ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC KỲ 1/2015-2016 - TÍN HIỆU & HỆ THỐNG

Ngày thi: 11/12/2015 - Thời gian: 120 phút không kể chép đề

Bài 1. (CĐR 2.1 - 1.0 điểm)

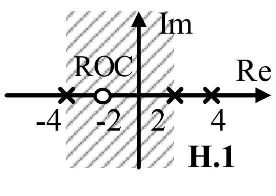
(a) Gọi f(t) là ngõ vào, y(t) là ngõ ra của hệ thống, ta có: $y(t) = f(t) * h(t) = h(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) f(t-\tau)\, d\tau$.

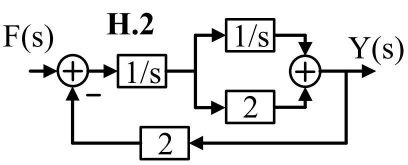
Do h(t)=0 khi t<0 nên $y(t) = \int_{0}^{+\infty} h(\tau) f(t-\tau)\, d\tau$. Với kết quả này ta có ngõ ra ở thời điểm hiện tại t phụ thuộc vào ngõ vào ở các thời điểm t-τ, với τ≥0, trước thời điểm t một khoảng thời gian τ. Như vậy ngõ ra chỉ phụ thuộc vào ngõ vào hiện tại và quá khứ nên hệ thống đã cho là nhân quả.

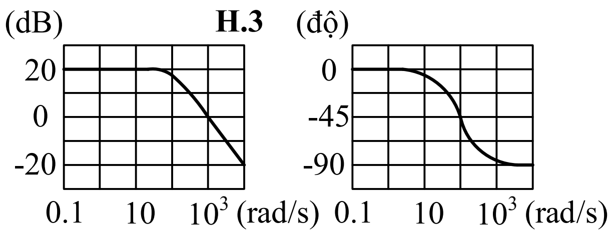
(b) Giả sử ngõ vào của hệ thống là bất kỳ, hữu hạn |f(t)|≤B thì $|y(t)| = |\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) f(t-\tau)\, d\tau|$, suy ra $|y(t)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)||f(t-\tau)|\, d\tau \le \mathbf{B}\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\, d\tau$. Do $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt$ hữu hạn, giả sử $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt = A$ thì $|y(t)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)||f(t-\tau)|\, d\tau \le AB$ cũng hữu hạn. Vậy hệ thống đã cho có ngõ vào bất kỳ hữu hạn thì ngõ ra cũng hữu hạn → hệ thống ổn định BIBO.

Bài 2. (CĐR 2.4 - 1.0 điểm)

- Điều kiện hội tụ hay miền hội tụ (ROC) của H(s) là tập hợp các biến phức s trong mặt phẳng phức thỏa điều kiện $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)e^{-\sigma t}|\, dt$ hữu hạn với $\sigma = \mathrm{Re}\{s\}; s = \sigma + j\omega$.
- Theo **H.1**, ta có $s = j\omega$ (những điểm trên trục ảo, $\sigma = 0$) thuộc miền hội tụ hay $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt$ hữu hạn, dùng kết quả bài 1(b) → hệ thống này ổn định BIBO.
- Giả sử hệ thống là nhân quả, theo bài 1(a) thì h(t)=0 khi t<0, mặt khác hệ thống là ổn định nên $\int_{0}^{+\infty} |h(t)|\, dt$ hữu hạn, tức h(t) là hàm suy giảm. Nhưng theo ROC trên H.1, ta thấy $\int_{0}^{+\infty} |h(t)e^{-3t}|\, dt$ là vô hạn hay $h(t)e^{-3t}$ là hàm tăng, điều này là vô lý vì hàm e^{-3t} là hàm suy giảm khi t>0. Như vậy hệ thống phải có h(t)≠0 khi t<0 để theo **H.1** là ổn định, tức $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt$ hữu hạn nhưng $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)e^{-3t}|\, dt$ là vô hạn vì khi t<0 thì e^{-3t} là hàm tăng dẫn tới $h(t)e^{-3t}$ là hàm tăng. Tóm lại hệ thống đã cho là không nhân quả.







