Lecture 3

Chương 2: Phân tích hệ thống tuyến tính bất biến (LTI) trong miền thời gian

2.1. Giới thiệu và phương pháp phân tích hệ thống LTI

2.1.1. Hệ thống LTI

- Hệ thống LTI: HT thỏa đồng thời tính tuyến tính & bất biến
  - Tuyến tính: $T\{k_1f_1(t)+...+k_nf_n(t)\}=k_1T\{f_1(t)\}+...+k_nT\{f_n(t)\}$
  - Bất biến: $T\{f(t-t_0)\}=y(t-t_0)$ với $y(t)=T\{f(t)\}$
- Môn học này tập trung khảo sát hệ thống LTI vì:
  - Phần lớn các hệ thống vật lý trên thực tế đều là HT LTI
  - Một số hệ thống là phi tuyến nhưng trong một giới hạn nào đó người ta sẽ tương đương nó là LTI để khảo sát vì ngõ ra của hệ thống LTI sẽ dễ dàng xác định thông qua phương pháp **"biểu diễn"** tín hiệu

2.1.2. Biểu diễn tín hiệu để phân tích HT LTI

- Tín hiệu $\phi_k(t)$, k=1,2,….n được gọi là tín hiệu cơ bản khi:

  $T\{\phi_k(t)\}=\psi_k(t)$; $\psi_k(t)$ hoàn toàn xác định trước
- Biểu diễn tín hiệu bất kỳ theo tín hiệu cơ bản ở dạng tổ hợp tuyến tính có/không dịch thời gian:

$$f(t)=a_1\phi_1(t-t_1)+...+a_n\phi_n(t-t_n)$$

- Khi đó ngõ ra được xác định:

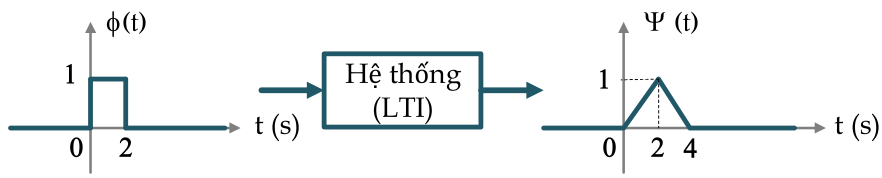
$$y(t)=T\{f(t)\}=T\{a_1\phi_1(t-t_1)+...+a_n\phi_n(t-t_n)\}$$

$$\xrightarrow{TT(L)} y(t)=a_1T\{\phi_1(t-t_1)\}+...+a_nT\{\phi_n(t-t_n)\}$$

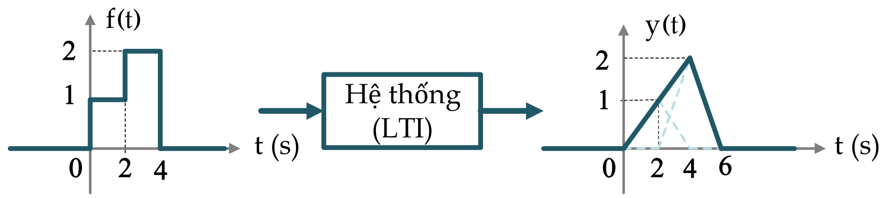
$$\xrightarrow{BB(TI)} y(t)=a_1\psi_1(t-t_1)+...+a_n\psi_n(t-t_n)$$

2.1.2. Biểu diễn tín hiệu để phân tích HT LTI

Ví dụ: $\phi(t)$ là ngõ vào hệ thống LTI và ngõ ra là $\Psi(t)$



Khi đó: f(t) là ngõ vào hệ thống LTI và ngõ ra là y(t)



Vì: $f(t)=\phi(t)+2\phi(t-2)\xrightarrow{LTI}y(t)=\Psi(t)+2\Psi(t-2)$

Chương 2: Phân tích hệ thống LTI trong miền thời gian

2.2. Đáp ứng xung và mô hình hệ thống LTI dùng tích chập

2.2.1. Đáp ứng xung của hệ thống LTI

Gọi quan hệ vào ra của hệ thống LTI là: y(t)=**T**{f(t)}

Đáp ứng xung h(t) là đáp ứng của hệ thống với ngõ vào là xung đơn vị:

$\delta(t) \rightarrow$ [LTI system] $\rightarrow h(t)$ hay: h(t)=**T**{δ(t)}

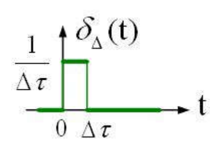
Impulse response

<u>Ví dụ</u>: y(t)=**T**{f(t)}=f(t-1) → h(t)=**T**{δ(t)}=δ(t-1)

2.2.2. Biểu diễn t/hiệu theo xung đơn vị

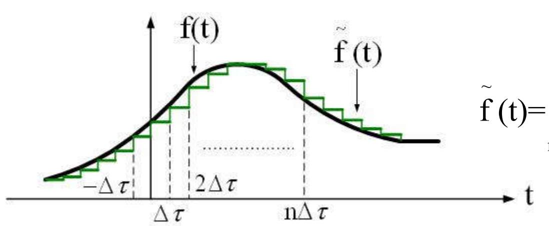
Nhắc lại xung $\delta_\Delta(t)$:

$$\delta_\Delta(t)=\begin{cases}\frac{1}{\Delta\tau}; & 0<t<\Delta\tau \\ 0; & \text{otherwise}\end{cases}$$



$$\Rightarrow \lim_{\Delta\tau\to 0}\delta_\Delta(t)=\delta(t)$$

Biểu diễn gần đúng f(t) dùng $\delta_\Delta(t)$:



$$\tilde{f}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\Delta\tau)\delta_\Delta(t-n\Delta\tau)\Delta\tau$$

Biểu diễn f(t) thành tổng các δ(t):

$$f(t)=\lim_{\Delta\tau\to 0}\tilde{f}(t) \Rightarrow f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

2.2.3. Mô hình toán hệ thống LTI dùng tích chập

(Hằng số với t)

$$f(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}}_{\text{Tổng}} f(\tau)\underbrace{\delta(t-\tau)}_{\text{Tín hiệu cơ bản}}d\tau \xrightarrow{\text{LTI}} y(t)=T\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\}$$

$$\Downarrow$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)T\{\delta(t-\tau)\}d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau}_{\text{Tích chập, ký hiệu f(t)*h(t)}}$$

2.2.3. Mô hình toán hệ thống LTI dùng tích chập

Như vậy h(t) mô tả đầy đủ cho đặc tính của hệ thống LTI, nên có thể biểu diễn hệ thống LTI theo mô hình “hộp đen” sau:

$$f(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$$

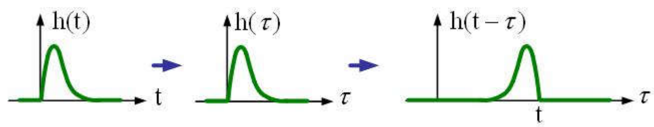
$$y(t) = T\{f(t)\} = f(t) * h(t)$$

2.2.4. Tích chập và các tính chất

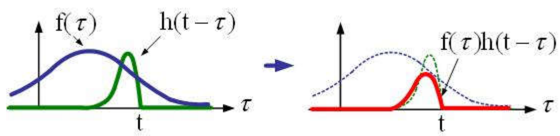
$$f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

(Lưu ý: ta sẽ tính tích phân trên theo thang thời gian τ còn t là tham số cũng chính là biến thời gian của kết quả)

- Xác định h(t-τ) theo biến τ:



- Nhân f(τ) với h(t-τ)



