Lecture 12

Chương 5. Phân tích phổ tín hiệu và ứng dụng (cont…)

5.3. Ứng dụng xử lý phổ tín hiệu (cont…)

5.3. Ứng dụng xử lý phổ tín hiệu

5.3.3. Điều biên xung và lấy mẫu

a) Điều biên xung (PAM)

b) Ghép kênh theo thời gian (TDM)

c) Lý thuyết lấy mẫu (Sampling)

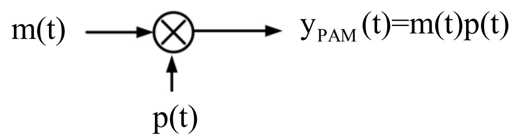
d) Biến đổi Fourier rời rạc (DFT)

e) Biến đổi Fourier nhanh (FFT)

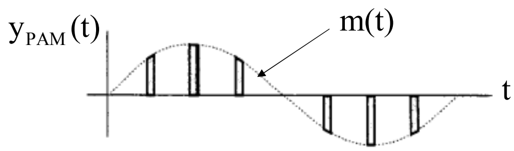
5.3.3 Điều biên xung và lấy mẫu

a) Điều biên xung (PAM)

a1) Sơ đồ điều biên xung (PAM)



- m(t): tín hiệu mang tin tức có phổ giới hạn tới tần số ω_M
- p(t): chuỗi xung vuông tuần hoàn để đ/chế tín hiệu mang tin tức
- $y_{PAM}(t)$: tín hiệu điều biên xung



a2) Phổ của tín hiệu điều biên xung

- Ta có $m(t) \leftrightarrow M(\omega)$
- Viết chuỗi Fourier cho chuỗi xung tuần hoàn p(t)

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n e^{jn\omega_c t}$$

- Xác định tín hiệu điều biên xung:

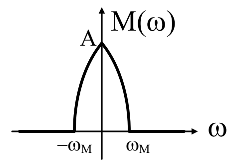
$$y_{PAM}(t)=m(t)p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n m(t) e^{jn\omega_c t}$$

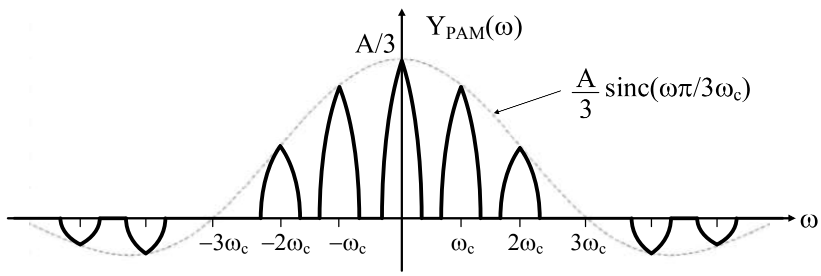
- Xác định phổ của tín hiệu điều biên xung:

$$Y_{PAM}(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n M(\omega-n\omega_c)$$

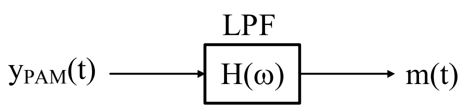
a2) Phổ của tín hiệu điều biên xung

<u>Ví dụ</u>: Cho tín hiệu m(t) có phổ M(ω) như hình vẽ và p(t) là chuỗi xung vuông đơn cực tuần hoàn với tần số $\omega_c = 3\omega_M$, biên độ bằng 1 và chu kỳ tích cực d=1/3





a3) Khôi phục tín hiệu tin tức từ tín hiệu PAM



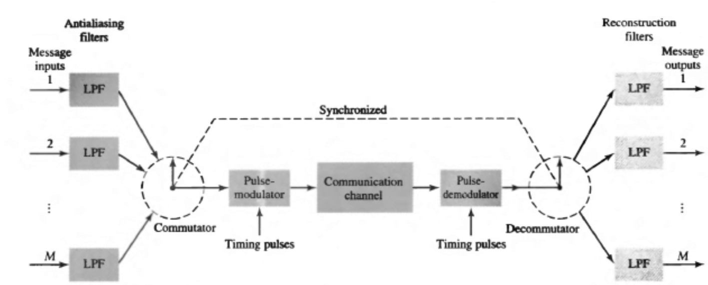
$$H(\omega)=\frac{1}{d}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$$

