Chương 3:
Phân tích hệ thống dùng biến đổi Laplace
Thực hiện hệ thống

Created and edited by: **Nguyen Phuoc Bao Duy**
HCMC University of Technology

Biến đổi Laplace hai phía:

- **Biến đổi Laplace hai phía** của tín hiệu $f(t)$ là $F(s)$ định nghĩa bởi:

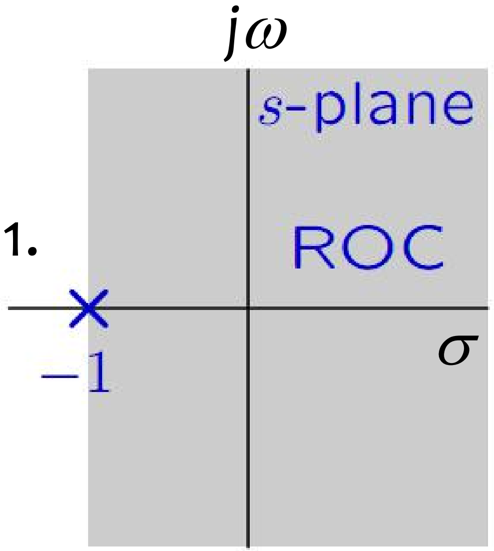
$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

  trong đó s là tần số phức, $s = \sigma + j\omega$

- **Miền hội tụ (Region of convergence - ROC)** của biến đổi Laplace là miền (trong mặt phẳng phức) mà trong đó tích phân tính $F(s)$ hội tụ.

- *Ví dụ 3.01:* Xác định biến đổi Laplace của $f(t) = e^{-t}u(t)$ và miền hội tụ tương ứng.

Biến đổi Laplace hai phía:



- Hình bên minh họa miền hội tụ của ví dụ 3.01.

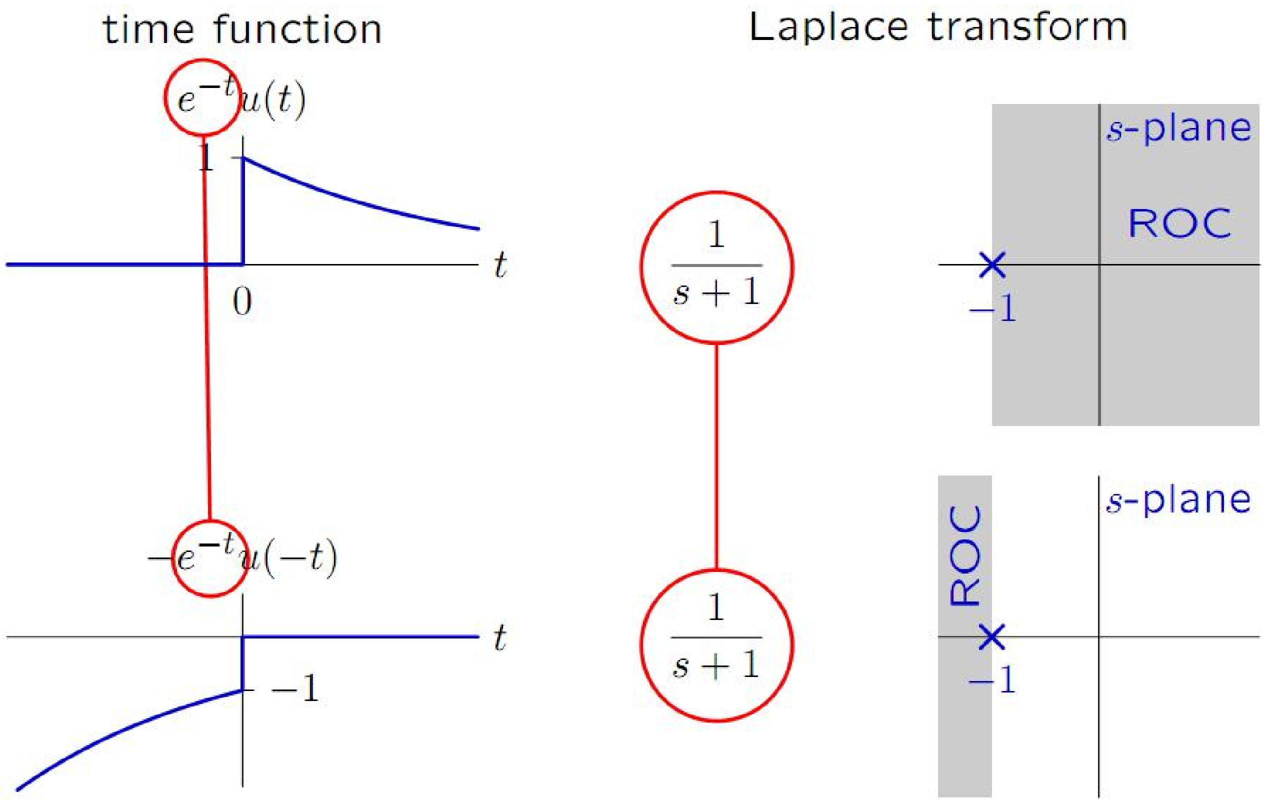
- Khái niệm điểm cực và điểm không:
  Nếu $F(s) = P(s)/Q(s)$:
  - Điểm cực (×): nghiệm của $Q(s) = 0$
  - Điểm không (o): nghiệm $P(s) = 0$.

Ví dụ 3.02: $f(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-t}u(-t)$
Tìm biến đổi Laplace $F(s)$ của $f(t)$, xác định miền hội tụ và các điểm cực, điểm không của $F(s)$.

Biến đổi Laplace hai phía:

- Trong thực tế, có nhiều tín hiệu khác nhau nhưng lại có cùng một biến đổi Laplace, chỉ khác nhau ở miền hội tụ ROC.

Ví dụ 3.03:



Biến đổi Laplace một phía:

- Trong thực tế, chúng ta thường tập trung nghiên cứu tín hiệu nhân quả (thường được biểu diễn bởi $f(t)u(t)$).
- Biến đổi Laplace hai phía của tín hiệu nhân quả của tín hiệu $f(t)u(t)$ là:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)u(t)e^{-st}dt = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$unilateral\ \ Laplace\ \ transform: \boxed{f(t) \leftrightarrow F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt}$$

- Cận dưới của tích phân là 0-, cần chú ý điều này nếu khi $f(t)$ không liên tục tại t = 0.
- Như vậy **biến đổi Laplace một phía** là biến đổi Laplace hai phía của **tín hiệu nhân quả**.

