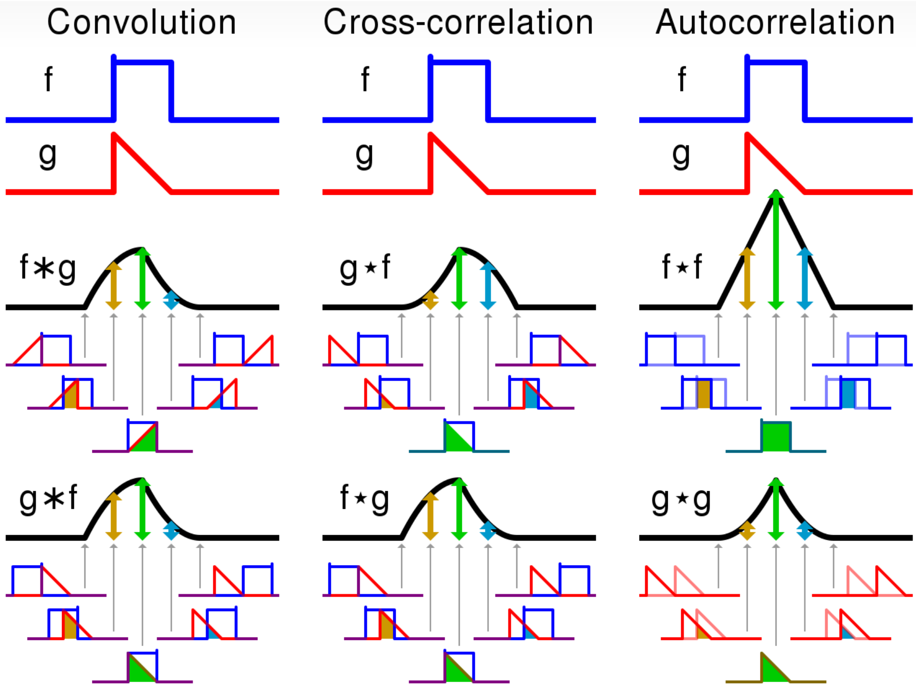


卷积、互相关与自相关

明天
这个世界会好的，我们在创造上帝的路上。

首先从向量的乘法讲起，假设有个**a**向量和**b**向量，

$$a=(x_1,x_2,x_3);b=(y_1,y_2,y_3);$$

那么这两个向量的点积或者乘积可以写为

$$a*b=<a,b>=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=\sum_i^n a_ib_i$$

希望你对上面这行还有印象。对于向量的意义，如果你要探究几何意义的话，我觉的只有当a或者b是单位向量的时候才有意义，就是所谓的投影。向量的诞生是来解决实际问题的，用来解决的最直接的一个问题是力的做功：$W=F*s$;只有距离在力的方向上的投影的那一部分才能产生作用，如果 **F** 和 **s** 是垂直也就是正交的，那么久没有做功，没有work，没发挥作用。

下面我们开始讨论一下函数，首先试想一下，函数是什么？函数的定义域是不是可以看做是向量坐标中的维度 i ，而值域就是向量每个坐标对应的值，也就是说函数可以看成一个维度无限大的向量。假设有个两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ ，同时它们也可以看成是两个向量 f 和 g ，那那么这两个向量的乘积要怎么写？注意看上面向量乘积最后使用的**求和符号**。

函数向量的乘积就是常说的函数点积，可以写为：

$$<f(x),g(x)>=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)g(x)dx$$

现在应该理解，从-inf 到 +inf 的积分不过是一个两个函数向量的点积而已。函数点积的意义是什么呢，可以完全从向量点积的意义照搬啊，就是变力变位移的做功啊，就是做功啊做功啊Work啊。

1. **卷积**

铺垫完毕，进入正题，首先我们把卷积的公式拉过来

$$(f*g)((t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-\tau)g(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)g(-(\tau-t))d\tau$$

