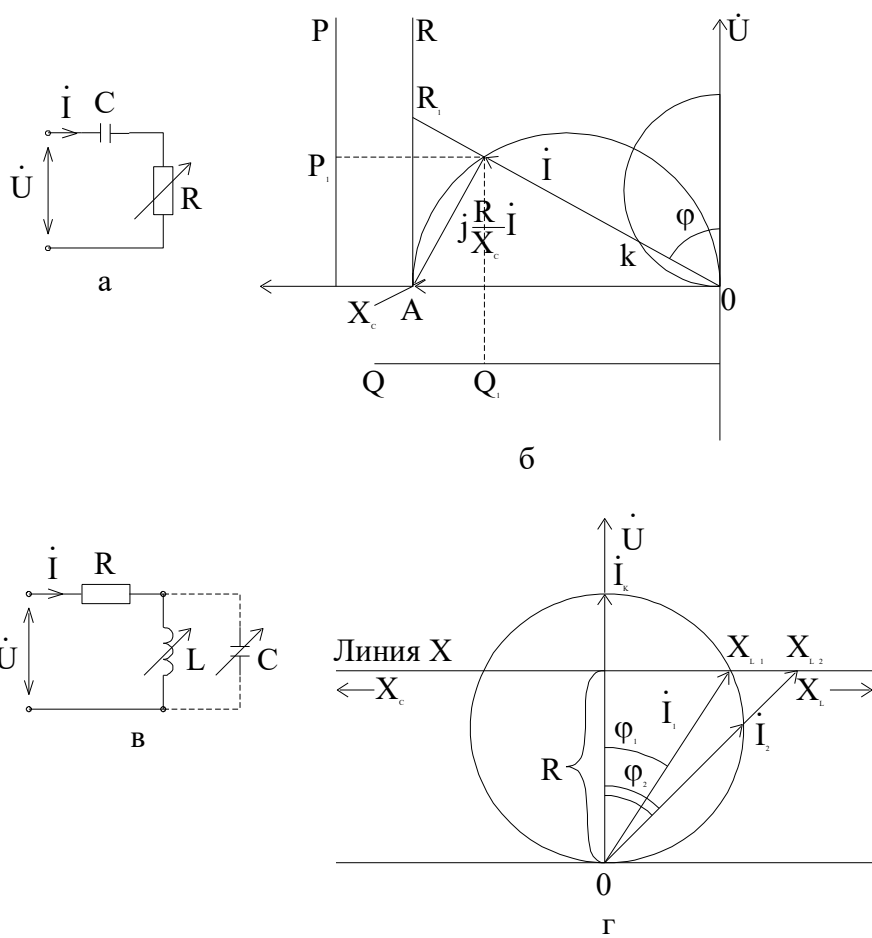


Рис. 8-27

При изменении реактивного сопротивления от 0 до ∞ (рис. 8-27,в) (что возможно при изменении С или L) из уравнения

$$\dot{U} = R\dot{I} + jX_L\dot{I}$$

получим

$$\frac{\dot{U}}{R} = \dot{I} + j\frac{X_L}{R}\dot{I}$$

или, обозначив $\frac{U}{R} = I_K$, имеем

$$\dot{I}_K = \dot{I} + j\frac{X_L}{R}\dot{I};$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_K}{1 + j\frac{X_L}{R}}.$$

Учитывая, что отрицательные X_L , равнозначны X_C , конец вектора \dot{I} при всех возможных изменениях X от $-\infty$ до $+\infty$ опишет окружность, построенную на \dot{I}_K , как на диаметре (рис. 8-27,г), причем \dot{I}_K направлен параллельно \dot{U} . Откладывая также в произвольном масштабе отрезок R и проводя перпендикулярно ему линию X при заданных значениях X_1 или X_2 , получаем ток \dot{I}_1 или \dot{I}_2 . Рассмотрим более сложную схему (рис. 8-28). Предположим, что при постоянных \bar{Z}_1 и \bar{Z}_2 меняется R .

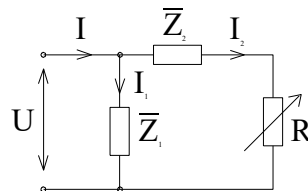


Рис. 8-28

В первой ветви протекает ток $\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\bar{Z}_1}$. Поскольку $\bar{Z}_1 = R_1 + jX_1$, то угол $\varphi = \arctg \frac{X_1}{R_1}$.

Во второй ветви протекает ток \dot{I}_2 , который меняется с изменением сопротивления R . Так же, как и в предыдущих случаях, найдем ток короткого замыкания

$$\dot{I}_{2K} = \frac{\dot{U}}{\bar{Z}_2}$$

и выразим через него ток \dot{I}_2

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{I}_{2K}}{1 + \frac{R}{\bar{Z}_2}}.$$

Направление тока \dot{I}_{2K} по отношению к U (вертикали) определяется комплексом

$$\bar{Z}_2 = R_2 + jX_2.$$

Угол $\varphi_{2K} = \arctg \frac{X_2}{R_2}$ составляет $0 \leq \varphi_{2K} \leq \frac{\pi}{2}$.

Используя полученные данные, построим круговую диаграмму (рис. 8-29).

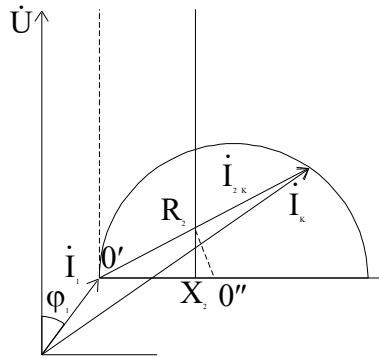


Рис. 8-29

Отложим \dot{U} по вертикали. С отставанием на угол φ_1 построим вектор \dot{I}_1 . Из конца вектора \dot{I}_1 проведем горизонтальную линию (линия X) и отложим X_2 , перпендикулярно которой построим линию R. На эту линию нанесем отрезок R_2 . Проведа через O' и конец этого отрезка прямую, получим направление вектора \dot{I}_{2K} . Отложим в указанном направлении вектор \dot{I}_{K2} , из середины которого восстановим перпендикуляр до пересечения с линией X. Полученная точка O'' и будет центром окружности.

В отличие от предыдущих случаев рабочей частью окружности будет не полуокружность, а дуга, хордой которой является \dot{I}_{2K} . Общий ток $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$ при изменении R от 0 до ∞ описывает дугу MO' . Построим линию p, Q и дугу $\cos \varphi$.