Biến đổi Laplace một phía:

- Nếu chúng ta chỉ xét biến đổi Laplace một phía (của tín hiệu nhân quả), thì biến đổi Laplace là duy nhất, khi đó ta có thể bỏ qua miền hội tụ của phép biến đổi mà vẫn đảm bảo tính duy nhất của cặp biến đổi $f(t) \leftrightarrow F(s)$.
- Một vài cặp biến đổi Laplace một phía thông dụng:

$$f(t) = \delta(t) \quad \leftrightarrow \quad F(s) = 1$$

$$f(t) = t^n u(t) \quad \leftrightarrow \quad F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$f(t) = \cos(bt)u(t) \quad \leftrightarrow \quad F(s) = \frac{s}{s^2 + b^2}$$

$$f(t) = \sin(bt)u(t) \quad \leftrightarrow \quad F(s) = \frac{b}{s^2 + b^2}$$

Tính chất của biến đổi Laplace:

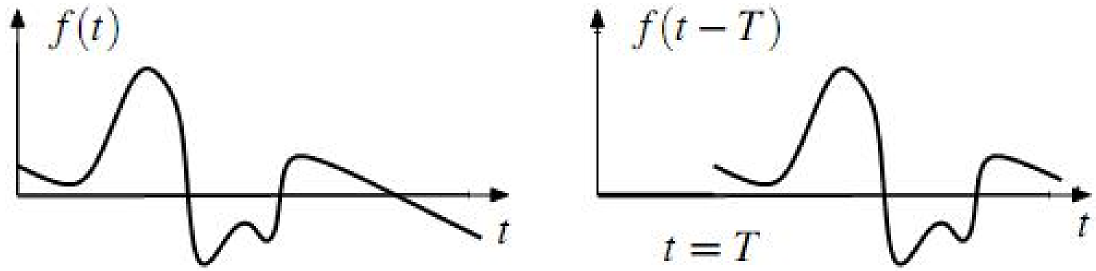
i. Tuyến tính: $af(t) + bg(t) \leftrightarrow aF(s) + bG(s)$

ii. Co-dãn theo thời gian: $a > 0$

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

iii. Dời tần số: $f(t)e^{s_0 t} \leftrightarrow F(s - s_0)$

iv. Dời thời gian: $f(t - T) \leftrightarrow e^{-sT}F(s)$



Tính chất của biến đổi Laplace:

iv. Tích chập: $f(t)*g(t) \leftrightarrow F(s)G(s)$

$$f(t)g(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j}\left[F\left(s\right)^{*} G(s)\right]$$

v. Tích phân:

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s}$$

vi. Đạo hàm:

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^n F\left(s\right) - s^{n-1} f(0-) - s^{n-2} f^{(1)}(0-) - \ldots - sf^{n-2}(0-) - f^{(n-1)}(0-)$$

Tính chất của biến đổi Laplace:

vii. Nhân với t:

$$t.f(t) \leftrightarrow -\frac{dF(s)}{ds}$$

viii. Chia cho t:

$$\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^\infty F(x)dx$$

ix. Giá trị đầu:

$$f(0+) = \lim_{s\to\infty}\left[sF(s)\right]$$

x. Giá trị cuối:

$$f(\infty) = \lim_{s\to 0}\left[sF(s)\right]$$

Biến đổi Laplace ngược:

- Biến đổi Laplace ngược của *F*(*s*) là:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

- Trong thực tế, công thức trên ít khi được dùng.
- Nếu *F*(*s*) có dạng phân thức, ta sẽ phân tích *F*(*s*) thành tổng các phân thức đơn vị, sau đó sử dụng các cặp biến đổi Laplace đã biết để tìm biến đổi Laplace ngược.

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}; \; m < n$$

Phân tích *F(s)* thành tổng các phân thức đơn vị:

Trường hợp 1: F(s) chỉ có các cực đơn. Khi đó *F*(*s*) có thể phân tích thành dạng:

$$F(s) = \frac{k_1}{s-\lambda_1} + \ldots + \frac{k_n}{s-\lambda_n}$$

trong đó:

- $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ là các cực của *F*(s)
- Các giá trị $k_1, \ldots, k_n$ được gọi là các giá trị thặng dư

- *Ví dụ 3.04:*

$$F(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+2}$$

Phân tích F(s) thành tổng các phân thức đơn vị:

Trường hợp 2: Nếu có cực bội

$$F(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s + b_0}{(s-\lambda_1)^r (s-\lambda_2)\ldots(s-\lambda_i)}$$

$$=\frac{k_{1,r}}{(s-\lambda_1)^r}+\frac{k_{1,r-1}}{(s-\lambda_1)^{r-1}}+\ldots+\frac{k_{1,1}}{(s-\lambda_1)}+\frac{k_2}{s-\lambda_2}+\ldots+\frac{k_i}{s-\lambda_i}$$

Ví dụ 3.05:

$$F(s)=\frac{1}{s^2(s+1)}$$

Phân tích $F(s)$ thành tổng các phân thức đơn vị:

Phương pháp xác định $k_1,\ldots,k_n$

- *Phương pháp 1:* **Quy đồng mẫu số, đồng nhất các hệ số.**
- *Phương pháp 2:* **Sử dụng khai triển Heaviside**
  - Trường hợp 1: đối với cực đơn:

$$k_r = (s-\lambda_r)F(s)\Big|_{s=\lambda_r}$$

  - Trường hợp 2: đối với cực bội:

$$k_{i,r-j} = \frac{1}{j!}\frac{d^j}{ds^j}\left[(s-\lambda_i)^r F(s)\right]\Bigg|_{s=\lambda_i}$$

- *Phương pháp 3:* **Thay số, giải hệ phương trình...**

Phân tích $F(s)$ thành tổng các phân thức đơn vị:

Ví dụ 3.06:

$$F(s) = \frac{2s}{s^2 - 4}$$

Các tín hiệu nào sau đây có thể là biến đổi Laplace ngược của $F(s)$? Hãy chỉ rõ miền hội tụ tương ứng.