量乘积就是做功就是

题：1 为什么要把好好

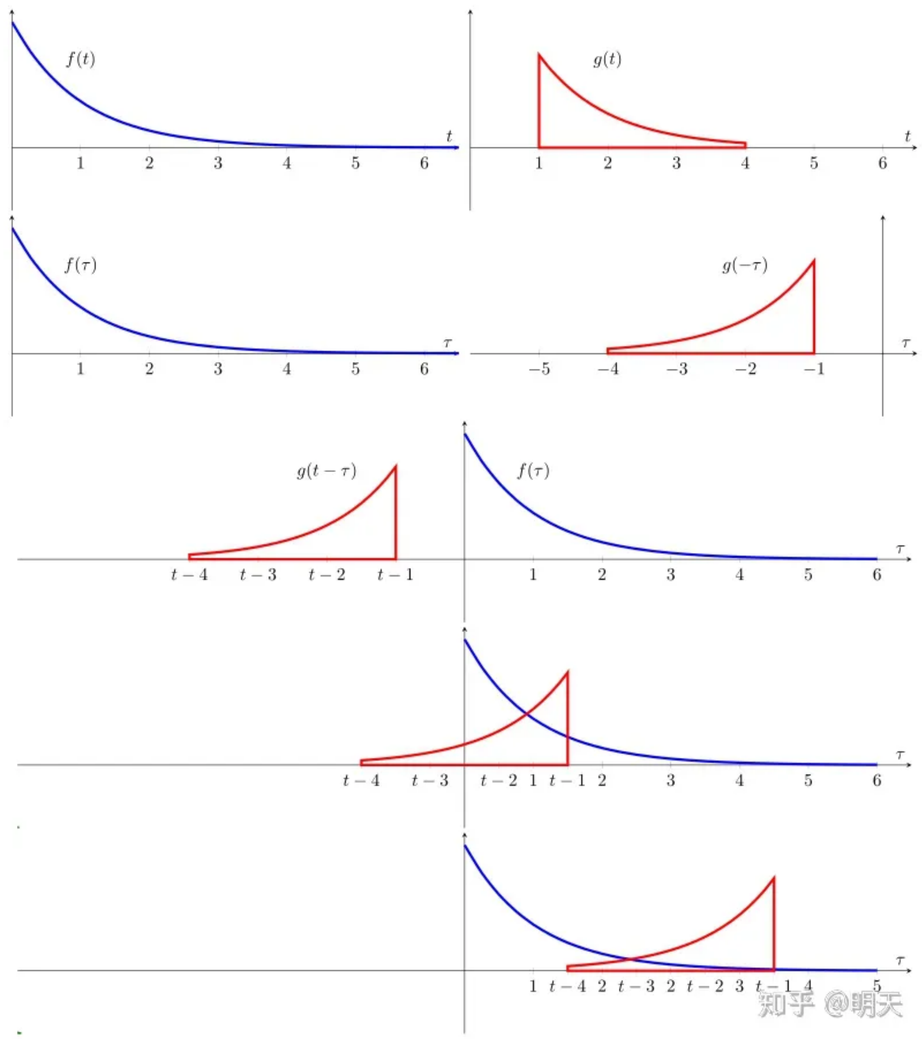
的 $g(\tau)$ 变成特么的g $g(-\tau)$? 2 为什么平移t?

为了便于理解，我们用信号与系统中的信号函数 $s(t)$ 和系统函数 $h(t)$ ，当一个系统收到一个外界刺激时，肯定会产生一定的反应，在术语里叫响应，也可以看做信号对系统做的功。那么这个响应是多少呢？先把公式写出来

$$(h*s)((t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)s(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)s(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)s(-(\tau-t))d\tau$$

