Môn học

CƠ SỞ TỰ ĐỘNG

Biên soạn: TS. Huỳnh Thái Hoàng
Bộ môn điều khiển tự động
Khoa Điện – Điện Tử
Đại học Bách Khoa TPHCM
Email: hthoang@hcmut.edu.vn
Homepage: www4.hcmut.edu.vn/~hthoang/
Giảng viên: HTHoàng, NVHảo, NĐHoàng, BTHuyền, HHPhương, HMTrí

Chương 4

KHẢO SÁT
TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ THỐNG

Nội dung chương 4

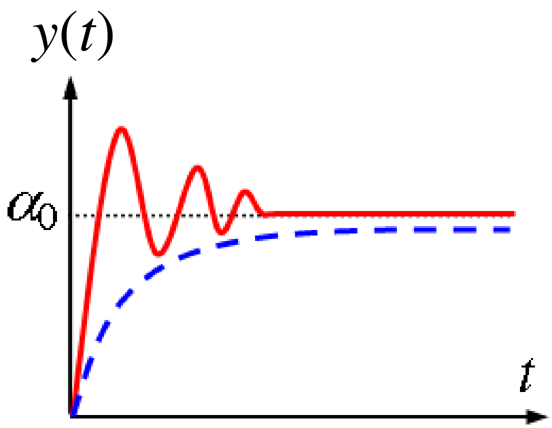
- Khái niệm ổn định
- Tiêu chuẩn ổn định đại số
  - Điều kiện cần
  - Tiêu chuẩn Routh
  - Tiêu chuẩn Hurwitz
- Phương pháp quỹ đạo nghiệm số (QĐNS)
  - Khái niệm về QĐNS
  - Phương pháp vẽ QĐNS
  - Xét ổn định dùng QĐNS
- Tiêu chuẩn ổn định tần số
  - Tiêu chuẩn ổn định Bode
  - Tiêu chuẩn ổn định Nyquist

Khái niệm ổn định

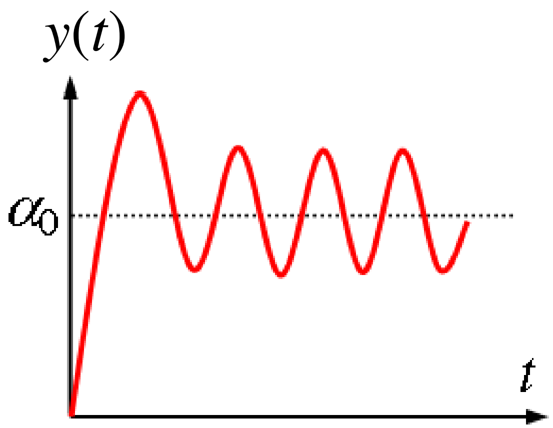
Khái niệm ổn định

Định nghĩa ổn định BIBO

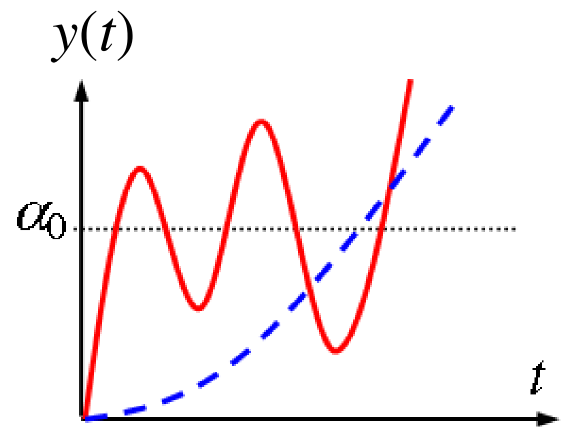
- Hệ thống được gọi là ổn định BIBO (Bounded Input Bounded Output) nếu đáp ứng của hệ bị chặn khi tín hiệu vào bị chặn.



HT ổn định



HT ở biên giới ổn định



HT không ổn định

Cực và zero

- Cho hệ thống tự động có hàm truyền là:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_0 s^m+b_1 s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}s+b_m}{a_0 s^n+a_1 s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n}$$

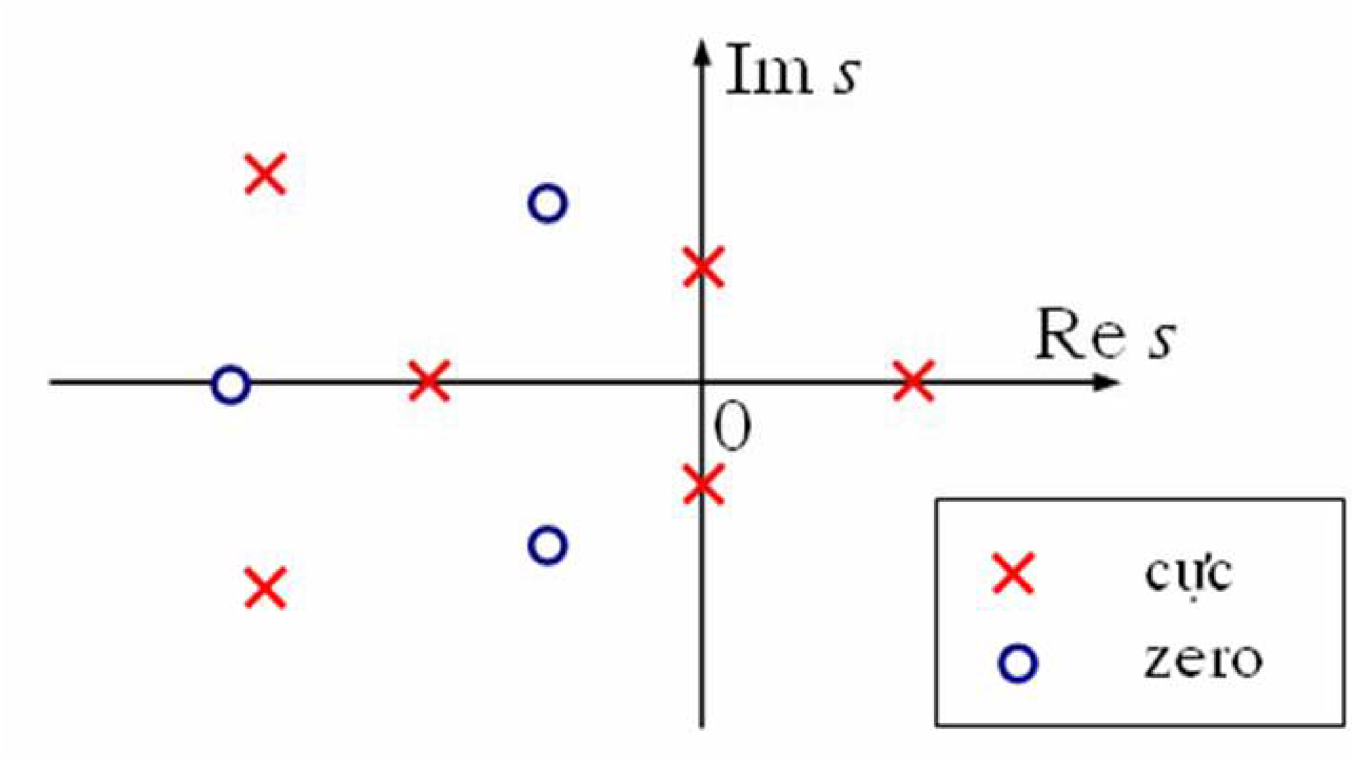
- Đặt: $A(s)=a_0 s^n+a_1 s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n$ mẫu số hàm truyền

  $B(s)=b_0 s^m+b_1 s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}s+b_m$ tử số hàm truyền

- ***Zero***: là nghiệm của tử số hàm truyền, tức là nghiệm của phương trình $B(s)=0$. Do $B(s)$ bậc m nên hệ thống có m zero ký hiệu là z_i, $i=1,2,\ldots m$.
- ***Cực***: (**P**ole) là nghiệm của mẫu số hàm truyền, tức là nghiệm của phương trình $A(s)=0$. Do $A(s)$ bậc n nên hệ thống có n cực ký hiệu là p_i , $i=1,2,\ldots m$.

Giản đồ cực - zero

- Giản đồ cực – zero là đồ thị biểu diễn vị trí các cực và các zero của hệ thống trong mặt phẳng phức.



Điều kiện ổn định

- Tính ổn định của hệ thống phụ thuộc vào vị trí các cực.
- Hệ thống có tất cả các cực có phần thực âm (có tất cả các cực đều nằm bên trái mặt phẳng phức): hệ thống ổn định.
- Hệ thống có cực có phần thực bằng 0 (nằm trên trục ảo), các cực còn lại có phần thực bằng âm: hệ thống ở biên giới ổn định.
- Hệ thống có ít nhất một cực có phần thực dương (có ít nhất một cực nằm bên phải mặt phẳng phức): hệ thống không ổn định.

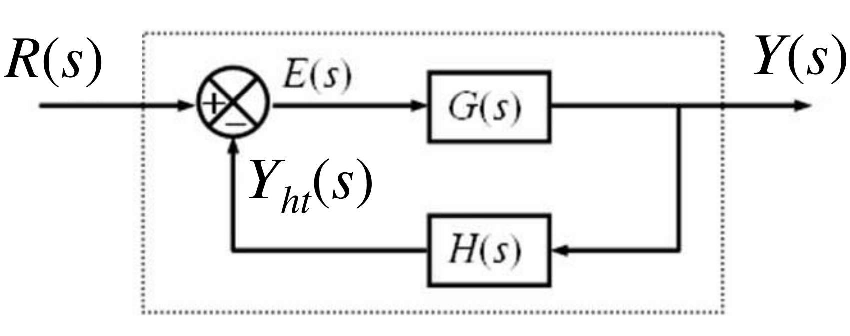
Khái niệm ổn định

Phương trình đặc trưng (PTĐT)

- Phương trình đặc trưng: phương trình $A(s) = 0$
- Đa thức đặc trưng: đa thức $A(s)$

- Chú ý:

Hệ thống hồi tiếp



Phương trình đặc trưng

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

Hệ thống mô tả bằng PTTT

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t) \\ y(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng

$$\det\left(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right) = 0$$

Tiêu chuẩn ổn định đại số

Điều kiện cần

- Điều kiện cần để hệ thống ổn định là tất cả các hệ số của phương trình đặc trưng phải khác 0 và cùng dấu.
- Thí dụ: Hệ thống có phương trình đặc trưng:

$s^3 + 3s^2 - 2s + 1 = 0$ Không ổn định

$s^4 + 2s^2 + 5s + 3 = 0$ Không ổn định

$s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 2s + 1 = 0$ Chưa kết luận được

Qui tắc thành lập bảng Routh

- Cho hệ thống có phương trình đặc trưng:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

- Muốn xét tính ổn định của hệ thống theo tiêu chuẩn Routh, trước tiên ta thành lập ***bảng Routh*** theo qui tắc:
  - Bảng Routh có $n+1$ hàng.
  - Hàng 1 của bảng Routh gồm các hệ số có chỉ số chẵn.
  - Hàng 2 của bảng Routh gồm các hệ số có chỉ số lẻ.
  - Phần tử ở hàng i cột j của bảng Routh ($i \geq 3$) được tính theo công thức:

$$c_{ij} = c_{i-2,j+1} - \alpha_i . c_{i-1,j+1}$$

với

$$\alpha_i = \frac{c_{i-2,1}}{c_{i-1,1}}$$

Dạng bảng Routh

	s^n	$c_{11}=a_0$	$c_{12}=a_2$	$c_{13}=a_4$	$c_{14}=a_6$	…
	s^{n-1}	$c_{21}=a_1$	$c_{22}=a_3$	$c_{23}=a_5$	$c_{24}=a_7$	…
$\alpha_3=\frac{c_{11}}{c_{21}}$	s^{n-2}	$c_{31}=c_{12}-\alpha_3 c_{22}$	$c_{32}=c_{13}-\alpha_3 c_{23}$	$c_{33}=c_{14}-\alpha_3 c_{24}$	$c_{34}=c_{15}-\alpha_3 c_{25}$	…
$\alpha_4=\frac{c_{21}}{c_{31}}$	s^{n-3}	$c_{41}=c_{22}-\alpha_4 c_{32}$	$c_{42}=c_{23}-\alpha_4 c_{33}$	$c_{43}=c_{24}-\alpha_4 c_{34}$	$c_{44}=c_{25}-\alpha_4 c_{35}$	…
…	…	…	…	…	…	…
$\alpha_n=\frac{c_{n-2,1}}{c_{n-1,1}}$	s^0	$c_{n1}=c_{n-2,2}-\alpha_n c_{n-1,2}$				

$$c_{ij}=c_{i-2,j+1}-\alpha_i . c_{i-1,j+1}$$

$$\alpha_i=\frac{c_{i-2,1}}{c_{i-1,1}}$$

Phát biểu tiêu chuẩn

- Điều kiện ***cần và đủ*** để hệ thống ổn định là ***tất cả các phần tử nằm ở cột 1 của bảng Routh đều dương***. Số lần đổi dấu của các phần tử ở cột 1 của bảng Routh bằng số nghiệm của phương trình đặc trưng nằm bên phải mặt phẳng phức.