1. $e^{-2t}u(t) + e^{2t}u(t)$
2. $e^{-2t}u(t) - e^{2t}u(-t)$
3. $-e^{-2t}u(-t) + e^{2t}u(t)$
4. $-e^{-2t}u(-t) - e^{2t}u(-t)$

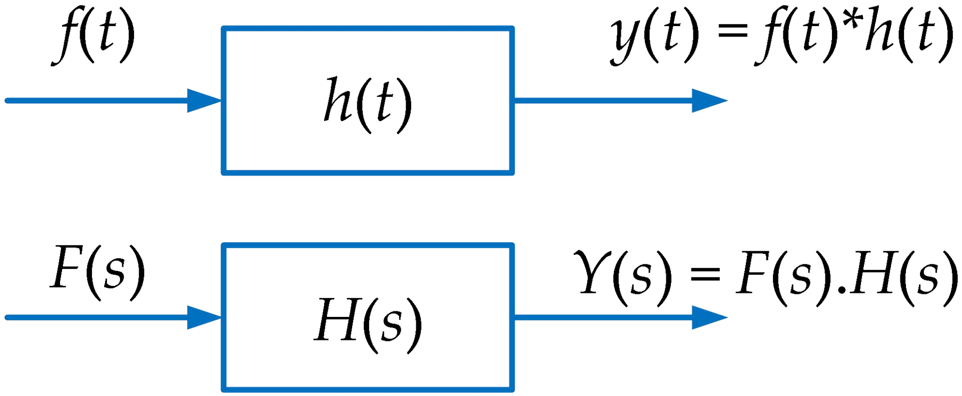
<u>*Chương 3:*</u>

Phân tích hệ thống dùng biến đổi Laplace Thực hiện hệ thống

1. *Biến đổi Laplace*
2. ***Hàm truyền***
3. *Sơ đồ khối*
4. *Hệ thống mô tả bởi phương trình vi phân*
5. *Các phương pháp thực hiện hệ thống*
6. *Thực hiện hệ thống dùng OPAMP*

Created and edited by: **Nguyen Phuoc Bao Duy**
HCMC University of Technology

Hàm truyền:



- *h*(*t*): đáp ứng xung của hệ thống.

$$H(s) = Laplace\ transform\ of\ h(t)$$

- **H(*s*): được gọi là hàm truyền của hệ thống**
- *Ví dụ 3.07:* Xác định hàm truyền của hệ thống

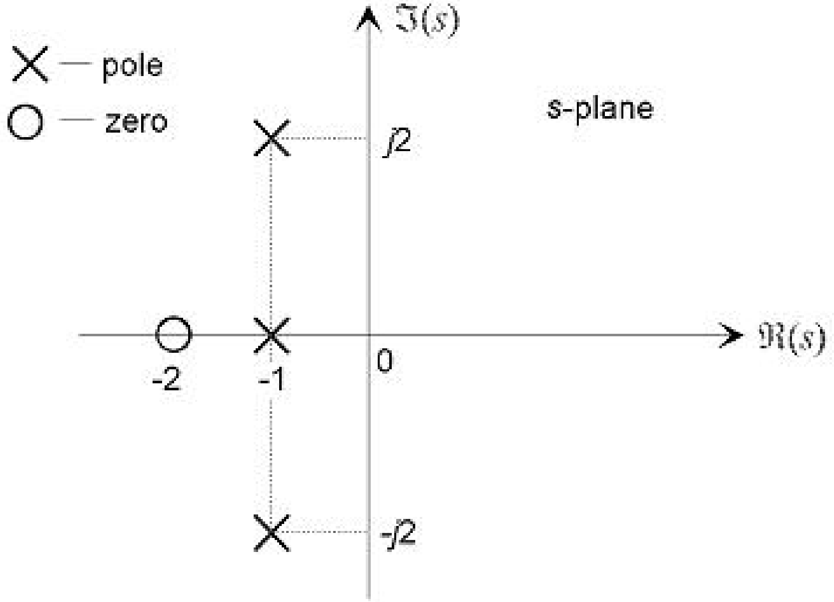
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

Sơ đồ điểm cực-điểm không:

$$H(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=K\frac{(s-z_1)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)\ldots(s-p_n)}$$

- Điểm không (z_i): nghiệm của $P(s) = 0$.
- Điểm cực (p_i): nghiệm của $Q(s) = 0$.
- K: hệ số khuếch đại

$$H(s)=\frac{3(s+2)}{(s+1)(s^2+2s+5)}$$



Tính ổn định:

- Một hệ thống ổn định khi:

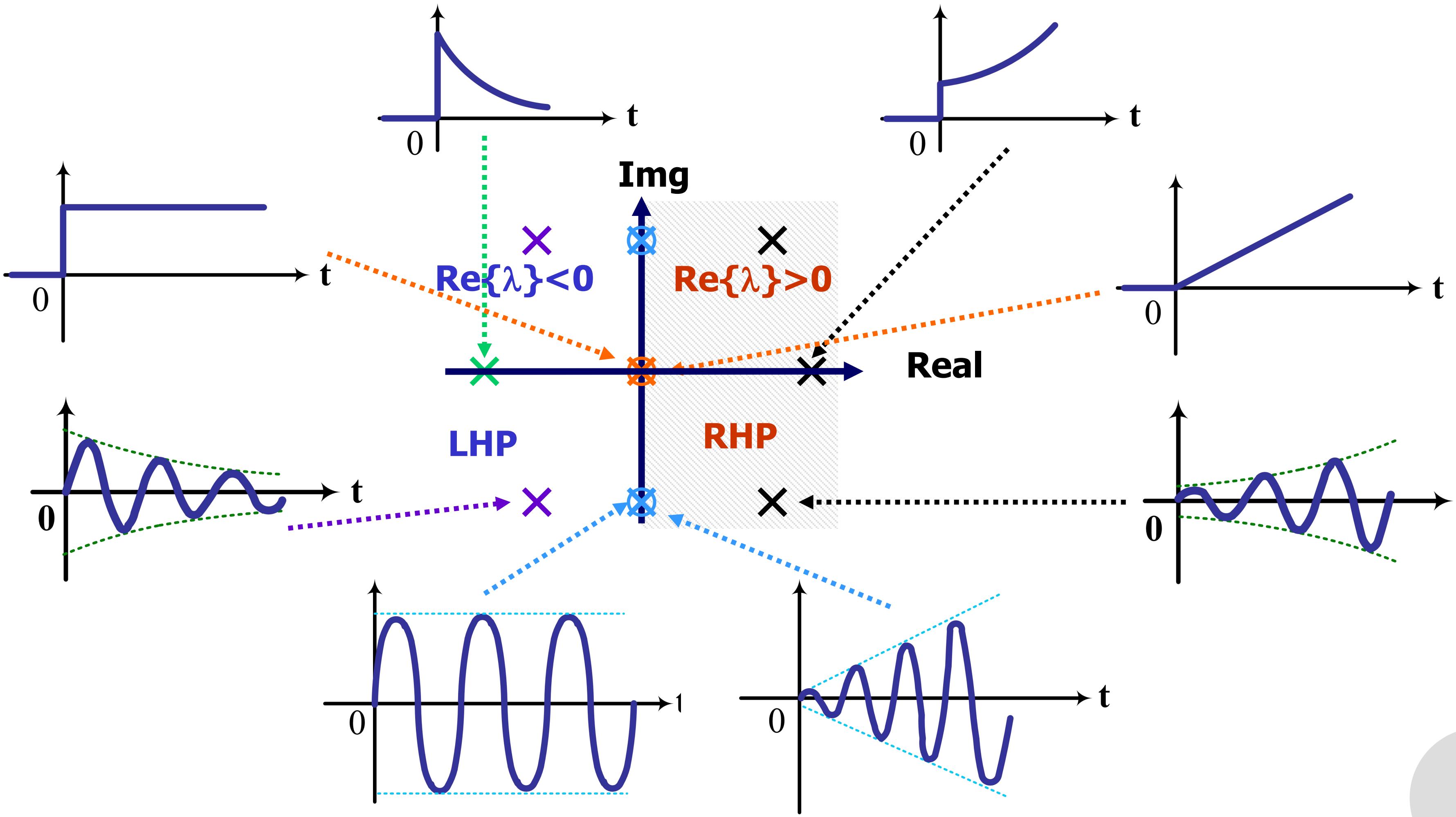
$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

Ví dụ 3.08: Biết các hàm truyền sau là của các hệ thống nhân quả, vậy hệ thống nào là ổn định?

$$a.\ H(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+2s+5)} \qquad b.\ H(s) = \frac{s^2-1}{s(s+1)^2}$$

$$c.\ H(s) = \frac{2s+1}{s^2(s^2+4s+5)} \qquad d.\ H(s) = \frac{s^2+s+1}{(s+1)(s+2)(s-3)}$$

Tính ổn định:



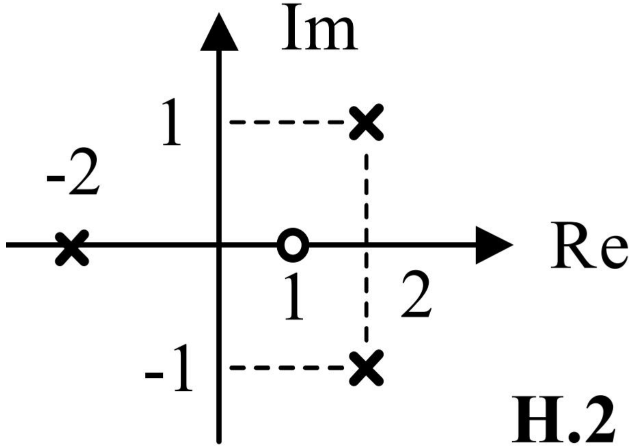
Created and edited by: **Nguyen Phuoc Bao Duy**
HCMC University of Technology

Bài tập:

Bài 1: Cho hệ thống LTI có hàm truyền H(s) với đồ thị phân bố các điểm cực và điểm không trên H.2.

a. Nếu hệ thống là ổn định, hãy vẽ ROC và xác định xem hệ thống có nhân quả không.

b. Nếu hệ thống là nhân quả, hãy vẽ ROC và xác định xem hệ thống có ổn định không.



H.2

Created and edited by: **Nguyen Phuoc Bao Duy**
HCMC University of Technology

<u>*Chương 3:*</u>

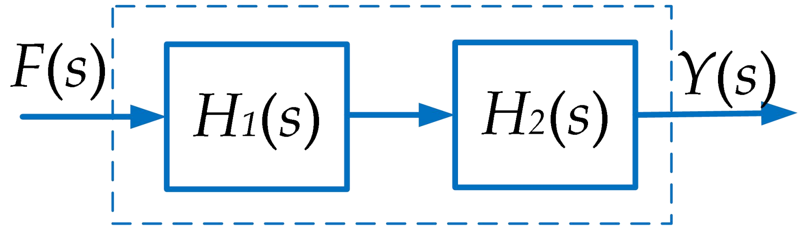
Phân tích hệ thống dùng biến đổi Laplace Thực hiện hệ thống

1. *Biến đổi Laplace*
2. *Hàm truyền*
3. ***Sơ đồ khối***
4. *Hệ thống mô tả bởi phương trình vi phân*
5. *Các phương pháp thực hiện hệ thống*
6. *Thực hiện hệ thống dùng OPAMP*

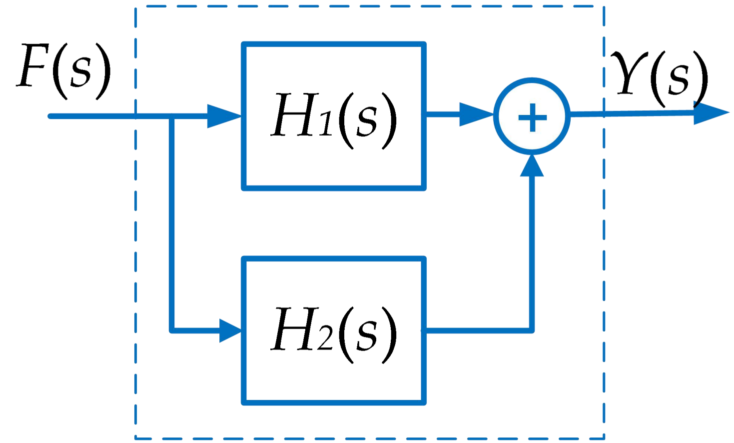
Created and edited by: **Nguyen Phuoc Bao Duy**
HCMC University of Technology

