Môn học

CƠ SỞ TỰ ĐỘNG

Biên soạn: TS. Huỳnh Thái Hoàng
Bộ môn điều khiển tự động
Khoa Điện – Điện Tử
Đại học Bách Khoa TPHCM
Email: hthoang@hcmut.edu.vn
Homepage: www4.hcmut.edu.vn/~hthoang/
Giảng viên: HTHoàng, NVHảo, NĐHoàng, BTHuyền, HHPhương, HMTrí

Chương 9

THIẾT KẾ
HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN RỜI RẠC

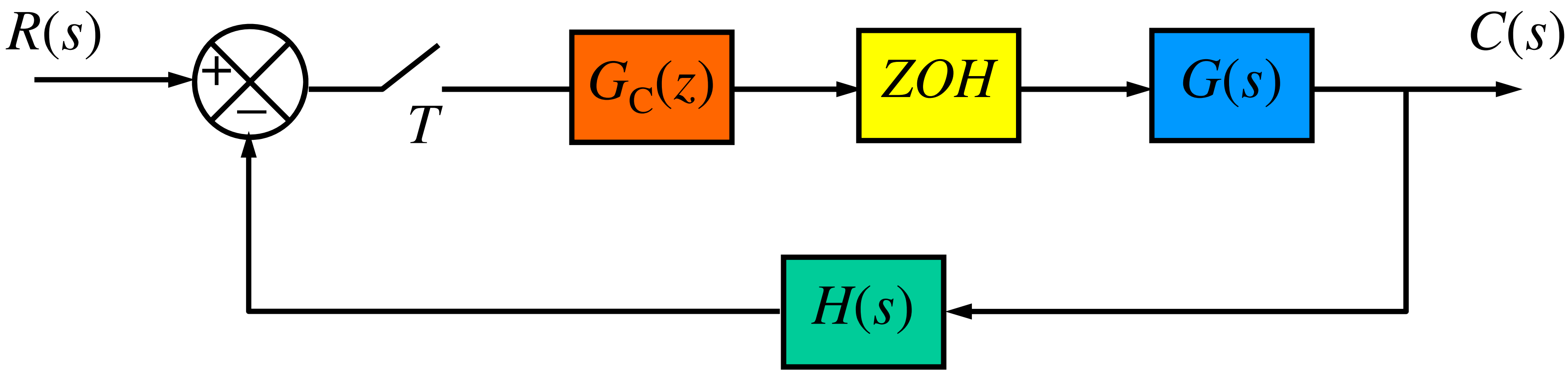
Nội dung chương 9

- Khái niệm
- Bộ điều khiển sớm-trễ pha & PID rời rạc
- Thiết kế hệ thống rời rạc ở miền Z
- Tính điều khiển được và quan sát được của hệ rời rạc
- Thiết kế hệ thống rời rạc dùng kỹ thuật phân bố cực
- Ước lượng trạng thái hệ rời rạc

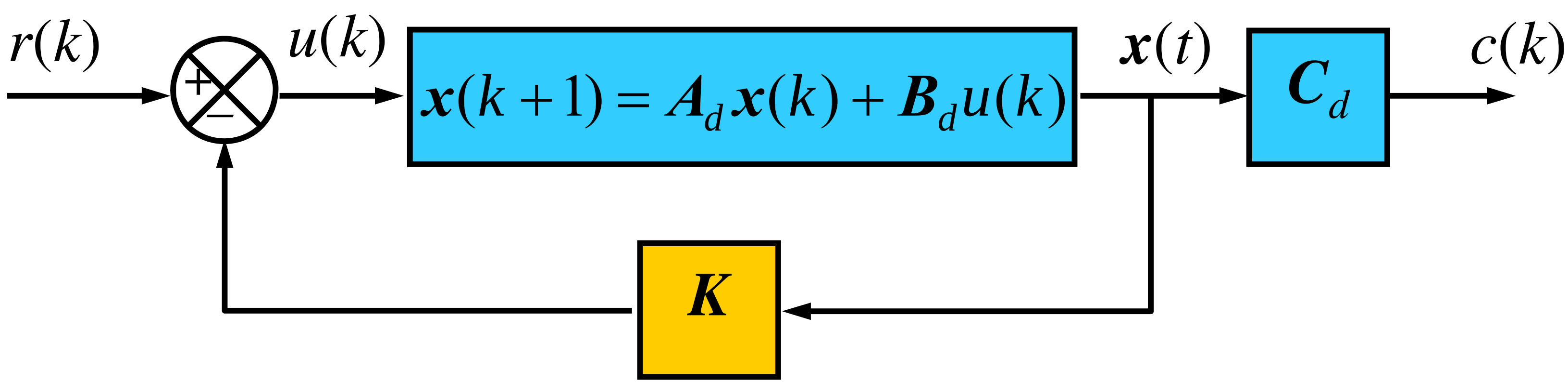
Các bộ điều khiển rời rạc

Các sơ đồ điều khiển thường dùng

✶ Điều khiển nối tiếp

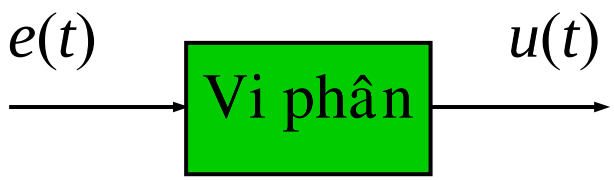


✶ Điều khiển hồi tiếp trạng thái



Hàm truyền của các khâu cơ bản rời rạc

Khâu vi phân



✶ Khâu vi phân liên tục: $u(t) = \dfrac{de(t)}{dt}$

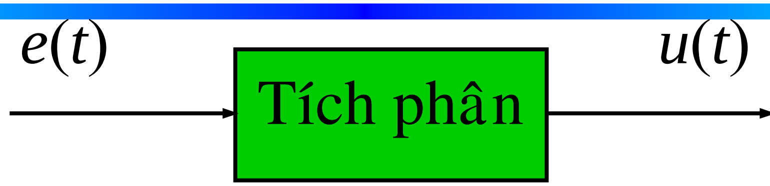
✶ Khâu vi phân rời rạc: $u(kT) = \dfrac{e(kT) - e[(k-1)T]}{T}$

$$\Rightarrow \quad U(z) = \frac{E(z) - z^{-1}E(z)}{T}$$

⇒ Hàm truyền khâu vi phân rời rạc: $\boxed{G_D(z) = \dfrac{1}{T}\dfrac{z-1}{z}}$

Hàm truyền của các khâu cơ bản rời rạc

Khâu tích phân



✶ Khâu tích phân liên tục: $u(t) = \int_0^t e(\tau)d\tau$

✶ Khâu tích phân rời rạc: $u(kT) = \int_0^{kT} e(\tau)d\tau = \int_0^{(k-1)T} e(\tau)d\tau + \int_{(k-1)T}^{kT} e(\tau)d\tau$

$$\Rightarrow u(kT) = u[(k-1)T] + \int_{(k-1)T}^{kT} e(t)dt = u[(k-1)T] + \frac{T}{2}\big(e[(k-1)]T + e(kT)\big)$$

$$\Rightarrow U(z) = z^{-1}U(z) + \frac{T}{2}\left(z^{-1}E(z) + E(z)\right)$$

⇒ Hàm truyền khâu tích phân rời rạc: $G_I(z) = \dfrac{T}{2}\dfrac{z+1}{z-1}$

Hàm truyền của bộ điều khiển PID rời rạc

- Bộ điều khiển PID liên tục:

$$G_{PID}(s) = K_P + \frac{K}{s} + K_D s$$

- Bộ điều khiển PID rời rạc:

$$\boxed{G_{PID}(z) = \underbrace{K_P}_{P} + \underbrace{\frac{K_I T}{2}\frac{z+1}{z-1}}_{I} + \underbrace{\frac{K_D}{T}\frac{z-1}{z}}_{D}}$$

hoặc

$$\boxed{G_{PID}(z) = \underbrace{K_P}_{P} + \underbrace{K_I T\frac{z}{z-1}}_{I} + \underbrace{\frac{K_D}{T}\frac{z-1}{z}}_{D}}$$

Hàm truyền của bộ điều khiển rời rạc

- Bộ điều khiển sớm pha, trễ pha liên tục:

$$G_C(s) = K\frac{s+a}{s+b}$$

$a < b$ sớm pha

$a > b$ trễ pha

- Rời rạc hóa, sử dụng phương pháp tích phân hình thang:

$$G_C(z) = K\frac{(aT+2)z+(aT-2)}{(bT+2)z+(bT-2)}$$

- Bộ điều khiển sớm pha, trễ pha

$$\boxed{G_C(z) = K_C\frac{z+z_C}{z+p_C}}$$

$$z_C = \frac{(aT-2)}{(aT+2)} \qquad p_C = \frac{(bT-2)}{(bT+2)}$$

$$(|z_C| < 1, |p_C| < 1)$$

$z_C < p_C$ sớm pha

$z_C > p_C$ trễ pha

Phương pháp thiết kế hệ thống điều khiển rời rạc

- ***Cách 1*:** Thiết kế gián tiếp hệ thống điều khiển liên tục, sau đó rời rạc hóa ta được hệ thống điều khiển rời rạc. Chất lượng của hệ rời rạc xấp xỉ chất lượng hệ liên tục nếu chu kỳ lấy mẫu *T* đủ nhỏ.