Bài 3. (CĐR 2.5 - 1.0 điểm)

Từ **H.2**, ta có: $H(s) = \dfrac{(1/s)(1/s+2)}{1+2(1/s)(1/s+2)} = \dfrac{2s+1}{s^2+4s+2}$

Tra bảng f(t)=u(t)→ F(s)=1/s

Ngõ ra y(t)=f(t)*h(t) → Y(s)=F(s)H(s) $= \dfrac{2s+1}{s(s^2+4s+2)}$

Phân tích hàm Y(s), ta có: $Y(s) = \dfrac{2s+1}{s(s+0.586)(s+3.414)} = \dfrac{0.5}{s} + \dfrac{0.1}{s+0.586} - \dfrac{0.6}{s+3.414}$

Do ngõ vào là tín hiệu nhân quả và hệ thống cũng là nhân quả nên ngõ ra cũng là nhân quả tức y(t)=0 khi t<0. Tra bảng biến đổi Laplace một phía và dùng tính chất tuyến tính ta có: $y(t) = (0.5 + 0.1e^{-0.586t} - 0.6e^{-3.414t})u(t)$

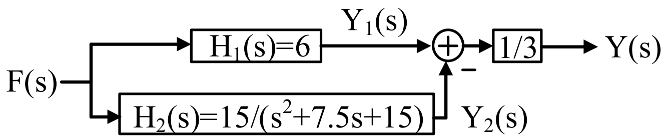
Bài 4. (CĐR 2.6 - 1.5 điểm)

Do hệ thống là nhân quả và là hệ thống thực nên f(t) cũng là tín hiệu nhân quả → y(t) cũng nhân quả, khi đó theo tính chất đạo hàm của biến đổi Laplace ta có: $\dfrac{d^k y(t)}{dt^k} \leftrightarrow s^k Y(s); \dfrac{d^k f(t)}{dt^k} \leftrightarrow s^k F(s)$.

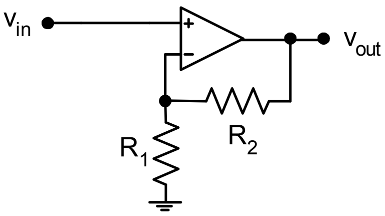
Áp dụng biến đổi Laplace lên hai vế của phương trình vi phân của hệ thống ta có: $2s^2Y(s) + 15sY(s) + 30Y(s) = 4s^2F(s) + 30sF(s) + 50F(s)$.

Do y(t)=f(t)*h(t) → Y(s)=F(s)H(s) → $H(s) = Y(s)/F(s) = \dfrac{4s^2+30s+50}{2s^2+15s+30} = 2 - \dfrac{1}{3}\dfrac{15}{s^2+7.5s+15}$

Hệ thống có thể được thực hiện theo sơ đồ khối sau:



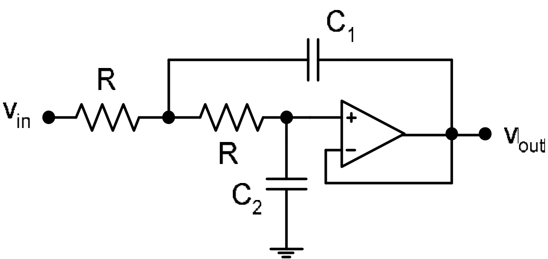
Thực hiện bộ khuếch đại $H_1(s)=6$ dùng Op-amp



+ $H_1(s)=1+R_2/R_1=6$

+ Chọn $R_2=100k\Omega$ → $R_1=20\ k\Omega$

Thực hiện hệ thống bậc 2 $H_2(s)=\dfrac{15}{s^2+7.5s+15}$ dùng Op-amp

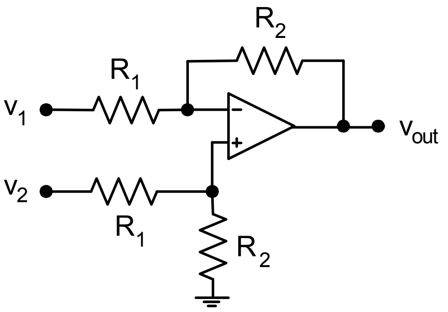


+ $H_2(s)=\dfrac{\frac{1}{R^2C_1C_2}}{s^2+\frac{2}{RC_1}s+\frac{1}{R^2C_1C_2}} = \dfrac{15}{s^2+7.5s+15}$

+ Chọn $C_1=10uF$ → $\dfrac{2}{RC_1} = 7.5 \rightarrow R = \dfrac{2}{7.5\times10^{-5}} = 26.7k\Omega$

+ Khi đó $\dfrac{1}{R^2C_1C_2} = 15 \rightarrow C_2 = \dfrac{1}{26.7^2\times10^6\times10^{-5}\times15} = 9.4uF$