Общий ток равен

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\bar{Z}_1} + \frac{\dot{I}_K}{1 + \frac{R}{\bar{Z}_2}} = \dot{I}_{XX} + \frac{\dot{I}_{2K}}{1 + \frac{R}{\bar{Z}_2}}.$$

Учитывая, что окружность проходит через конец вектора \dot{I}_{XX} , а ток изменяется по дуге между концами векторов \dot{I}_{XX} и \dot{I}_K , опирающуюся на хорду \dot{I}_{2K} , перепишем это уравнение:

$$\dot{I} = \dot{I}_{XX} + \frac{\dot{I}_K - \dot{I}_{XX}}{1 - \frac{R}{\bar{Z}_2} e^{-j\varphi_{2K}}}.$$

Принимая во внимание $\bar{Z}_2 = Z_2 e^{j\varphi_{2K}}$ (сопротивление короткого замыкания со стороны выходных зажимов при закороченных входных), можно представить следующую схему построения векторной диаграммы:

1. Вычислить величину и фазу тока холостого хода и построить его.

2. Определить величину и фазу тока короткого замыкания.
3. Под углом $-\varphi_{2K}$ от конца вектора I_{2K} построить линию изменяющегося параметра R.
4. Установить центр окружности, который находится в точке пересечения перпендикуляра, проведенного из середины вектора $(I_{1K} - I_{1XX}) = I_{2K}$, и перпендикуляра, восстановленного из конца вектора I_{1X} к линии параметра R.

Сформулируем в более общем виде задачу для четырехполюсников.

Дан четырехполюсник с нагрузкой $\bar{Z} = Ze^{j\varphi}$ (рис. 8-30). Не рассматривая причину, определить изменение тока на выходе четырехполюсника при изменении величины сопротивления \bar{Z} (по $\varphi = \text{const}$).

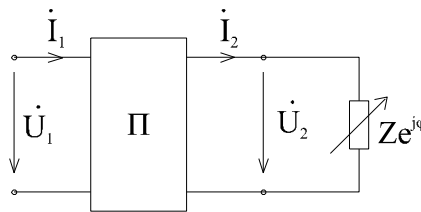


Рис. 8-30

Воспользуемся уравнениями четырехполюсника в А-параметрах

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2$$

Для нагрузки $U_2 = I_2 Ze^{j\varphi}$ из первого уравнения находим $U_1 = AZe^{j\varphi} I_2 + BI_2$, откуда

$$I_2 = \frac{U_1}{B + AZe^{j\varphi}}.$$

Подставим это уравнение в исходные уравнения:

$$I_1 = (CZe^{j\varphi} + D) \frac{U_1}{B + AZe^{j\varphi}} = U_1 \frac{CZe^{j\varphi} + D + \frac{BC}{A} - \frac{BC}{A}}{B + AZe^{j\varphi}}.$$

Окончательно

$$I_1 = U_1 \left[\frac{C}{A} + \frac{\frac{1}{AB}}{1 + Ze^{j\varphi} \frac{A}{B}} \right].$$

На основании режима холостого хода ($Z = \infty$) при $U_{x1} = U_1$ находим

$$U_{x1} = U_1 \frac{C}{A}.$$

В случае короткого замыкания ($Z=0$)

$$\frac{U_1}{AB} = I_K - I_{1X},$$

тогда

$$I_1 = I_{1X} + \frac{I_{1K} - I_{1X}}{1 + Ze^{j\varphi} \frac{A}{B}}.$$

Соотношение $\frac{B}{A}$, исходя из уравнения $U_1 = AU_2 + BI_2$, можно представить как сопротивление выхода при коротком замыкании на входе ($U_1 = 0$):

$$\frac{B}{A} = -\frac{U_{2K}}{-I_{2K}} = Z_{2K} e^{j\varphi_{2K}}$$

Таким образом выражение для входного тока при изменении Z :

$$I_1 = I_{1X} + \frac{I_{1K} - I_{1X}}{1 + \frac{Z}{Z_{2K}} e^{-j(\varphi_{2K} - \varphi)}}$$

Порядок построения круговой диаграммы четырехполюсника (рис. 8-31) определяется этой формулой.

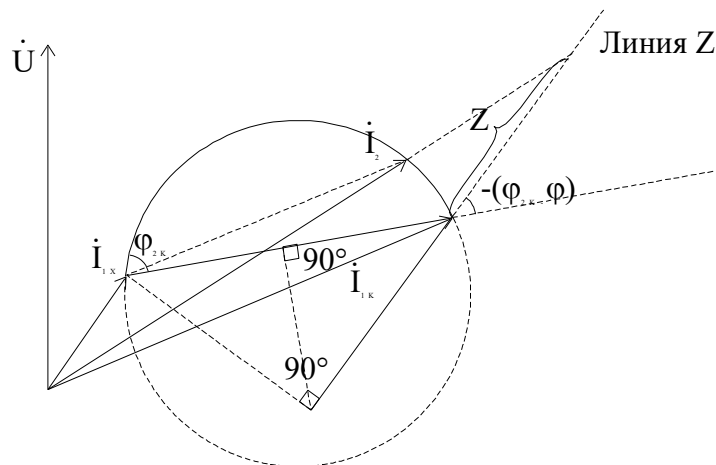


Рис. 8-31

1. Комплексы \dot{I}_{1X} и \dot{I}_{1K} строить относительно \dot{U} .
2. Построить вектор, равный $\dot{I}_{1K} - \dot{I}_{1X}$.
3. Найти фазу \bar{Z}_{2K} и под углом $-(\varphi_{2K} - \varphi)$ провести линию переменного параметра Z .
4. Определить центр окружности в точке пересечения перпендикуляра, проведенного к середине вектора $(\dot{I}_{1K} - \dot{I}_{1X})$, и перпендикуляра к линии Z , восстановленного из конца \dot{I}_{1X} .

Пример. Анализ фазовращателя.

Схема фазовращателя представлена на рис. 8-32.

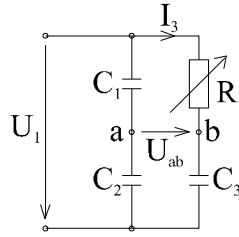


Рис. 8-32

На этой схеме $C_1 = C_2$ и переменное сопротивление изменяется от 0 до ∞ , U_1 - синусоидальное напряжение.