这里 $s(\tau)$ 变成了 $s(-\tau)$ 并且平移了t，也就是先将 $s(\tau)$ 对称到相反方向以后再做平移，假设有一段时域离散信号在t = 0,1,2,3,4 时，s(t)={a-b-c-d-e}，假设系统函数为 h(t)={h-i-j-k-l}。发送信号以后的t时刻，与h(t)碰头的是谁？是s(0)！而这时候s(t) 才刚刚和h(0)碰头！就是把s(t)翻转0时间轴的负半部分，然后再慢慢滑动过来。在滑动过程中，每一个t对应一个该时刻，信号已经对系统做了多少功，也就是产生多少响应，顺便提一句，功是过程量，不是瞬时量，做功需要过程，信号对系统的产生的响应也需要过程。

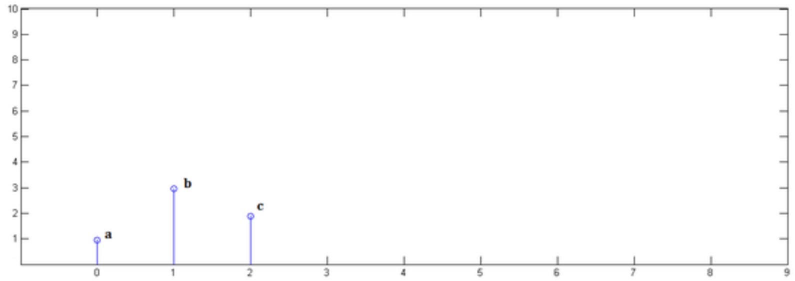
下面用维基百科上的图来举例，暂且将图中g(t)看成s(t),把f(t)看成h(t)，



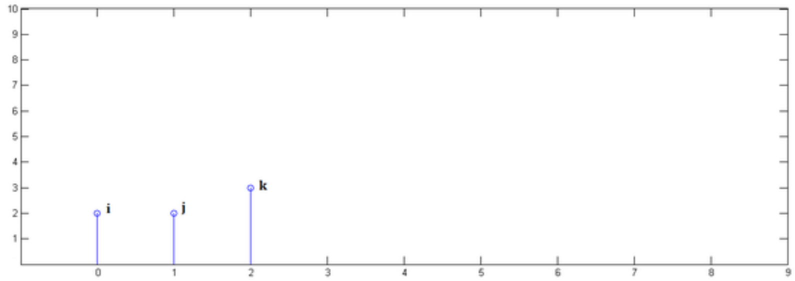
如何通俗易懂地解释卷积?
4520 赞同 · 211 评论 回答

这个答案举的例子很好，但是并没有说明白为什么x(n)*y(0)，x(n)*y(1)，x(n)*y(2)，之后为什要平移到1,2,3。具体原因就是上面所说，想明白了也就明白了卷积。

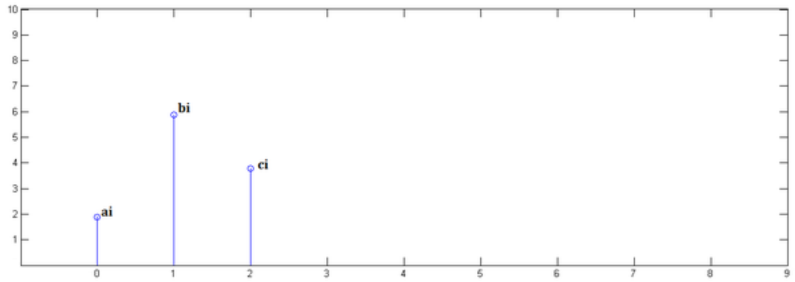
> 作者：张俊博
> 链接：zhihu.com/question/2229...
> 来源：知乎
>