- ***Cách 2*:** Thiết kế trực tiếp hệ thống điều khiển rời rạc.

  Phương pháp thiết kế: QĐNS, phương pháp phân bố cực, phương pháp giải tích, ...

Thiết kế bộ điều khiển rời rạc trong miền Z

Trình tự thiết kế khâu sớm pha rời rạc dùng QĐNS

Khâu hiệu chỉnh cần thiết kế $G_C(z) = K_C \dfrac{z + z_C}{z + p_C} \quad (z_C < p_C)$

★ ***Bước 1: Xác định cặp cực quyết định*** từ yêu cầu thiết kế về chất lượng của hệ thống trong quá trình quá độ:

$$\begin{cases} \text{Độ vọt lố POT} \\ \text{Thời gian quá độ,...} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi \\ \omega_n \end{cases} \Rightarrow s^*_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow z^*_{1,2} = e^{Ts^*}$$

$$r = \left|z^*\right| = e^{-T\xi\omega_n} \qquad \varphi = \angle z^* = T\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

★ ***Bước 2: Xác định góc pha cần bù*** để cặp cực quyết định $z^*_{1,2}$ nằm trên QĐNS của hệ thống sau khi hiệu chỉnh bằng công thức:

$$\phi^* = -180^0 + \sum_{i=1}^{n} \arg(z^*_1 - p_i) - \sum_{i=1}^{m} \arg(z^*_1 - z_i)$$

trong đó p_i và z_i là các cực và zero của $G(z)$ trước khi hiệu chỉnh.

$$\phi^* = -180^0 + \sum \text{góc từ các cực của } G(z) \text{ đến cực } z^*_1 \\ - \sum \text{góc từ các zero của } G(z) \text{ đến cực } z^*_1$$

Trình tự thiết kế khâu hiệu chỉnh sớm pha dùng QĐNS (tt)

- ***Bước 3:*** ***Xác định vị trí cực và zero của khâu hiệu chỉnh***

  Vẽ 2 nữa đường thẳng <u>bất kỳ</u> xuất phát từ cực quyết định z_1^* sao cho 2 nữa đường thẳng này tạo với nhau một góc bằng ϕ^*. Giao điểm của hai nữa đường thẳng này với trục thực là vị trí cực và zero của khâu hiệu chỉnh.

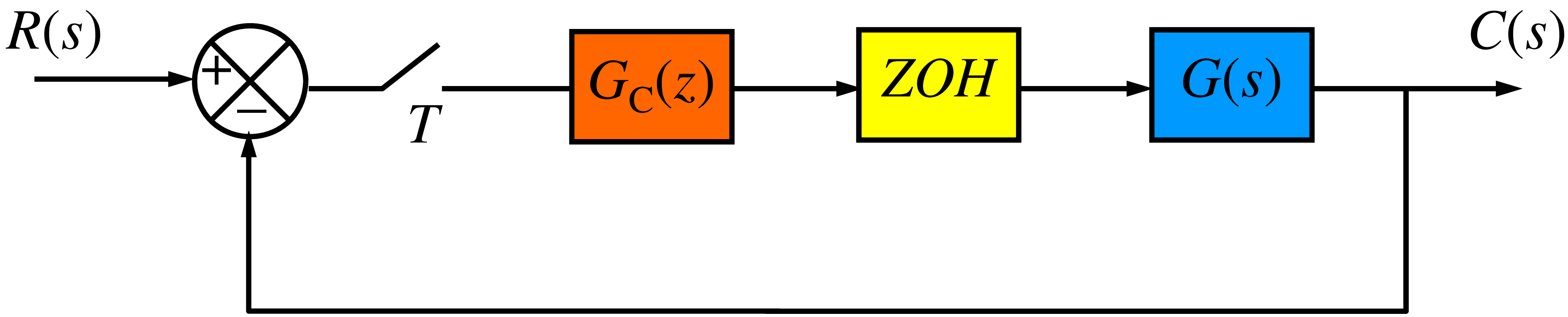
  Có hai cách vẽ thường dùng:

  - PP đường phân giác (để cực và zero của khâu H/C gần nhau)
  - PP triệt tiêu nghiệm (để hạ bậc của hệ thống)

- ***Bước 4:*** ***Tính hệ số khuếch đại K_C*** bằng cách áp dụng công thức:

$$\left|G_C(z)G(z)\right|_{z=z_1^*}=1$$

Thí dụ thiết kế bộ điều khiển sớm pha rời rạc dùng QĐNS



$$G(s) = \frac{50}{s(s+5)} \qquad T = 0.1\,\mathrm{sec}$$

★ TK bộ điều khiển sớm pha $G_C(z)$ sao cho hệ thống sau khi hiệu chỉnh có cặp cực quyết định với $\xi = 0.707$, $\omega_n = 10$ (rad/sec)

Thí dụ thiết kế bộ điều khiển sớm pha rời rạc dùng QĐNS

★ **Giải:**

★ Phương trình đặc trưng: $\boxed{1+G(z)=0}$

- $G(z)=(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\dfrac{G(s)}{s}\right\}$

$$=(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{50}{s^2(s+5)}\right\}$$

$$=10(1-z^{-1})\left(\frac{z[(0.5-1+e^{-0.5})z+(1-e^{-0.5}-0.5e^{-0.5})]}{5(z-1)^2(z-e^{-0.5})}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad G(z)=\frac{0.21z+0.18}{(z-1)(z-0.607)}$$

Thí dụ thiết kế bộ điều khiển sớm pha rời rạc dùng QĐNS

✶ Cặp cực phức mong muốn:

$$z^*_{1,2} = re^{\pm j\varphi}$$

trong đó:

$$r = e^{-T\xi\omega_n} = e^{-0.1\times0.707\times10} = 0.493$$

$$\varphi = T\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 0.1\times10\times\sqrt{1-0.707^2} = 0.707$$

$\Rightarrow$ $$z^*_{1,2} = 0.493e^{\pm j0.707}$$

$\Leftrightarrow$ $$z^*_{1,2} = 0.375 \pm j0.320$$

Thí dụ thiết kế bộ điều khiển sớm pha rời rạc dùng QĐNS

★ Góc pha cần bù:

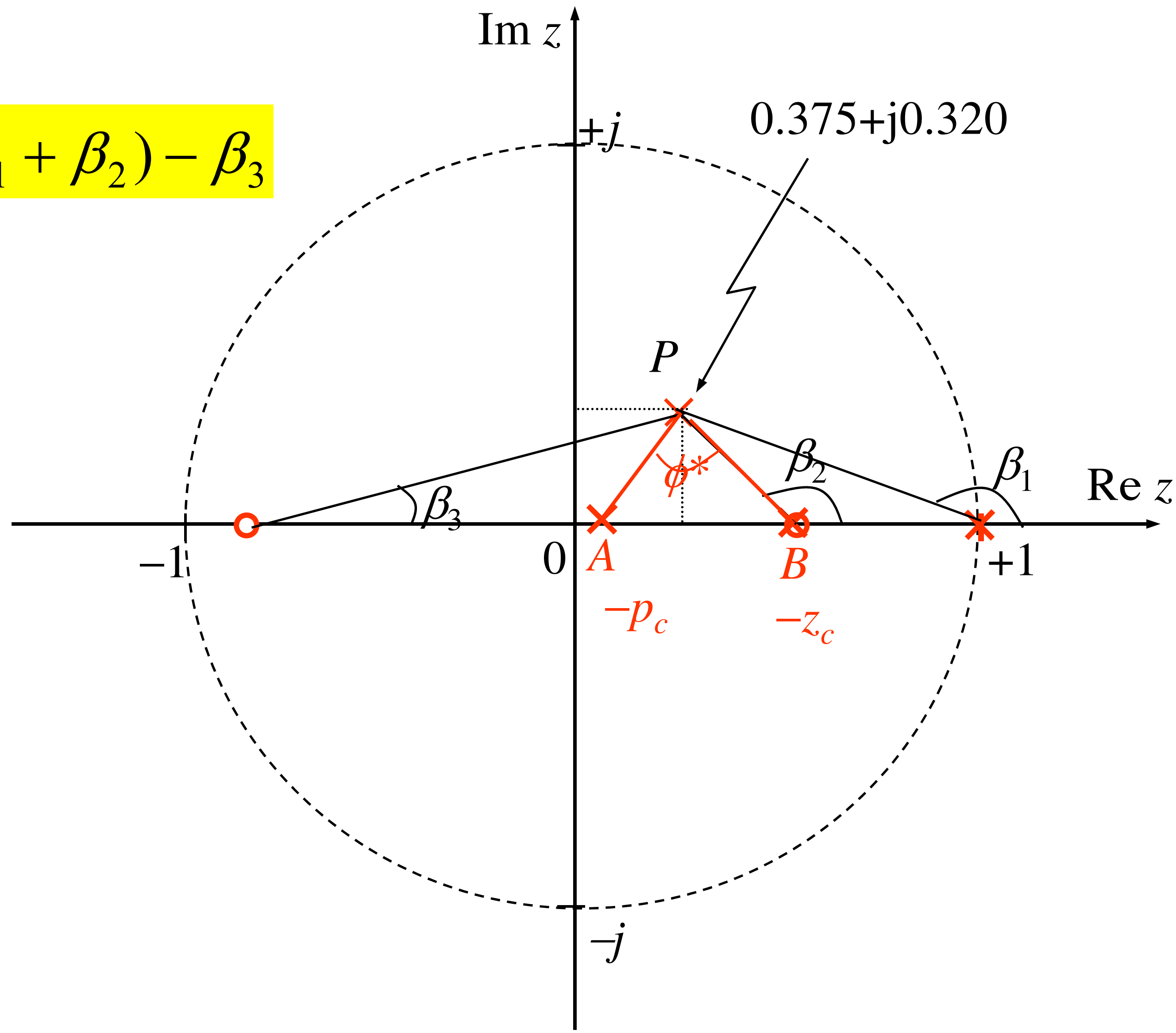
$$\phi^* = -180 + (\beta_1 + \beta_2) - \beta_3$$