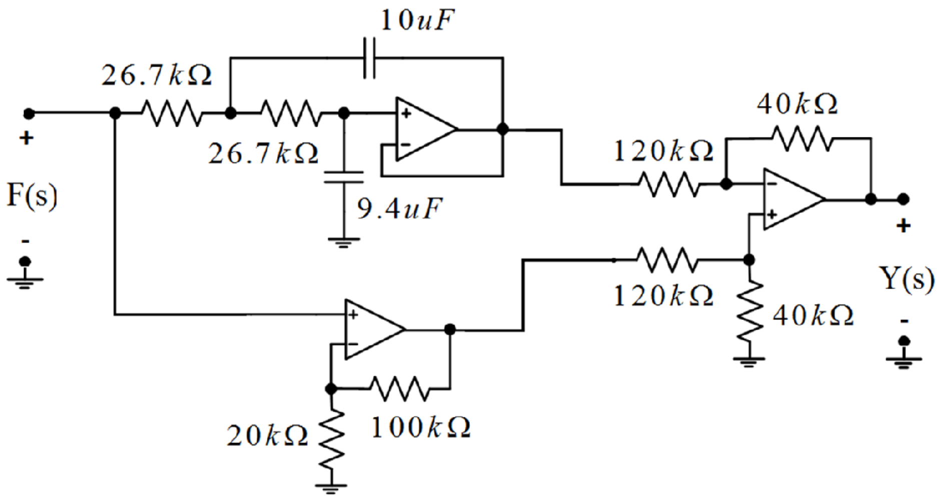
Thực hiện bộ khuếch đại trừ $Y(s)=\frac{1}{3}[Y_1(s)-Y_1(s)]$ dùng Op-amp



+ $Vout=\frac{R_2}{R_1}[V_2-V_1]=\frac{1}{3}[V_2-V_1]$

+ Chọn R$_1$=120kΩ→ R$_2$=40kΩ

Kết nối các khối con theo sơ đồ khối ta có mạch điện dùng Op-amp để thực hiện cho hệ thống:



Bài 5. (CĐR 2.7 - 1.0 điểm)

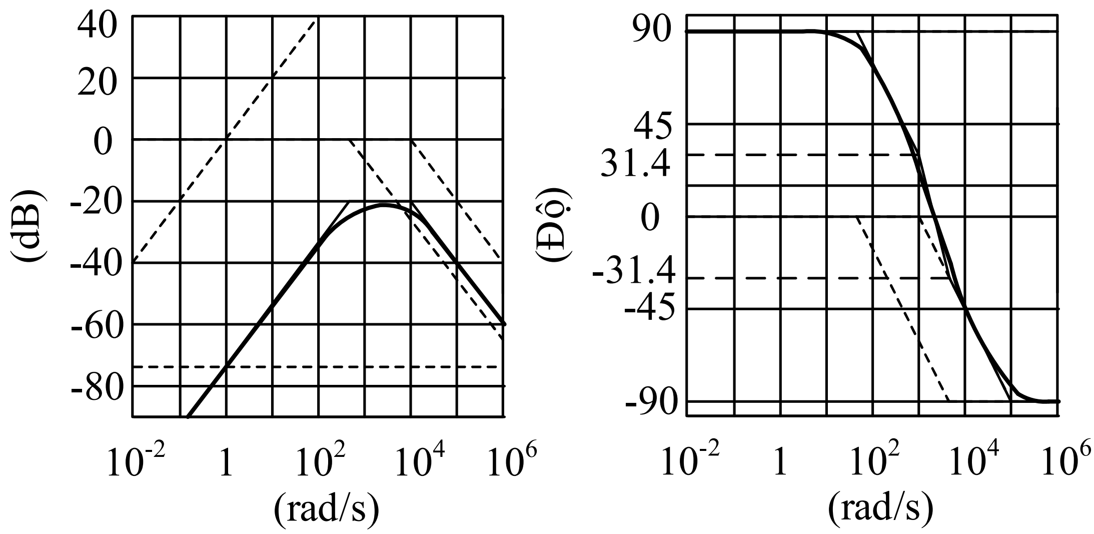
Giả sử hệ thống có đáp ứng xung h(t) khi đó y(t)=f(t)*h(t). Xét $f_0(t)=e^{j\omega t}$, ta có: $y_0(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}\,d\tau=[\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau]e^{j\omega t}=H(j\omega)e^{j\omega t}$. Trong đó H(jω)=H(ω) là biến đổi Fourier của h(t). Do hệ thống thực (nhân quả) nên theo tính chất đối xứng liên hiệp phức cho tín hiệu thực ta có $H(j\omega)=H^*(-j\omega)$. Do hệ thống tuyến tính nên khi ngõ vào là $f_1(t)=\cos(\omega t)=0.5\,e^{j\omega t}+0.5e^{-j\omega t}$ thì ngõ ra là $y_1(t)=0.5H(j\omega)\,e^{j\omega t}+0.5H(-j\omega)e^{-j\omega t}=\mathrm{Re}\{H(j\omega)e^{j\omega t}\}=|H(j\omega)|\cos[\omega t+\angle H(j\omega)]$.