Требуется определить: как при таком изменении R будет меняться напряжение U_{ab} .

Для этого воспользуемся построением круговых диаграмм (рис. 8-33).

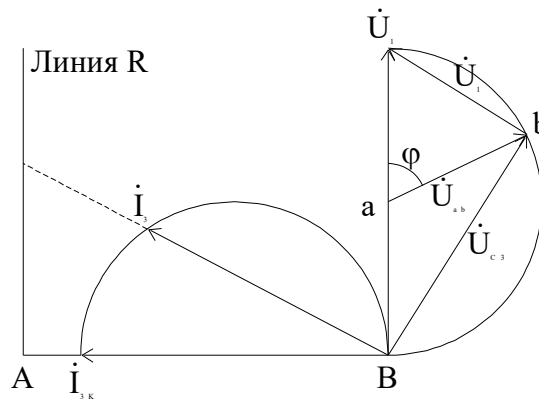


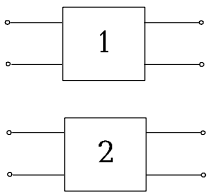
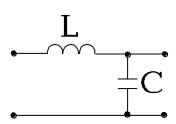
Рис. 8-33

Проведем вектор \dot{U}_1 и построим круговую диаграмму для тока \dot{I}_3 . Для этого построим \dot{I}_{3K} - ток при $R=0$. На нем как на диаметре построим полуокружность, по которой будет скользить конец вектора \dot{I}_3 . Отложив отрезок АВ, равный $X_{C3} = \frac{1}{\omega C_3}$, из точки А можно провести линию переменного сопротивления (в масштабе X_3). Напряжение \dot{U}_1 будет равно сумме двух взаимно перпендикулярных напряжений \dot{U}_{C3} и \dot{U}_R , причем \dot{U}_{C3} отстает от тока \dot{I}_3 на угол $\frac{\pi}{2}$. Это означает, что конец вектора \dot{U}_{C3} (точка b) скользит по полуокружности. В свою очередь точке «а» схемы соответствует на векторной диаграмме точка, делящая \dot{U}_1 пополам, т.к. $C_1 = C_2$. Таким образом, мы получили, что напряжение \dot{U}_{aa} будет постоянно по величине. Причем угол φ меняется от 0 до π при изменении R от 0 до ∞ .

Контрольные вопросы к теме 8

1. Что такое четырехполюсник?
2. Как экспериментально отличить пассивный четырехполюсник от активного?
3. Запишите все известные Вам формы уравнений четырехполюсников.
4. Каков физический смысл параметров четырехполюсников при различных формах уравнений?
5. Как записывается зависимость некоторых параметров четырехполюсника?
6. Как экспериментально определить параметры четырехполюсника на постоянном токе? На синусоидальном токе?
7. Как рассчитать параметры четырехполюсника при различных соединениях?
8. Что такое регулярное соединение?
9. Что такое характеристические параметры четырехполюсника?
10. Что такое затухание? В каких единицах выражается затухание?
11. Каковы условия согласования четырехполюсников?
12. Назовите порядок построения круговой диаграммы.

Контрольные задачи к теме 8

1	<p>В результате измерений получено:</p> $Z_{1XX} = 1410 e^{-j45^\circ};$ $Z_{1KS} = 707 e^{-j45^\circ};$ $Z_{2XX} = 1410 e^{j45^\circ}.$	<ol style="list-style-type: none"> 1. Нарисовать схему измерения, включив необходимые приборы. 2. Определить Z_{2KS}. 3. Определить А-параметры четырехполюсника. 4. Нарисовать эквивалентную схему четырехполюсника.
2		<p>Соединить четырехполюсники параллельно и найти параметры объединенного четырехполюсника. Известно, что соединение регулярно.</p>
3	 <p>$L = 5 \text{ мГн}; C = 1 \text{ мкФ}.$</p>	<p>Определить характеристические параметры четырехполюсника на частотах:</p> <ol style="list-style-type: none"> а) $\omega = 10^4 \text{ сек}^{-1};$ б) $\omega = 10^4 \cdot \sqrt{3} \text{ сек}^{-1}.$

Тема 9

Трехфазные электрические цепи

Трехфазные электрические цепи - это совокупность электрических цепей, в которых действуют три синусоидальные ЭДС одинаковой частоты, создаваемые одним источником, различающимся по фазе.

Эти системы получили самое широкое распространение. На их применении основано практически все энергоснабжение промышленных предприятий и быта. Такое распространение обусловлено их преимуществами перед однофазными системами электроснабжения, заключающимися в следующем:

- экономичность
- возможность получения двух номиналов напряжения
- постоянство вращающегося момента на валу генераторов и двигателей (уравновешенность)
- возможность создания вращающихся магнитных полей сравнительно простым способом
- упрощение фильтров в выпрямительных устройствах.

Следует обратить внимание на укоренившийся термин «фаза», который применяется не только как характеристика синусоидальной функции, но и обозначает все устройства, включенные в соответствующие участки цепи (фазовый выключатель, фазовый провод, фазовая обмотка и т.д.).

§ 1. Образование трехфазных ЭДС и основные обозначения

Как известно из курса физики в рамке, вращающиеся в равномерном магнитном поле с угловой скоростью ω индуцируется синусоидальная ЭДС. Аналогичная ЭДС возникает, если внутри катушки будет вращаться постоянный магнит. Если постоянный магнит будет вращаться внутри системы из трех одинаковых катушек, размещенных на магнитопроводе, сдвинутых одна относительно другой на угол $\frac{2}{3}\pi$, то в каждой из

катушек возникнут переменные ЭДС различающиеся по фазе на угол $\frac{2}{3}\pi$,

соответствующий углу сдвига катушек в пространстве. Такое устройство и осциллограммы ЭДС показаны на рис. 9-1.

