1. 已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$，则 $X^{\mathrm{T}}AX=$____ $2x_1^2+3x_2^2-2x_1x_2$ ____；

2. 设向量 $\alpha_1=(0,1,1), \alpha_2=(0,t,2)$ 线性相关，则 $t=$ __-2__；

3. 设 A 是秩为 1 的 3 阶矩阵，则齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系含_1__个解；

4. 已知矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则其秩为__2____；

5. 已知 2 是矩阵 A 的一个特征值，则 $|2E-A|=$ ___0___。

1. 已知 2 阶方阵 A 的行列式 $|A|=-1$，则 $|-2A|=$ _2__；

4. 设 2 是 A 的一个特征值为，则 $2A$ 必有一个特征值为_____4_；

1. 已知方阵 A 满足 $AA^T=E$，则 $A^{-1}=$___ A^T __；

2. 设向量组 $\alpha_1=(1,2), \alpha_2=(2a,3), \beta=(2,1)$ 满足 $\beta=\frac{1}{4}\alpha_1+\frac{1}{6}\alpha_2$，则 $a=$ _9/4__；

3. 设 3 是矩阵 A 的特征值，则 $|3E-A|=$ __0__；

4. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1x_3+x_1x_3+4x_2x_3$，则它的矩阵为 _ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1/2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ _______。

1. 已知矩阵 $A_{3\times m}, B_{6\times 2}, C_{2\times n}, D_{3\times 3}$ 满足 $ABC=D$，则 $m=$__6__，$n=$_3__；

2. 设 ξ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个特解，η_1,η_2 是导出组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则方程组 $Ax=b$ 的通解为__ $k1\eta1+k2\eta2+\xi$ ___；

3. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 1, −2, 3，则 $|A|=$__-6__；

1. 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $AB^T=$__ $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ ____；

2. 设 ξ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个特解，η_1,η_2 是导出组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则方程组 $Ax=b$ 的通解为_ $k1\eta1+k2\eta2+\xi$ _；

3. 对角矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$ 的特征值为 __a1 a2 …an__；

1. 设 A 与 B 是两个同阶可逆矩阵，则（ $AB=BA$ ）；

2. 设 A 是 1×2 矩阵，B 是 2 阶方阵，C 是 2×1 矩阵，则（ABC 是 1 阶方阵）

3. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 满足 $\alpha_3=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，则（ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关）

5. 设 A 是一个方阵，则（由 $|A|=0$ 可得 0 是 A 的一个特征值）；

1. 设 A 是一个 n 阶方阵，且 $|A|=1$，则（ $|-A|=-1$ ）

3. 设向量组 α_1,α_2 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则下述结论不正确的是（ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 只有一个极大无关组）

4. 设 λ_0 是矩阵 A 的一个特征值，α_0 是 A 对应 λ_0 的一个特征向量，则下述说法不正确的是（ $\lambda_0\neq 0$ ）；

5. 设 ξ_0 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的一个特解，η_1,η_2 是导出组 $AX=0$ 的一个基础解系，则下述说法不正确的是（ $AX=b$ 的通解为 $\xi_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2$ ）；

1. 设 A,B 是两个同阶方阵，则（ $|AB|=|A||B|$ ）

2. 设 η_1,η_2 是 5 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则必有（矩阵 A 的秩=3）；

3. 设 α_1,α_2 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大无关组，则下述结论不正确的是（ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩为 3）

4. 设 λ 是矩阵 A 的一个特征值，α 是对应的特征向量，则下述说法不正确的是（ $-\alpha$ 是 $-A$ 的特征向量）；

1．设 A 是任意方阵，且 $|A|=0$，则有（$|A^T|=0$）

2．设向量 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，则有（$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\alpha_4$ 线性相关）

3．设 A 与 B 都是 n 阶方阵，则有（$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$）；

4．设 A 是 3 阶满秩方阵，则下述说法正确的是（$r(A)=3$）；

1．设 A 是方阵，则下述结论不正确的是（$|kA|=k|A|$）；

2．设 A 是 1×3 矩阵，B 是 3×2 矩阵，则下述计算有意义的是（AB）

3．已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则（$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 中至少有一个向量可由其余线性表出）