Sơ đồ khối:

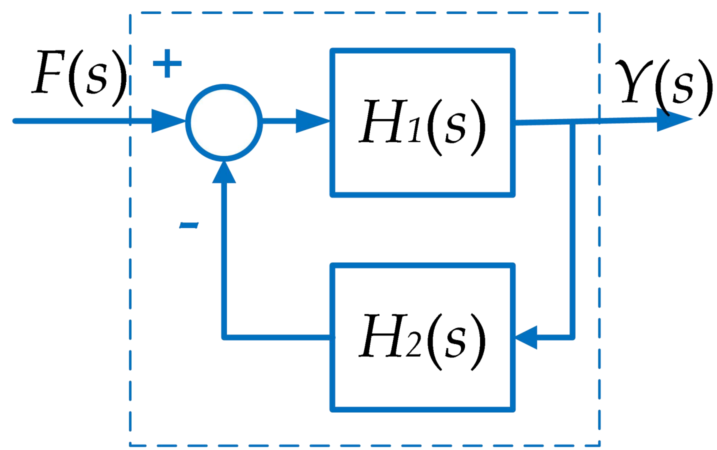
- Nối tiếp: $H(s) = H_1(s).H_2(s)$



- Song song: $H(s) = H_1(s) + H_2(s)$



- Hồi tiếp: $$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$



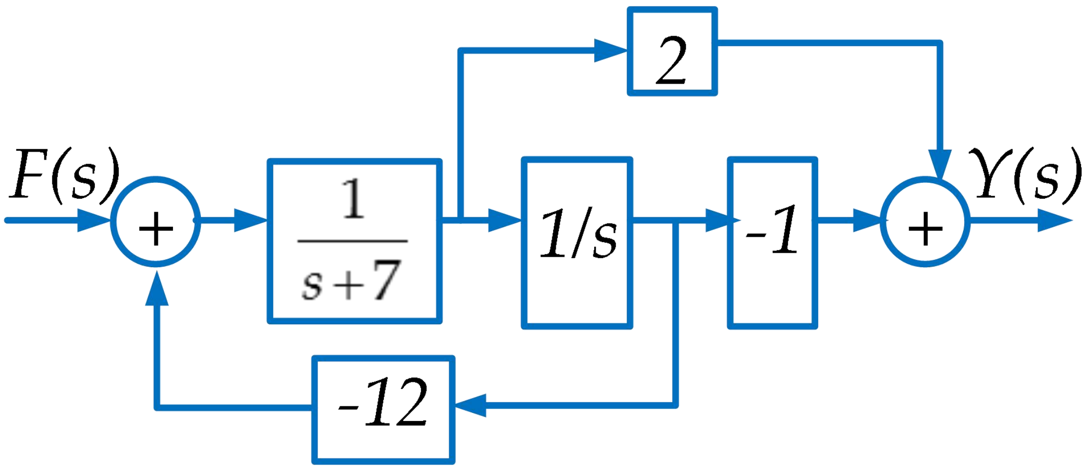
Sơ đồ khối:

- *Ví dụ 3.09:*

a. Tìm hàm truyền $H(s)$ của hệ thống.

b. Giả sử hệ thống là nhân quả, vậy hệ thống có ổn định hay không?

c. Tìm ngõ ra $y(t)$ của hệ thống khi biết $f(t) = e^{-2t}u(t)$.



<u>*Chương 3:*</u>

Phân tích hệ thống dùng biến đổi Laplace

1. *Biến đổi Laplace*
2. *Hàm truyền*
3. *Sơ đồ khối*
4. ***<u>Hệ thống mô tả bởi phương trình vi phân</u>***
5. *Các phương pháp thực hiện hệ thống*
6. *Thực hiện hệ thống dùng OPAMP*

Created and edited by: **Nguyen Phuoc Bao Duy**
HCMC University of Technology

Hệ thống mô tả bởi phương trình vi phân:

- Hệ thống mô tả bởi phương trình vi phân có dạng:

$$a_n y^{(n)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m f^{(m)}(t) + \ldots + b_1 f'(t) + b_0 f(t)$$

- Trong môn học này, ta giả sử $m \le n$.
- Ký hiệu phép toán vi phân $D = d/dt$:

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0)y(t) = (b_m D^m + b_{m-1}D^{m-1} + \ldots + b_1 D + b_0)f(t)$$

$$\Leftrightarrow Q(D)y(t) = P(D)f(t)$$

- Biến đổi Laplace (giả sử rằng các điều kiện đầu đều bằng không):

$$D^n y(t) \leftrightarrow s^n Y(s)$$

$$D^m f(t) \leftrightarrow s^m F(s)$$

Hệ thống mô tả bởi phương trình vi phân:

- Biến đổi Laplace hai vế của phương trình:

$$Q(D)y(t) = P(D)f(t)$$
$$\leftrightarrow Q(s)Y(s) = P(s)F(s)$$

- Từ đó suy ra hàm truyền:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

- Đáp ứng xung:

$$h(t) = \text{Biến đổi Laplace ngược của } H(s)$$

- *Ví dụ 3.10:* Xác định đáp ứng xung của hệ thống nhân quả sau: $(D^3 + 7D^2 + 19D + 13)y(t) = (D - 1)f(t)$

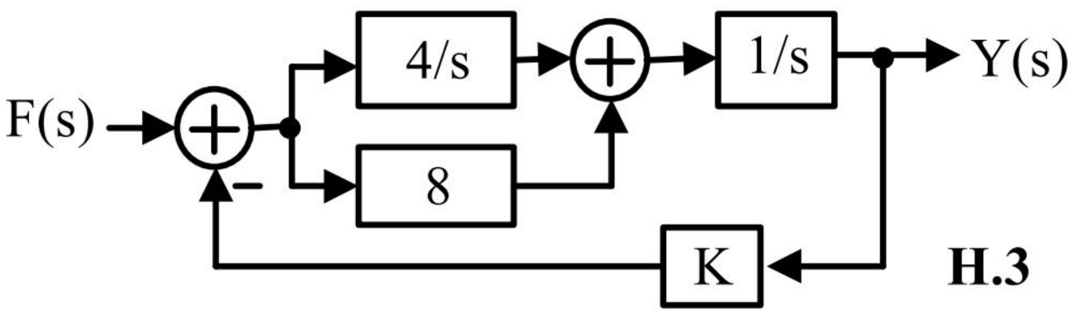
Bài tập:

Bài 2: Cho hệ thống LTI nhân quả có sơ đồ khối như H.3 với K = const.

a. Hãy xác định hàm truyền $H(s)$, từ đó viết phương trình vi phân mô tả hệ thống.

b. Với K = 1, xác định ngõ ra của hệ thống nếu ngõ và $f(t) = u(t)$.

c. Tìm điều kiện của K để hệ thống ổn định.