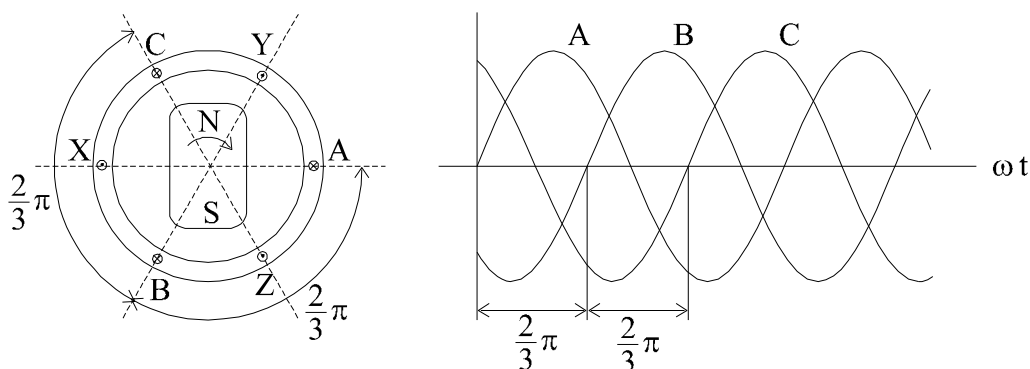


Рис. 9-1

Обычно начала обмоток разных фаз обозначаются А, В, С, а концы Х, Y, Z.

$$U_A = U_m \sin \omega t$$

$$U_B = U_m \sin \left(\omega t - \frac{2}{3} \pi \right)$$

$$U_C = U_m \sin \left(\omega t - \frac{4}{3} \pi \right) = U_m \sin \left(\omega t - \frac{2}{3} \pi \right)$$

В комплексной форме такую систему ЭДС можно записать:

$$\dot{E}_A = E e^{j0} = E$$

$$\dot{E}_B = E e^{-j\frac{2}{3}\pi}$$

$$\dot{E}_C = E e^{-j\frac{4}{3}\pi} = E e^{j\frac{2}{3}\pi}$$

Векторная диаграмма изображена на рис. 9-2.

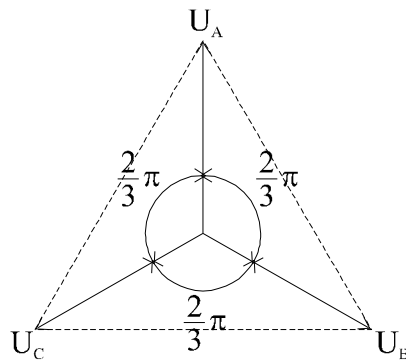


Рис. 9-2

При анализе трехфазных цепей часто пользуются оператором

$$a = e^{j\frac{2}{3}\pi} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Свойства оператора определяются очевидными соотношениями:

$$a^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = a^*$$

$$a^3 = 1$$

$$1 - a^2 = \sqrt{3} e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$a^2 - a = -\sqrt{3} j$$

$$a - 1 = \sqrt{3} e^{j\frac{5}{6}\pi}$$

$$1 + a + a^2 = 0.$$

И помощью оператора a трехфазную систему можно записать:

$$\dot{U}_A = U; \dot{U}_B = Ua^2; \dot{U}_C = Ua$$

или

$$\dot{U}_A = \dot{U}_B a = \dot{U}_C a^2;$$

$$\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 0.$$

В электрических машинах находит применение двухфазная система:

$$U_1 = U_m \sin \omega t$$

$$U_2 = U_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Векторная диаграмма изображена на рис. 9-3,а. Для создания мощных выпрямительных систем постоянного тока нашли применение 6-ти и 12-ти фазные системы, векторные диаграммы которых показаны на рис 9-3,б и в.

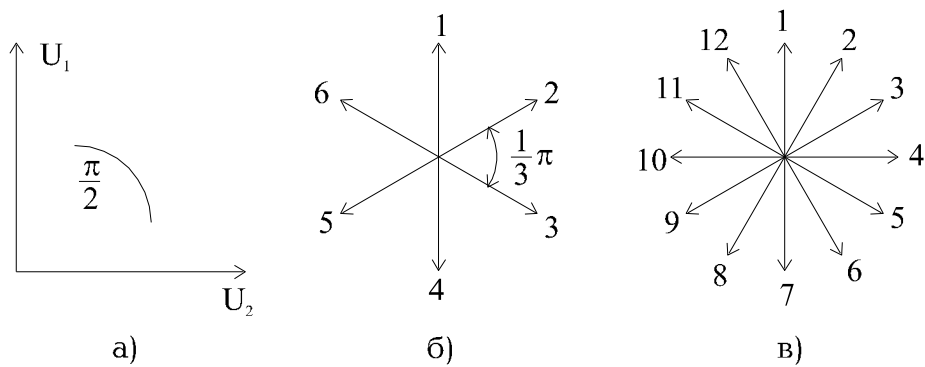


Рис. 9-3

6-ти и 12-ти фазные системы ЭДС образуются обычно статическими преобразователями (специальными трансформаторами) из трехфазных ЭДС.

§ 2. Соединение трехфазной системы в звезду

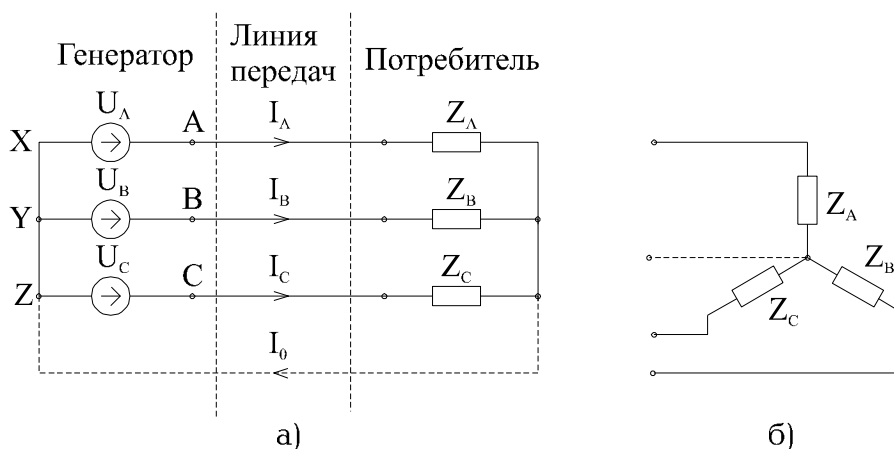


Рис. 9-4

Соединим концы катушек трехфазного генератора или соответствующие обмотки трансформатора в одну точку; так же соединим концы нагрузок как показано на рис. 9-4,а. Иногда схему изображают, как показано на рис. 9-4,б отсюда и происходит название «звезда».