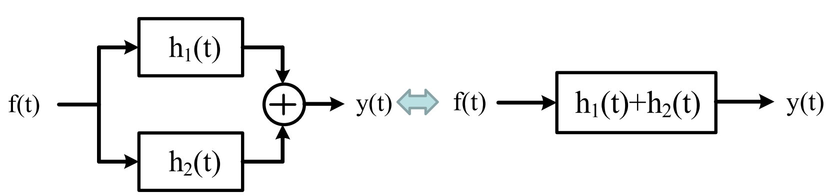
- Lấy tích phân trên toàn thang τ

2.2.4. Tích chập và các tính chất

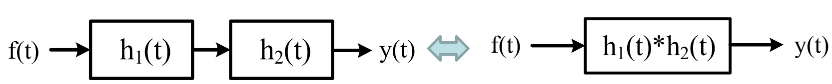
- Tính giao hoán: $y(t)=f(t)*h(t)=h(t)*f(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

- Tính phân phối: $f(t)*[h_1(t)+h_2(t)]=f(t)*h_1(t)+f(t)*h_2(t)$



- Tính kết hợp: $y(t)=[f(t)*h_1(t)]*h_2(t)=f(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$



[không quan trọng thứ tự của $h_1(t)$ và $h_2(t)$]

2.2.4. Tích chập và các tính chất

- Tính chất đạo hàm:

$$\frac{df(t)}{dt} * h(t) = \frac{d}{dt}[f(t) * h(t)] \quad \text{Hay} \quad T\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \frac{d}{dt}T\{f(t)\}$$

- Tính dịch thời gian:

$$f(t-t_0) * h(t) = f(t) * h(t-t_0) = y(t-t_0) \quad \text{Với} \quad y(t) = f(t) * h(t)$$

Chương 2: Phân tích hệ thống LTI trong miền thời gian

2.3. Phân tích hệ thống LTI dùng tích chập

2.3.1. Xác định đáp ứng của HT

a) Đáp ứng với ngõ vào bất kỳ:

B1: Xác định đáp ứng xung h(t) nếu cần

B2: Xác định đáp ứng với ngõ vào f(t) bằng cách tính

$$y(\mathrm{t}) = f(\mathrm{t}) * h(\mathrm{t}) = h(\mathrm{t}) * f(\mathrm{t})$$

2.3.1. Xác định đáp ứng của HT

b) Đáp ứng quá độ s(t): đáp ứng với ngõ vào f(t)=u(t)

Ta có: $\mathrm{s(t)=u(t)*h(t)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{h}(\tau)\mathrm{u}(\mathrm{t}-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\mathrm{t}}\mathrm{h}(\tau)\mathrm{d}\tau$

$$\Rightarrow \mathrm{h(t)}=\frac{\mathrm{ds(t)}}{\mathrm{dt}}$$

Ta có thể quan sát đáp ứng xung thông qua đáp ứng quá độ và ngược lại

2.3.1. Xác định đáp ứng của HT

c) Hàm đặc trưng và giá trị đặc trưng:

Xét ngõ vào là hàm: e^{st} , khi đó ngõ ra:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right]}_{\text{H(s) giá trị đặc trưng}} \underbrace{\boxed{e^{st}}}_{\text{Hàm đặc trưng của HT}}$$

Hay: $T\{e^{st}\}=H(s)e^{st}$

Biến đổi Fourier & Laplace rất quan trọng trong việc phân tích hệ thống LTI

2.3.2. Phân tích tính nhân quả, ổn định của hệ thống LTI

B1: Dùng tích chập viết quan hệ vào ra y(t)=T{f(t)}

B2: Phân tích tính nhân quả và ổn định như chương 1

2.3.2. Phân tích tính nhân quả, ổn định của hệ thống LTI

Hệ quả 1: hệ thống LTI nhân quả khi h(t)=0, $\forall$ t<0

Hệ quả 2: hệ thống LTI ổn định khi: $\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathrm{h}(t)|\, dt$ hữu hạn

Chương 2: Phân tích hệ thống LTI trong miền thời gian

2.4. Phân tích hệ thống LTI nhân quả mô tả bởi phương trình vi phân

2.4.1. Hệ thống mô tả bởi phương trình vi phân

Là hệ thống được mô tả bởi phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng cấp n có dạng:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k f(t)}{dt^k}$$