Thí dụ 1

- Xét tính ổn định của hệ thống có phương trình đặc trưng là:

$$s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 2s + 1 = 0$$

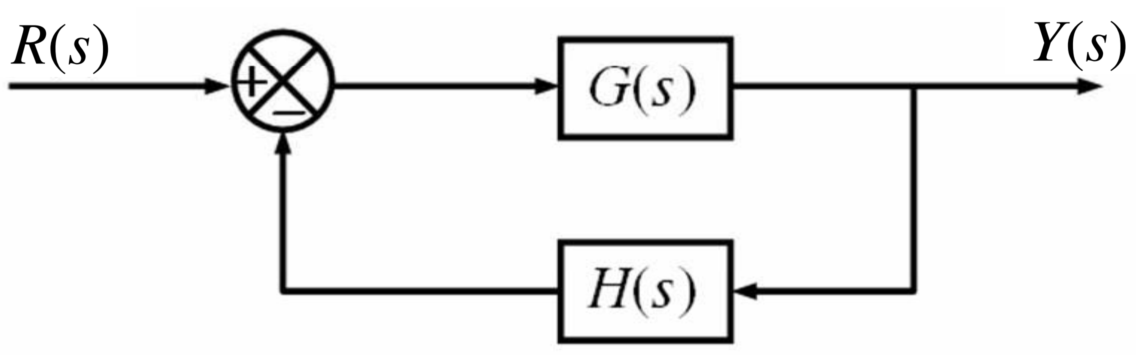
- Giải: Bảng Routh

	s^4	1	5	1
	s^3	4	2	0
$\alpha_3 = \frac{1}{4}$	s^2	$5 - \frac{1}{4}.2 = \frac{9}{2}$	1	
$\alpha_4 = \frac{8}{9}$	s^1	$2 - \frac{8}{9}.1 = \frac{10}{9}$	0	
$\alpha_5 = \frac{81}{20}$	s^0	1		

- Kết luận: Hệ thống ổn định do tất cả các phần tử ở cột 1 bảng Routh đều dương.

Thí dụ 2

★ Xét tính ổn định của hệ thống có sơ đồ khối:



$$G(s)=\frac{50}{s(s+3)(s^2+s+5)}$$

$$H(s)=\frac{1}{s+2}$$

★ Giải: Phương trình đặc trưng của hệ thống:

$$1+G(s).H(s)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+\frac{50}{s(s+3)(s^2+s+5)}\cdot\frac{1}{(s+2)}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad s(s+3)(s^2+s+5)(s+2)+50=0$$

$$\Leftrightarrow \quad s^5+6s^4+16s^3+31s^2+30s+50=0$$

Tiêu chuẩn ổn định đại số: Tiêu chuẩn Routh

Thí dụ 2 (tt)

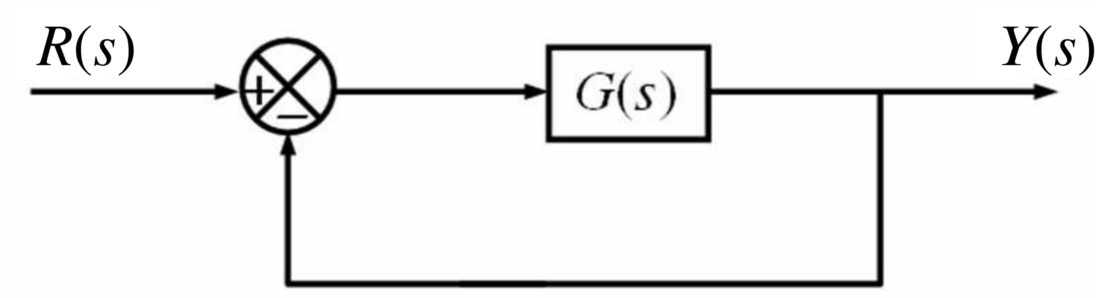
★ Bảng Routh

	s^5	1	16	30
	s^4	6	31	50
$\alpha_3 = \frac{1}{6}$	s^3	$16 - \frac{1}{6}.31 = 10.83$	$30 - \frac{1}{6}.50 = 21.67$	0
$\alpha_4 = \frac{6}{10.83}$	s^2	$31 - \frac{6}{10.83} \times 21.67 = 18.99$	50	
$\alpha_5 = \frac{10.83}{18.99}$	s^1	$21.67 - \frac{10.83}{18.99} \times 50 = -6.84$	0	
	s^0	50		

★ Kết luận: Hệ thống không ổn định do tất cả các phần tử ở cột 1 bảng Routh đổi dấu 2 lần.

Thí dụ 3

★ Tìm điều kiện của *K* để hệ thống ổn định:



$$G(s) = \frac{K}{s(s^2+s+1)(s+2)}$$

★ Giải: Phương trình đặc trưng của hệ thống là:

$$1 + G(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \frac{K}{s(s^2+s+1)(s+2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

Tiêu chuẩn ổn định đại số: Tiêu chuẩn Routh

Thí dụ 3 (tt)

- Bảng Routh

	s^4	1	3	K
	s^3	3	2	0
$\alpha_3 = \frac{1}{3}$	s^2	$3 - \frac{1}{3}.2 = \frac{7}{3}$	K	
$\alpha_4 = \frac{9}{7}$	s^1	$2 - \frac{9}{7}.K$	0	
	s^0	K		

- Điều kiện để hệ thống ổn định:

$$\begin{cases} 2 - \frac{9}{7}K > 0 \\ K > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{0 < K < \frac{14}{9}}$$

Trường hợp đặc biệt 1

- Nếu bảng Routh có hệ số ở cột 1 của hàng nào đó bằng 0, các hệ số còn lại của hàng đó khác 0 thì ta ***thay hệ số bằng 0 ở cột 1 bởi số ε dương nhỏ tùy ý***, sau đó quá trình tính toán được tiếp tục.

Tiêu chuẩn ổn định đại số: Tiêu chuẩn Routh

Thí dụ 4

- Xét tính ổn định của hệ thống có phương trình đặc trưng là:

$$s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 8s + 3 = 0$$

- Giải:

Bảng Routh

	s^4	1	4	3
	s^3	2	8	0
$\alpha_3 = \frac{1}{2}$	s^2	$4 - \frac{1}{2}.8 = 0$	3	
$\Rightarrow$	s^2	$\varepsilon > 0$	3	
$\alpha_4 = \frac{2}{\varepsilon}$	s^1	$8 - \frac{2}{\varepsilon}.3 < 0$	0	
	s^0	3		

- Kết luận: Vì các hệ số ở cột 1 bảng Routh đổi dấu 2 lần nên phương trình đặc trưng của hệ thống có hai nghiệm nằm bên phải mặt phẳng phức, do đó ***hệ thống không ổn định*** .

Trường hợp đặc biệt 2

- Nếu bảng Routh có tất cả các hệ số của hàng nào đó bằng 0:
  - Thành lập đa thức phụ từ các hệ số của hàng trước hàng có tất cả các hệ số bằng 0, gọi đa thức đó là $A_0(s)$.
  - Thay hàng có tất cả các hệ số bằng 0 bởi một hàng khác có các hệ số chính là các hệ số của đa thức $dA_0(s)/ds$, sau đó quá trình tính toán tiếp tục.

- ***Chú ý:*** Nghiệm của đa thức phụ $A_0(s)$ cũng chính là nghiệm của phương trình đặc trưng.

Thí dụ 5

★ Xét tính ổn định của hệ thống có phương trình đặc trưng là:

$$s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 7s + 4 = 0$$

★ Giải: Bảng Routh

	s^5	1	8	7
	s^4	4	8	4
$\alpha_3 = \dfrac{1}{4}$	s^3	$8 - \dfrac{1}{4} \times 8 = 6$	$7 - \dfrac{1}{4} \times 4 = 6$	0
$\alpha_4 = \dfrac{4}{6}$	s^2	$8 - \dfrac{4}{6} \times 6 = 4$	4	
$\alpha_5 = \dfrac{6}{4}$	s^1	$6 - \dfrac{6}{4} \times 4 = 0$	0	
$\Rightarrow$	s^1	8	0	
$\alpha_6 = \dfrac{4}{8}$	s^0	$4 - \dfrac{4}{8} \times 0 = 4$		

Tiêu chuẩn ổn định đại số: Tiêu chuẩn Routh

Thí dụ 5 (tt)

- Đa thức phụ:

$$A_0(s) = 4s^2 + 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{dA_0(s)}{ds} = 8s + 0$$

- Nghiệm của đa thức phụ (cũng chính là nghiệm của phương trình đặc trưng):

$$A_0(s) = 4s^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s = \pm j$$

- Kết luận:
  - Các hệ số cột 1 bảng Routh không đổi dấu nên phương trình đặc trưng không có nghiệm nằm bên phải mặt phẳng phức.
  - Phương trình đặc tính có 2 nghiệm nằm trên trục ảo.
  - Số nghiệm nằm bên trái mặt phẳng phức là 5 – 2 = 3.

Hệ thống ở biên giới ổn định

Qui tắc thành lập ma trận Hurwitz

- Cho hệ thống có phương trình đặc trưng:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

- Muốn xét tính ổn định của hệ thống theo tiêu chuẩn Hurwitz, trước tiên ta thành lập ***ma trận Hurwitz*** theo qui tắc:
  - Ma trận Hurwitz là ma trận vuông cấp $n \times n$.
  - ***Đường chéo*** của ma trận Hurwitz là ***các hệ số từ*** $\boldsymbol{a_1}$ ***đến*** $\boldsymbol{a_n}$.
  - ***Hàng lẻ*** của ma trận Hurwitz gồm ***các hệ số có chỉ số lẻ*** theo thứ tự tăng dần nếu ở bên phải đường chéo và giảm dần nếu ở bên trái đường chéo.
  - ***Hàng chẳn*** của ma trận Hurwitz gồm ***các hệ số có chỉ số chẳn*** theo thứ tự tăng dần nếu ở bên phải đường chéo và giảm dần nếu ở bên trái đường chéo.