При симметричной нагрузке, когда $\bar{Z}_A = \bar{Z}_B = \bar{Z}_C = \bar{Z}$ токи определяются:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\bar{Z}} = \frac{U}{\bar{Z}}; \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{\bar{Z}} = \frac{U a^2}{\bar{Z}} = \dot{I}_A a^2; \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{\bar{Z}} = \frac{U a}{\bar{Z}} = \dot{I}_A a.$$

Значит токи образуют симметричную трехфазную систему токов.

Ток в общем (нейтральном проводе):

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = I(1 + a + a^2) = 0 (!).$$

В цепи провод, по которому ток не течет можно удалить. Получается очень своеобразная система передачи энергии, где от каждого «генератора» ЭДС энергия передается одним проводом. Таким образом, для передачи той же мощности экономия на проводах почти в два раза. Аналогичная экономия достигается при генерации и трансформации энергии и в электрических двигателях. Существенная экономия и предопределила широкое распространение трехфазных систем в энергоснабжении.

Нейтральный провод, обычно меньшего сечения, все же сохраняют для обеспечения равенства напряжений всех фаз при возможных несимметриях нагрузки. Напряжения между линейными проводами:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B = U(1 - a^2) = \sqrt{3} U e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C = U(a^2 - a) = -\sqrt{3} j U$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A = U(a - 1) = \sqrt{3} U e^{j\frac{5\pi}{6}}.$$

Эти напряжения так же образуют симметричную трехфазную систему. Напряжение фазы источника называют фазным напряжением (U_{ϕ}), а напряжение между линейными проводами - линейным напряжением (U_{ℓ}).

По величине $U_{\ell} = \sqrt{3} U_{\phi}$; $I_{\ell} = I_{\phi}$.

Значит в одной и той же системе электроснабжения можно, при необходимости, использовать два напряжения с соотношением $\sqrt{3}$. Это соотношение и включено в стандартный ряд напряжений: 127, 220, 380, 660 В. Применяются системы 127/220 В; 220/380 В; 380/660 В.

При расчетах трехфазных цепей можно пользоваться всеми методами расчета цепей синусоидального тока. Однако удобно использовать некоторые специфические приемы. При расчете симметричных цепей при симметричных нагрузках расчет можно вести для одной фазы даже при отсутствии нейтрального провода. Для получения токов и напряжений в двух других фазах достаточно воспользоваться операторами a и a^2 .

При несимметричном режиме при учете сопротивления проводов получается расчетная схема, как показано на рис. 9-5.

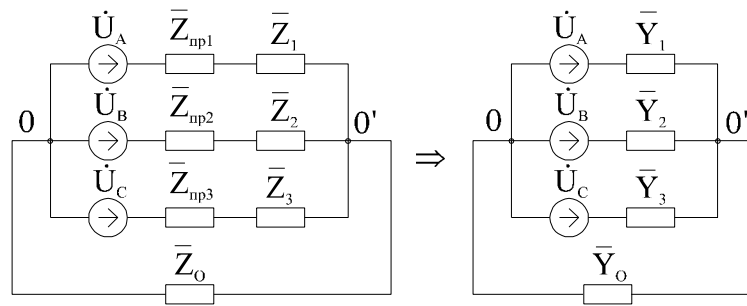


Рис. 9-5

Поскольку обычно несимметрия нагрузок практически не отражается на симметрии питающих напряжений (кроме аварийных режимов) в дальнейшем будем считать, что

$$\dot{U}_A = a \dot{U}_B = a^2 \dot{U}_C.$$

Применяя метод узловых потенциалов (метод двух узлов) получим напряжение между нейтральными точками:

$$U_{O'O} = \frac{\dot{U}_A \bar{Y}_A + \dot{U}_B \bar{Y}_B + \dot{U}_C \bar{Y}_C}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C + \bar{Y}_O}.$$

После этого легко определяются напряжения на каждой фазе нагрузки

$$\dot{U}_a = \dot{U}_A - \dot{U}_{O'O}; \dot{U}_b = \dot{U}_B - \dot{U}_{O'O}; \dot{U}_c = \dot{U}_C - \dot{U}_{O'O}.$$

Соответствующие фазовые токи

$$\dot{I}_A = U_a \bar{Y}_a; \dot{I}_B = U_b \bar{Y}_b; \dot{I}_C = U_c \bar{Y}_c; \dot{I}_O = U_{O'O} \bar{Y}_O.$$

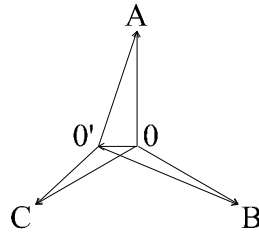


Рис. 9-6

Векторная диаграмм напряжений изображена на рис. 9-6. Из нее видно, что симметричная система напряжений (вектора OA ; OB ; OC) искажается наличием напряжения нейтрали $\dot{U}_{O'O}$. Соединяя точки A ; B ; C с точкой O' получаем напряжения на фазах нагрузки. Наибольшее искажение, при прочих равных условиях, возникает при отсутствии нейтрального провода: $Z_0 = \infty$; $Y_0 = 0$.

Если сопротивление нейтрального провода достаточно мало ($Z_0 = 0$; $Y_0 = \infty$), то искажений не возникает: $U_{O'O} = 0$.

§ 3. Соединение трехфазной системы треугольником

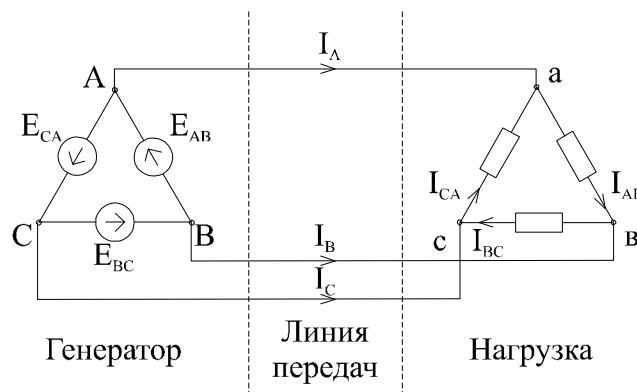


Рис. 9-7

Соединение, показанное на рис. 9-7, называют треугольником. Последовательное соединение трех источников не вызывает появление короткого замыкания, т.к.

$$\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0.$$

В сопротивлениях нагрузки возникает трехфазная система токов i_{ab} ; i_{bc} ; i_{ca} .