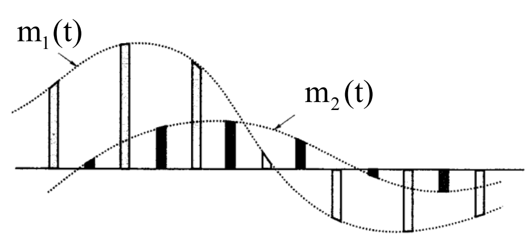
- d là chu kỳ tích cực của chuỗi xung vuông p(t)
- Phạm vị của ω_0: $\omega_M \le \omega_0 < \omega_c - \omega_M$

5.3.3 Điều biên xung và lấy mẫu

b) Ghép kênh theo thời gian (TDM)

b) Ghép kênh theo thời gian



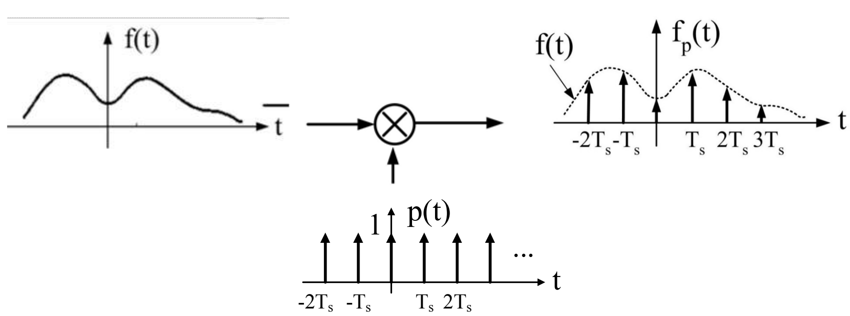


5.3.3 Điều biên xung và lấy mẫu

c) Lấy mẫu

c) Lấy mẫu

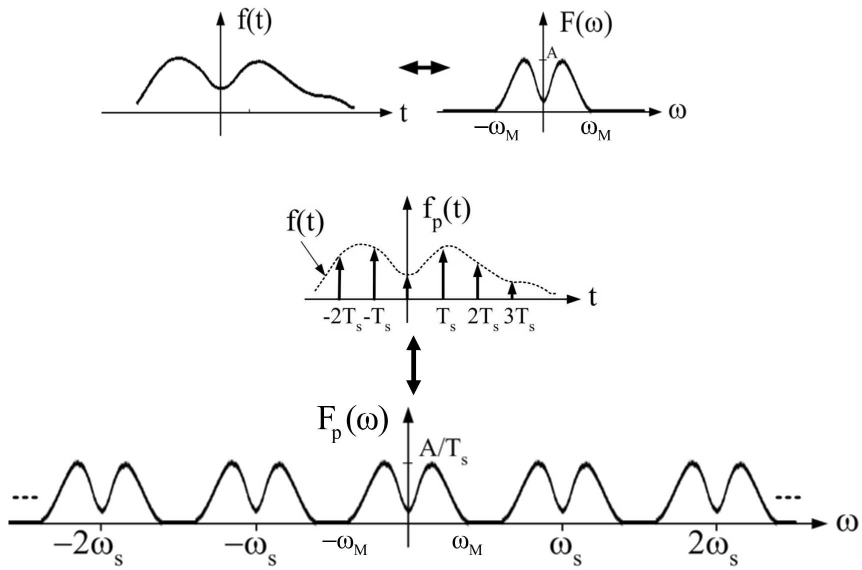
- Sơ đồ lấy mẫu



- Phổ của tín hiệu lấy mẫu:

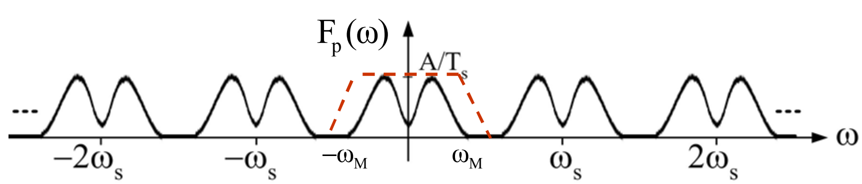
$$F_P(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n F(\omega-n\omega_s)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\tfrac{1}{T_s}F(\omega-n\omega_s)\ ,\omega_s=\tfrac{2\pi}{T_s}$$

c) Lấy mẫu



c) Lấy mẫu

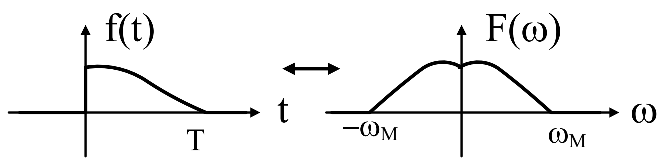
<u>Định lý lấy mẫu</u>: Tín hiệu có phổ giới hạn là $\omega_M=2\pi B$ có thể khôi phục chính xác từ các mẫu của nó khi được lấy mẫu đều đặn với tốc độ $F_s \geq 2B$ mẫu/s bằng bộ lọc thông thấp. Nói cách khác tần số lấy mẫu nhỏ nhất là $\omega_s=2\omega_M=4\pi B$



d) Biến đổi Fourier rời rạc (DFT)

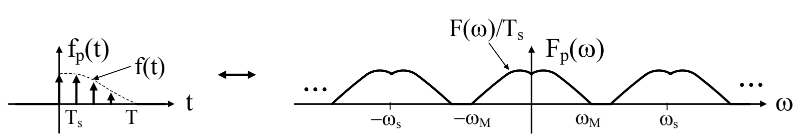
- Mục đích: thiết lập mối quan hệ giữa các mẫu trong miền thời gian với các mẫu trong miền tần số

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega} \qquad \boxed{F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt}$$

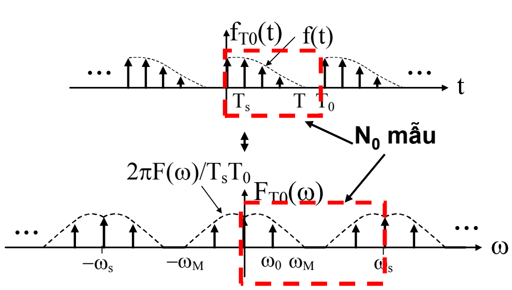


d) Biến đổi Fourier rời rạc (DFT)

- Xét tín hiệu f(t) được lấy mẫu với chu kỳ T_s



- Xét tín hiệu tuần hoàn $f_{T0}(t)$ do lặp lại $f_p(t)$ với chu kỳ T_0:



$$\boxed{N_0=T_0/T_s=\omega_s/\omega_0}$$

d) Biến đổi Fourier rời rạc (DFT)

- Biến đổi DFT thuận:
  - Do f(t) chỉ tồn tại từ 0 đến T_0 (tương ứng với N_0 mẫu):

$$f_p(t)=\sum_{k=0}^{N_0-1} f(kT_s)\delta(t-kT_s) \Rightarrow F_p(\omega)=\sum_{k=0}^{N_0-1} f(kT_s)e^{-j\omega kT_s}$$

  - Mặt khác trong đoạn $-\omega_s/2$ đến $\omega_s/2$ (tương ứng với N_0 mẫu):

$$F_p(\omega)=\frac{F(\omega)}{T_s} \Rightarrow F(r\omega_0)=T_sF_p(r\omega_0)=T_s\sum_{k=0}^{N_0-1} f(kT_s)e^{-jr\omega_0 kT_s}$$

  - Đặt $\Omega_0=\omega_0T_s=2\pi/N_0$; $F_r=F(r\omega_0)$: mẫu thứ r của $F(\omega)$; $f_k=T_sf(kT_s)$: mẫu thứ k của f(t); ta có:

$$\boxed{F_r=\sum_{k=0}^{N_0-1} f_k e^{-jr\Omega_0 k}}$$ (Biến đổi DFT thuận)

d) Biến đổi Fourier rời rạc (DFT)