Áp dụng kết quả trên, kết hợp với tính tuyến tính của hệ thống, ta có nếu ngõ vào $f(t)=10\cos(t)+10\cos(10^4t)$ thì ngõ ra $y(t)=10|H(j)|\cos[t+\angle H(j)]+10|H(j10^4)|\cos[10^4t+\angle H(j10^4)]$

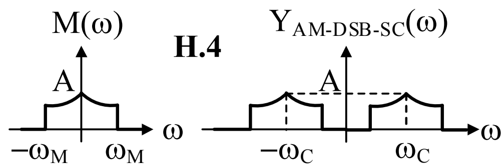
Dựa vào H.3, ta có: 20log|H(j)|=20 → |H(j)|=10, ∠|H(j)|=0 và $20\log|H(j10^4)|=-20$ → $|H(j10^4)|=0.1$, $\angle|H(j10^4)|=-90^0$. Thế vào kết quả trên ta có: $y(t)=100\cos(t)+\cos(10^4t-90^0)=100\cos(t)+\sin(10^4t)$

Bài 6. (CĐR 2.8 - 1.5 điểm).

H(s) được viết lại: $H(s)=\frac{1}{5000}s\frac{500}{s+500}\frac{10000}{s+10000}$, trong H(s) có hằng số 20log(1/5000)≈-74dB, một khâu vi phân, 2 cực bậc 1 tại 500 và 10000. Biểu đồ Bode được dựng bằng cách cộng biểu đồ Bode của các thành phần vừa nêu. Các thành phần và kết quả tổng hợp như sau:



Bài 7. (CĐR 2.2 - 1.5 điểm)



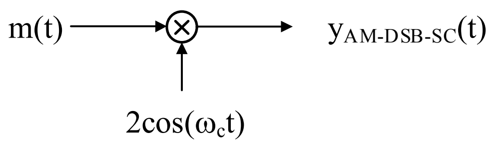
- Hệ thống điều chế:

  Từ **H.4**, ta có $Y_{AM-DSB-SC}(\omega) = M(\omega - \omega_c) + M(\omega + \omega_c)$

  Áp dụng tính chất dịch trên thang tần số của biến đổi Fourier ta được: $\begin{cases} m(\mathrm{t})\,\mathrm{e}^{j\omega_c t} \leftrightarrow M(\omega - \omega_c) \\ m(\mathrm{t})\,\mathrm{e}^{-j\omega_c t} \leftrightarrow M(\omega + \omega_c) \end{cases}$

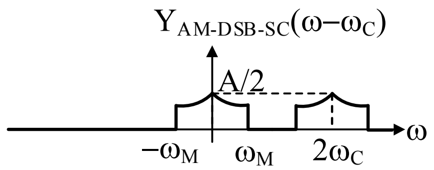
  Áp dụng tính chất tuyến tính của biến đổi Fourier ta có: $y_{AM-DSB-SC}(t) = m(\mathrm{t})\,\mathrm{e}^{j\omega_c t} + m(\mathrm{t})\,\mathrm{e}^{-j\omega_c t} = m(\mathrm{t}).2\cos(\omega_c t)$

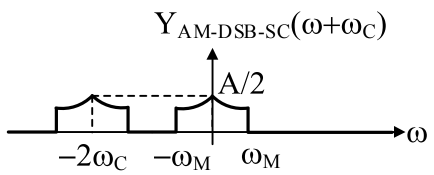
  Vậy hệ thống điều chế như sau:



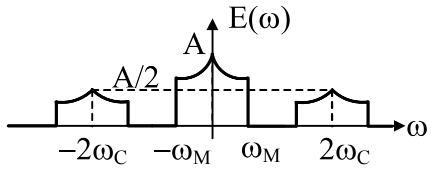
- Hệ thống giải điều chế:

