

**ĐÁP ÁN ĐỀ KIỂM TRA HỌC KỲ 1/2016-2017 (06/10/2016)**  
**Môn: Tín hiệu và hệ thống - Thời gian: 80 phút không kể chép đề**

**Bài 1. (CDR 1) (2.5 điểm)**

(a)  $y(t) = \int_{-\infty}^{t/2} f(\tau) d\tau$ . Hệ thống không thỏa tính nhân quả vì ngõ ra ở hiện tại có phụ thuộc vào ngõ vào ở tương lai. Ví dụ xét tại thời điểm hiện tại  $t = -1s$  khi đó  $y(-1) = \int_{-\infty}^{-1/2} f(\tau) d\tau$ , rõ ràng ngõ ra tại thời điểm  $-1s$  phụ thuộc vào mọi giá trị của ngõ vào từ  $-\infty$  tới  $-1/2s$ , trong đó  $-1/2s$  là thời điểm tương lai so với  $-1s$ . Tuy nhiên nếu xét ở thời điểm hiện tại  $t \geq 0$  thì hệ thống là nhân quả.

(b)  $y(t) = \cos[f(t)]$ . Hệ thống này ổn định vì với mọi ngõ vào bị chặn  $|f(t)| \leq B$  thì ngõ ra cũng bị chặn  $|y(t)| = |\cos[f(t)]| \leq 1$ .

(c)  $y(t) = f(1 - 2t)$ . Không thỏa tính bất biến vì khi cấp tín hiệu  $f(t) \rightarrow y(t) = f(1 - 2t) \rightarrow y(t - t_0) = f(1 - 2t + 2t_0)$ . Nhưng khi cấp  $f_1(t) = f(t - t_0)$  thì ngõ ra  $y_1(t) = f_1(1 - 2t) = f(1 - 2t - t_0) \neq y(t - t_0)$

(d)  $y(t) = f(t) \cos(100t)$ . Hệ thống thỏa tính tuyến tính vì:

Khi cấp ngõ vào  $f_1(t) \rightarrow$  ngõ ra  $y_1(t) = f_1(t) \cos(100t)$

Khi cấp ngõ vào  $f_2(t) \rightarrow$  ngõ ra  $y_2(t) = f_2(t) \cos(100t)$

Và khi cấp ngõ vào  $f(t) = K_1 f_1(t) + K_2 f_2(t) \rightarrow$  ngõ ra  $y(t) = f(t) \cos(100t) = K_1 f_1(t) \cos(100t) + K_2 f_2(t) \cos(100t) = K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t)$

**Rubric bài 1:**

**Mức 0:** Không làm gì hoặc có làm nhưng không liên quan.

**Mức 1:** Có kết luận nhưng việc giải thích dù có liên quan nhưng hoàn toàn không hợp lý.

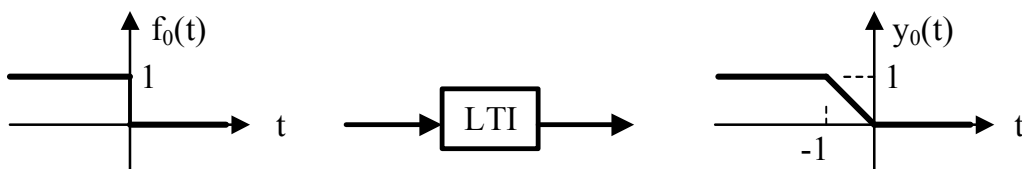
**Mức 2:** Kết luận & giải thích chính xác 2-3 câu (các câu còn lại không làm hoặc có kết luận nhưng giải thích hoàn toàn không hợp lý)

**Mức 3:** Kết luận & giải thích chính xác 2-3 câu (các câu còn lại có kết luận đúng nhưng việc giải thích có sai sót nhỏ).