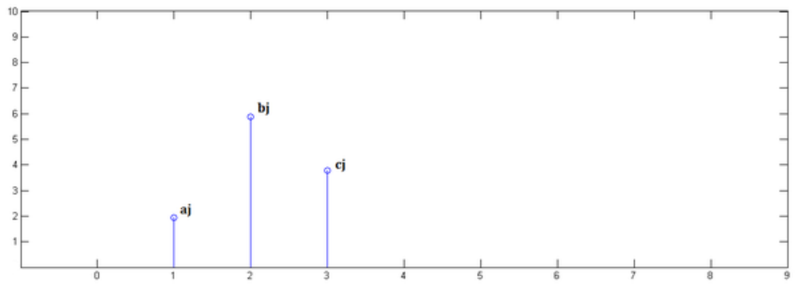
> 已知$y[0] = i, y[1] = j, y[2] = k$



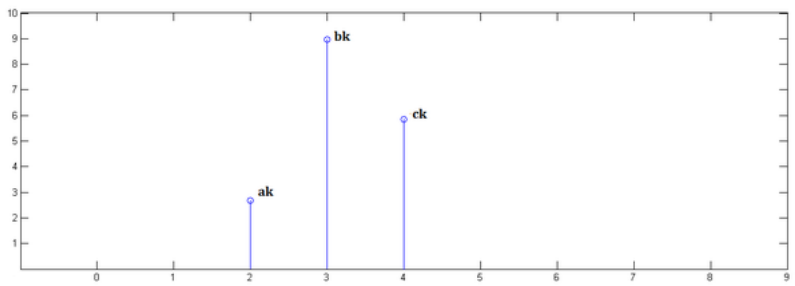
> 下面通过演示求$x[n] * y[n]$的过程，揭示卷积的物理意义。
> 第一步，$x[n]$乘以$y[0]$并平移到位置0：



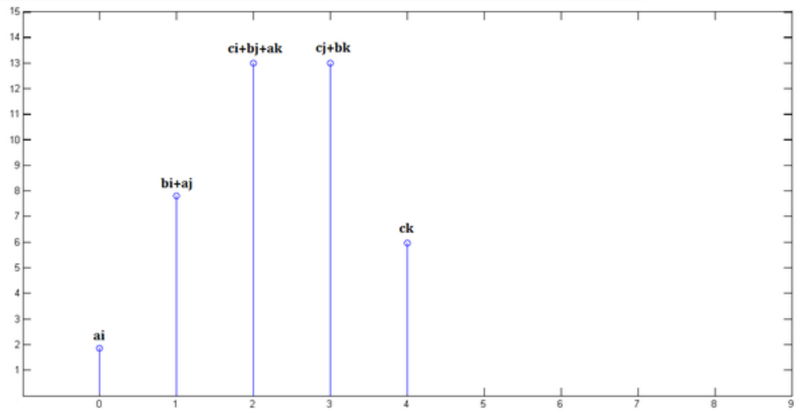
> 第二步，$x[n]$乘以$y[1]$并平移到位置1：



> 第三步，$x[n]$乘以$y[2]$并平移到位置2：



> 最后，把上面三个图叠加，就得到了$x[n] * y[n]$：



> 简单吧？无非是**平移（没有反褶！）、叠加**

上图过程中没有出现反褶的原因就是因为这里的卷积已经在不知不觉中往后推移了两位！你看x(3)*y(3) =ci+bj+ak, 信号a还是跟系统中的对应，也就是信号a在t=3时刻刚好和系统的k对应上。

2. 互相关

先把互相关的公式拉过来，

$$(f \star g)(\tau) = \int_{-\infty}^{+i\infty} f(t)g(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{+i\infty} f(t-\tau)g(t)dt$$

有没有发现，这里的变量和积分对象不再是 t ，而是 τ 。也就是说互相关研究室的是两个对象产生一段时间差 τ 之后的关系，也就是相不相关，如果平移之后两个函数正交，那么他们就没有相互关系，互相关为0.这里，如果 $f(t)$ 是偶函数的话，互相关与卷积的结果是一样的。