$$\beta_1 = 152.9^0$$

$$\beta_2 = 125.9^0$$

$$\beta_3 = 14.6^0$$

$$\Rightarrow \quad \phi^* = 84^0$$



Thí dụ thiết kế bộ điều khiển sớm pha rời rạc dùng QĐNS

★ Chọn cực và zero của khâu hiệu chỉnh bằng phương pháp triệt tiêu nghiệm:

$$-z_C = 0.607$$

$\Rightarrow$ $z_C = -0.607$

$$-p_C = OA = OB - AB$$

$$OB = 0.607$$

$$AB = 0.578$$

$\Rightarrow$ $p_C = -0.029$

Thí dụ thiết kế bộ điều khiển sớm pha rời rạc dùng QĐNS

★ Tính K_C: $\left|G_C(z)G(z)\right|_{z=z^*} = 1$

$$\Rightarrow \quad \left| K_C \frac{(z-0.607)}{(z-0.029)} \frac{(0.21z+0.18)}{(z-1)(z-0.607)} \right|_{z=0.375+j0.320} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \left| K_C \frac{[0.21(0.375+j0.320)+0.18]}{(0.375+j0.320-0.029)(0.375+j0.320-1)} \right| = 1$$

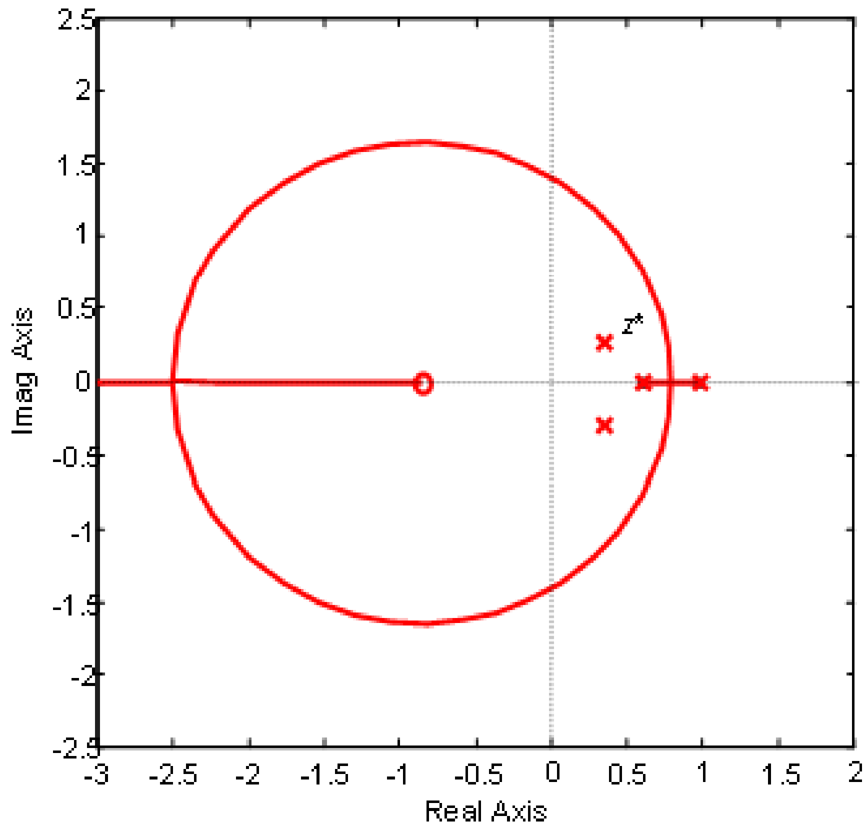
$$\Rightarrow \quad K_C \frac{0.267}{0.471 \times 0.702} = 1 \quad \Rightarrow \quad K_C = 1.24$$

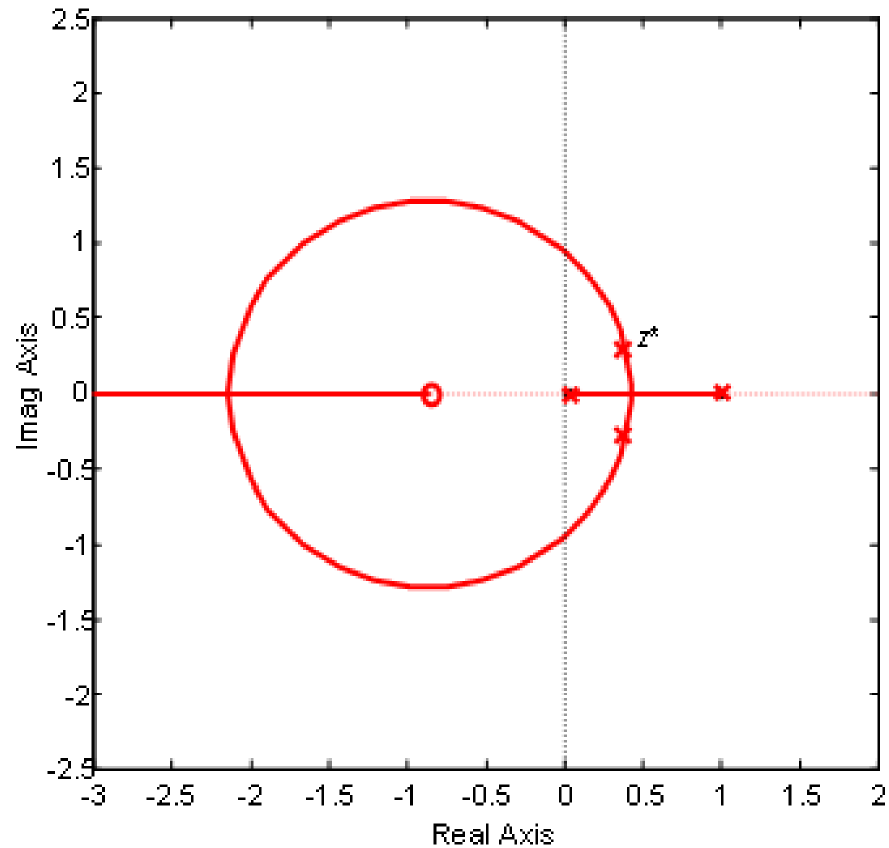
Kết luận: Hàm truyền của bộ điều khiển cần thiết kế là:

$$G_C(z) = 1.24 \frac{z-0.607}{z-0.029}$$

Thí dụ thiết kế bộ điều khiển sớm pha rời rạc dùng QĐNS

Quỹ đạo nghiệm số của hệ thống trước và sau khi hiệu chỉnh





Trình tự thiết kế khâu trễ pha rời rạc dùng QĐNS

Khâu hiệu chỉnh cần thiết kế $G_C(s) = K_C \dfrac{z + z_C}{z + p_C} \quad (z_C > p_C)$

★ *Bước 1:* Đặt $\beta = \dfrac{1 + p_C}{1 + z_C}$. **Xác định β** từ yêu cầu về sai số xác lập.

$$\beta = \frac{K_P}{K_P^*} \quad \text{hoặc} \quad \beta = \frac{K_V}{K_V^*} \quad \text{hoặc} \quad \beta = \frac{K_a}{K_a^*}$$