**Mức 4:** Kết luận & giải thích chính xác cả 4 câu.

**Bài 2. (CDR 1) (1.5 điểm)**

Theo giả thuyết khi cấp ngõ vào  $f_0(t) = u(-t)$  thì ngõ ra là  $y_0(t) = 1 - (1+t)u(t+1) + tu(t)$  như hình vẽ:

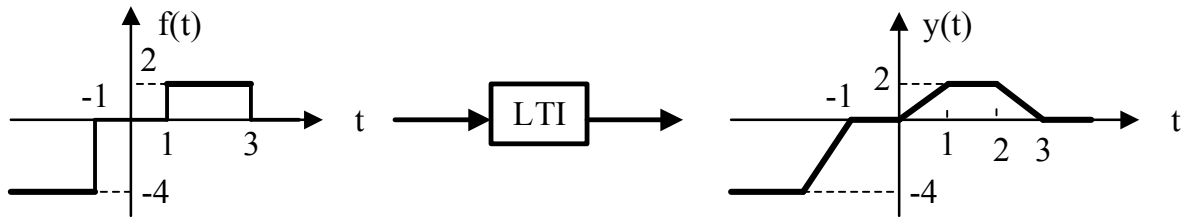


Ta có  $f(t) = -4f_0(t+1) - 2f_0(t-1) + 2f_0(t-3)$

Do hệ thống thỏa tính bất biến nên khi ngõ vào là  $f_k(t) = f_0(t - t_k)$  thì ngõ ra là  $y_k(t) = y_0(t - t_k)$

Do hệ thống tuyến tính nên khi ngõ vào là  $f(t) = \sum_{k=1}^N a_k f_k(t)$  thì ngõ ra  $y(t) = \sum_{k=1}^N a_k y_k(t)$

Áp dụng 2 tính chất trên ta có: với ngõ vào  $f(t)$  như đề bài thì ngõ ra là  $y(t) = -4y_0(t+1) - 2y_0(t-1) + 2y_0(t-3)$  có dạng như hình vẽ sau:



### Rubric bài 2:

**Mức 0:** Không thể hiện việc giải bài toán.

**Mức 1:** Thể hiện việc giải bài toán nhưng hoàn toàn không hợp lý (không áp dụng tính LTI mà dùng một phương pháp khác thiếu cơ sở hoặc dùng Laplace một phía,...).

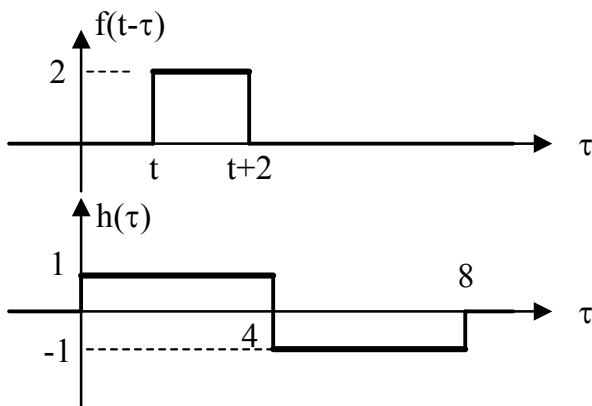
**Mức 2:** Thể hiện việc biểu diễn tín hiệu và dùng tính chất LTI để giải bài toán nhưng có nhiều chỗ sai trong việc biểu diễn tín hiệu & thể hiện hình ảnh.

**Mức 3:** Thể hiện việc biểu diễn tín hiệu và dùng tính chất LTI để giải bài toán và có sai sót nhỏ trong việc biểu diễn tín hiệu & thể hiện hình ảnh.