Dạng ma trận Hurwitz

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

Phát biểu tiêu chuẩn

★ Điều kiện ***cần và đủ*** để hệ thống ổn định là ***tất cả các định thức con chứa đường chéo*** của ma trận Hurwitz ***đều dương***

Thí dụ 1

★ Xét tính ổn định của hệ thống có phương trình đặc trưng là:

$$s^3 + 4s^2 + 3s + 2 = 0$$

★ Giải:

Ma trận Hurwitz $\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

Các định thức: $\Delta_1 = a_1 = 4$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4\times 3 - 1\times 2 = 10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = 2\times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\times 10 = 20$$

★ Kết luận: ***Hệ thống ổn định*** do các định thức đều dương

Các hệ quả của tiêu chuẩn Hurwitz

- ***Hệ bậc 2*** ổn định nếu phương trình đặc trưng thỏa mãn điều kiện:

$$a_i > 0, \quad i = \overline{0,2}$$

- ***Hệ bậc 3*** ổn định nếu phương trình đặc trưng thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} a_i > 0, \quad i = \overline{0,3} \\ a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \end{cases}$$

- ***Hệ bậc 4*** ổn định nếu phương trình đặc trưng thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} a_i > 0, \quad i = \overline{0,4} \\ a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \\ a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0 \end{cases}$$

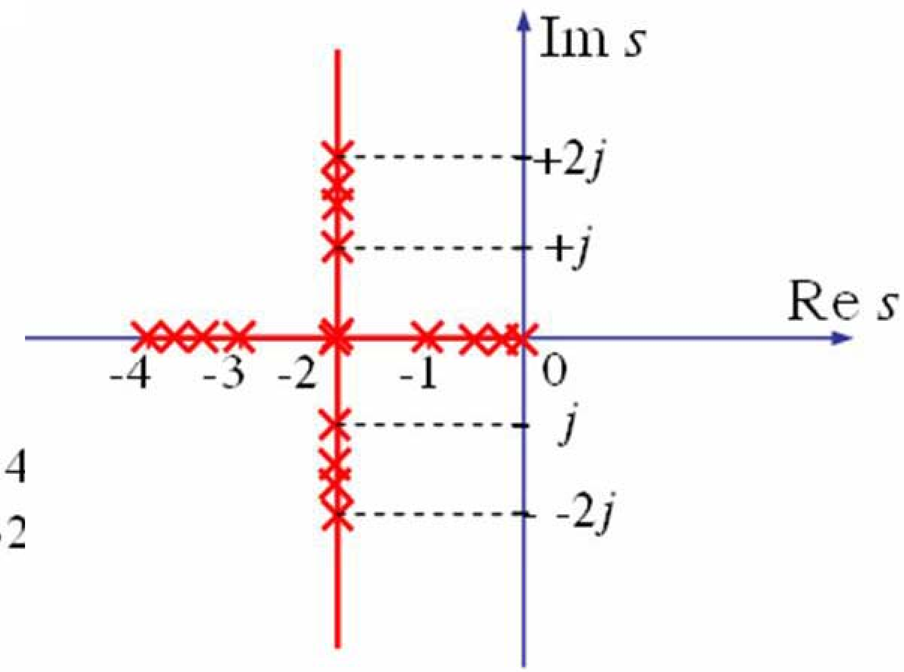
Phương pháp quỹ đạo nghiệm số

Định nghĩa

- Quỹ đạo nghiệm số là tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng của hệ thống khi có một thông số nào đó trong hệ thay đổi từ $0 \to \infty$.
- Thí dụ: QĐNS của hệ thống có PTĐT $s^2 + 4s + K = 0$

$K = 0$:	$s_1 = 0$,	$s_2 = -4$
$K = 1$:	$s_1 = -0.268$,	$s_2 = -3.732$
$K = 2$:	$s_1 = -0.586$,	$s_2 = -3.414$
$K = 3$:	$s_1 = -1$,	$s_2 = -3$
$K = 4$:	$s_1 = -2$,	$s_2 = -2$
$K = 5$:	$s_1 = -2 + j$,	$s_2 = -2 - j$
$K = 6$:	$s_1 = -2 + j1.414$,	$s_2 = -2 - j1.414$
$K = 7$:	$s_1 = -2 + j1.732$,	$s_2 = -2 - j1.732$
$K = 8$:	$s_1 = -2 + j2$,	$s_2 = -2 - j2$

...



Qui tắc vẽ QĐNS

✶ Muốn áp dụng các qui tắc vẽ quỹ đạo nghiệm số, trước tiên ta phải biến đổi tương đương phương trình đặc trưng về dạng:

$$1 + K\frac{N(s)}{D(s)} = 0 \qquad (1)$$

Đặt: $$G_0(s) = K\frac{N(s)}{D(s)}$$

Gọi n là số cực của $G_0(s)$, m là số zero của $G_0(s)$

$$(1) \Leftrightarrow \qquad 1 + G_0(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |G_0(s)| = 1 & \text{Điều kiện biên độ} \\ \angle G_0(s) = (2l+1)\pi & \text{Điều kiện pha} \end{cases}$$

Qui tắc vẽ QĐNS

- ***Qui tắc 1:*** Số nhánh của quỹ đạo nghiệm số = bậc của phương trình đặc tính = số cực của $G_0(s) = n$.

- ***Qui tắc 2:***
  - Khi $K = 0$: các nhánh của quỹ đạo nghiệm số xuất phát từ các cực của $G_0(s)$.
  - Khi K tiến đến $+\infty$: m nhánh của quỹ đạo nghiệm số tiến đến m zero của $G_0(s)$, $n-m$ nhánh còn lại tiến đến ∞ theo các tiệm cận xác định bởi qui tắc 5 và qui tắc 6.

- ***Qui tắc 3:*** Quỹ đạo nghiệm số đối xứng qua trục thực.

- ***Qui tắc 4:*** Một điểm trên trục thực thuộc về quỹ đạo nghiệm số nếu tổng số cực và zero của $G_0(s)$ bên phải nó là một số lẻ.

Qui tắc vẽ QĐNS (tt)

- ***Qui tắc 5:*** **:** Góc tạo bởi các đường tiệm cận của quỹ đạo nghiệm số với trục thực xác định bởi :

$$\alpha = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} \qquad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

- ***Qui tắc 6:*** **:** Giao điểm giữa các tiệm cận với trục thực là điểm A có tọa độ xác định bởi:

$$OA = \frac{\sum \text{cực} - \sum \text{zero}}{n-m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

(p_i và z_i là các cực và các zero của $G_0(s)$)

- ***Qui tắc 7:*** **:** Điểm tách nhập (nếu có) của quỹ đạo nghiệm số nằm trên trục thực và là nghiệm của phương trình:

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

Qui tắc vẽ QĐNS (tt)

- ***Qui tắc 8:*** : Giao điểm của quỹ đạo nghiệm số với trục ảo có thể xác định bằng cách áp dụng tiêu chuẩn Routh–Hurwitz hoặc thay $s=j\omega$ vào phương trình đặc trưng.

- ***Qui tắc 9:*** Góc xuất phát của quỹ đạo nghiệm số tại cực phức p_j được xác định bởi:

$$\theta_j = 180^0 + \sum_{i=1}^{m} \arg(p_j - z_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \arg(p_j - p_i)$$

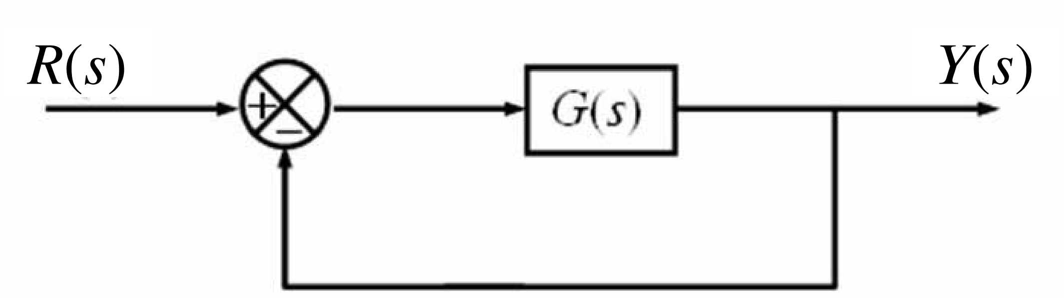
Dạng hình học của công thức trên là:

$\theta_j = 180^0 + (\sum$góc từ các zero đến cực p_j)

– ($\sum$góc từ các cực còn lại đến cực p_j)

Thí dụ 1

- Vẽ QĐNS của hệ thống sau đây khi K=0→+∞.



$$G(s)=\frac{K}{s(s+2)(s+3)}$$

- Giải:
- Phương trình đặc trưng của hệ thống:

$$1+G(s)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 1+\frac{K}{s(s+2)(s+3)}=0 \qquad (1)$$

- Các cực: $p_1=0 \quad p_2=-2 \quad p_3=-3$
- Các zero: không có

Thí dụ 1 (tt)

★ Tiệm cận:

$$\alpha = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} = \frac{(2l+1)\pi}{3-0} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{\pi}{3} & (l=0) \\ \alpha_2 = -\dfrac{\pi}{3} & (l=\text{-}1) \\ \alpha_3 = \pi & (l=1) \end{cases}$$

$$OA = \frac{\sum \text{cực} - \sum \text{zero}}{n-m} = \frac{[0+(-2)+(-3)]-0}{3-0} = -\frac{5}{3}$$

★ Điểm tách nhập:

(1) $\Leftrightarrow$ $$K = -s(s+2)(s+3) = -(s^3+5s^2+6s)$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dK}{ds} = -(3s^2+10s+6)$$

Do đó $$\frac{dK}{ds} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} s_1 = -2.549 & \text{(loại)} \\ s_2 = -0.785 \end{cases}$$

Thí dụ 1 (tt)

★ Giao điểm của QĐNS với trục ảo:

Cách 1: Dùng tiêu chuẩn Hurwitz

$$(1) \Leftrightarrow \quad s^3 + 5s^2 + 6s + K = 0 \qquad (2)$$

Điều kiện ổn định:

$$\begin{cases} K > 0 \\ a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K > 0 \\ 5 \times 6 - 1 \times K > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < K < 30 \Rightarrow \boxed{K_{gh} = 30}$$

Thay giá trị $K_{gh} = 30$ vào phương trình (2), giải phương trình ta được giao điểm của QĐNS với trục ảo

$$s^3 + 5s^2 + 6s + 30 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} s_1 = -5 \\ s_2 = j\sqrt{6} \\ s_3 = -j\sqrt{6} \end{cases}$$

Thí dụ 1 (tt)

★ Giao điểm của QĐNS với trục ảo:

Cách 2:

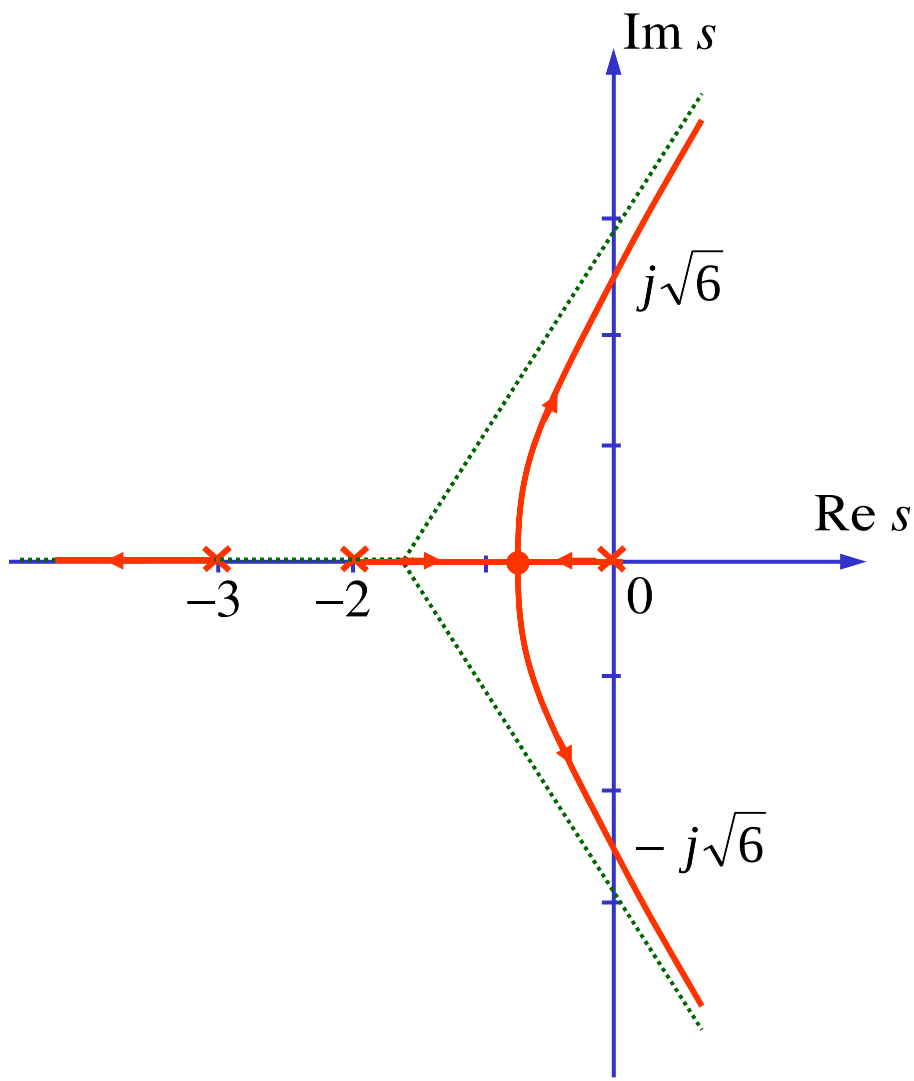
$(1) \Leftrightarrow \quad s^3 + 5s^2 + 6s + K = 0$ (2)

Thay $s=j\omega$ vào phương trình (2):

$$(j\omega)^3 + 5(j\omega)^2 + 6(j\omega) + K = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -j\omega^3 - 5\omega^2 + 6j\omega + K = 0$$

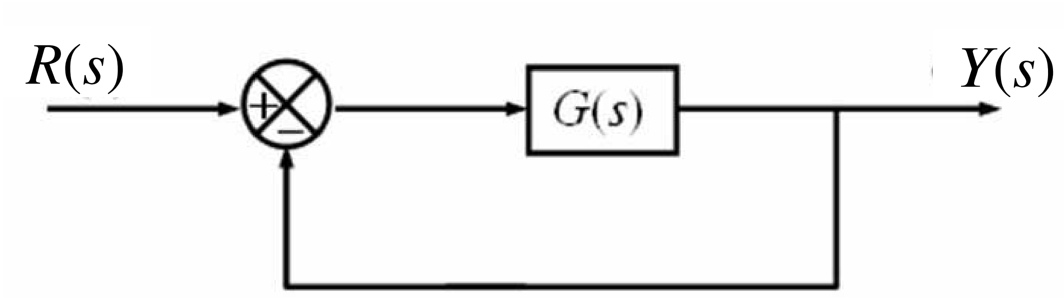
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -j\omega^3 + 6j\omega = 0 \\ -5\omega^2 + K = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \omega = 0 \\ K = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \omega = \pm\sqrt{6} \\ K = 30 \end{cases} \end{array} \right.$$

Thí dụ 1 (tt)



Thí dụ 2

- Vẽ QĐNS của hệ thống sau đây khi K=0→+∞.



$$G(s)=\frac{K}{s(s^2+8s+20)}$$

- Giải:
- Phương trình đặc trưng của hệ thống:

$$1+G(s)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 1+\frac{K}{s(s^2+8s+20)}=0 \qquad (1)$$

- Các cực: $p_1=0 \qquad p_{2,3}=-4\pm j2$
- Các zero: không có

Thí dụ 2 (tt)

★ Tiệm cận:

$$\alpha = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} = \frac{(2l+1)\pi}{3-0} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{\pi}{3} & (l=0) \\ \alpha_2 = -\dfrac{\pi}{3} & (l=\text{-}1) \\ \alpha_3 = \pi & (l=1) \end{cases}$$

$$OA = \frac{\sum \text{cực} - \sum \text{zero}}{n-m} = \frac{[0+(-4+j2)+(-4-j2)]-(0)}{3-0} = -\frac{8}{3}$$

★ Điểm tách nhập:

(1) $\Leftrightarrow$ $K = -(s^3 + 8s^2 + 20s)$

$$\Rightarrow \quad \frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 16s + 20)$$

Do đó $\dfrac{dK}{ds} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} s_1 = -3.33 \\ s_2 = -2.00 \end{cases}$ (hai điểm tách nhập)

Thí dụ 2 (tt)

★ Giao điểm của QĐNS với trục ảo:

(1) $\Leftrightarrow \quad s^3 + 8s^2 + 20s + K = 0$ (2)

Thay $s=j\omega$ vào phương trình (2):

$$(j\omega)^3 + 8(j\omega)^2 + 20(j\omega) + K = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -j\omega^3 - 8\omega^2 + 20j\omega + K = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8\omega^2 + K = 0 \\ -\omega^3 + 20\omega = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \omega = 0 \\ K = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \omega = \pm\sqrt{20} \\ K = 160 \end{cases} \end{array} \right.$$

Thí dụ 2 (tt)

★ Góc xuất phát của QĐNS tại cực phức p_2:

$$\theta_2 = 180^0 - [\arg(p_2 - p_1) + \arg(p_2 - p_3)]$$

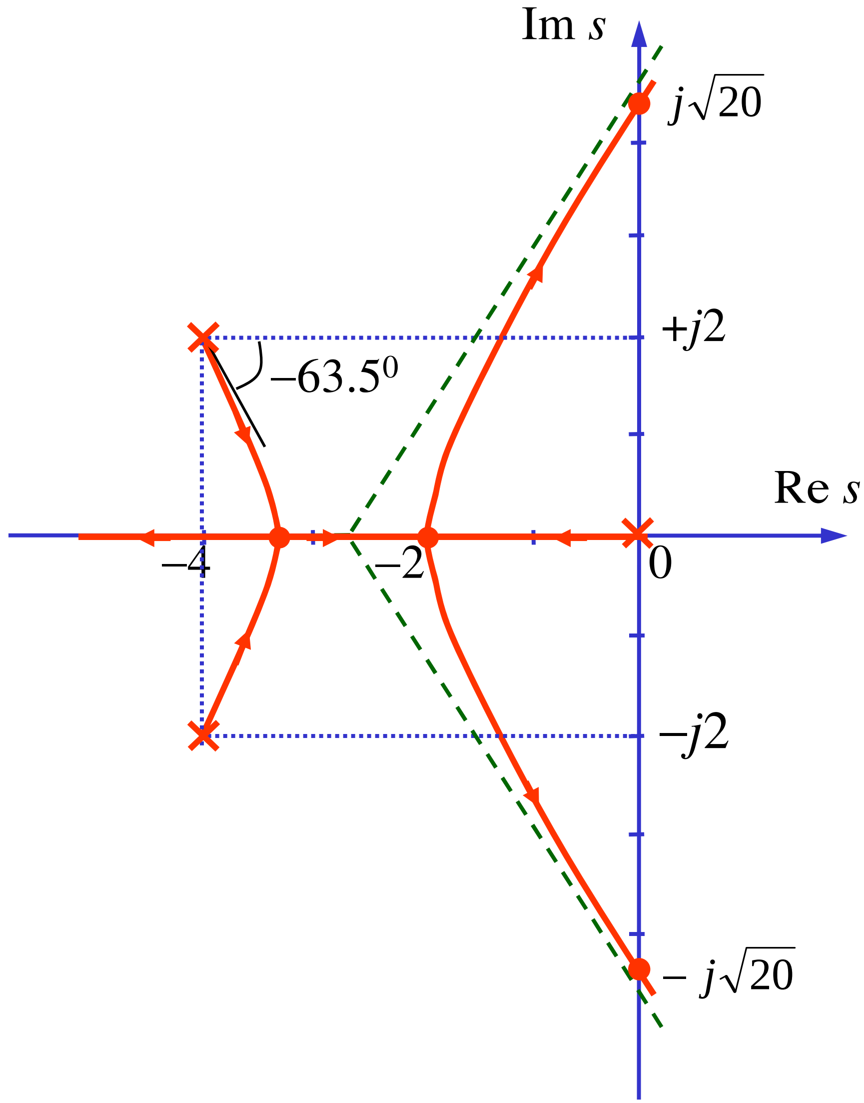
$$= 180^0 - \{\arg[(-4 + j2) - 0] + \arg[(-4 + j2) - (-4 - j2)]\}$$

$$= 180^0 - \left\{ tg^{-1}\left(\frac{2}{-4}\right) + 90 \right\}$$

$$= 180^0 - \{153.5 + 90\}$$

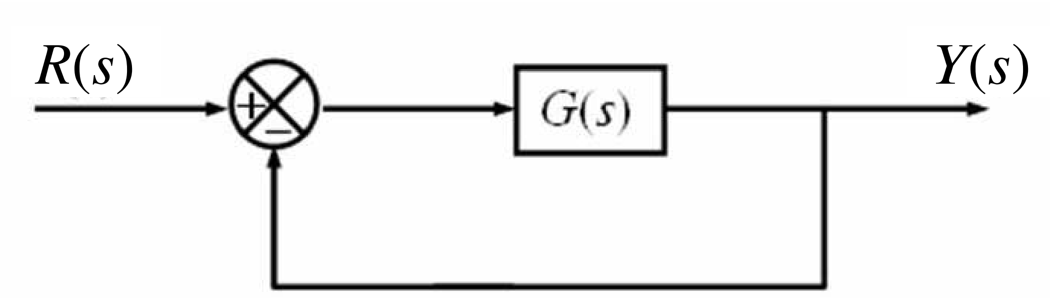
$$\theta_2 = -63.5^0$$

Thí dụ 2 (tt)



Thí dụ 3

- Vẽ QĐNS của hệ thống sau đây khi K=0→+∞.