★ *Bước 2:* **Chọn zero** của khâu hiệu chỉnh **rất gần điểm +1:**

$$z_C \approx -1$$

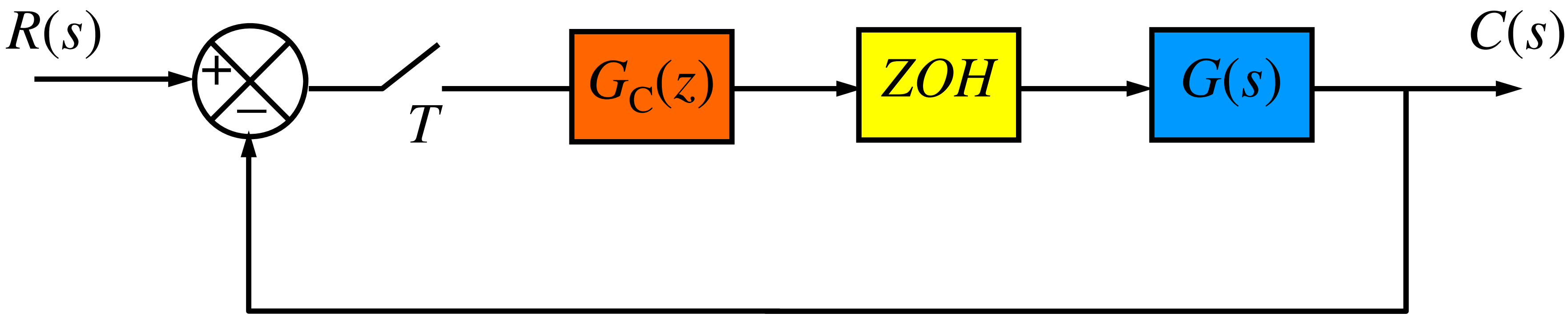
★ *Bước 3:* ***Tính cực*** của khâu hiệu chỉnh:

$$p_C = -1 + \beta(1 + z_C)$$

★ *Bước 4:* ***Tính K_C*** thỏa mãn điều kiện biên độ:

$$\left| G_C(z)GH(z) \right|_{z=z^*} = 1$$

Thí dụ thiết kế bộ điều khiển trễ pha rời rạc dùng QĐNS



$$G(s) = \frac{50}{s(s+5)} \qquad T = 0.1\sec$$

★ TK bộ điều khiển trễ pha $G_C(z)$ sao cho hệ thống sau khi hiệu chỉnh có hệ số vận tốc $K_V^* = 100$

Thí dụ thiết kế bộ điều khiển trể pha rời rạc dùng QĐNS

★ **Giải:**

★ Phương trình đặc trưng trước khi hiệu chỉnh:

$$\boxed{1+G(z)=0}$$

- $G(z)=(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\dfrac{G(s)}{s}\right\}$

$$=(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{50}{s^2(s+5)}\right\}$$

$$=10(1-z^{-1})\left(\frac{z[(0.5-1+e^{-0.5})z+(1-e^{-0.5}-0.5e^{-0.5})]}{5(z-1)^2(z-e^{-0.5})}\right)$$

$\Rightarrow$ $$G(z)=\frac{0.21z+0.18}{(z-1)(z-0.607)}$$

Thí dụ thiết kế bộ điều khiển trể pha rời rạc dùng QĐNS

⇒ PTĐT trước khi hiệu chỉnh

$$1+\frac{0.21z+0.18}{(z-1)(z-0.607)}=0$$

⇒ Cực của hệ thống trước khi hiệu chỉnh

$$z_{1,2}=0.699\pm j0.547$$

Thí dụ thiết kế bộ điều khiển trễ pha rời rạc dùng QĐNS

★ ***Bước 1:*** Xác định β

Hệ số vận tốc trước khi hiệu chỉnh:

$$K_V = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})G(z)$$

$$\Rightarrow \quad K_V = \frac{1}{0.1}\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{0.21z+0.18}{(z-1)(z-0.607)} \quad \Rightarrow \quad K_V = 9.9$$

Hệ số vận tốc mong muốn: $K_V^* = 100$

Do đó: $\beta = \dfrac{K_V}{K_V^*} = \dfrac{9.9}{100}$

$$\Rightarrow \quad \beta = 0{,}099$$

Thí dụ thiết kế bộ điều khiển trễ pha rời rạc dùng QĐNS

★ ***Bước 2:*** Chọn zero của khâu trễ pha rất gần +1

Chọn: $-z_C = 0.99 \quad \Rightarrow \quad z_C \approx -0.99$

★ ***Bước 3:*** Tính cực của khâu trễ pha

$$p_C = -1 + \beta(1 + z_C) = -1 + 0.099(1 - 0.99) \quad \Rightarrow \quad p_C = -0.999$$

$$\Rightarrow \quad G_C(z) = K_C \frac{z - 0,99}{s - 0,999}$$

★ ***Bước 4:*** Xác định hệ số khuếch đại

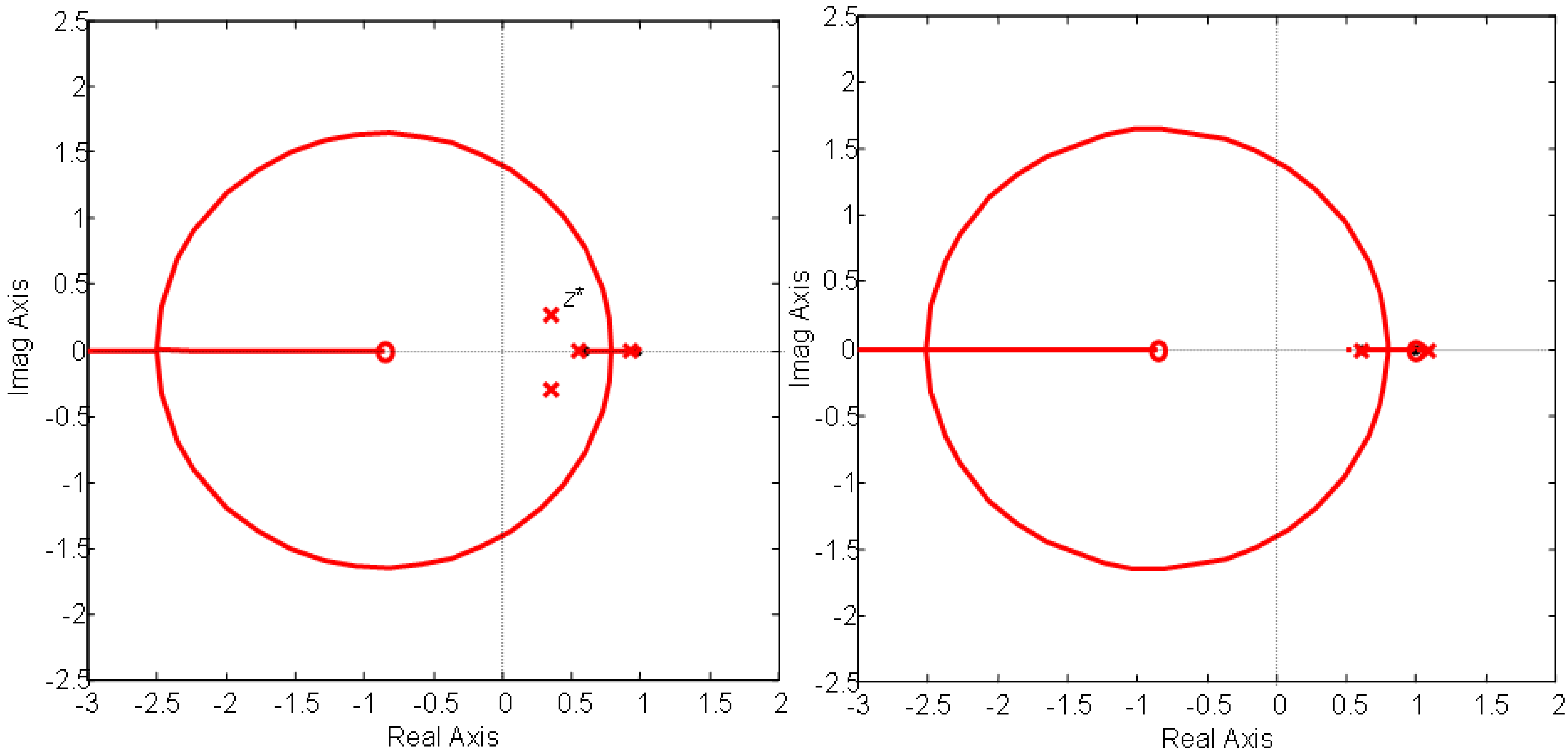
$$\left| G_C(z)G(z) \right|_{z=z^*} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \left| K_C \frac{(z - 0.99)}{(z - 0.999)} \frac{(0.21z + 0.18)}{(z - 1)(z - 0.607)} \right|_{z=0.699+j0.547} = 1$$

