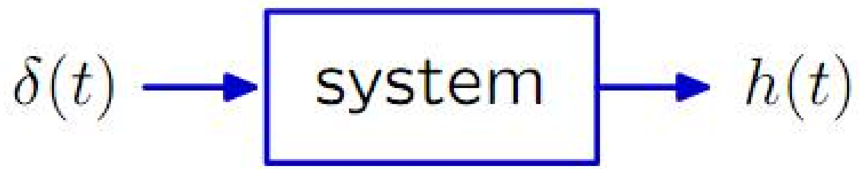
# *Chương 2:*
# Hệ thống Tuyến tính & Bất biến (LTI) – Đáp ứng xung và tích chập

1. ***Đáp ứng xung***
2. *Tích chập*
3. *Hệ thống mô tả bởi phương trình vi phân*

*Created and edited by:* **Nguyen Phuoc Bao Duy**
***HCMC University of Technology***

## Đáp ứng xung *h*(*t*):

- Đáp ứng xung $h(t)$ của một hệ thống là ngõ ra của hệ thống khi ngõ vào là hàm xung đơn vị $\delta(t)$.



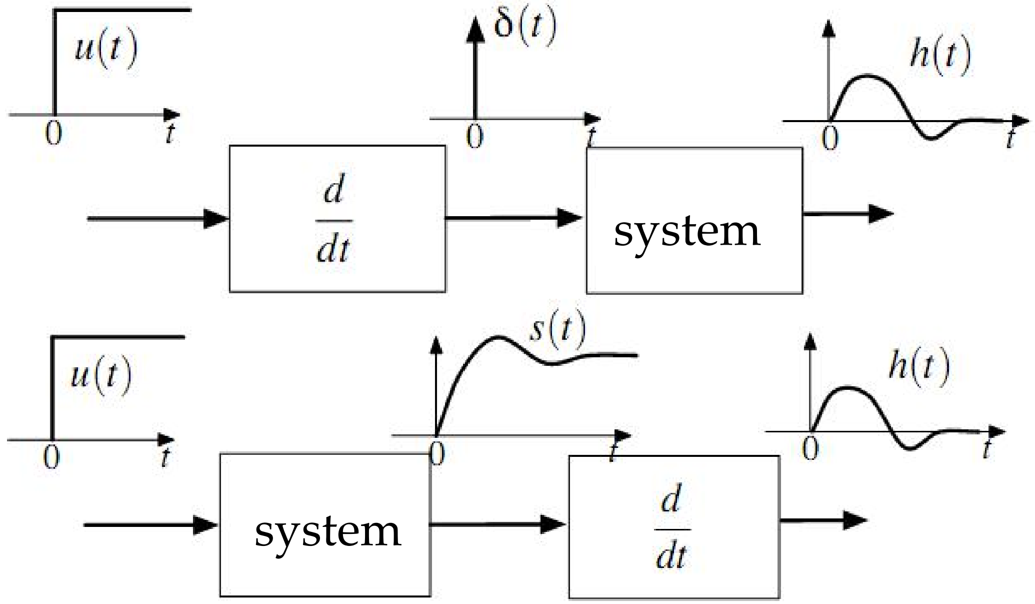

- *Ví dụ 2.01:* Xác định đáp ứng xung của các hệ thống sau:

$$a.\ y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} f(\tau - 1)\,d\tau$$

$$b.\ y'(t) + 5y(t) = f(t)$$

## Đáp ứng xung *h*(*t*):

- Trong một số trường hợp, ta có thể xác định đáp ứng xung *h*(*t*) bằng cách sử dụng đáp ứng với hàm bước:




- *Đáp án ví dụ 2.01b:* đáp ứng bước = $\frac{1}{5}\left(1-e^{-5t}\right)u(t)$

$$\Rightarrow h(t)=e^{-5t}u(t)$$

*Created and edited by:* **Nguyen Phuoc Bao Duy**
*HCMC University of Technology*