$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+3)(s^2+8s+20)}$$

- Giải:
- Phương trình đặc trưng của hệ thống:

$$1+G(s)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 1+\frac{K(s+1)}{s(s+3)(s^2+8s+20)}=0 \qquad (1)$$

- Các cực: $p_1=0 \quad p_2=-3 \quad p_{3,4}=-4\pm j2$
- Các zero: $z_1=-1$

Thí dụ 3 (tt)

★ Tiệm cận:

$$\alpha=\frac{(2l+1)\pi}{n-m}=\frac{(2l+1)\pi}{4-1}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=\dfrac{\pi}{3} & (l=0)\\ \alpha_2=-\dfrac{\pi}{3} & (l=-1)\\ \alpha_3=\pi & (l=1)\end{cases}$$

$$OA=\frac{\sum \text{cực}-\sum \text{zero}}{n-m}=\frac{[0+(-3)+(-4+j2)+(-4-j2)]-(-1)}{4-1}=-\frac{10}{3}$$

★ Điểm tách nhập:

$$(1)\Leftrightarrow K=-\frac{s(s+3)(s^2+8s+20)}{(s+1)}\Rightarrow\frac{dK}{ds}=-\frac{3s^4+26s^3+77s^2+88s+60}{(s+1)^2}$$

Do đó $\dfrac{dK}{ds}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}s_{1,2}=-3{,}67\pm j1{,}05\\ s_{3,4}=-0{,}66\pm j0.97\end{cases}$ (không có điểm tách nhập)

Thí dụ 3 (tt)

✶ Giao điểm của QĐNS với trục ảo:

(1) ⇔ $s^4 + 11s^3 + 44s^2 + (60 + K)s + K = 0$ (2)

Thay $s=j\omega$ vào phương trình (2):

$$\omega^4 - 11j\omega^3 - 44\omega^2 + (60 + K)j\omega + K = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega^4 - 44\omega^2 + K = 0 \\ -11\omega^3 + (60 + K)\omega = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \omega = 0 \\ K = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \omega = \pm 5{,}893 \\ K = 322 \end{cases} \\ \begin{cases} \omega = \pm j1{,}314 \\ K = -61{,}7 \end{cases} \text{(loại)} \end{array} \right.$$

Vậy giao điểm cần tìm là: $s = \pm j5{,}893$ HSKĐ giới hạn là: $K_{gh} = 322$

Thí dụ 3 (tt)

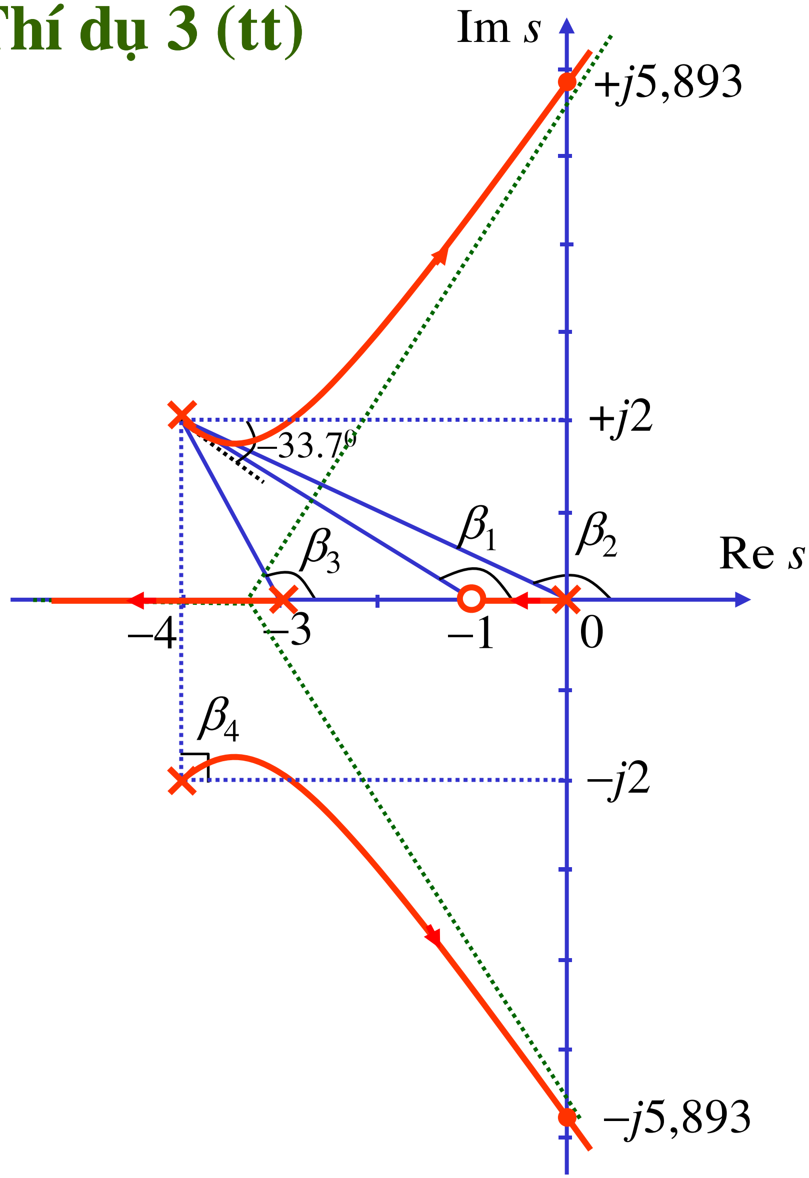
★ Góc xuất phát của QĐNS tại cực phức p_3:

$$\theta_3 = 180 + \beta_1 - (\beta_2 + \beta_3 + \beta_4)$$

$$= 180 + 146{,}3 - (153{,}4 + 116{,}6 + 90)$$

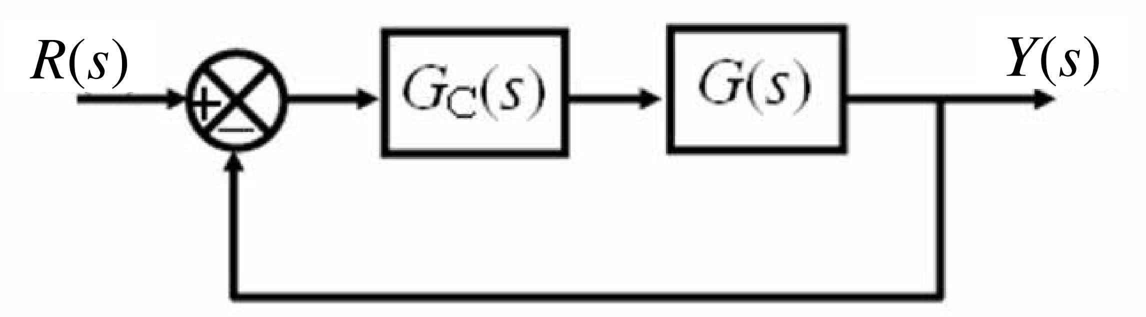
$$\theta_3 = -33.7^0$$

Thí dụ 3 (tt)



Thí dụ 4

- Cho hệ thống điều khiển có sơ đồ khối như sau:



$$G(s)=\frac{10}{(s^2+9s+3)}$$

$$G_C(s)=K_P+\frac{K_I}{s}$$

- Cho $K_I = 2.7$, hãy vẽ QĐNS của hệ thống sau đây khi $K_P = 0 \rightarrow +\infty$, biết rằng $dK_P / ds = 0$ có 3 nghiệm là $-3, -3, 1.5$.

- Khi $K_P = 270$, $K_I = 2.7$ hệ thống có ổn định hay không?

Thí dụ 4 (tt)

- Giải:
- Phương trình đặc trưng của hệ thống:

$$1+G_C(s)G(s)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+\left(K_P+\frac{2.7}{s}\right)\left(\frac{10}{s^2+9s+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+\frac{10K_P s}{(s+9)(s^2+3)}=0 \qquad (1)$$

- Các cực: $p_1=-9 \quad p_2=+j\sqrt{3} \quad p_3=-j\sqrt{3}$
- Các zero: $z_1=0$

Thí dụ 4 (tt)

- Tiệm cận:

$$\alpha = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} = \frac{(2l+1)\pi}{3-1} \Rightarrow \begin{cases} \pi/2 & (l=0) \\ -\pi/2 & (l=-1) \end{cases}$$

$$OA = \frac{\sum \text{cực} - \sum \text{zero}}{n-m} = \frac{[-9+(j\sqrt{3})+(-j\sqrt{3})]-(0)}{3-1} = -\frac{9}{2}$$

- Điểm tách nhập:

$$\frac{dK_P}{ds} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} s_1 = -3 \\ s_2 = -3 \\ s_3 = 1.5 \quad \text{(loại)} \end{cases}$$

QĐNS có hai điểm tách nhập trùng nhau tại -3

Thí dụ 4 (tt)

★ Góc xuất phát của QĐNS tại cực phức p_2:

$$\theta_2 = 180^0 + \arg(p_2 - z_1) - [\arg(p_2 - p_1) + \arg(p_2 - p_3)]$$

$$= 180^0 + \arg(j\sqrt{3} - 0) - [\arg(j\sqrt{3} - (-9)) + \arg(j\sqrt{3} - (-j\sqrt{3}))]$$

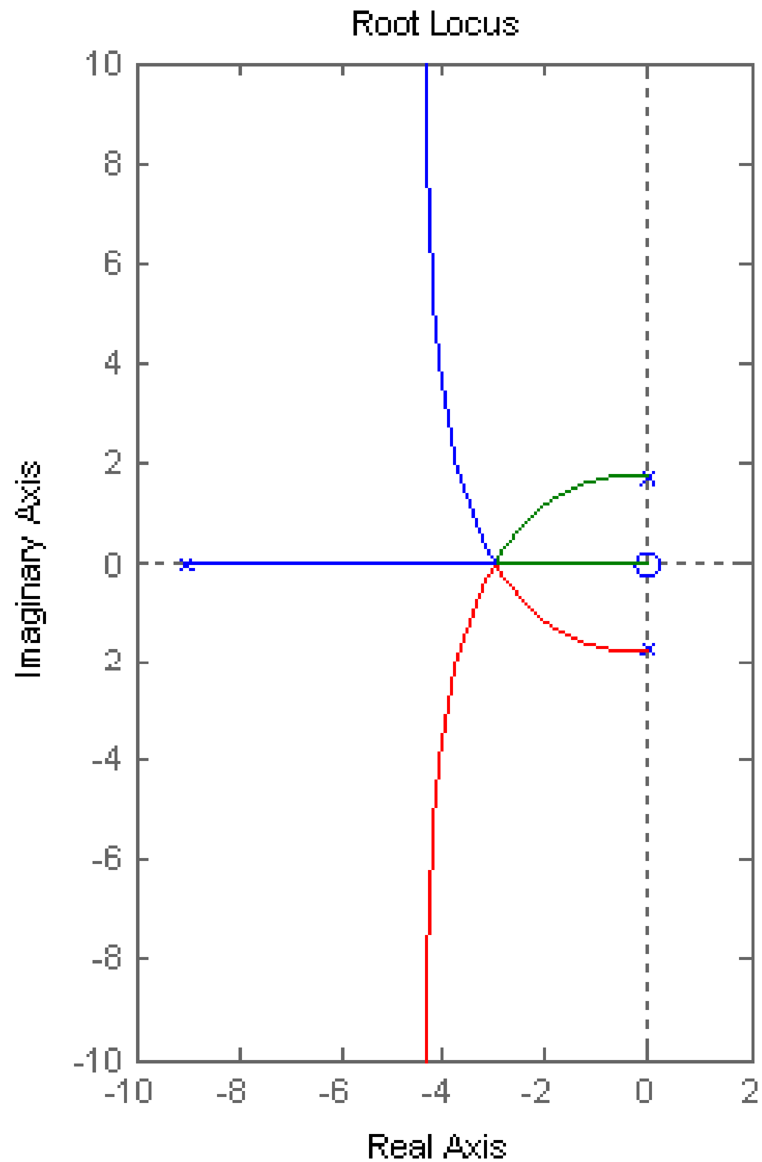
$$= 180^0 + 90 - \left\{ tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-9}\right) + 90 \right\}$$

$$\theta_2 = -169^0$$

Phương pháp quỹ đạo nghiệm số (QĐNS)

Thí dụ 4 (tt)

- Khi $K_I = 2.7$, QĐNS của hệ thống nằm hoàn toàn bên trái mặt phẳng phức khi $K_P = 0 \rightarrow +\infty$, do đó hệ thống ổn định khi $K_I = 2.7$, $K_P = 270$.