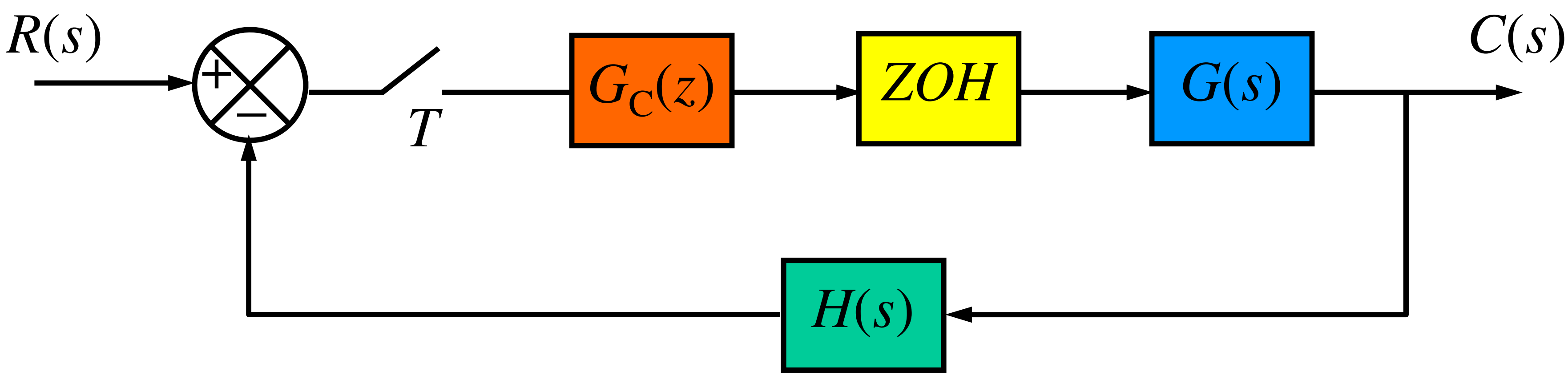
$$\Rightarrow \quad K_C = 1.007 \approx 1$$

Thí dụ thiết kế bộ điều khiển trễ pha rời rạc dùng QĐNS

QĐNS trước và sau khi hiệu chỉnh



Thí dụ thiết kế bộ điều khiển PID dùng PP giải tích



$$G(s) = \frac{10}{10s+1} \qquad H(s) = 0.05 \qquad T = 2\sec$$

Thiết kế khâu hiệu chỉnh $G_C(z)$ sao cho hệ thống kín có cặp cực phức với ξ=0.707, ω_n=2 rad/sec và sai số xác lập đối với tín hiệu vào là hàm nấc đơn vị bằng 0.

Thí dụ thiết kế bộ điều khiển PID dùng PP giải tích

★ Khâu hiệu chỉnh cần thiết kế là khâu PI (vì yêu cầu sai số xác lập bằng 0)

$$G_C(z) = K_P + \frac{K_I T}{2}\frac{z+1}{z-1}$$

★ Phương trình đặc trưng của hệ thống sau khi hiệu chỉnh là:

$$1 + G_C(z)GH(z) = 0$$

trong đó:

$$GH(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)H(s)}{s}\right\} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{10 \times 0.05}{s(10s+1)}\right\}$$

$$= (1 - z^{-1})\frac{0.05z(1 - e^{-0.2})}{0.1(z-1)(z - e^{-0.2})}$$

$$\Rightarrow \quad GH(z) = \frac{0.091}{(z - 0.819)}$$

Thí dụ thiết kế bộ điều khiển PID dùng PP giải tích

★ Do đó phương trình đặc trưng của hệ thống là:

$$1+\left(K_P+\frac{K_I T}{2}\frac{z+1}{z-1}\right)\left(\frac{0.091}{z-0.819}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2+(0.091K_P+0.091K_I-1.819)z+(-0.091K_P+0.091K_I+0.819)=0$$

(do T=2)

Thí dụ thiết kế bộ điều khiển PID dùng PP giải tích

★ Cặp cực phức mong muốn:

$$z_{1,2}^{*} = re^{\pm j\varphi}$$

trong đó:

$$r = e^{-T\xi\omega_n} = e^{-2\times 0.707\times 2} = 0.059$$

$$\varphi = T\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 2\times 2\times\sqrt{1-0.707^2} = 2.828$$

$\Rightarrow$ $z_{1,2}^{*} = 0.059e^{\pm j2.828}$

$\Rightarrow$ $z_{1,2}^{*} = -0.056 \pm j0.018$

★ Phương trình đặc trưng mong muốn:

$$(z+0.056+j0.018)(z+0.056-j0.018) = 0$$

$\Leftrightarrow$ $z^2 + 0.112z + 0.0035 = 0$

Thí dụ thiết kế bộ điều khiển PID dùng PP giải tích

- Cân bằng các hệ số phương trình đặc trưng của hệ thống và phương trình đặc trưng mong muốn, ta được:

$$\begin{cases} 0.091K_P + 0.091K_I - 1.819 = 0.112 \\ -0.091K_P + 0.091K_I + 0.819 = 0.0035 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_P = 15.09 \\ K_I = 6.13 \end{cases}$$

Kết luận: $G_C(z) = 15.09 + 6.13\dfrac{z+1}{z-1}$

Thiết kế bộ điều khiển rời rạc trong không gian trạng thái

Tính điều khiển được

- Cho hệ thống: $\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}_d \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}_d u(k) \\ y(k) = \boldsymbol{C}_d \boldsymbol{x}(k) \end{cases}$

- HT được gọi là điều khiển được hoàn toàn nếu tồn tại luật đk $u(k)$ có khả năng chuyển hệ từ trạng thái đầu $\boldsymbol{x}(k_0)$ đến trạng thái cuối $\boldsymbol{x}(k_f)$ bất kỳ trong khoảng thời gian hữu hạn $k_0 \leq k \leq k_f$.

- Một cách định tính, hệ thống điều khiển được nếu mỗi biến trạng thái của hệ đều có thể bị ảnh hưởng bởi tín hiệu điều khiển.

Điều kiện cần và đủ để hệ thống điều khiển được

- Đối tượng: $\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}_d \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}_d u(k) \\ y(k) = \boldsymbol{C}_d \boldsymbol{x}(k) \end{cases}$

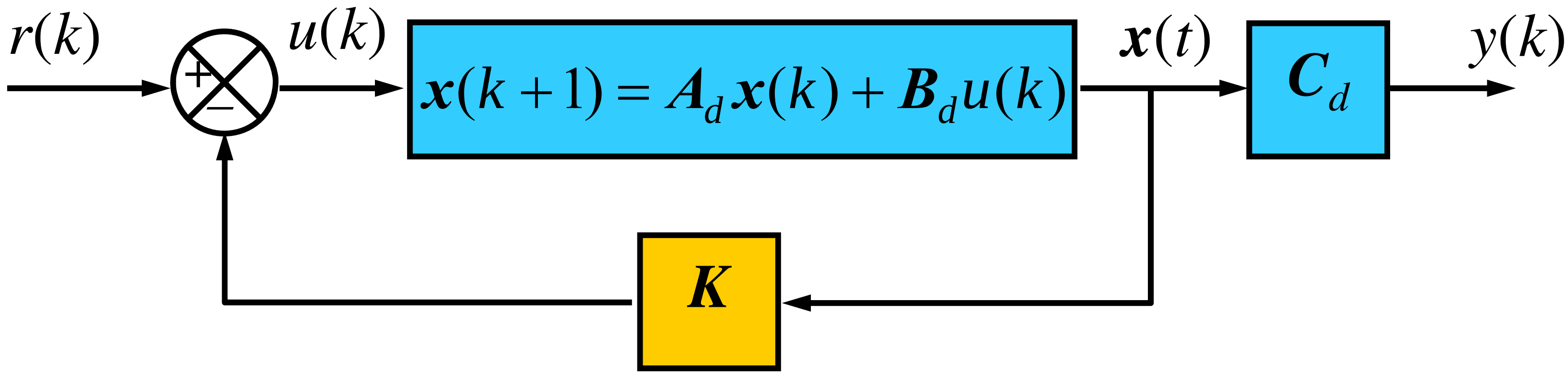
- Ma trận điều khiển được (Controlability matrix)

$$\mathscr{C} = [\boldsymbol{B}_d \quad \boldsymbol{A}_d \boldsymbol{B}_d \quad \boldsymbol{A}_d^2 \boldsymbol{B}_d \quad \ldots \quad \boldsymbol{A}_d^{n-1} \boldsymbol{B}_d]$$

- Điều kiện cần và đủ để hệ thống điều khiển được là:

$$rank(\mathscr{C}) = n$$

PP phân bố cực thiết kế bộ điều khiển hồi tiếp trạng thái



★ ***Bước 1***: Viết phương trình đặc trưng của hệ thống kín

$$\det[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_d+\boldsymbol{B}_d\boldsymbol{K}]=0 \qquad (1)$$