**Mức 4:** Thể hiện việc biểu diễn tín hiệu và dùng tính chất LTI để giải bài toán một cách chính xác và đầy đủ.

### **Bài 3. (CĐR 2.1) (2.5 điểm)**

(a) Ta có:  $y(t)=f(t)*h(t)=h(t)*f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau$  với  $h(\tau)$  và  $f(t-\tau)$  như hình vẽ:



$$+ t+2 < 0 \rightarrow t < -2 \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau = 0$$

$$+ t+2 > 0 \text{ và } t < 0 \rightarrow -2 < t < 0 \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau = \int_0^{t+2} 2d\tau = 2t + 4$$

$$+ t > 0 \text{ và } t+2 < 4 \rightarrow 0 < t < 2 \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau = \int_t^{t+2} 2d\tau = 4$$

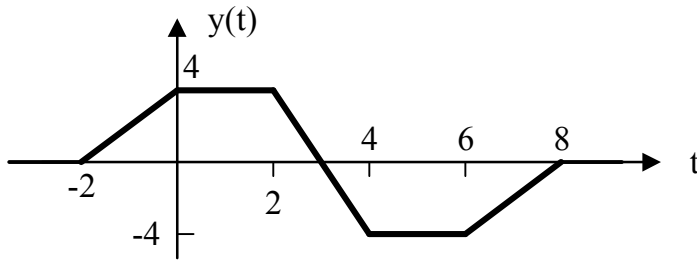
$$+ t < 4 \text{ và } t+2 > 4 \rightarrow 2 < t < 4 \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau = \int_t^4 2d\tau - \int_4^{t+2} 2d\tau = -4t + 12$$

$$+ t > 4 \text{ và } t+2 < 8 \rightarrow 4 < t < 6 \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau = -\int_t^{t+2} 2d\tau = -4$$

$$+ t < 8 \text{ và } t+2 > 8 \rightarrow 6 < t < 8 \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau = -\int_t^8 2d\tau = 2t - 16$$

$$+ t > 8 \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau = 0$$

Vậy ngõ ra  $y(t)$  có dạng:



(b) Với ngõ vào  $f(t)$  bất kỳ ta có:

$$y(t) = h(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau = \int_0^4 f(t - \tau) d\tau - \int_4^8 f(t - \tau) d\tau$$

+ Ta có với mọi thời điểm hiện tại  $t$  thì ngõ ra ở thời điểm  $t$  chỉ phụ thuộc vào ngõ vào  $f(t - \tau)$  với  $\tau$  từ 0 tới 8  $\rightarrow$  ngõ ra ở hiện tại phụ thuộc vào mọi giá trị của ngõ vào ở tính từ trước đó 8s tới hiện tại hay ngõ ra không phụ thuộc vào ngõ vào trong tương lai  $\rightarrow$  hệ thống nhân quả

+ Ta có với mọi ngõ vào bị chặn  $|f(t)| \leq B$  thì ngõ ra cũng bị chặn  $|y(t)| = \left| \int_0^4 f(t - \tau) d\tau - \int_4^8 f(t - \tau) d\tau \right|$

$\rightarrow |y(t)| \leq \int_0^4 |f(t - \tau)| d\tau + \int_4^8 |f(t - \tau)| d\tau \leq 8B \rightarrow$  hệ thống ổn định.

### Rubric bài 3:

**Mức 0:** Không thể hiện việc giải bài toán hoặc dùng một cách nào đó không phải là tích chập.

**Mức 1:** Thể hiện việc giải bài toán nhưng hoàn toàn không hợp lý (tính tích chập theo một cách gì đó tự nghĩ ra thiếu cơ sở và/hoặc có dùng tích chập để CM tính nhân quả & ổn định nhưng cũng theo một lý giải nào đó không liên quan hoặc thiếu cơ sở).

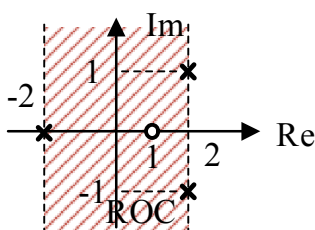
**Mức 2:** Thể hiện việc giải bài toán hợp lý nhưng còn nhiều lỗi (Chỉ làm đúng, đầy đủ một trong 2 câu (a) và (b) câu còn lại không làm hoặc có làm nhưng sai. **Hoặc** làm cả 2 câu nhưng trong cả 2 câu đều có sai sót nhỏ).

**Mức 3:** Thể hiện việc giải bài toán hợp lý nhưng có sai sót nhỏ (Làm đúng, đầy đủ một trong 2 câu (a) và (b) câu còn lại có làm và có sai sót nhỏ).