  Xét phổ $\frac{1}{2}Y_{AM-DSB-SC}(\omega - \omega_C)$ và $\frac{1}{2}Y_{AM-DSB-SC}(\omega + \omega_C)$ như hình vẽ sau:





Khi đó phổ $E(\omega) = \frac{1}{2}Y_{AM-DSB-SC}(\omega - \omega_C) + \frac{1}{2}Y_{AM-DSB-SC}(\omega + \omega_C)$ có dạng như sau:

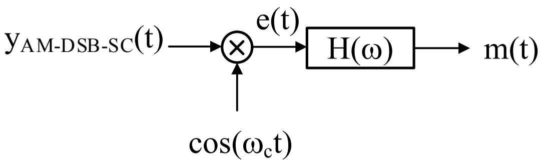


Tương tự như phần trước, áp dụng các tính chất của biến đổi Fourier ta có: $e(t) = y_{AM-DSB-SC}(t).\cos(\omega_C\ \mathrm{t})$

Với kết quả phổ của e(t) và so với M(ω) trên H.4, ta có: $E(\omega) = M(\omega) + \frac{1}{2}M(\omega - 2\omega_C) + \frac{1}{2}M(\omega + 2\omega_C) \rightarrow$ $M(\omega) = E(\omega).H(\omega)$ với

$H(\omega) = rect(\frac{\omega}{2\omega_P}); \omega_M \le \omega_P \le 2\omega_C - \omega_M$ → để khôi phục m(t) từ e(t) ta sẽ cho qua bộ lọc thông thấp có đáp ứng tần số H(ω)

Vậy sơ đồ hệ thống giải điều chế có dạng:



Bài 8. (CĐR 2.3 - 1.5 điểm)

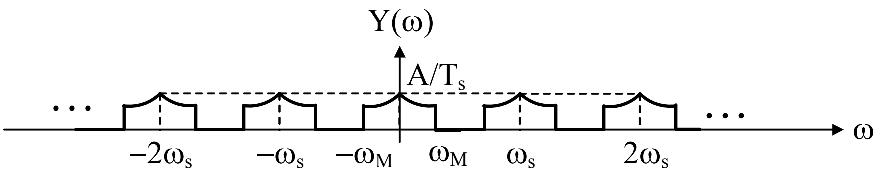
Do y(t)=m(t).p(t), áp dụng tính chất biến đổi Fourier ta được $Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}M(\omega) * \mathrm{P}(\omega)$, với M(ω) cho trên **H.4** và P(ω) được xác định từ chuỗi Fourier của p(t) : p(t)= $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n e^{jn\omega_s t}; \omega_s = 2\pi / T_s$.

Tra bảng và áp dụng tích chất biến đổi Fourier, ta có $\delta(\mathrm{t}) \leftrightarrow 1 \Rightarrow 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega) \Rightarrow \mathrm{e}^{jn\omega_s t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - n\omega_s)$

Áp dụng tính chất tuyến tính ta có p(t)= $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n e^{jn\omega_s t} \leftrightarrow P(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi D_n \delta(\omega - n\omega_s)$, trong đó : $D_n = \frac{1}{T_s}\int_{-T_s/2}^{+T_s/2} \delta(\mathrm{t})\,\mathrm{e}^{-jn\omega_s t}\,dt = \frac{1}{T_s}$

Vậy $P(\omega) = \frac{2\pi}{T_S}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega - n\omega_s)$, suy ra: $Y(\omega) = \frac{1}{T_S}M(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega - n\omega_s) = \frac{1}{T_S}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}M(\omega - n\omega_s)$

Với kết quả này ta thấy phổ Y(ω) là tổng của vô số phổ M(ω) lặp lại với chu kỳ ω_s như hình vẽ sau:



Bức tranh này chỉ thỏa khi $\omega_s > 2\omega_M$, và với bức tranh này ta có thể khôi phục tín hiệu m(t) từ y(t) bằng bộ lọc thông thấp thực tế.

Nếu $\omega_s < 2\omega_M$ hiện tượng chồng lấn phổ xảy ra nên không thể khôi phục m(t) từ y(t). Còn với $\omega_s = 2\omega_M$ thì dù không chồng lấn phổ nhưng không thể khôi phục m(t) từ y(t) dùng bộ lọc thực tế được mà chỉ dùng bộ lọc lý tưởng.

Vậy để có thể khôi phục m(t) từ y(t) bằng bộ lọc thực tế thì $\omega_s > 2\omega_M$ hay $T_S<\pi/\omega_M$

---Hết---