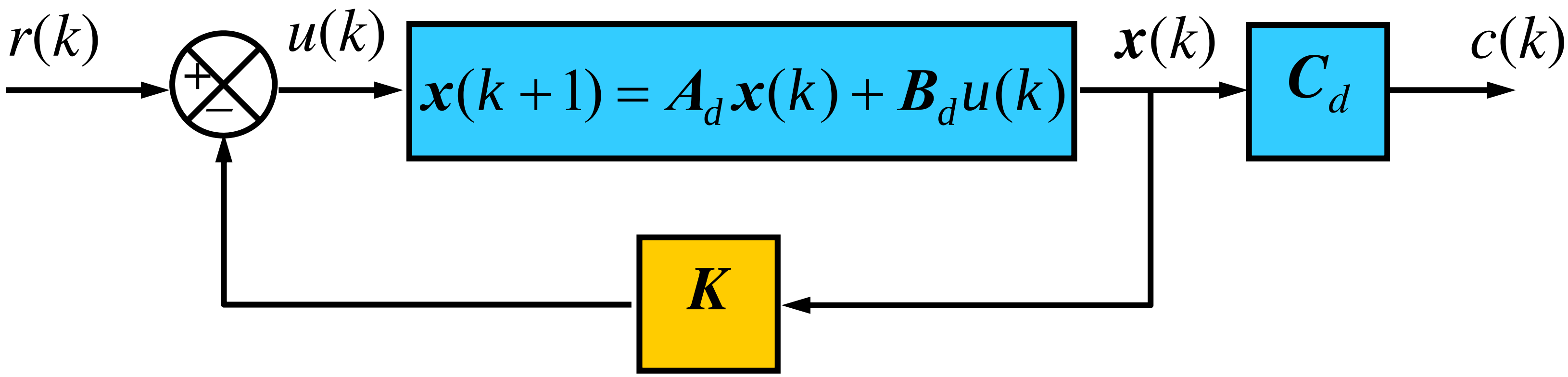
★ ***Bước 2***: Viết phương trình đặc trưng mong muốn

$$\prod_{i=1}^{n}(z-p_i)=0 \qquad (2)$$

$p_i,\ (i=\overline{1,n})$ là các cực mong muốn

★ ***Bước 3***: Cân bằng các hệ số của hai phương trình đặc trưng (1) và (2) sẽ tìm được vector hồi tiếp trạng thái ***K***.

★ Cho hệ thống điều khiển



$$\boldsymbol{A_d} = \begin{bmatrix} 1 & 0.316 \\ 0 & 0.368 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}_d = \begin{bmatrix} 0.092 \\ 0.316 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C}_d = \begin{bmatrix} 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Hãy xác định vector hồi tiếp trạng thái $\boldsymbol{K}$ sao cho hệ thống kín có cặp nghiệm phức với ξ=0.707, ω_n=10 rad/sec

PP phân bố cực. Thí dụ 1

★ Phương trình đặc trưng của hệ thống kín

$$\det[z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_d + \boldsymbol{B}_d\boldsymbol{K}] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \det\left(z\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0.316\\ 0 & 0.368\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.092\\ 0.316\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \det\left(\begin{bmatrix}z - 1 + 0.092k_1 & -0.316 + 0.092k_2\\ 0.316k_1 & z - 0.368 + 0.316k_2\end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (z - 1 + 0.092k_1)(z - 0.368 + 0.316k_2) - 0.316k_1(-0.316 + 0.092k_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2 + (0.092k_1 + 0.316k_2 - 1.368)z + (0.066k_1 - 0.316k_2 + 0.368) = 0$$

PP phân bố cực. Thí dụ 1

★ Cặp cực phức mong muốn:

$$z_{1,2}^{*} = re^{\pm j\varphi}$$

trong đó:

$$r = e^{-T\xi\omega_n} = e^{-0.1\times 0.707\times 10} = 0.493$$

$$\varphi = T\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 0.1\times 10\times\sqrt{1-0.707^2} = 0.707$$

$$\Rightarrow \quad z_{1,2}^{*} = 0.493e^{\pm j0.707}$$

$$\Rightarrow \quad z_{1,2}^{*} = 0.375 \pm j0.320$$

★ Phương trình đặc trưng mong muốn:

$$(z - 0.375 - j0.320)(z - 0.375 + j0.320) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2 - 0.75z + 0.243 = 0$$

PP phân bố cực. Thí dụ 1

★ Cân bằng các hệ số phương trình đặc trưng của hệ thống và phương trình đặc trưng mong muốn, ta được:

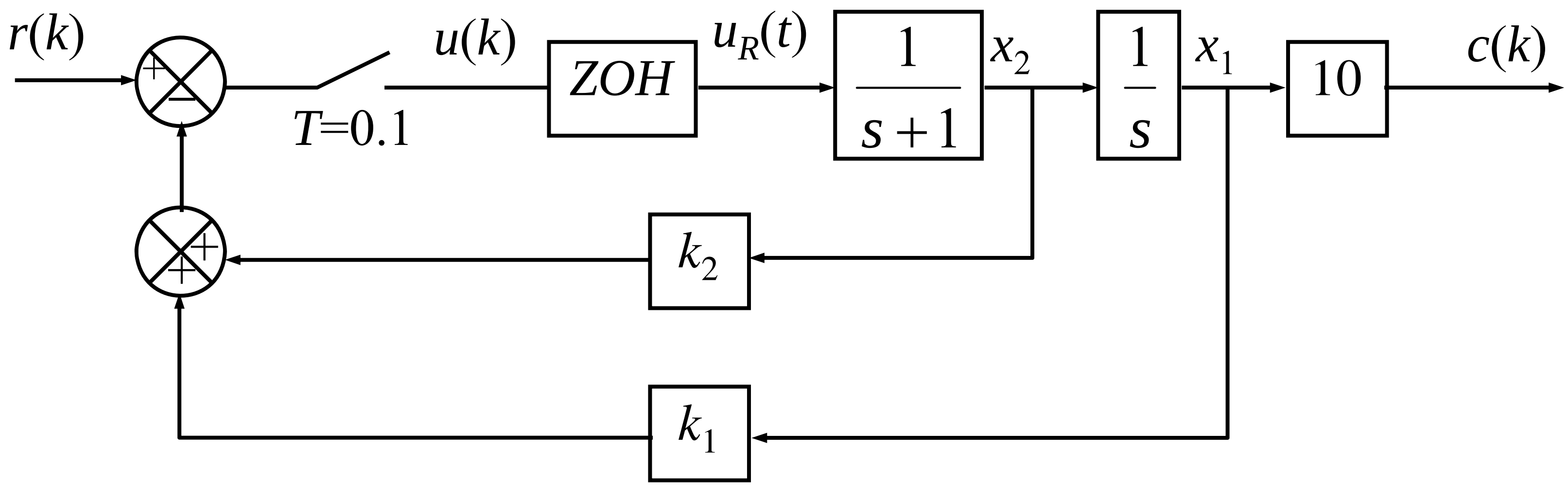
$$\begin{cases}(0.092k_1 + 0.316k_2 - 1.368) = -0.75 \\ (0.066k_1 - 0.316k_2 + 0.368) = 0.243\end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{cases}k_1 = 3.12 \\ k_2 = 1.047\end{cases}$$

Kết luận: $\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix}3.12 & 1.047\end{bmatrix}$

PP phân bố cực. Thí dụ 2

- Cho hệ thống điều khiển:



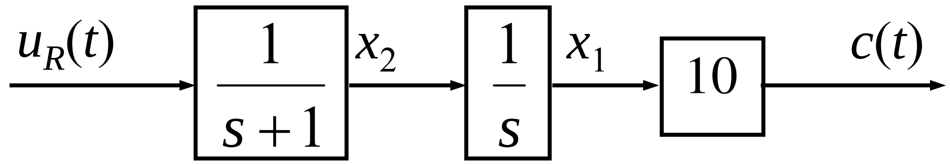
1. Viết phương trình trạng thái mô tả hệ hở
2. Hãy xác định vector hồi tiếp trạng thái $\boldsymbol{K} = [k_1\ k_2]$ sao cho hệ thống kín có cặp nghiệm phức với ξ=0.5, ωn=8 rad/sec.
3. Tính đáp ứng của hệ thống với giá trị $\boldsymbol{K}$ vừa tìm được khi tín hiệu vào là hàm nấc đơn vị. Tính độ vọt lố, thời gian quá độ.