**Mức 4:** Thể hiện việc giải bài chính xác và đầy đủ

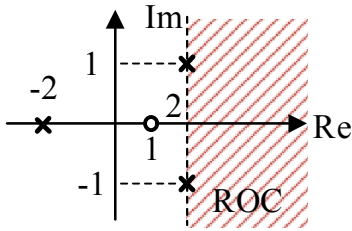
### Bài 4. (CĐR 2.4) (1.5 điểm)

(a) Nếu hệ thống là ổn định thì  $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt$  hữu hạn còn điều kiện hội tụ của  $H(s)$  là  $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)e^{-\sigma t}| dt$  hữu hạn. Đối chiếu 2 điều kiện này ta thấy các biến phức  $s$  có  $\text{Re}\{s\} = \sigma = 0$  thuộc ROC hay trục ảo thuộc ROC. Đối chiếu với tính chất của ROC (một dải song song trục ảo & không chứa cực) ta rút ra ROC là  $-2 < \text{Re}\{s\} < 2$  như hình vẽ



Theo tính chất của ROC  $\rightarrow$  với ROC này  $h(t)$  là tín hiệu 2 phía hay  $h(t) \neq 0$  khi  $t < 0 \rightarrow$  hệ thống không nhân quả.

(b) Nếu hệ thống là nhân quả thì  $h(t) = 0$  khi  $t < 0 \rightarrow h(t)$  là tín hiệu phía phải  $\rightarrow$  ROC nằm bên phải cực bên phải nhất như hình vẽ:



Với ROC này thì  $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)e^{-\sigma t}| dt$  là vô hạn khi  $\sigma \leq 2$  hay  $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt$  là vô hạn  $\rightarrow$  hệ thống không ổn định.

#### **Rubric bài 4:**

**Mức 0:** Không thể hiện việc giải bài toán.

**Mức 1:** Thể hiện việc giải bài toán nhưng hoàn toàn không hợp lý (Chỉ đưa ra kết luận mà không giải thích hoặc có giải thích nhưng theo một cách nào đó thiếu cơ sở).

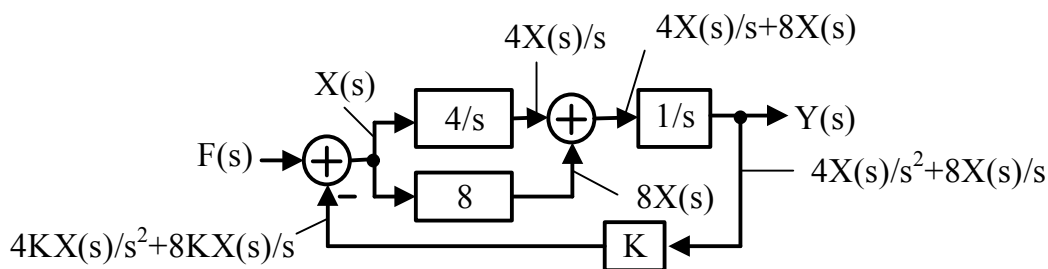
**Mức 2:** Thể hiện việc giải bài toán hợp lý nhưng còn nhiều lỗi (Chỉ làm đúng, đầy đủ một trong 2 câu (a) và (b) câu còn lại không làm hoặc có làm nhưng sai. **Hoặc** làm cả 2 câu nhưng trong cả 2 câu đều có sai sót nhỏ).

**Mức 3:** Thể hiện việc giải bài toán hợp lý nhưng có sai sót nhỏ (Làm đúng, đầy đủ một trong 2 câu (a) và (b) câu còn lại có làm và có sai sót nhỏ).