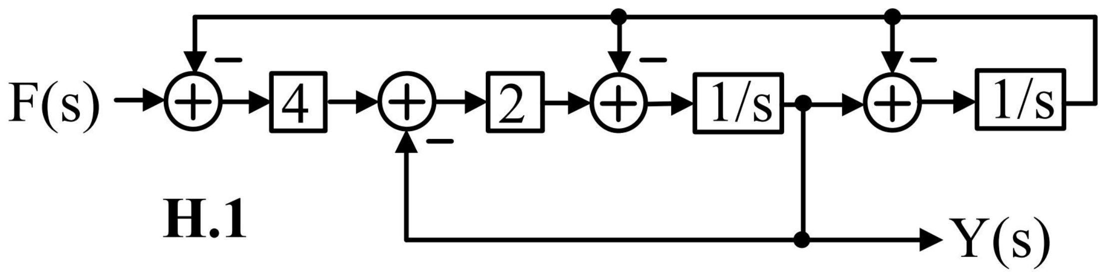
H.3

Bài tập:

Bài 3: Cho hệ thống LTI nhân quả có sơ đồ khối như hình bên dưới.

a. Hãy xác định hàm truyền $H(s)$, từ đó viết phương trình vi phân mô tả hệ thống.

b. Xác định ngõ ra của hệ thống nếu ngõ và $f(t) = u(t)$.



H.1

<u>*Chương 3:*</u>

Phân tích hệ thống dùng biến đổi Laplace

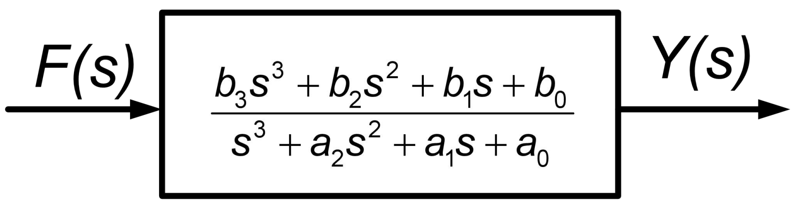
1. *Biến đổi Laplace*
2. *Hàm truyền*
3. *Sơ đồ khối*
4. *Hệ thống mô tả bởi phương trình vi phân*
5. ***Các phương pháp thực hiện hệ thống***
6. *Thực hiện hệ thống dùng OPAMP*

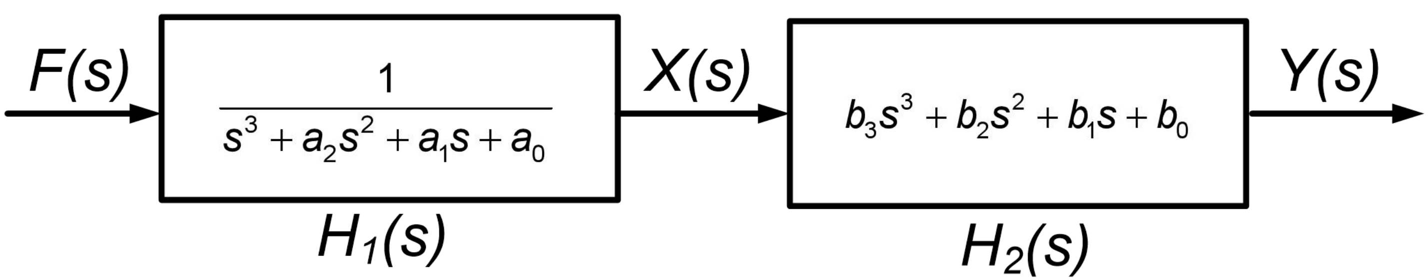
Created and edited by: **Nguyen Phuoc Bao Duy**
HCMC University of Technology

Dạng chính tắc (trực tiếp):