2.4.2. Xác định đáp ứng của HT mô tả bởi PTVP

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y_p(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k f(t)}{dt^k} \qquad (1)$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y_h(t)}{dt^k} = 0 \quad \text{(PT thuần nhất)} \qquad (2)$$

Với ngõ vào f(t), nếu $y_p(t)$ thỏa (1) khi đó $y_p(t)+y_h(t)$ cũng thỏa (1) với $y_h(t)$ thỏa (2)

- $y_p(t)$: Nghiệm riêng
- $y_h(t)$: Nghiệm phương trình thuần nhất

2.4.2. Xác định đáp ứng của HT mô tả bởi PTVP

Nghiệm phương trình thuần nhất $y_h(t)$: $\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y_h(t)}{dt^k} = 0$

$y_h(t)$ có dạng: $y_h(t) = Ae^{\lambda t}$

$\longrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k A \lambda^k e^{\lambda t} = 0 \longrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k = 0$ (PT đặc trưng)

$\longrightarrow$ n nghiệm λ_i, i=1,…,n

Với n nghiệm đơn: $y_h(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{\lambda_k t}$

Với r nghiệm lặp và n-r nghiệm đơn:

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^{r} A_k t^{k-1} e^{\lambda_r t} + \sum_{k=r+1}^{n} A_k e^{\lambda_k t}$$

2.4.2. Xác định đáp ứng của HT mô tả bởi PTVP

Điều kiện đầu: để xác định n hằng số, cần n điều kiện đầu

$$y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}$$

Thông thường xét tại thời điểm bắt đầu tác động của ngõ vào và hay khảo sát tại $t=0^+$

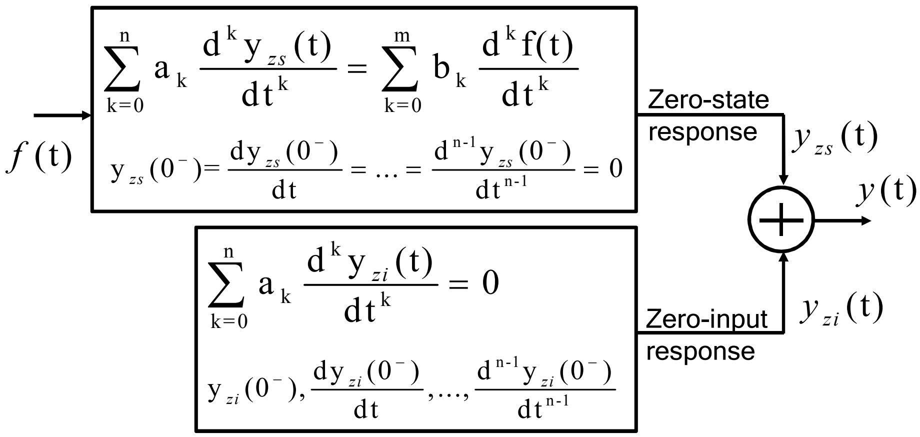
$$y(0^+), \frac{dy(0^+)}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}y(0^+)}{dt^{n-1}}$$

Điều kiện đầu tại $t=0^+$ phụ thuộc vào điều kiện đầu tại $t=0^-$ và ngõ vào. Điều kiện đầu tại $t=0^-$ như sau:

$$y(0^-), \frac{dy(0^-)}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}y(0^-)}{dt^{n-1}}$$

2.4.2. Xác định đáp ứng của HT mô tả bởi PTVP

2 thành phần của đáp ứng:



2.4.3. Các thuộc tính của HT mô tả bởi PTVP

- Hệ thống: $y_{zs}(t)=\mathbf{T}_{zs}\{f(t)\}$ là LTI và nhân quả → hệ thống ở "trạng thái nghỉ" như sau:

  $f(t)=0$ khi $t<t_0$ thì:

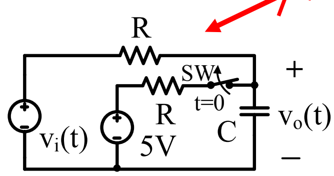
  $$y_{zs}(t_0^-) = \frac{dy_{zs}(t_0^-)}{dt} = \ldots = \frac{d^{n-1} y_{zs}(t_0^-)}{dt^{n-1}} = 0$$

- Hệ thống: $y(t)=\mathbf{T}\{f(t)\}=y_{zi}(t)+\mathbf{T}_{zs}\{f(t)\}$ không thỏa tính chất LTI nếu $y_{zi}(t)\neq 0$ hay điều kiện đầu tại $t=0^-$ khác không.