Если не учитывать сопротивление проводов, то

$$i_{ab} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\bar{Z}_{ab}}; i_{bc} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\bar{Z}_{bc}}; i_{ca} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\bar{Z}_{ca}}.$$

Линейные токи

$$i_A = i_{ab} - i_{ca}; i_B = i_{bc} - i_{ab}; i_C = i_{ca} - i_{ba}.$$

Если нагрузка симметрична $\bar{Z}_{ab} = \bar{Z}_{bc} = \bar{Z}_{ca}$ эти триады токов образуют симметричные трехфазные системы. В этом случае

$$I_{\dot{E}} = \sqrt{3} I_{\dot{O}}; U_{\dot{E}} = U_{\dot{O}}.$$

Вспомним, что при соединении звездой

$$I_{\dot{E}} = I_{\dot{O}}; U_{\dot{E}} = \sqrt{3} U_{\dot{O}}.$$

Если сравнить экономичность соединения треугольником с соединением звездой надо учесть, что токи в линейных проводах больше в $\sqrt{3}$ раз и следовательно сечения проводов надо увеличить в $\sqrt{3}$ раз. Однако, возрастание напряжения так же в $\sqrt{3}$ приводит к тому, что мощность передается в такое же количество раз больше. Таким образом, для передачи той же мощности на проводах достигается экономия в два раза по сравнению с передачей энергии тремя однофазными системами. Переключив обмотки генератора или трансформатора с треугольника на звезду, можно получить систему распределения энергии с напряжением в $\sqrt{3}$ раз большим. Трехфазную нагрузку (например двигатели) надо также переключить с треугольника на звезду, чтобы сохранить номинальные фазовые напряжения.

Для удобства переключения, шесть выводов трехфазных двигателей, генераторов или трансформаторов в выводных коробках располагают как показано на рис. 9-8.

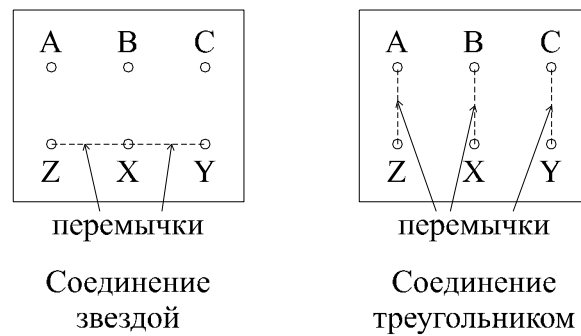


Рис. 9-8

То или иное соединение источника не определяют схему соединения приемников. Более того, различные группы приемников могут быть соединены по-разному. Рассмотрим принцип расчета такой цепи на примере рис. 9-9.

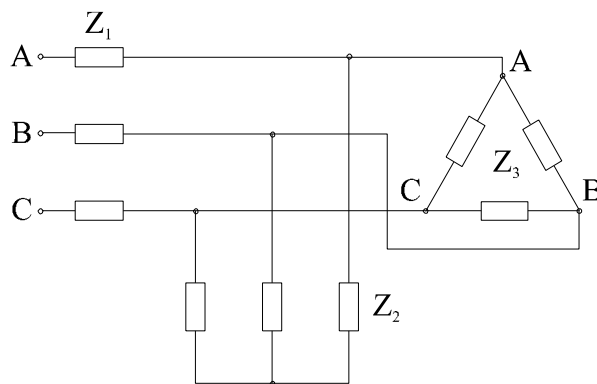


Рис. 9-9

Здесь группа сопротивлений Z_1 соответствует сопротивлению линии передач, группа приемников Z_2 соединена звездой, а группа Z_3 соединена треугольником.

1. Преобразуем звезду Z_2 в треугольник по формуле:

$$Z_{12} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_3} \text{ и т.д.}$$

2. Определим эквивалентные сопротивления двух треугольников.

3. Преобразуем полученный треугольник в звезду.

4. Объединив последовательные сопротивления, получим простую схему расчета, соединенную в звезду.

Последовательность преобразований показана на рис. 9-10.

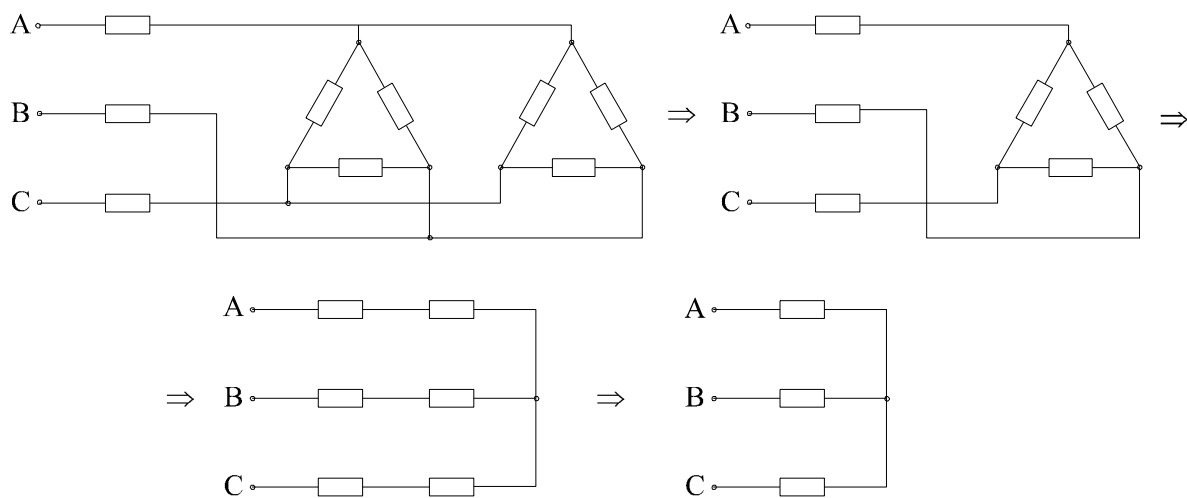


Рис. 9-10

Найдя линейные токи, определить падение напряжения на линии передач, затем линейные напряжения приемников и их токи.

§ 4. Мощность в трехфазных системах

При симметричной системе мгновенная мощность каждой фазы определяется:

$$p_A = U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi - U_{\phi} I_{\phi} \cos(2\omega t + \varphi)$$

$$p_B = U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi - U_{\phi} I_{\phi} \cos\left(2\omega t + \varphi - \frac{4}{3}\pi\right)$$

$$p_C = U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi - U_{\phi} I_{\phi} \cos\left(2\omega t + \varphi + \frac{4}{3}\pi\right)$$

$$p_A + p_B + p_C = 3U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi = P$$

Получили замечательный результат. Сумма мгновенных мощностей всех фаз симметричной системы не зависит от времени и равна активной мощности. Это важное свойство называют уравновешенностью системы.