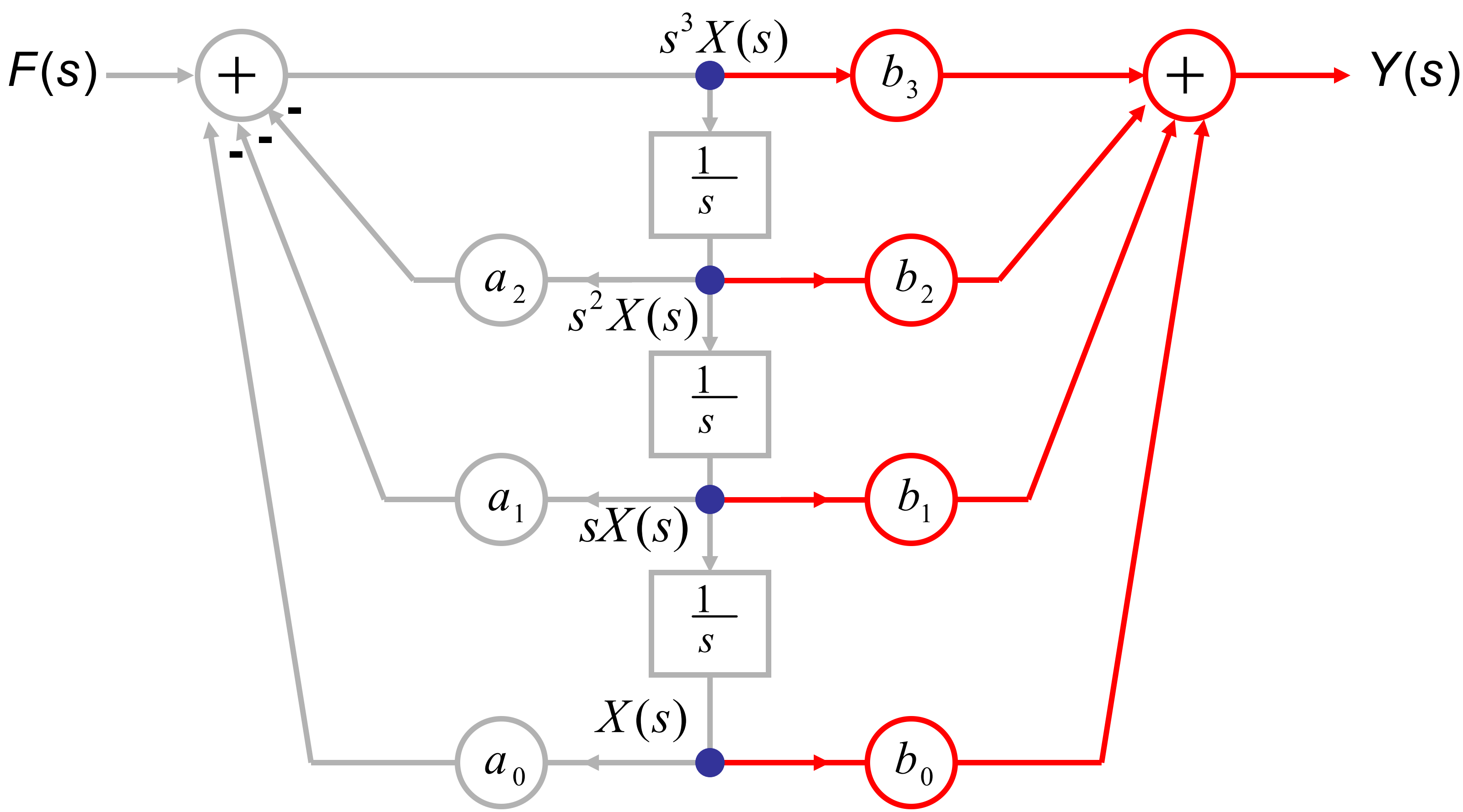
- Để minh họa, ta xét hàm truyền bậc ba:

$$H(s) = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$





Dạng chính tắc (trực tiếp):



Dạng chính tắc (trực tiếp):

- *Ví dụ 3.11:* Vẽ sơ đồ dạng chính tắc thực hiện các hệ thống sau:

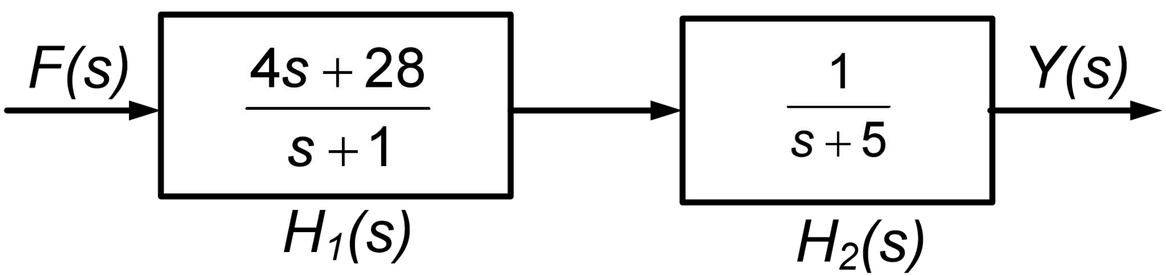
$$a.\ \frac{5}{s+2} \qquad b.\ \frac{s+5}{s+7}$$

$$c.\ \frac{s}{s+7} \qquad d.\ \frac{4s+28}{s^2+6s+5}$$

Dạng nối tiếp:

- Áp dụng với hàm truyền $H(s)$ có thể biểu diễn thành tích của các hàm truyền bậc nhất. Ví dụ:

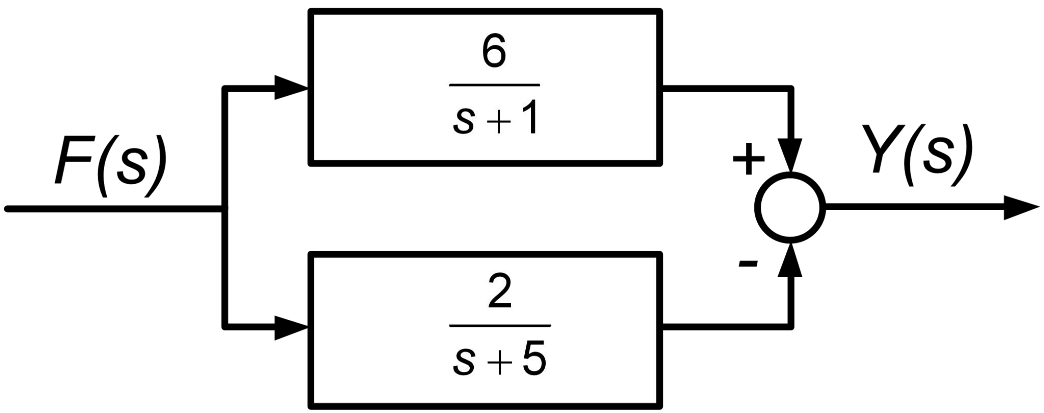
$$H(s) = \frac{4s+28}{s^2+6s+5} = \underset{H_1(s)}{\left(\frac{4s+28}{s+1}\right)}\underset{H_2(s)}{\left(\frac{1}{s+5}\right)}$$



Dạng song song:

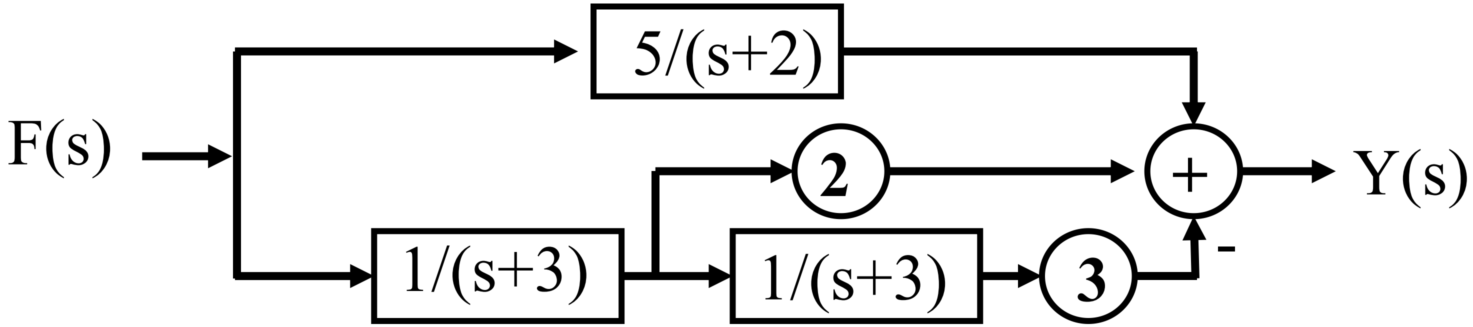
- Áp dụng với hàm truyền H(s) có thể biểu diễn thành tổng của các hàm truyền bậc nhất.