Tiêu chuẩn ổn định tần số

Nhắc lại: Các thông số quan trọng của đặc tính tần số

- Tần số cắt biên (ω_c): là tần số mà tại đó biên độ của đặc tính tần số bằng 1 (hay bằng 0 dB).

$$M(\omega_c) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad L(\omega_c) = 0$$

- Tần số cắt pha ($\omega_{-\pi}$): là tần số mà tại đó pha của đặc tính tần số bằng -180^0 (hay bằng $-\pi$ radian).

$$\varphi(\omega_{-\pi}) = -180^0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(\omega_{-\pi}) = -\pi \text{ rad}$$

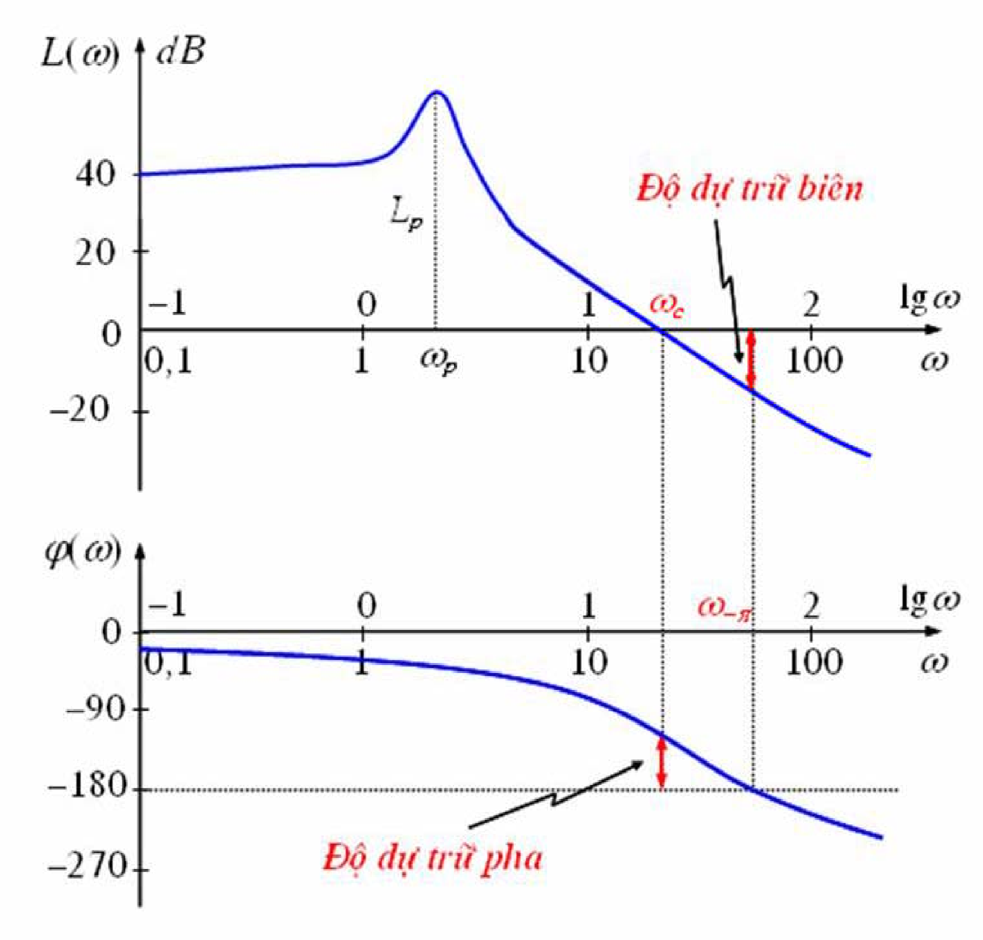
- Độ dự trữ biên (GM – Gain Margin):

$$GM = \frac{1}{M(\omega_{-\pi})} \quad \Leftrightarrow \quad GM = -L(\omega_{-\pi}) \quad [\text{dB}]$$

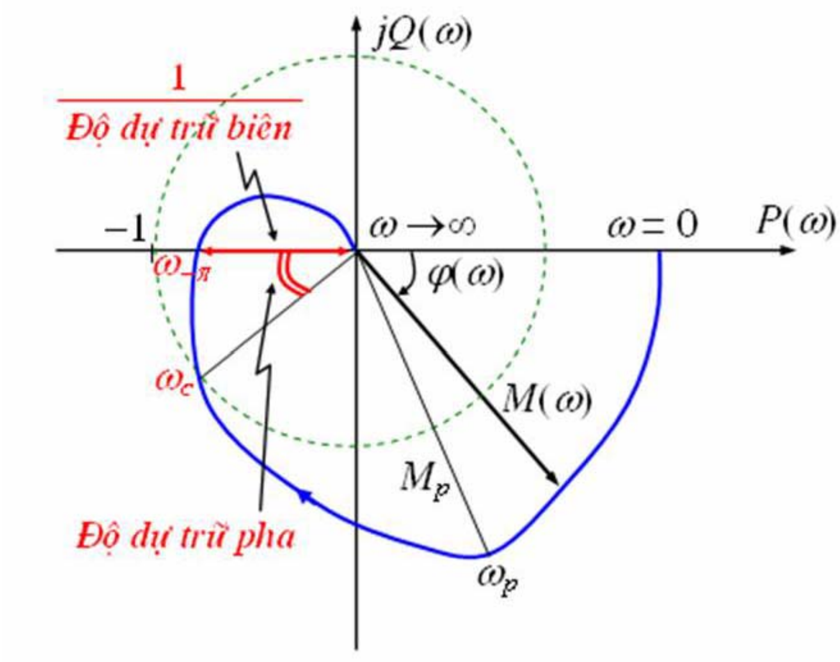
- Độ dự trữ pha (ΦM – Phase Margin):

$$\Phi M = 180^0 + \varphi(\omega_c)$$

Biểu đồ Bode

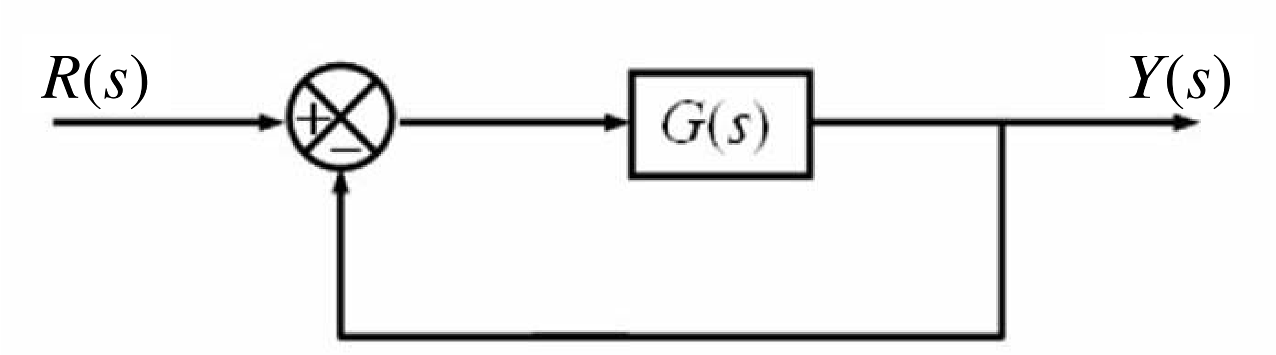


Biểu đồ Nyquist



Tiêu chuẩn ổn định Nyquist

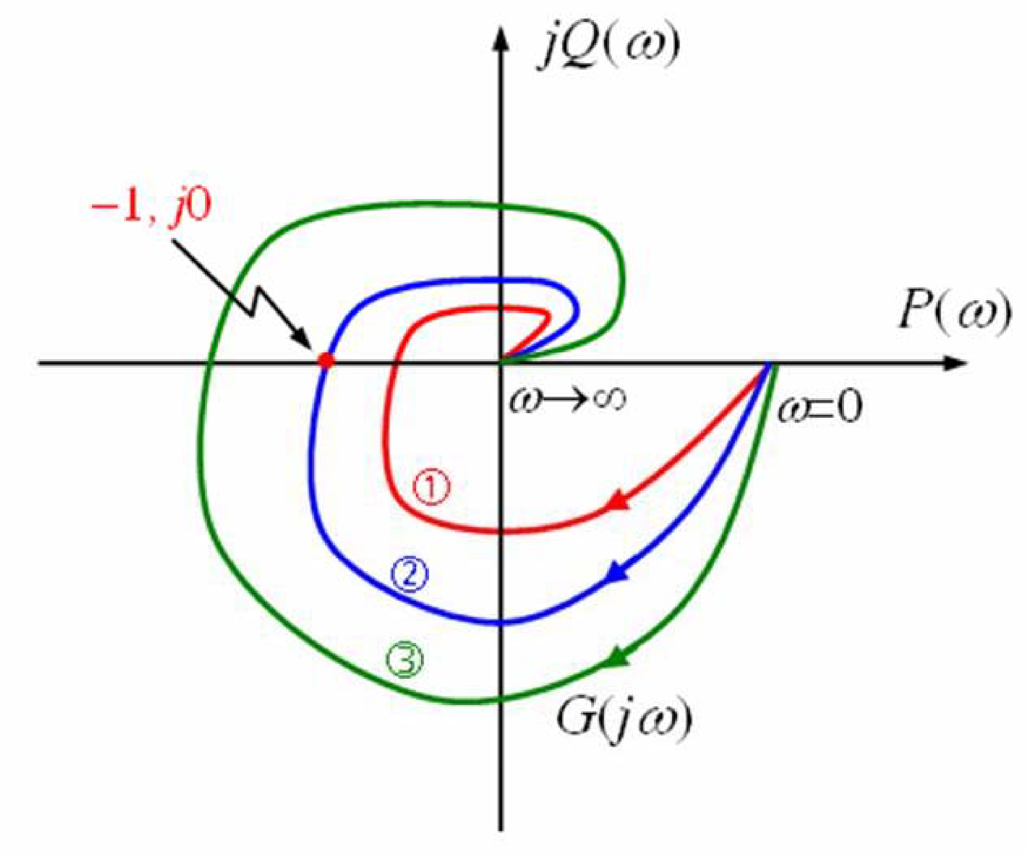
- Cho hệ thống hồi tiếp âm đơn vị, biết đặc tính tần số của hệ hở $G(s)$, bài toán đặt ra là xét tính ổn định của hệ thống kín $G_k(s)$.



- **Tiêu chuẩn Nyquist:** Hệ thống kín $G_k(s)$ ổn định nếu đường cong Nyquist của hệ hở $G(s)$ bao điểm $(-1, j0)$ $l/2$ vòng theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ) khi ω thay đổi từ 0 đến $+\infty$, trong đó l là số cực nằm bên phải mặt phẳng phức của hệ hở $G(s)$.

Tiêu chuẩn ổn định Nyquist – Thí dụ 1

★ Cho hệ thống hồi tiếp âm đơn vị, trong đó hệ hở $G(s)$ có đường cong Nyquist như hình vẽ. Biết rằng $G(s)$ ổn định. Xét tính ổn định của hệ thống kín.