PP phân bố cực. Thí dụ 2

★ Giải:

1. Viết phương trình trạng thái mô tả hệ hở:

B1: PTTT mô tả hệ liên tục:



$$X_1(s) = \frac{X_2(s)}{s} \quad \Rightarrow \quad sX_1(s) = X_2(s) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$X_2(s) = \frac{U_R(s)}{s+1} \quad \Rightarrow \quad (s+1)X_2(s) = U_R(s) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u_R(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_R(t)$$

$$c(t) = 10x_1(t) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

PP phân bố cực. Thí dụ 2

B2: Ma trận quá độ:

$$\Phi(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \left(s\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix}s & -1\\0 & s+1\end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi(s) = \begin{bmatrix}\dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s(s+1)}\\ 0 & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}}$$

$$\Phi(t) = \mathscr{L}^{-1}[\Phi(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s(s+1)}\\ 0 & \dfrac{1}{s+a}\end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} & \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s+1)}\right\}\\ 0 & \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+1}\right\}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi(t) = \begin{bmatrix}1 & (1-e^{-t})\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}}$$

PP phân bố cực. Thí dụ 2

B3: PTTT mô tả hệ rời rạc hở: $\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}_d \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}_d u(k) \\ c(k) = \boldsymbol{C}_d \boldsymbol{x}(k) \end{cases}$

$$\boldsymbol{A}_d = \Phi(T) = \begin{bmatrix} 1 & (1-e^{-0.1}) \\ 0 & e^{-0.1} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0.095 \\ 0 & 0.905 \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{B}_d = \int_0^T \Phi(\tau)\boldsymbol{B}d\tau = \int_0^{0.1} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & (1-e^{-\tau}) \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \right\} = \int_0^{0.1} \left\{ \begin{bmatrix} (1-e^{-\tau}) \\ e^{-\tau} \end{bmatrix} d\tau \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} (\tau + e^{-\tau}) \\ -e^{-\tau} \end{bmatrix}_0^{0.1} = \begin{bmatrix} (0.1 + e^{-0.1} - 1) \\ -e^{-0.1} + 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{B}_d = \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.095 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{C}_d = \boldsymbol{C} = [10 \quad 0]}$$

PP phân bố cực. Thí dụ 2

2. Tính độ lợi hồi tiếp trạng thái ***K***:

Phương trình đặc trưng của hệ kín:

$$\det[z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_d + \boldsymbol{B}_d\boldsymbol{K}] = 0$$

$$\Leftrightarrow \det\left(z\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0.095\\0 & 0.905\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.005\\0.095\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix}z-1+0.005k_1 & -0.095+0.005k_2\\0.095k_1 & z-0.905+0.095k_2\end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z-1+0.005k_1)(z-0.905+0.095k_2) - 0.905k_1(-0.095+0.005k_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 + (0.005k_1 + 0.095k_2 - 1.905)z + (0.0045k_1 - 0.095k_2 + 0.905) = 0$$

PP phân bố cực. Thí dụ 2

Cặp cực quyết định mong muốn:

$$z_{1,2}^* = re^{\pm j\varphi}$$

$$r = e^{-T\xi\omega_n} = e^{-0.1\times0.5\times8} = 0.67$$

$$\varphi = T\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 0.1\times8\sqrt{1-0.5^2} = 0.693$$

$$\Rightarrow \quad z_{1,2}^* = 0.67e^{\pm j0.693}$$

$$\Rightarrow \quad z_{1,2}^* = 0.516 \pm j0.428$$

Phương trình đặc trưng mong muốn:

$$(z - 0.516 - j0.428)(z - 0.516 + j0.428) = 0$$

$$\Rightarrow \quad z^2 - 1.03z + 0.448 = 0$$

PP phân bố cực. Thí dụ 2

Cân bằng các hệ số PTTT của hệ kín và PTTT mong muốn:

$$\begin{cases}(0.005k_1 + 0.095k_2 - 1.905) = -1.03 \\ (0.0045k_1 - 0.095k_2 + 0.905) = 0.448\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases}k_1 = 44.0 \\ k_2 = 6.895\end{cases}$$

Vậy $K = \begin{bmatrix}44.0 & 6.895\end{bmatrix}$

PP phân bố cực. Thí dụ 2

3. Tính đáp ứng và chất lượng của hệ thống :

Phương trình trạng thái mô tả hệ kín:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = [\boldsymbol{A}_d - \boldsymbol{B}_d \boldsymbol{K}]\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}_d r(k) \\ c(k) = \boldsymbol{C}_d \boldsymbol{x}(k) \end{cases}$$

Thiết kế bộ ước lượng trạng thái rời rạc

Khái niệm ước lượng trạng thái

- ✶ Để thực thi được hệ thống điều khiển hồi tiếp trạng thái: cần phải đo được tất cả các trạng thái của hệ thống.
- ✶ Trong một số ứng dụng, chỉ đo được các tín hiệu ra mà không thể đo tất cả các trạng thái của hệ thống.
- ✶ Vấn đề đặt ra là ước lượng trạng thái của hệ thống từ tín hiệu ra đo lường được

⇒ Cần thiết kế bộ ước lượng trạng thái (hoặc quan sát trạng thái)

Tính quan sát được

- Cho hệ thống $\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}_d \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}_d u(k) \\ y(k) = \boldsymbol{C}_d \boldsymbol{x}(k) \end{cases}$
- Hệ thống trên được gọi là quan sát được hoàn toàn nếu cho tín hiệu điều khiển $u(k)$ và tín hiệu ra $y(k)$ trong khoảng $k_0 \le k \le k_f$ ta có thể xác định được trạng thái đầu $\boldsymbol{x}(k_0)$.
- Một cách định tính, hệ thống là quan sát được nếu mỗi biến trạng thái của hệ đều ảnh hưởng đến đầu ra $y(k)$.

Điều kiện cần và đủ để hệ thống quan sát được

- Đối tượng $\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}_d \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}_d u(k) \\ y(k) = \boldsymbol{C}_d \boldsymbol{x}(k) \end{cases}$

  Cần ước lượng trạng thái $\hat{\boldsymbol{x}}(k)$ từ thông tin biết trước về mô hình toán học của đối tượng và dữ liệu vào ra của đối tượng.

- Ma trận quan sát được (<u>**O**</u>bservability matrix)

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_d \\ \boldsymbol{C}_d \boldsymbol{A}_d \\ \boldsymbol{C}_d \boldsymbol{A}_d^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}_d \boldsymbol{A}_d^{n-1} \end{bmatrix}$$

- Điều kiện cần và đủ để hệ thống quan sát được là:

$$rank(\mathcal{O}) = n$$

Thí dụ khảo sát tính quan sát được

★ Cho đối tượng $\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}_d \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}_d u(k) \\ y(k) = \boldsymbol{C}_d \boldsymbol{x}(k) \end{cases}$

trong đó: $\boldsymbol{A}_d = \begin{bmatrix} 0.967 & 0.148 \\ -0.297 & 0.522 \end{bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{B}_d = \begin{bmatrix} 0.231 \\ 0.264 \end{bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{C}_d = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$

Hãy đánh giá tính quan sát được của hệ thống.

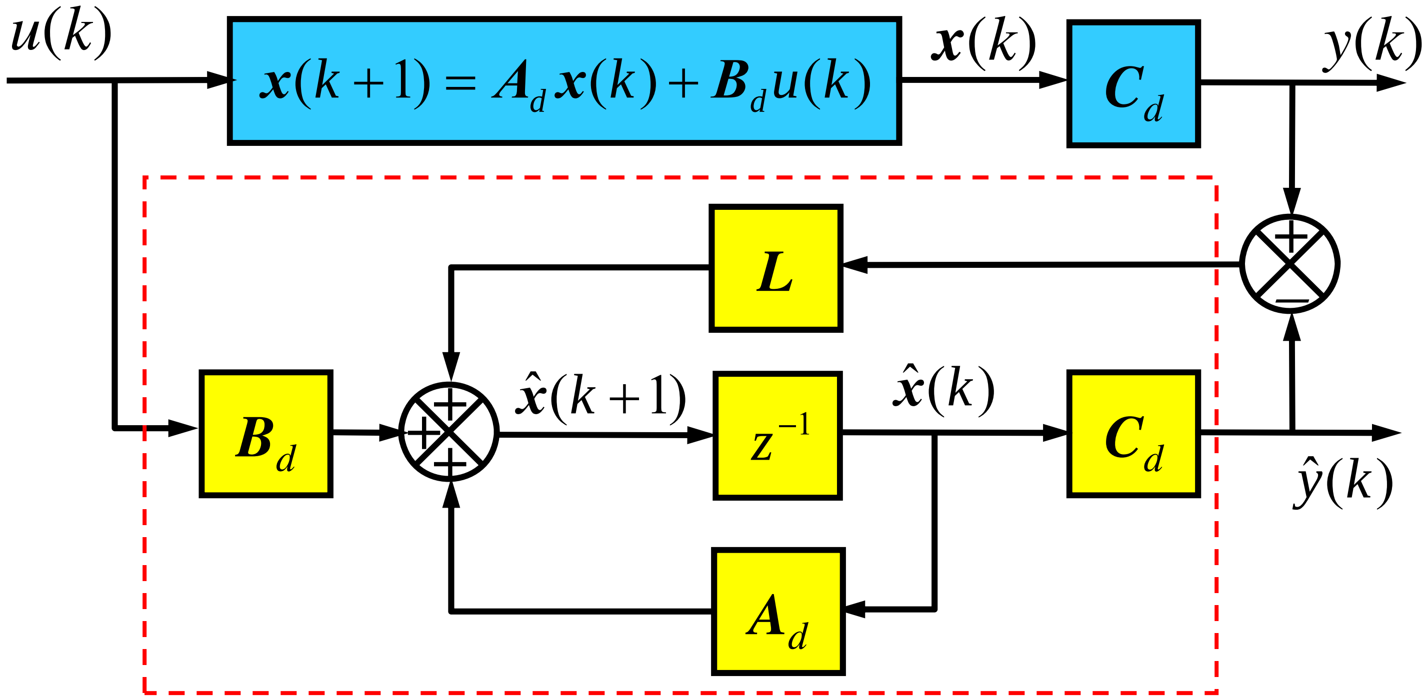
★ ***Giải:*** Ma trận quan sát được:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_d \\ \boldsymbol{C}_d \boldsymbol{A}_d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0.077 & 1.714 \end{bmatrix}$$