- Biến đổi DFT ngược: nhân DFT thuận với $e^{jm\Omega_0 r}$ sau đó lấy tổng:

$$\sum_{r=0}^{N_0-1} F_r e^{jm\Omega_0 r}=\sum_{r=0}^{N_0-1}\left[\sum_{k=0}^{N_0-1} f_k e^{-jr\Omega_0 k}\right]e^{jm\Omega_0 r}$$

$$\Rightarrow \sum_{r=0}^{N_0-1} F_r e^{jm\Omega_0 r}=\sum_{k=0}^{N_0-1} f_k\left[\sum_{r=0}^{N_0-1} e^{j(m-k)\Omega_0 r}\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{r=0}^{N_0-1} F_r e^{jm\Omega_0 r}=\begin{cases}0;\ k\neq m\\ N_0f_k=N_0f_m;\ k=m\end{cases}$$

$$\boxed{f_k=\frac{1}{N_0}\sum_{r=0}^{N_0-1} F_r e^{jr\Omega_0 k}}$$ (Biến đổi DFT ngược)

e) Biến đổi Fourier nhanh (FFT)

Đưa ra bởi Turkey and Cooley năm 1965, N_0 phải là lũy thừa của 2

Giảm khối lượng tính toán: $\boxed{N_0^2 \to N_0 \log N_0}$

$$\boxed{f_k = \frac{1}{N_0}\sum_{r=0}^{N_0-1} F_r e^{jr\Omega_0 k}} \boxed{F_r = \sum_{k=0}^{N_0-1} f_k e^{-jr\Omega_0 k}}$$

Nhân: N_0
Cộng: N_0-1

Tổng cộng cho các hệ số: N_0N_0 phép nhân và $N_0(N_0-1)$ phép cộng

- Đặt: $\boxed{W_{N_0} = e^{-j(2\pi/N_0)} = e^{-j\Omega_0}}$
- Các biểu thức DFT được viết lại:

$$\boxed{F_r = \sum_{k=0}^{N_0-1} f_k W_{N_0}^{kr}} \quad \boxed{f_k = \frac{1}{N_0}\sum_{r=0}^{N_0-1} F_r W_{N_0}^{-kr}}$$

e) Biến đổi Fourier nhanh (FFT)

- Chia f_k thành 2 chuỗi: chẵn và lẻ theo số thứ tự:

$$\underbrace{f_0, f_4, f_6, \ldots, f_{N_0-2}}_{sequence\ g_k}\ \underbrace{f_1, f_3, f_5, \ldots, f_{N_0-1}}_{sequence\ h_k}$$

Biểu thức DFT được viết lại:

$$F_r = \sum_{k=0}^{\frac{N_0}{2}-1} f_{2k} W_{N_0}^{2kr} + \sum_{k=0}^{\frac{N_0}{2}-1} f_{2k+1} W_{N_0}^{(2k+1)r}$$

Ta có: $W_{\frac{N_0}{2}} = W_{N_0}^2$

$$\Rightarrow F_r = \sum_{k=0}^{\frac{N_0}{2}-1} f_{2k} W_{\frac{N_0}{2}}^{kr} + W_{N_0}^r \sum_{k=0}^{\frac{N_0}{2}-1} f_{2k+1} W_{\frac{N_0}{2}}^{kr} = G_r + W_{N_0}^r H_r$$

e) Biến đổi Fourier nhanh (FFT)

$$\Rightarrow F_r = \sum_{k=0}^{\frac{N_0}{2}-1} f_{2k} W_{\frac{N_0}{2}}^{kr} + W_{N_0}^{r} \sum_{k=0}^{\frac{N_0}{2}-1} f_{2k+1} W_{\frac{N_0}{2}}^{kr} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_r = G_r + W_{N_0}^r H_r}$$

$$(0 \le r \le N_0 - 1)$$

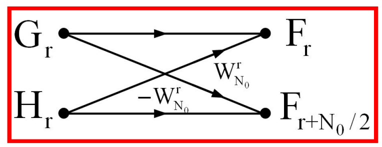
- Do G_r và H_r là DFT $N_0/2$ điểm nên nó có tính tuần hoàn:

$$G_{r+\frac{N_0}{2}} = G_r \;\; \& \; H_{r+\frac{N_0}{2}} = H_r$$

Mặt khác: $W_{N_0}^{r+\frac{N_0}{2}} = W_{N_0}^{\frac{N_0}{2}} W_{N_0}^r = e^{-j\pi} W_{N_0}^r = -W_{N_0}^r$