Tiêu chuẩn ổn định Nyquist – Thí dụ 1 (tt)

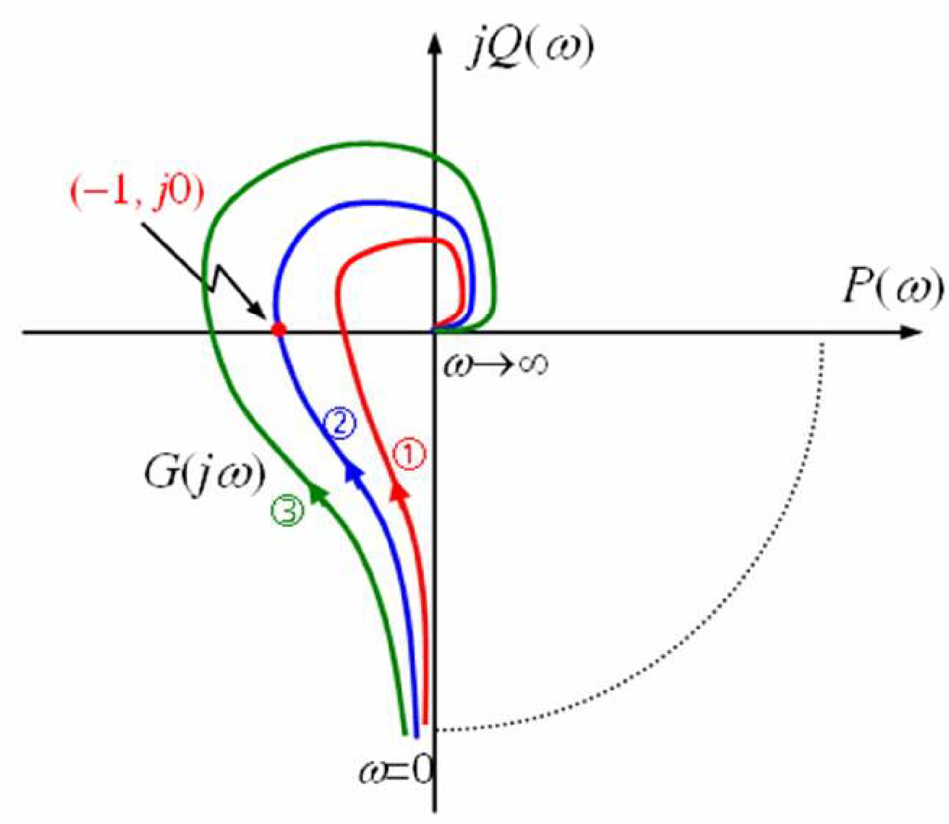
- Giải:

  Vì $G(s)$ ổn định nên $G(s)$ không có cực nằm bên phải mặt phẳng phức, do đó theo tiêu chuẩn Nyquist hệ kín ổn định nếu đường cong Nyquist $G(j\omega)$ của hệ hở không bao điểm $(-1, j0)$
- Trường hợp ①: $G(j\omega)$ không bao điểm $(-1, j0) \Rightarrow$ hệ kín ổn định.
- Trường hợp ②: $G(j\omega)$ qua điểm $(-1, j0) \Rightarrow$ hệ kín ở biên giới ổn định;
- Trường hợp ③: $G(j\omega)$ bao điểm $(-1, j0) \Rightarrow$ hệ kín không ổn định.

Tiêu chuẩn ổn định Nyquist – Thí dụ 2

- Hãy đánh giá tính ổn định của hệ thống hồi tiếp âm đơn vị, biết rằng hàm truyền hệ hở $G(s)$ là: $G(s)=\dfrac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$

- Giải:
- Biểu đồ Nyquist:



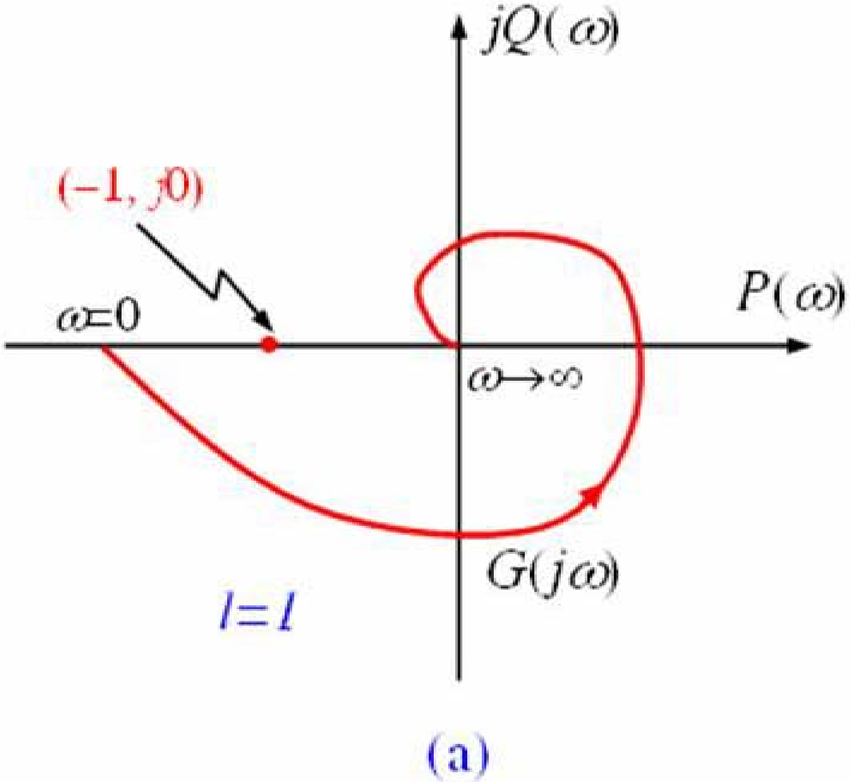
Tiêu chuẩn ổn định Nyquist – Thí dụ 2 (tt)

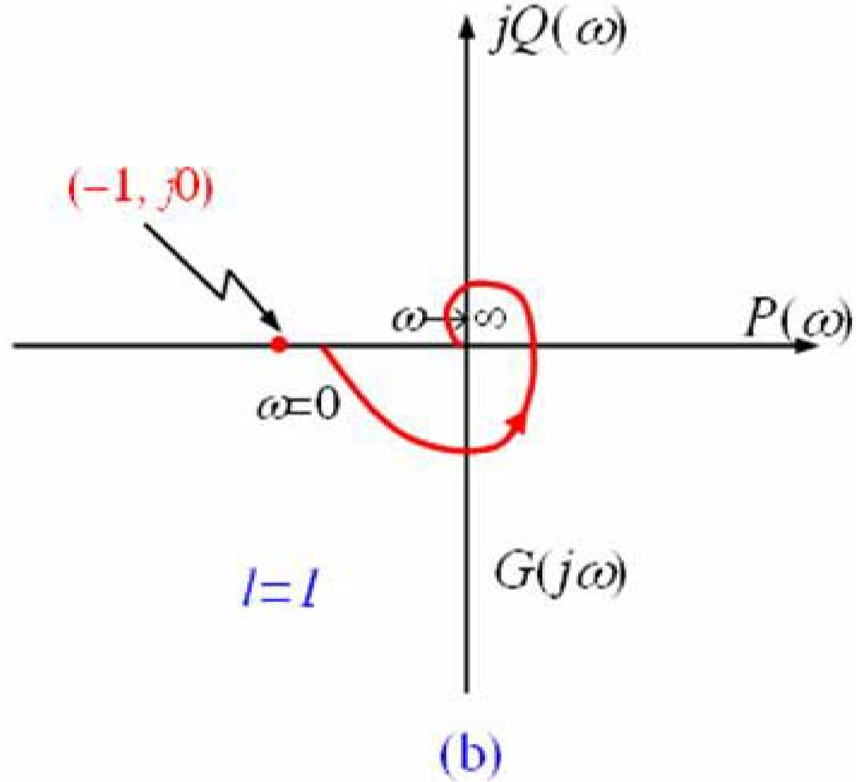
Vì $G(s)$ không có cực nằm bên phải mặt phẳng phức, do đó theo tiêu chuẩn Nyquist hệ kín ổn định nếu đường cong Nyquist $G(j\omega)$ của hệ hở không bao điểm $(-1, j0)$

- ✶ Trường hợp ①: $G(j\omega)$ không bao điểm $(-1, j0)$ $\Rightarrow$ hệ kín ổn định.
- ✶ Trường hợp ②: $G(j\omega)$ qua điểm $(-1, j0)$ $\Rightarrow$ hệ kín ở biên giới ổn định;
- ✶ Trường hợp ③: $G(j\omega)$ bao điểm $(-1, j0)$ $\Rightarrow$ hệ kín không ổn định.

Tiêu chuẩn ổn định Nyquist – Thí dụ 3

Cho hệ thống hở không ổn định có đặc tính tần số như các hình vẽ dưới đây. Hỏi trường hợp nào hệ kín ổn định.



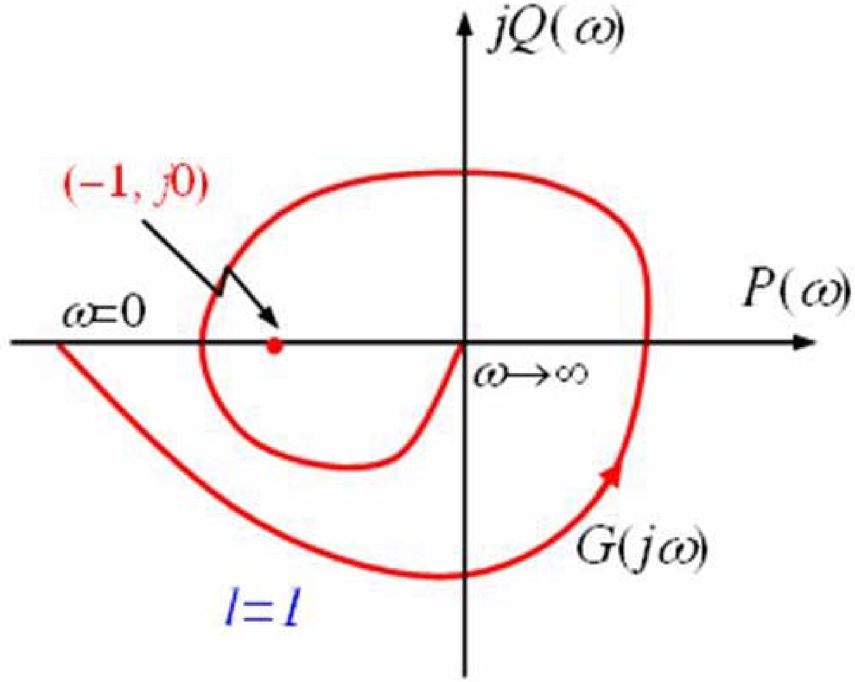


Ổn định

Không ổn định

Tiêu chuẩn ổn định Nyquist – Thí dụ 3 (tt)

Cho hệ thống hở không ổn định có đặc tính tần số như các hình vẽ dưới đây. Hỏi trường hợp nào hệ kín ổn định.