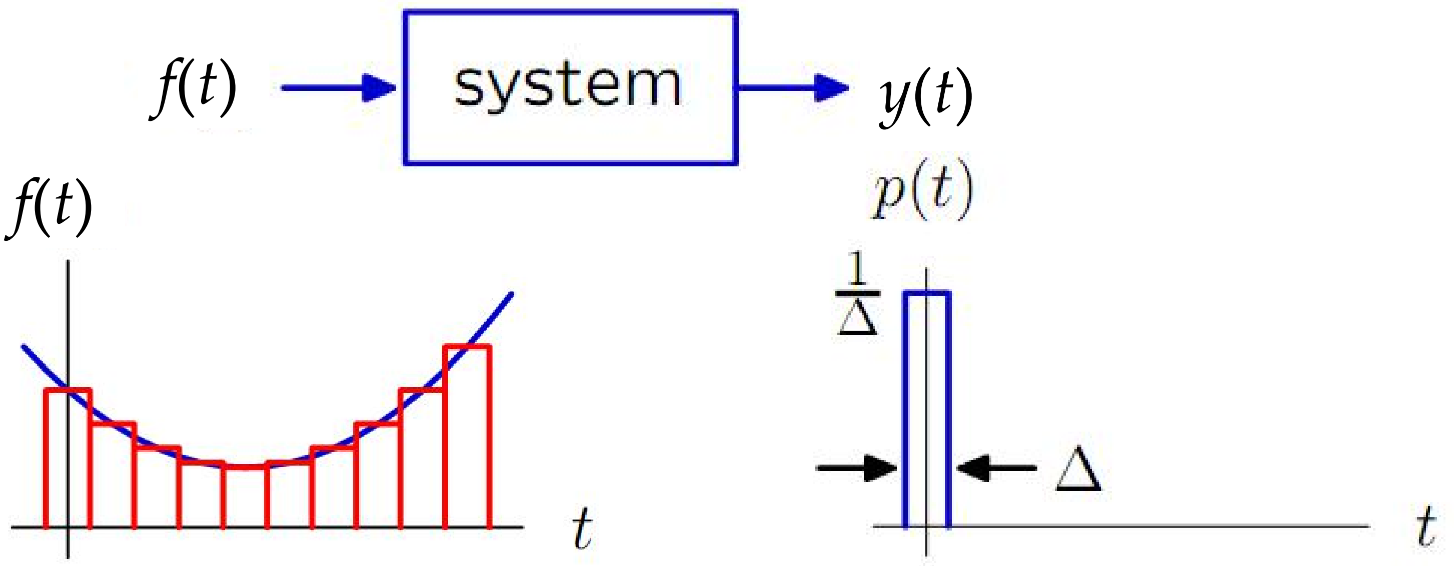
<u>*Chương 2:*</u>

# Hệ thống Tuyến tính & Bất biến (LTI) – Đáp ứng xung và tích chập

1. *Đáp ứng xung*
2. ***Tích chập***
3. *Hệ thống mô tả bởi phương trình vi phân*

*Created and edited by:* **Nguyen Phuoc Bao Duy**
***HCMC University of Technology***

## Hệ thống LTI với tín hiệu vào liên tục theo thời gian:




$$f(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_k f(k\Delta)p(t - k\Delta)\Delta$$

$$\text{As } \Delta \to 0, k\Delta \to \tau, \Delta \to d\tau \text{ and } p(t) \to \delta(t)$$

$$f(t) \to \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

## Hệ thống LTI với tín hiệu vào liên tục theo thời gian:

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{system}} \longrightarrow h(t)$$

$$\delta(t-\tau) \longrightarrow \boxed{\text{system}} \longrightarrow h(t-\tau)$$

$$f(\tau)\delta(t-\tau) \longrightarrow \boxed{\text{system}} \longrightarrow f(\tau)h(t-\tau)$$

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \longrightarrow \boxed{\text{system}} \longrightarrow y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

## Tích chập

- Định nghĩa: $$f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- Các tính chất:

i. Giao hoán:

$$f(t)*h(t) = h(t)*f(t)$$

ii. Phân phối:

$$f(t)*[h(t) + g(t)] = f(t)*h(t) + f(t)*g(t)$$

iii. Kết hợp:

$$f(t)*[h(t)*g(t)] = [f(t)*h(t)]*g(t)$$

iv. Dời theo thời gian:

$$f(t)*h(t) = y(t)$$

$$f(t-T)*h(t) = y(t-T)$$

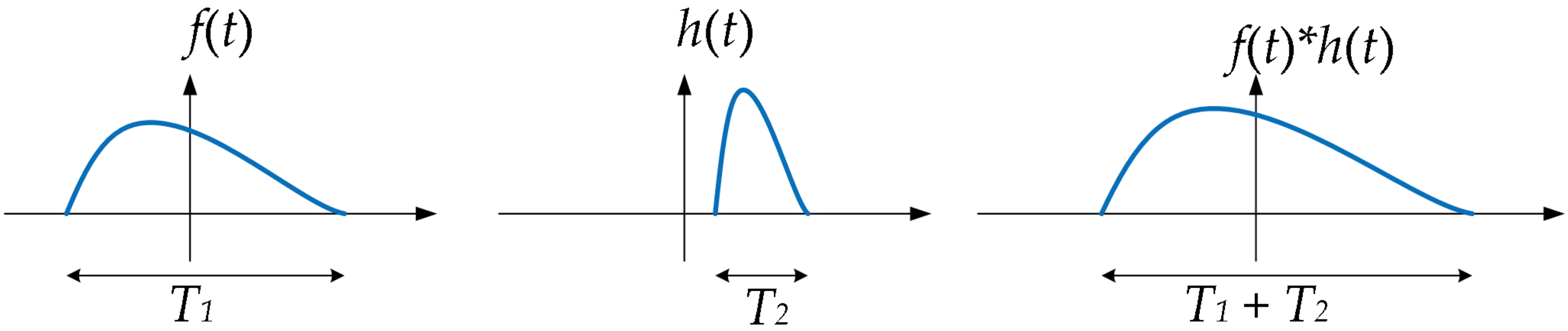
$$f(t-T_1)*h(t-T_2) = y(t-T_1-T_2)$$

# Tích chập

v. Tích chập với một xung:

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t)$$

vi. Tính chất về độ rộng:

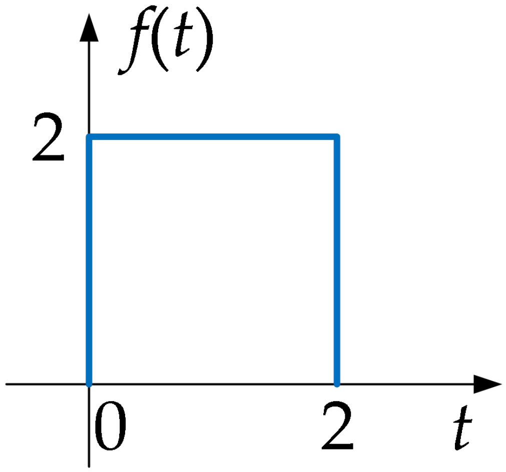


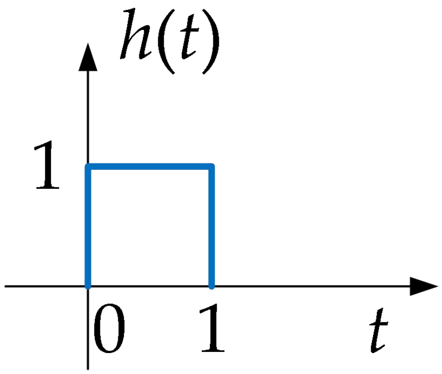
## Tích chập

Ví dụ 2.02: Tính $y(t) = f(t)*h(t)$ với:

a. $f(t) = e^{-t}u(t)$; $h(t) = u(t)$

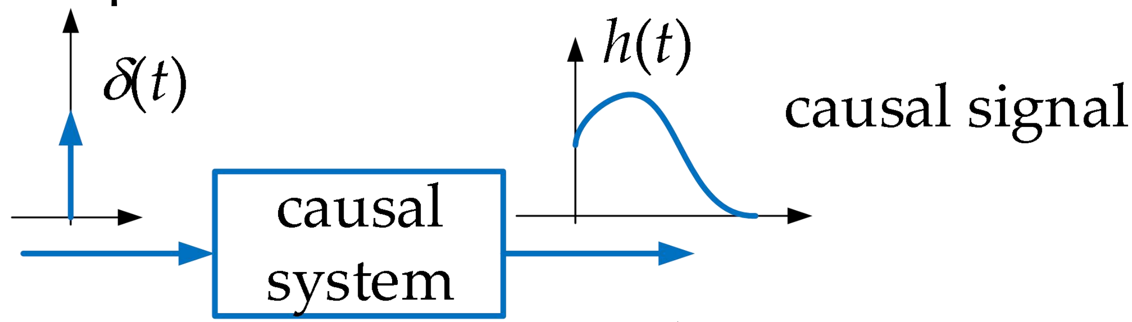
b. $f(t)$ và $h(t)$ như hình bên dưới:



## Hệ thống nhân quả:

Một hệ thống là nhân quả khi và chỉ khi đáp ứng xung *h(t)* là một tín hiệu nhân quả.