Для двухфазной системы:

$$p_1 = U I \cos \varphi - U I \cos(2\omega t + \varphi)$$

$$p_2 = U I \cos \varphi - U I \cos(2\omega t + \varphi - \pi)$$

$$p_1 + p_2 = 2U I \cos \varphi = P.$$

Двухфазная система хотя и не симметрична, но уравновешена и тоже создает постоянный момент на валу генераторов.

Если выражение для мощности симметричной трехфазной системы подставить вместо фазных напряжений и токов линейные, то получим независимо от соединения звездой или треугольником:

$$P = 3U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi = \sqrt{3} U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \cos \varphi = \sqrt{3} U I \cos \varphi.$$

В таком виде формула фигурирует в технической литературе. Следует иметь в виду, что в ней φ_{ϕ} - сдвиг по фазе между фазными напряжением и током.

Для измерения мощности в четырехпроводной трехфазной системе применяется очевидная схема с тремя ваттметрами (рис. 9-11, а) или одним соответствующим образом сконструированным.

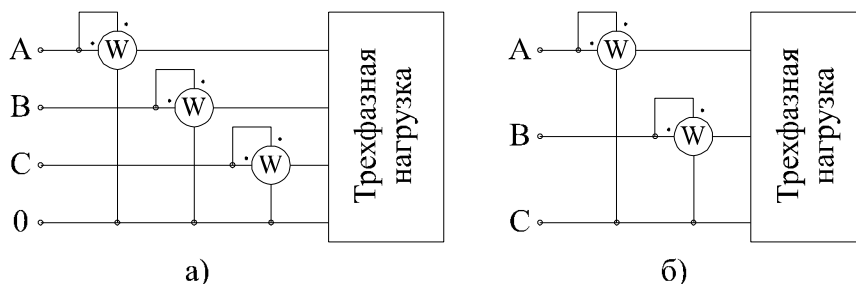


Рис. 9-11

Схема (рис. 9-11,б) с двумя ваттметрами (схема Арона) для измерения мощности двумя ваттметрами в системе без нейтрального провода требует некоторых пояснений. Как известно, ваттметр показывает действительную часть комплекса мощности. Значит сумма показаний двух ваттметров в схеме Арона составит:

$$P_1 + P_2 = \operatorname{Re} \left\{ \dot{U}_{AC} \dot{I}_A^* + \dot{U}_{BC} \dot{I}_B^* \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \dot{U}_A \dot{I}_A^* + \dot{U}_B \dot{I}_B^* - U e \left(\dot{I}_A^* + \dot{I}_B^* \right) \right\}$$

Поскольку $\dot{I}_C + \dot{I}_A + \dot{I}_B = 0$, получим

$$P_1 + P_2 = \operatorname{Re} \left\{ \dot{U}_A \dot{I}_A^* + \dot{U}_B \dot{I}_B^* + \dot{U}_C \dot{I}_C^* \right\} = P_A + P_B + P_C .$$

Сумма показаний двух ваттметров в схеме рис. 9-11 даст суммарную мощность всех трех фаз системы. Эта схема применима только в трехпроводной системе электроснабжения.

Представляет интерес схема рис. 9-12 для измерения реактивной мощности в симметричной трехфазной системе.

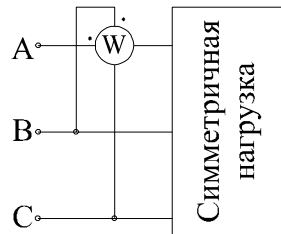


Рис. 9-12

Ваттметр покажет:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} &= \left\{ \dot{U}_{BC} \dot{I}_A^* \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \dot{U}_A j \sqrt{3} \dot{I}_A^* \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{3} \dot{U}_A \dot{I}_A^* e^{j \frac{\pi}{2}} \right\} = \\ &= \sqrt{3} U I \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{3} U I \sin \varphi \end{aligned}$$

Значит показание ваттметра, умноженное на $\sqrt{3}$ даст реактивную мощность симметричной нагрузки.

§ 5. Получение вращающего магнитного поля

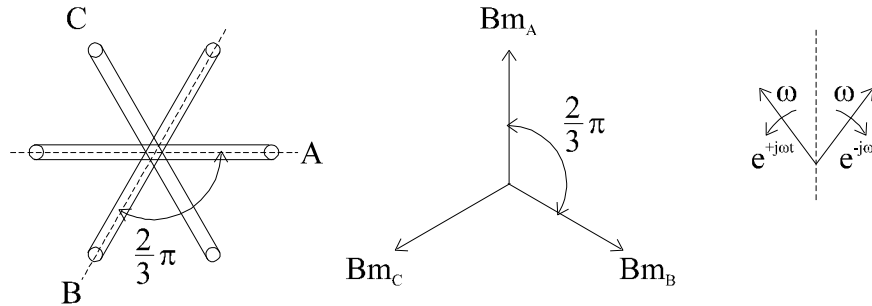


Рис. 9-13

На рис. 9-13 представлена система из трех катушек, сдвинутых в пространстве на угол $\frac{2}{3}\pi$, каждая из которых подключена к одной из фаз трехфазной системы. Магнитная индукция (B_m) направлена перпендикулярно плоскостям катушек и представляет из себя вектор, имеющий постоянное направление в пространстве и изменяющийся по величине по закону синуса. Такой вектор можно разложить на две составляющие 0,5 B_m , вращающихся с угловой скоростью ω в разные стороны.

Вектор, вращающийся по часовой стрелке $0,5 B_m \cdot e^{-j\omega t}$ от катушки фазы А, сложим с вектором, вращающимся в ту же сторону от катушки фазы В $0,5 B_m \cdot e^{-j\omega t} \cdot a$ и с вектором от катушки фазы С $0,5 B_m \cdot e^{-j\omega t} \cdot a^2$. Множители a и a^2 учитывают разницу в направлениях в пространстве. Если учесть сдвиг по фазе токов в этих катушках соответствующими множителями 1; a^2 и a , то получим сумму:

$$0,5 B_m \cdot e^{-j\omega t} + 0,5 B_m \cdot a^3 \cdot e^{-j\omega t} + 0,5 B_m \cdot a^3 \cdot e^{-j\omega t} = 1,5 B_m \cdot e^{-j\omega t}.$$

Что касается слагаемых векторов, вращающихся против часовой стрелки, то для учета их взаимного направления в пространстве относительно направления вращения надо записать: $0,5 B_m \cdot e^{j\omega t}$; $0,5 B_m \cdot e^{j\omega t} \cdot a^2$; $0,5 B_m \cdot e^{j\omega t} \cdot a$. Умножая на 1; a^2 и a и складывая получим:

$$0,5 B_m \cdot e^{j\omega t} (1 + a^4 + a^2) = 0.$$

Т.е. эти составляющие пульсирующих векторов взаимно компенсируют друг друга.