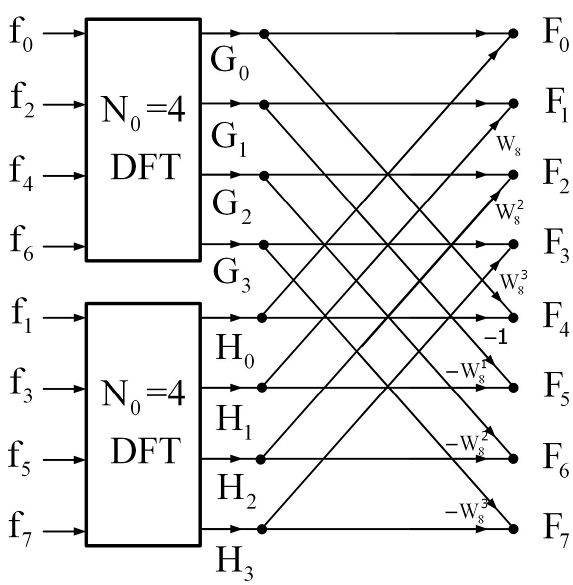
$$\Rightarrow F_{r+\frac{N_0}{2}} = G_{r+\frac{N_0}{2}} + W_{N_0}^{r+\frac{N_0}{2}} H_{r+\frac{N_0}{2}} \Rightarrow \boxed{F_{r+\frac{N_0}{2}} = G_r - W_{N_0}^r H_r}$$

$$\boxed{\begin{aligned} F_r &= G_r + W_{N_0}^r H_r;\; 0 \le r \le \frac{N_0}{2} - 1 \\ F_{r+\frac{N_0}{2}} &= G_r - W_{N_0}^r H_r;\; 0 \le r \le \frac{N_0}{2} - 1 \end{aligned}} \Leftrightarrow$$

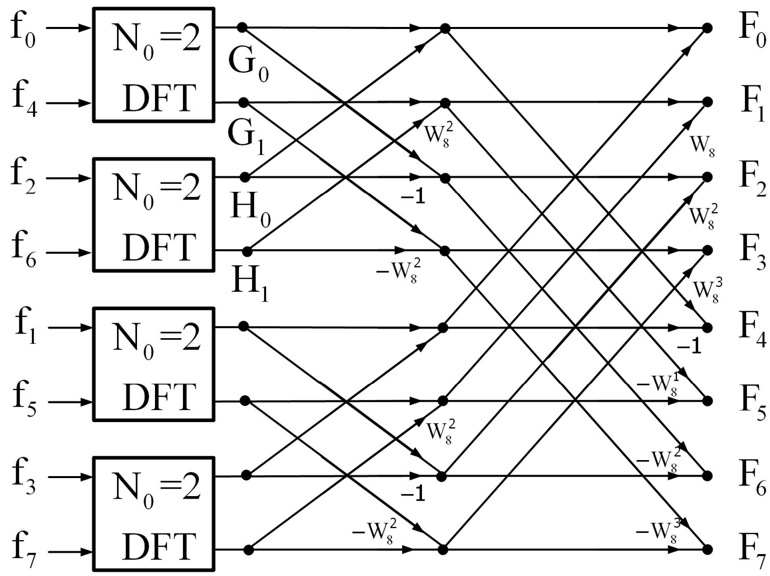


- Áp dụng tính DFT N_0=8 điểm:

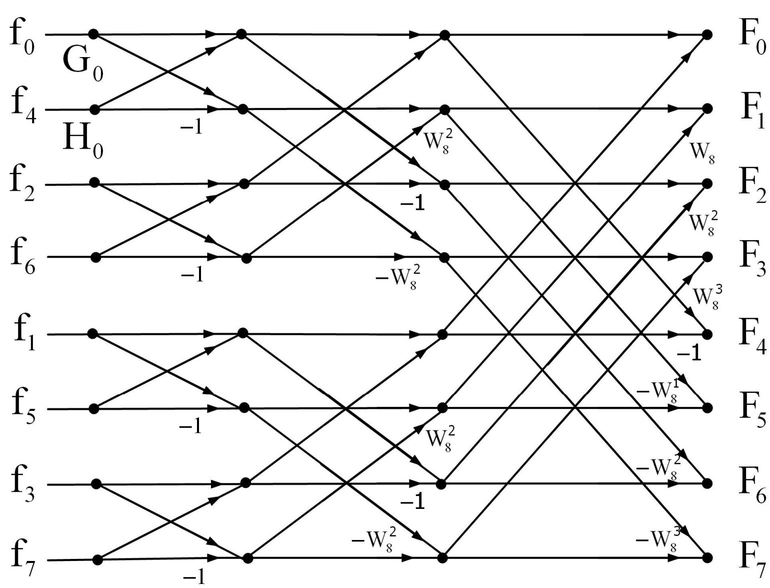
e) Biến đổi Fourier nhanh (FFT)



e) Biến đổi Fourier nhanh (FFT)

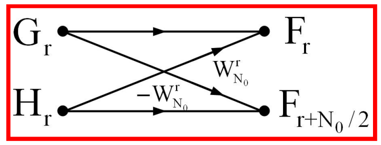


e) Biến đổi Fourier nhanh (FFT)



e) Biến đổi Fourier nhanh (FFT)

$$\boxed{\begin{aligned} F_r &= G_r + W_{N_0}^r H_r;\ 0 \le r \le \frac{N_0}{2} - 1 \\ F_{r+\frac{N_0}{2}} &= G_r - W_{N_0}^r H_r;\ 0 \le r \le \frac{N_0}{2} - 1 \end{aligned}} \Leftrightarrow$$

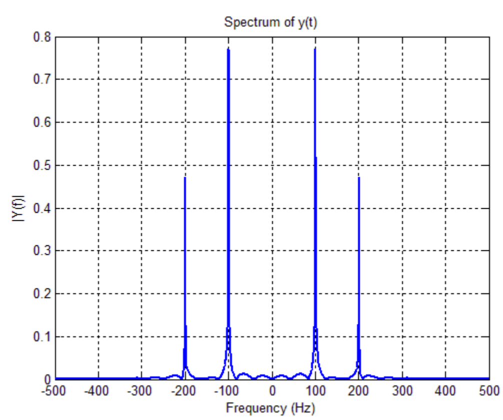


❑ Số phép toán nhân và cộng dùng để tính DFT dùng giải thuật FFT:

- Số phép toán nhân: $\boxed{\frac{N_0}{2}\log_2 N_0}$
- Số phép toán cộng: $\boxed{N_0 \log_2 N_0}$

e) Biến đổi Fourier nhanh (FFT)

```
Fs = 1000;T = 1/Fs;
L = 1000;
t=(-L/2:L/2)*T;
y=2*sin(2*pi*100*t)+sin(2*pi*200*t);
NFFT = 2^nextpow2(L);
Y = fft(y,NFFT)/Fs;
f = Fs/2*linspace(-1,1,NFFT);
plot(f,abs(fftshift(Y)),'Linewidth',2);
title('Spectrum of y(t)');xlabel('Frequency (Hz)')
ylabel('|Y(f)|');grid on;
```



e) Biến đổi Fourier nhanh (FFT)

```
Fs = 1000;T = 1/Fs;
L = 10000;
t=(-L/2:L/2)*T;
y=2*sin(2*pi*100*t)+sin(2*pi*200*t);
NFFT = 2^nextpow2(L);
Y = fft(y,NFFT)/Fs;
f = Fs/2*linspace(-1,1,NFFT);
plot(f,abs(fftshift(Y)),'Linewidth',2);
title('Spectrum of y(t)');xlabel('Frequency (Hz)')
ylabel('|Y(f)|');grid on;
```