$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau).\,\underbrace{h(t-\tau)}_{=0,\, if\, (t-\tau)<0}\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} f(\tau).h(t-\tau)d\tau$$

Nếu ngõ vào *f(t)* cũng là một tín hiệu nhân quả:

$$y(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{0-}^{t} f(\tau)h(t-\tau)d\tau & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

## Hệ thống nhân quả:

*Ví dụ 2.03:* Cho hệ thống LTI có $h(t) = e^{-2t}u(t)$, xác định đáp ứng $y(t)$ của hệ thống khi ngõ vào $f(t) = e^{-t}u(t)$.

Vì cả $f(t)$ và $h(t)$ đều là tín hiệu nhân quả nên:

$$y(t) = \int_{0-}^{t} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad t \geq 0$$

$$= \int_{0-}^{t} e^{-\tau}e^{-2(t-\tau)}d\tau = e^{-t} - e^{-2t} \quad t \geq 0$$

và $y(t) = 0$ khi $t < 0 \Rightarrow y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$

## Hệ thống ổn định:

- Ổn định: ngõ vào bị chặn $\rightarrow$ ngõ ra bị chặn.
- Hệ thống LTI với ngõ và bị chặn, tức là $|f(t)| < B$:

$$y(t) = h(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).f(t-\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow |y(t)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|.|f(t-\tau)|d\tau \le B\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau$$

- Do đó, hệ thống ổn định khi và chỉ khi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty$$

# Chương 2:
# Hệ thống Tuyến tính & Bất biến (LTI) – Đáp ứng xung và tích chập

1. *Đáp ứng xung*
2. *Tích chập*
3. ***Hệ thống mô tả bởi phương trình vi phân***

*Created and edited by:* **Nguyen Phuoc Bao Duy**
***HCMC University of Technology***

## Hệ thống mô tả bởi phương trình vi phân:

- Phương trình vi phân tuyến tính:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y(t) =$$

$$b_m\frac{d^m f}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}f}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1\frac{df}{dt} + b_0 f(t)$$

- Sử dụng ký hiệu: $D \equiv \frac{d}{dt}$

$$\left(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0\right)y(t) =$$

$$\left(D^m + b_{m-1}D^{m-1} + \ldots + b_1 D + b_0\right)f(t)$$

*or* $$Q(D)y(t) = P(D)f(t)$$

## Hệ thống mô tả bởi phương trình vi phân:

- Phương trình đặc trưng: $Q(\lambda) = 0$
- Đáp ứng xung của hệ thống LTI được tính bởi công thức (xem Lathi, trang: 115-116):

$$h(t) = b_n\delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t)$$

trong đó:

- $b_n$: hệ số của số hạng bậc thứ $n$ của $P(D)$
- $y_n(t)$: nghiệm của: $Q(D)y(t) = 0$, với các điều kiện đầu:

  $n = 1$: $y_n(0) = 1$

  $n = 2$: $y_n(0) = 0$ and $y_n'(0) = 1$

  $n = 3$: $y_n(0) = y_n'(0) = 0$ and $y_n''(0) = 1$

  và tương tự cho các bậc cao hơn.

## Hệ thống mô tả bởi phương trình vi phân:

*Ví dụ 2.04*: Xác định đáp ứng xung của các hệ thống sau:

$$a.\ y'(t) + 2y(t) = 3f'(t) + 5f(t)$$

$$b.\ y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f'(t)$$

$$c.\ y''(t) + 2y'(t) + y(t) = f'(t)$$

## Hệ thống mô tả bởi phương trình vi phân:

$$\text{Total response} =$$

$$\text{zero} - \text{input response}$$

$$(\text{response when } f(t) = 0, \text{ caused by initial conditions})$$

$$+$$

$$\text{zero} - \text{state response}$$

$$(\text{response when all initial conditions are zero,}$$

$$\text{calculated by convolution integral})$$

## Bài tập:

Cho hệ thống LTI có đáp ứng xung $h(t) = u(t) - 2u(t-4) + u(t-8)$.

a. Với ngõ vào $f(t) = 2[u(t+2) - u(t)]$, tính ngõ ra $y(t)$ sử dụng tích chập.

b. Sử dụng tích chập chứng minh hệ thống trên là nhân quả và ổn định.