Таким образом в пространстве внутри катушек получим круговое вращающееся магнитное поле.

Вращающееся магнитное поле можно получить и от двухфазной системы. Для этого рассмотрим суммарную магнитную индукцию от двух катушек, расположенных под углом $\frac{\pi}{2}$ и питаемых от двухфазной системы напряжений. Т.е. имеем два взаимно перпендикулярных пульсирующих вектора. Для их сложения поместим их в произвольно расположенную прямоугольную систему координат (рис. 9-14).

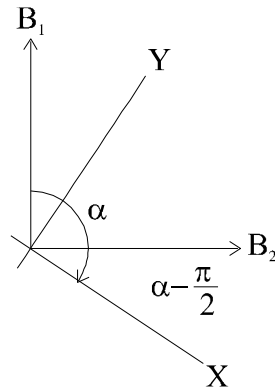


Рис. 9-14

Проекция на ось X:

$$B_x = B_1 \cdot \cos \alpha + B_2 \cdot \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right).$$

Но

$$B_1 = B_m \cdot \sin \omega t$$

$$B_2 = B_m \cdot \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Таким образом получим

$$B_x = B_m \left[\sin \omega t \cdot \cos \alpha + \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

Используя соотношение:

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)],$$

получим

$$B_x = B_m \cdot \sin(\omega t - \alpha), \text{ аналогично}$$

$$B_y = B_m \cdot \cos(\omega t - \alpha).$$

Вектор с такими проекциями имеет постоянную величину $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = B_m$.

Что касается его расположения в системе координат, то оно определится некоторым углом β

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{B_x}{B_y} = \operatorname{tg}(\omega t - \alpha).$$

Если рассмотреть расположение вектора в системе координат вращающейся с угловой скоростью, т.е. $\alpha = (\omega t + \psi)$, то получим, что суммарный вектор неподвижен во

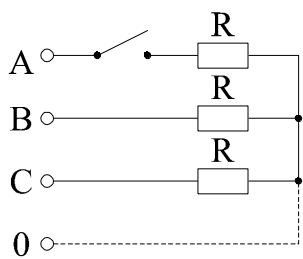
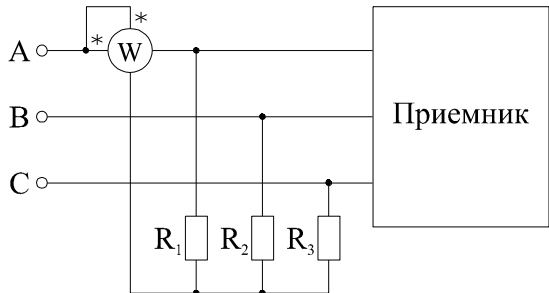
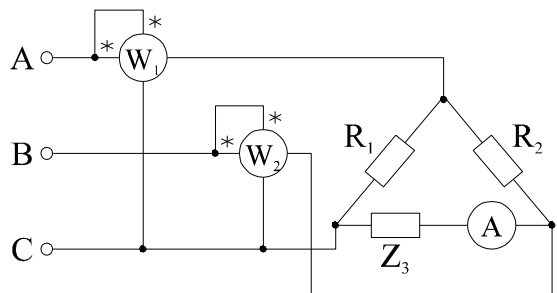
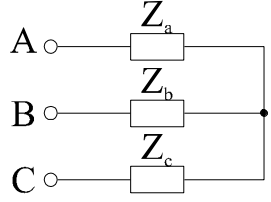
вращающейся системе координат. Это значит, что в неподвижной системе координат вектор вращается. Т.е. получено круговое вращающееся поле.

Последнее преимущество многофазных систем с точки зрения создания мощных выпрямителей будет показано при рассмотрении темы «Нелинейные цепи».

Контрольные вопросы к теме 9

1. Назовите преимущества трехфазных цепей для систем электроснабжения.
2. Как образуются трехфазные ЭДС?
3. Какие способы Вы знаете для записи трехфазных систем напряжение? Что такое оператор « a »?
4. Назовите другие многофазные системы.
5. Соединение трехфазных систем звездой и порядок расчета при таком соединении.
6. Порядок расчета при соединении треугольником.
7. Расчет цепей при смешанном соединении приемников энергии.
8. Выражения для мощности трехфазных систем. Что такое уравновешенность?
9. Докажите уравновешенность двухфазной системы.
10. Какие способы измерения активной и реактивной мощности в трехфазных цепях Вы знаете?
11. Как получить вращающееся магнитное поле в трехфазной системе?
12. Как получить вращающееся магнитное поле в двухфазной системе?

Контрольные вопросы к теме 12

1	 <p style="text-align: center;">$R_1 = R_2 = R_3; U_{\text{л}} = 380 \text{ В.}$</p>	<p>Определить напряжение на нагрузочных сопротивлениях при обрыве фазы А:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) при отсутствии нулевого провода, 2) при наличии нулевого провода.
2	 <p style="text-align: center;">$R_1 = R_2 = R_3 = 220 \text{ Ом}; U_{\text{л}} = 380 \text{ В};$ $P_W = 1000 \text{ Вт.}$</p>	<p>Определить мощность симметричного трехфазного приемника, при измерении одним ваттметром с искусственной нулевой точкой</p>
3	 <p style="text-align: center;">$R_1 = 100; R_2 = 200; U_{\text{л}} = 100 \text{ В};$ $P_1 + P_2 = 300 \text{ Вт.}$</p>	<p>Определить $\cos \varphi$ приемника Z_3, если через него протекает ток 2А.</p>
4	 <p style="text-align: center;">$Z_a = Z_b = Z_c$</p>	<p>Как изменится мощность при переключении симметричной трехфазной нагрузки со звезды на треугольник.</p>