★ Do $\quad \det(\mathcal{O}) = 1.484 \quad \Rightarrow \quad rank(\mathcal{O}) = 2$

$\Rightarrow$ Hệ thống quan sát được

Bộ quan sát trạng thái



★ Bộ quan sát trạng thái: $\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}}(k+1) = \boldsymbol{A}_d\hat{\boldsymbol{x}}(k) + \boldsymbol{B}_d u(k) + \boldsymbol{L}(y(k) - \hat{y}(k)) \\ \hat{y}(k) = \boldsymbol{C}_d\hat{\boldsymbol{x}}(k) \end{cases}$

trong đó: $\boldsymbol{L} = [l_1 \quad l_2 \quad \ldots \quad l_n]^T$

Thiết kế bộ quan sát trạng thái

- Yêu cầu:
  - Bộ quan sát trạng thái phải ổn định, sai số ước lượng trạng thái tiệm cận tiến về 0.
  - Đặc tính động học của bộ quan sát đủ nhanh so với đặc tính động học của hệ thống điều khiển.
- Cần chọn L thỏa mãn:
  - Tất cả các nghiệm của phương trình $\det(zI - \boldsymbol{A}_d + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C}_d) = 0$ đều nằm trong vòng tròn đơn vị.
  - Các nghiệm của phương trình $\det(zI - \boldsymbol{A}_d + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C}_d) = 0$ nằm xa vòng tròn đơn vị hơn so với các cực của phương trình $\det(zI - \boldsymbol{A}_d + \boldsymbol{B}_d\boldsymbol{K}) = 0$
- Tùy theo cách thiết kế $\boldsymbol{L}$ ta có các bộ quan sát trạng thái khác nhau:
  - Bộ quan sát trạng thái Luenberger
  - Bộ lọc Kalman ($\Rightarrow$ Lý thuyết điều khiển nâng cao)

Trình tự thiết kế bộ quan sát Luenberger

- ***Bước 1***: Viết phương trình đặc trưng của bộ quan sát trạng thái

$$\det[z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_d + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C}_d] = 0 \qquad (1)$$

- ***Bước 2***: Viết phương trình đặc trưng quan sát mong muốn

$$\prod_{i=1}^{n}(z - p_i) = 0 \qquad (2)$$

$p_i,\ (i = \overline{1,n})$ là các cực mong muốn của bộ quan sát

- ***Bước 3***: Cân bằng các hệ số của hai phương trình đặc trưng (1) và (2) sẽ tìm được vector $\boldsymbol{L}$.

Thí dụ thiết kế bộ quan sát trạng thái

- ***Thí dụ***: Cho đối tượng mô tả bởi phương trình trạng thái:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(k+1) = \boldsymbol{A}_d \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}_d u(k) \\ y(k) = \boldsymbol{C}_d \boldsymbol{x}(k) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A}_d = \begin{bmatrix} 0.967 & 0.148 \\ -0.297 & 0.522 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B}_d = \begin{bmatrix} 0.231 \\ 0.264 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C}_d = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Giả sử không thể đo được các trạng thái của hệ thống. Hãy thiết kế bộ quan sát trạng thái Luenberger, sao cho các cực của bộ quan sát trạng thái nằm tại 0.13 và 0.36 .

Thí dụ thiết kế bộ quan sát trạng thái (tt)

★ ***Giải:***

★ Phương trình đặc trưng của bộ quan sát Luenberger

$$\det[z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_d + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C}_d] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \det\left(z\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.967 & 0.148 \\ -0.297 & 0.522 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \det\left(\begin{bmatrix} z - 0.967 + l_1 & -0.148 + 3l_1 \\ 0.297 + l_2 & z - 0.522 + 3l_2 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad z^2 + (l_1 + 3l_2 - 1.489)z + (-1.413l_1 - 2.753l_2 + 0.549) = 0 \qquad (1)$$

★ Phương trình đặc trưng của bộ quan sát mong muốn:

$$(z - 0.13)(z - 0.36) = 0$$

$$\Rightarrow \quad z^2 - 0.49z + 0.0468 = 0 \qquad (2)$$

Thí dụ thiết kế bộ quan sát trạng thái (tt)

- Cân bằng các hệ số của hai phương trình (1) và (2), suy ra:

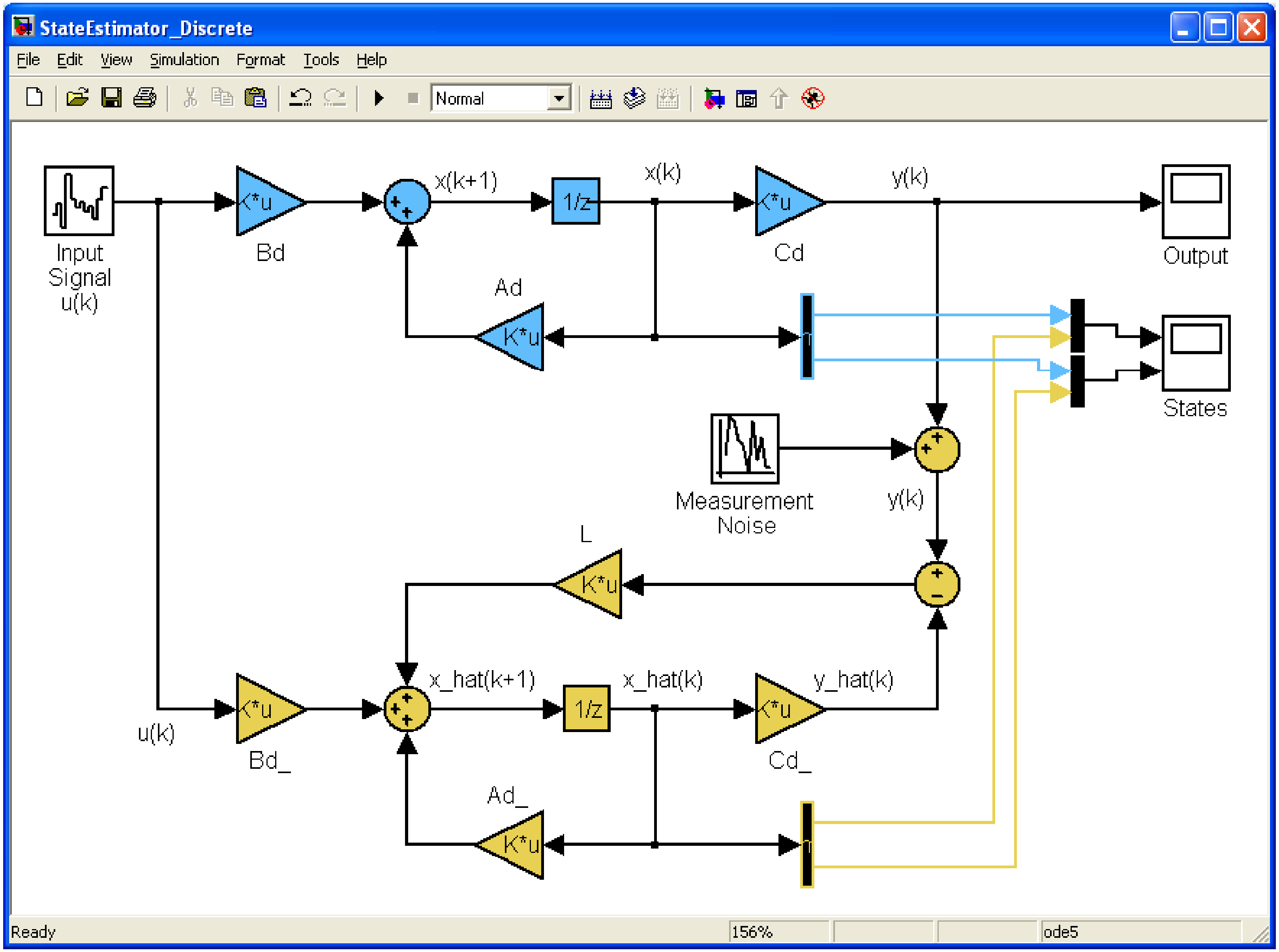
$$\begin{cases} l_1 + 3l_2 - 1.489 = 0.49 \\ -1.413l_1 - 2.753l_2 + 0.549 = 0.0468 \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$\begin{cases} l_1 = -2.653 \\ l_2 = 1.544 \end{cases}$$

- Kết luận $\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} -2.653 & 1.544 \end{bmatrix}^T$

Mô phỏng bộ quan sát trạng thái rời rạc



Kết quả mô phỏng ước lượng trạng thái