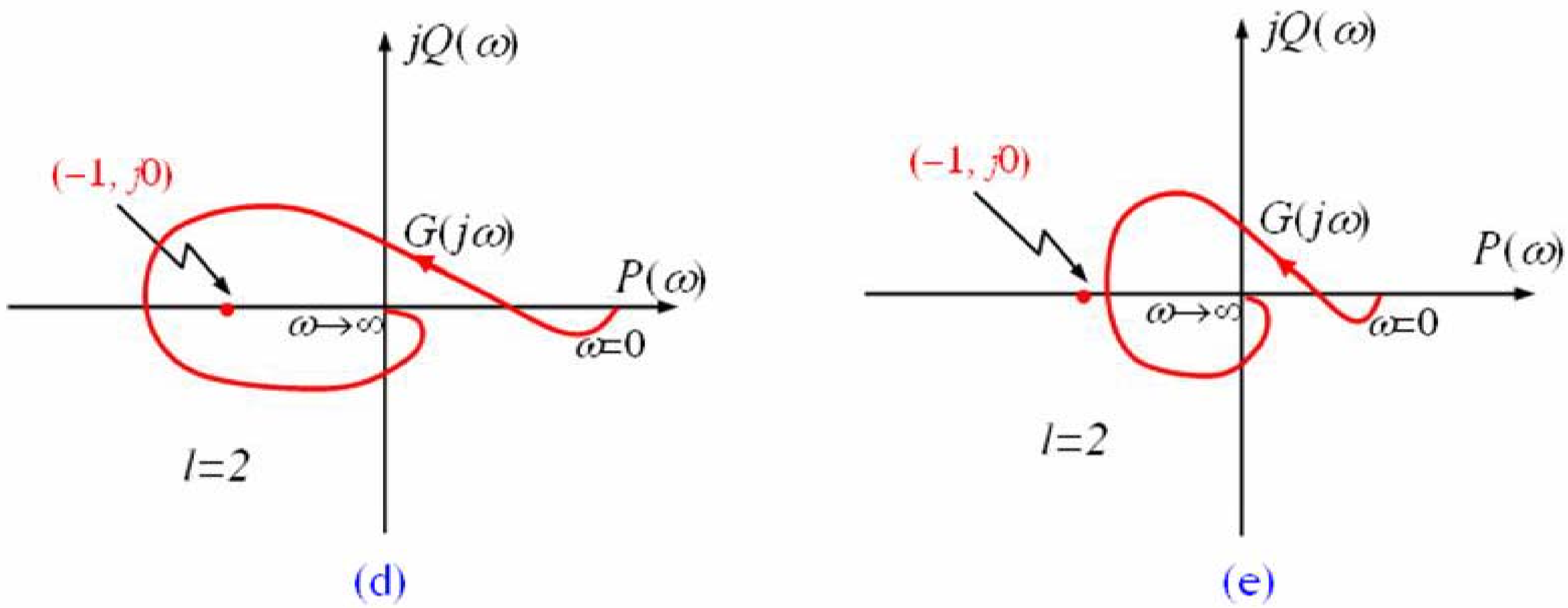


(c)

Không ổn định

Tiêu chuẩn ổn định Nyquist – Thí dụ 3 (tt)

Cho hệ thống hở không ổn định có đặc tính tần số như các hình vẽ dưới đây. Hỏi trường hợp nào hệ kín ổn định.



Ổn định

Không ổn định

Tiêu chuẩn ổn định Nyquist – Thí dụ 4

- Cho hệ thống hở có hàm truyền đạt là:

$$G(s)=\frac{K}{(Ts+1)^n} \qquad (K>0,\ T>0,\ n>2)$$

Tìm điều kiện của K và T để hệ thống kín (hồi tiếp âm đơn vị) ổn định.

- Giải:

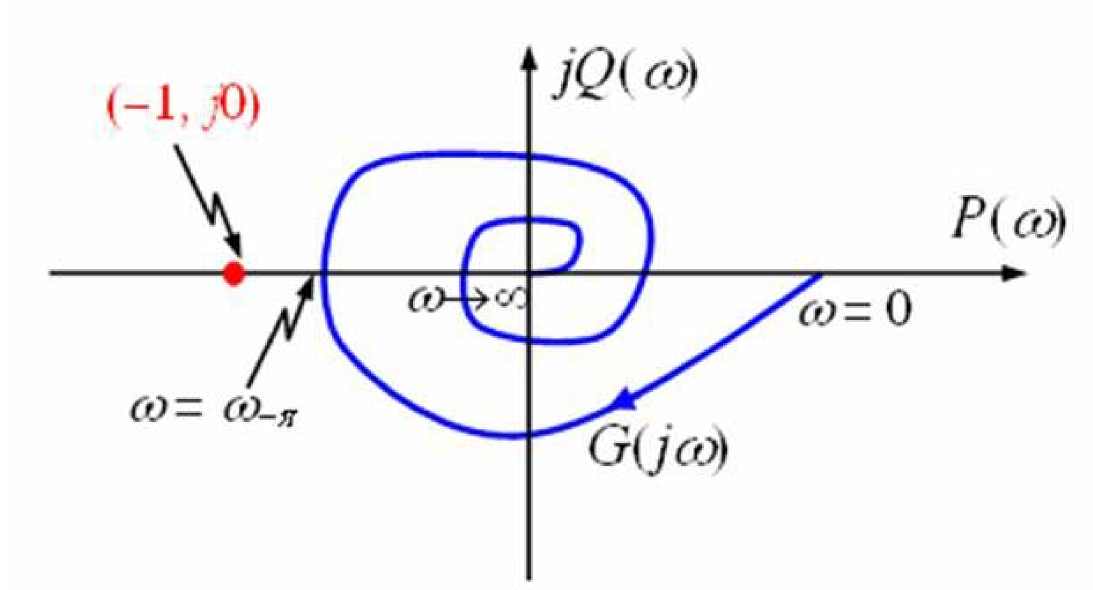
- Đặc tính tần số của hệ thống là: $G(j\omega)=\dfrac{K}{(Tj\omega+1)^n}$

  - Biên độ: $$M(\omega)=\frac{K}{\left(\sqrt{T^2\omega^2+1}\right)^n}$$

  - Pha: $$\varphi(\omega)=-n\,tg^{-1}(T\omega)$$

Tiêu chuẩn ổn định Nyquist – Thí dụ 4 (tt)

- Biểu đồ Nyquist:



- Điều kiện ổn định: đường cong Nyquist không bao điểm (–1,j0). Theo biểu đồ Nyquist, điều này xảy ra khi:

$$M(\omega_{-\pi}) < 1$$

Tiêu chuẩn ổn định Nyquist – Thí dụ 4 (tt)

★ Ta có: $\varphi(\omega_{-\pi}) = -ntg^{-1}(T\omega_{-\pi}) = -\pi$

$$\Rightarrow \quad tg^{-1}(T\omega_{-\pi}) = \frac{\pi}{n} \quad \Rightarrow \quad (T\omega_{-\pi}) = tg\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

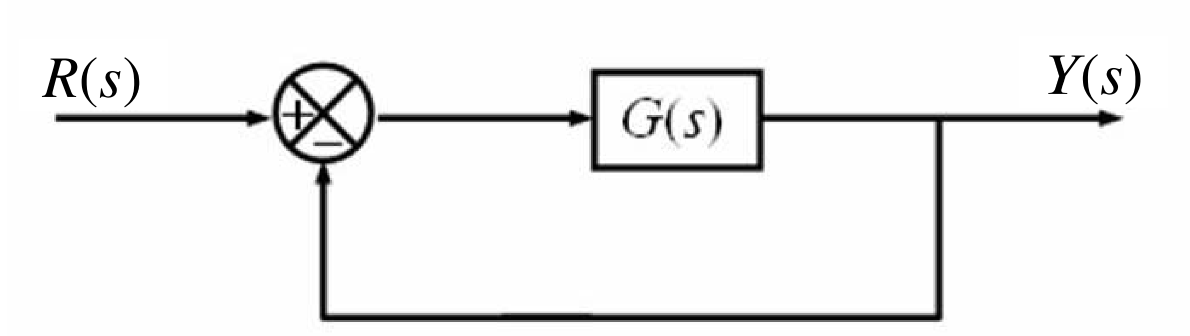
$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_{-\pi} = \frac{1}{T} tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

★ Do đó: $M(\omega_{-\pi}) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{K}{\left(\sqrt{T^2\left[\dfrac{1}{T} tg\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right]^2 + 1}\right)^n} < 1$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{K < \left(\sqrt{tg^2\left(\frac{\pi}{n}\right) + 1}\right)^n}$$

Tiêu chuẩn ổn định Bode

- Cho hệ thống hồi tiếp âm đơn vị, biết đặc tính tần số của hệ hở $G(s)$, bài toán đặt ra là xét tính ổn định của hệ thống kín $G_k(s)$.

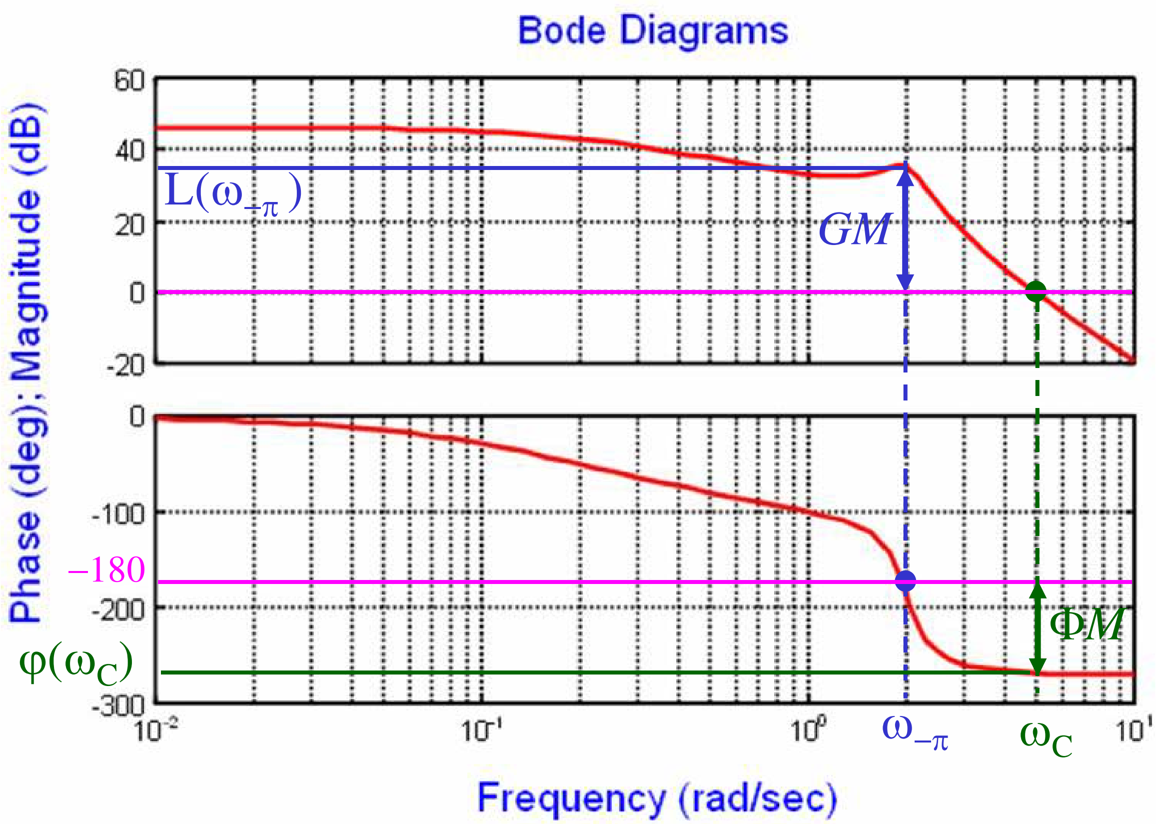


- **Tiêu chuẩn Bode:** Hệ thống kín $G_k(s)$ ổn định nếu hệ thống hở $G(s)$ có độ dự trữ biên và độ dự trữ pha dương:

$$\begin{cases} GM > 0 \\ \Phi M > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \text{Hệ thống ổn định}$$

Tiêu chuẩn ổn định Bode: Thí dụ

- Cho hệ thống hồi tiếp âm đơn vị, biết rằng hệ hở có biểu đồ Bode như hình vẽ. Xác định độ dự trữ biên, độ dự trữ pha của hệ thống hở. Hỏi hệ kín có ổn định không?



Theo biểu đồ Bode:

$\omega_c = 5$

$\omega_{-\pi} = 2$

$L(\omega_{-\pi}) = 35dB$

$\varphi(\omega_c) = -270^0$

$GM = -35dB$

$\Phi M = 180^0 + (-270^0) = -90^0$

Do $GM<0$ và $\Phi M<0$ nên hệ thống kín không ổn định.

Chú ý

- Trường hợp hệ thống hồi tiếp âm như hình vẽ, vẫn có thể áp dụng tiêu chuẩn ổn định Nyquist hoặc Bode, trong trường hợp này hàm truyền hở là $G(s)H(s)$.