**Mức 4:** Thể hiện việc giải bài chính xác và đầy đủ

#### **Bài 5. (CĐR 2.5) (2.0 điểm)**

(a) Xác định hàm truyền  $H(s)$



$$\text{Ta có: } Y(s) = \left( \frac{4}{s^2} + \frac{8}{s} \right) X(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{8s + 4}{s^2}$$

$$\text{Và: } X(s) = F(s) - K \left( \frac{4}{s^2} + \frac{8}{s} \right) X(s) \Rightarrow F(s) = \left( \frac{s^2 + 8Ks + 4K}{s^2} \right) X(s) \Rightarrow \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{s^2}{s^2 + 8Ks + 4K}$$

$$\text{Vậy: } H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{X(s)}{F(s)} \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{8s + 4}{s^2 + 8Ks + 4K}$$

$$\text{Suy ra: } s^2 Y(s) + 8Ks Y(s) + 4KY(s) = 8sF(s) + 4F(s)$$

Với  $f(t)$  là tín hiệu nhân quả và  $h(t)$  là tín hiệu nhân quả  $\rightarrow$  áp dụng biến đổi Laplace ngược (các điều kiện đầu bằng 0) ta có phương trình vi phân mô tả cho hệ thống như sau:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 8K \frac{dy(t)}{dt} + 4Ky(t) = 8 \frac{df(t)}{dt} + 4f(t)$$

(b) Với  $K=1$  ta có:  $H(s) = \frac{8s + 4}{s^2 + 8s + 4}$

Với ngõ vào  $f(t)=u(t) \rightarrow F(s)=1/s \rightarrow Y(s)=F(s)H(s) = \frac{1}{s} \frac{8s + 4}{s^2 + 8s + 4} \approx \frac{1}{s} - \frac{1,077}{s + 7,464} + \frac{0,077}{s + 0.536}$

Suy ra:  $y(t) = (1 - 1,077e^{-7,464t} + 0,077e^{-0.536t})u(t)$

(c) Tìm  $K$  để hệ thống ổn định:

Do hệ thống nhân quả nên HT muốn ổn định thì các cực của hệ thống phải nằm ở nửa trái của mặt phẳng phức (LHP). HT có 2 cực là nghiệm của  $s^2 + 8Ks + 4K = 0$ . Nếu  $K=0 \rightarrow$  hệ thống có cực kép  $s_{1,2}=0$  nên hệ thống không ổn định. Với  $K$  khác 0  $\rightarrow$  hệ thống có 2 cực thỏa:

$$\begin{cases} s_1 + s_2 = -8K \\ s_1 s_2 = 4K \end{cases}$$

Vậy để 2 cực nằm ở LHP thì  $\begin{cases} s_1 + s_2 = -8K < 0 \\ s_1 s_2 = 4K > 0 \end{cases} \Rightarrow K > 0$

Vậy để hệ thống ổn định thì  $K > 0$ .

#### **Rubric bài 5:**

**Mức 0:** Không thể hiện việc giải bài toán. Hoặc không liên quan.

**Mức 1:** Thể hiện việc giải bài toán nhưng hoàn toàn không hợp lý (Đưa ra kết quả  $H(s)$  mà không có giải thích hoặc dùng một phương pháp nào đó thiếu cơ sở, sau đó có dùng  $H(s)$  để giải quyết các vấn đề còn lại dù rằng là đúng).

**Mức 2:** Thể hiện việc giải bài toán hợp lý nhưng còn nhiều lỗi (Thể hiện việc xác định  $H(s)$  hoàn toàn hợp lý và chính xác nhưng chưa làm các câu còn lại hoặc có làm nhưng còn nhiều lỗi. **Hoặc** thể hiện hợp lý việc tìm  $H(s)$  nhưng  $H(s)$  sai (do sai sót) và sau đó dùng  $H(s)$  này để làm các câu còn lại hoàn toàn chính xác theo kết quả sai của  $H(s)$ ).

**Mức 3:** Thể hiện việc giải bài toán hợp lý nhưng có sai sót nhỏ (Thể hiện việc xác định  $H(s)$  hoàn toàn hợp lý và chính xác, các câu còn lại có sai sót nhỏ).

**Mức 4:** Thể hiện việc giải bài chính xác và đầy đủ

-----Hết-----