3. 自相关

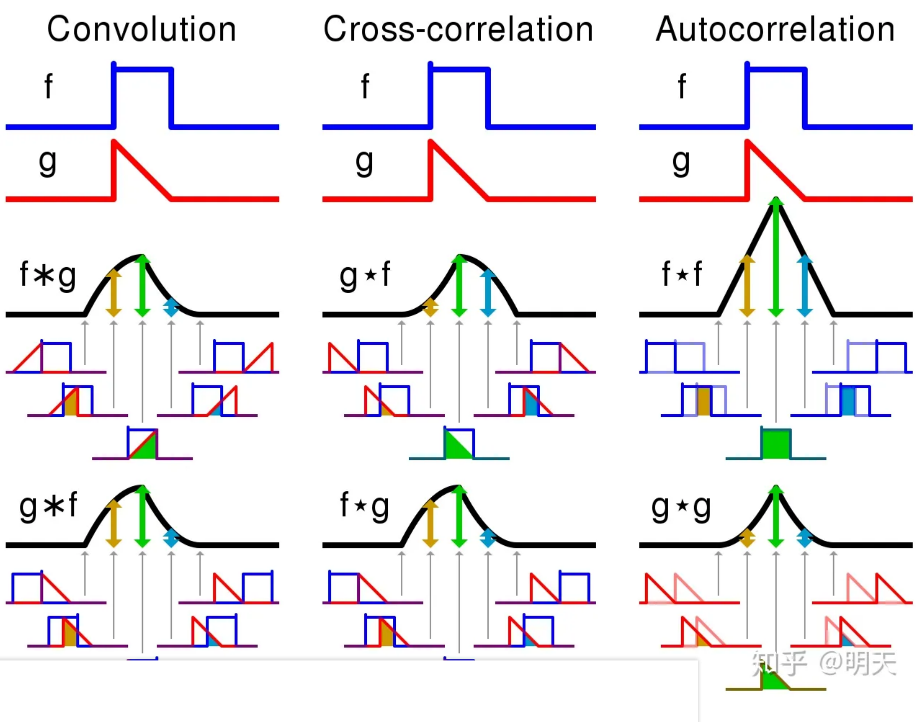
先把公式拉过来

$$R_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t-\tau)dt$$

这里的变量和积分符号还是 τ ,自相关指的是函数与平移后的函数自己的相关性。

自相关有两个非常好的例子，一个是迈克尔逊干涉仪，一个是AGWN.

最后再把Wikipedia上面的卷积、互相关、自相关的比较图拿过来，大家领悟。



先写到这里，我也不是电子专业出身，写这篇已经花了三个多小时了，如果各位看官能指出其中的问题，或者还有什么好的建议可以加在里面，请一定留言拍砖，你的留言拍砖是对我最大的鼓励。

编辑于 2019-11-07 21:49

信号与系统 卷积

发布一条带图评论吧

39 条评论 默认 最新

大脑斧
有没有发现，这里的变量和积分对象不再是 t ，而是 τ，写反了吧
2020-04-06 回复 7

无名字
本就是可以换的，一个变量嘛，含义知道就行
2020-04-25 回复 喜欢

刘译
写得好，将不相关与正交联系在一起，而正交又可以通过内积计算来度量，而内积计算就是对应分量乘积求和，乘积求和又可以和卷积，互相关和自相关的公式联系在一起。醍醐灌顶啊！！！
2020-11-11 回复 3

天气晴朗万物可爱
互相关和自相关的公式只是实数域的，复数域的还要加共轭，我一开始就是看了你这个公式。
直到我开始了复数域的学习，才发现这个公式不完整
2021-11-07 回复 2

天气晴朗万物可爱 ‣ **pkr**
在知乎上搜一下就知道了
2022-05-06 回复 喜欢

pkr
xd可以解释一下为什么吗，或者可以告知关于复数域的相关看的是哪本教材吗
2022-05-04 回复 喜欢

悲伤的歌
豁然开朗，茅塞顿开，感激涕零。
2019-04-21 回复 2

西西啊嘻嘻哈哈哈
答主的图好棒
2021-05-14 回复 1

bactone li
图直接来自于维基百科😄
2022-11-08 回复 喜欢

31金属元素
图很直观，非常棒！
2021-04-30 回复 1

octopus
最后那张图就都看懂了。
2020-06-14 回复 1

马甲945
写的非常好，期待更多好文章！😎
2019-05-29 回复 2