4．设α,β是矩阵 A 属于同一个特征值的两个特征向量，则下述说法不正确的是（$\alpha^T\beta$ 也是 A 的特征向量)；

三．计算题（每小题 10 分，共 50 分）

1．计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

答：

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$
$$=6$$

2．求解下列线性方程组

$$\begin{cases} x_1-5x_2+2x_3=-3 \\ -3x_1+\ x_2-4x_3=2 \\ 5x_1+3x_2+6x_3=-1 \end{cases}$$

用导出组的基础解系表示通解。

答：令 A 为方程组 X_1-5X_2+2X_3=-3

B 为方程组-3X_1+X_2-4X_3=2

C 为方程组 5X_1+3X_2+6X_3=-1

3．解矩阵方程

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

答：

$$X=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}^{-1}=\begin{vmatrix} 1.5 & -1.5 & 0.5 \\ 0.5 & -1.5 & 1.5 \end{vmatrix}$$

4．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$，求 A 的特征值和特征向量。

答：令 $|\lambda E-A|=0$

特征值：λ_1=-2 λ_2=-1 λ_3=0

对应的特征向量：

$$\lambda_1\text{=-2}\quad \begin{vmatrix} 0.7071 \\ \text{-0.7.71} \\ 0 \end{vmatrix}$$

λ_2=-1 $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

λ_3=0 $\begin{vmatrix} 0.7071 \\ 0.7.71 \\ 0 \end{vmatrix}$

1．计算行列式 $\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$；

答：

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -3$$

3．已知矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-5} \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{X}$。

答：

$$X = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 13 \\ -1 & -4 & -8 \end{vmatrix}$$

4．已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量；

答：特征值

$$|\lambda E - A| = 0$$

λ_{12}=2λ_3=-1

特征向量

λ_{12}=2 k1$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ +k2$\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$

λ_3=-1 k3$\begin{vmatrix} -0.4082 \\ -0.8165 \\ 0.4.82 \end{vmatrix}$

1．计算行列式 $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$；

答：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$=2

2．求解下列线性方程组

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 1} \\ \boldsymbol{x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2} \\ \boldsymbol{-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1} \\ \boldsymbol{3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 3} \end{cases}$$

要求用导出组的基础解系表示通解。

答：A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

3．已知矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{7} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{10} \end{pmatrix}\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{X}$。

答：

$$X = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 11 & -10 \\ -6 & 6 \end{vmatrix}$$

4．已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量；

答：特征值：

$$|\lambda E - A| = 0$$
$$\lambda_{12}=2 \lambda_3=1$$

特征向量：

$$\lambda_{12}=2 \quad \text{k1}\begin{vmatrix} 0 \\ 0.4472 \\ 0.8944 \end{vmatrix} + \text{k2}\begin{vmatrix} 0 \\ -0.4472 \\ -0.8944 \end{vmatrix}$$

$$\lambda_3=1 \quad \text{k3}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

1．计算行列式

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$$

答：$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -27$

3．已知矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{X}$ 满足方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$，其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{X}$ 。

答：

$$X=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix}^{-1}\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & -2 & -3\\ -3 & -1 & -3\\ -1 & -1 & -1\end{vmatrix}$$

4．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，求 $\frac{1}{2}A$ 的全部特征值和特征向量

答：特征值：

$$|\lambda E-A/2|=0$$

λ_{12}=0.5λ_3=-0.5

特征向量：

λ_{12}=0.5　k1$\begin{vmatrix}0.7071\\ 0\\ 0.7071\end{vmatrix}$ +k2$\begin{vmatrix}-0.7071\\ 0\\ -0.7071\end{vmatrix}$

λ_3=-0.5　k3$\begin{vmatrix}-0.7071\\ 0\\ 0.7071\end{vmatrix}$

3．解矩阵方程 $\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -5\\ 1 & -3 & -7\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

答：

$$X=\begin{vmatrix}0 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -5\\ 1 & -3 & 7\end{vmatrix}^{-1}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -43\\ 1 & -8\\ 0 & -3\end{vmatrix}$$

4．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$，求 A 的特征值和特征向量。

答：特征值

$$|\lambda E-A|=0$$

λ_{12}=3λ_3=1

特征向量

λ_{12}=3　k1$\begin{vmatrix}0.4472\\ 0.8944\\ 0\end{vmatrix}$ +k2$\begin{vmatrix}-0.4472\\ -0.8944\\ 0\end{vmatrix}$

λ_3=1　k3$\begin{vmatrix}1\\ 0\\ 0\end{vmatrix}$