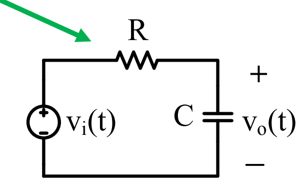
2.4.4. Hệ thống LTI nhân quả mô tả bởi PTVP

Là hệ thống được mô tả bởi phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng cấp n ở trạng thái nghỉ, khi đó y(t)=y_{zs}(t)

$$f(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y_{zs}(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k f(t)}{dt^k} \\ \displaystyle y_{zs}(0^-) = \frac{dy_{zs}(0^-)}{dt} = \ldots = \frac{d^{n-1}y_{zs}(0^-)}{dt^{n-1}} = 0\end{array}} \xrightarrow[y(t)]{y_{zs}(t)}$$



Nhân quả, không thỏa LTI



LTI, nhân quả

2.4.5. Đáp ứng xung của HT LTI nhân quả mô tả bởi PTVP

Tách hệ thống thành 2 hệ thống con như sau:

$$f(t) \longrightarrow \boxed{w(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k f(t)}{dt^k}} \xrightarrow{w(t)} \boxed{\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = w(t) \\ \displaystyle y(0^-) = \ldots = \frac{d^{n-1}y(0^-)}{dt^{n-1}} = 0\end{array}} \longrightarrow y(t)$$

Cả 2 hệ thống là LTI nên có thể thay đổi thứ tự của chúng:

$$f(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y_a(t)}{dt^k} = f(t) \\ \displaystyle y_a(0^-) = \ldots = \frac{d^{n-1}y_a(0^-)}{dt^{n-1}} = 0\end{array}} \xrightarrow{y_a(t)} \boxed{y(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k y_a(t)}{dt^k}} \longrightarrow y(t)$$

2.4.5. Đáp ứng xung của HT LTI nhân quả mô tả bởi PTVP

Đáp ứng xung của hệ thống được xác định như sau:

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\sum_{k=0}^{n} a_k \dfrac{d^k h_a(t)}{dt^k} = \delta(t) \\ h_a(0^-) = \ldots = \dfrac{d^{n-1} h_a(0^-)}{dt^{n-1}} = 0\end{array}} \xrightarrow{h_a(t)} \boxed{\begin{array}{l} h(t) \\ = \sum_{k=0}^{m} b_k \dfrac{d^k h_a(t)}{dt^k}\end{array}} \longrightarrow h(t)$$

Trong đó đáp ứng xung $h_a(t)$ được xác định như sau:

- Hệ thống ở trạng thái nghỉ nên: $h_a(t)=0$ khi $t<0$
- Khi $t>0$: $h_a(t)$ là nghiệm của: $\sum_{k=0}^{n} a_k \dfrac{d^k h_a(t)}{dt^k} = 0$
- Điều kiện đầu tại $t=0^+$:

$$\frac{d^{n-1} h_a(0^+)}{dt^{n-1}} = \frac{1}{a_n}; \frac{d^{n-2} h_a(0^+)}{dt^{n-2}} = \ldots = h_a(0^+) = 0$$

2.4.6. Đáp ứng của HT LTI nhân quả mô tả bởi PTVP

Để xác định đáp ứng của hệ thống với ngõ vào bất kỳ f(t) ta dùng các bước sau:

- Xác định đáp ứng xung h(t) của hệ thống
- Sử dụng tích chập để xác định ngõ ra y(t)

$$y(t) = f(t) * h(t)$$

(trong một số trường hợp có thể kết hợp với tính chất LTI để việc tính toán đơn giản hơn)