$$H(s) = \frac{4s+28}{s^2+6s+5} = \underbrace{\frac{6}{s+1}}_{H_3(s)} - \underbrace{\frac{2}{s+5}}_{H_4(s)}$$

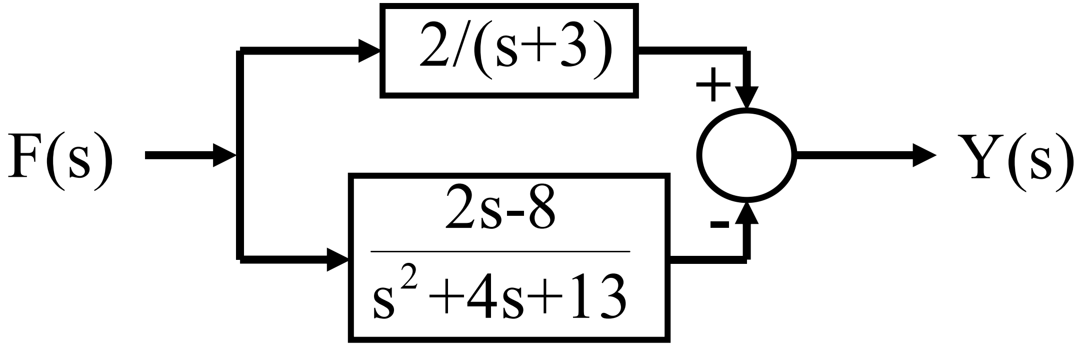


Một vài trường hợp đặc biệt:

$$H(s)=\frac{7s^2+37s+51}{(s+2)(s+3)^2}=\frac{5}{s+2}+\frac{2}{s+3}-\frac{3}{(s+3)^2}$$



$$H(s)=\frac{10s+50}{(s+3)(s^2+4s+13)}=\frac{2}{s+3}-\frac{2s-8}{s^2+4s+13}$$



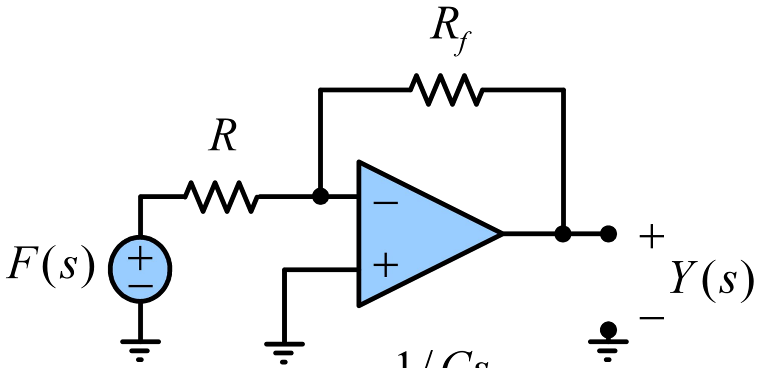
Chương 3:
Phân tích hệ thống dùng biến đổi Laplace

Created and edited by: **Nguyen Phuoc Bao Duy**
HCMC University of Technology

Các mạch OPAMP cơ bản:

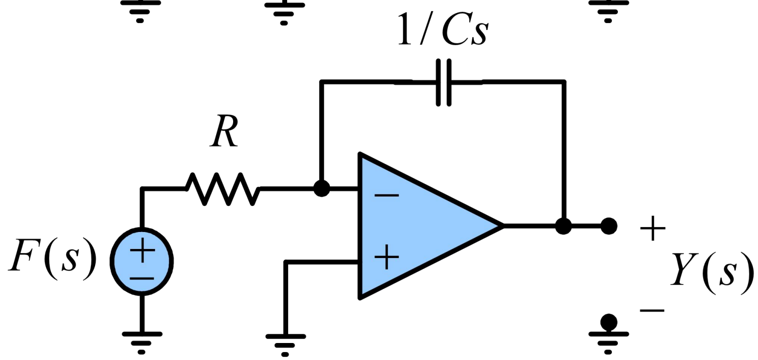
- Mạch khuếch đại đảo:

$$H(s) = -\frac{R_f}{R}$$



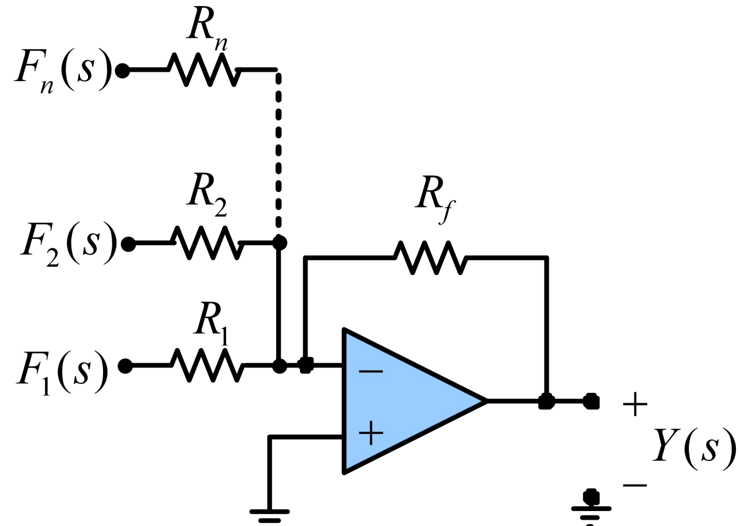
- Mạch tích phân:

$$H(s) = -\frac{1}{RCs}$$



- Mạch cộng:

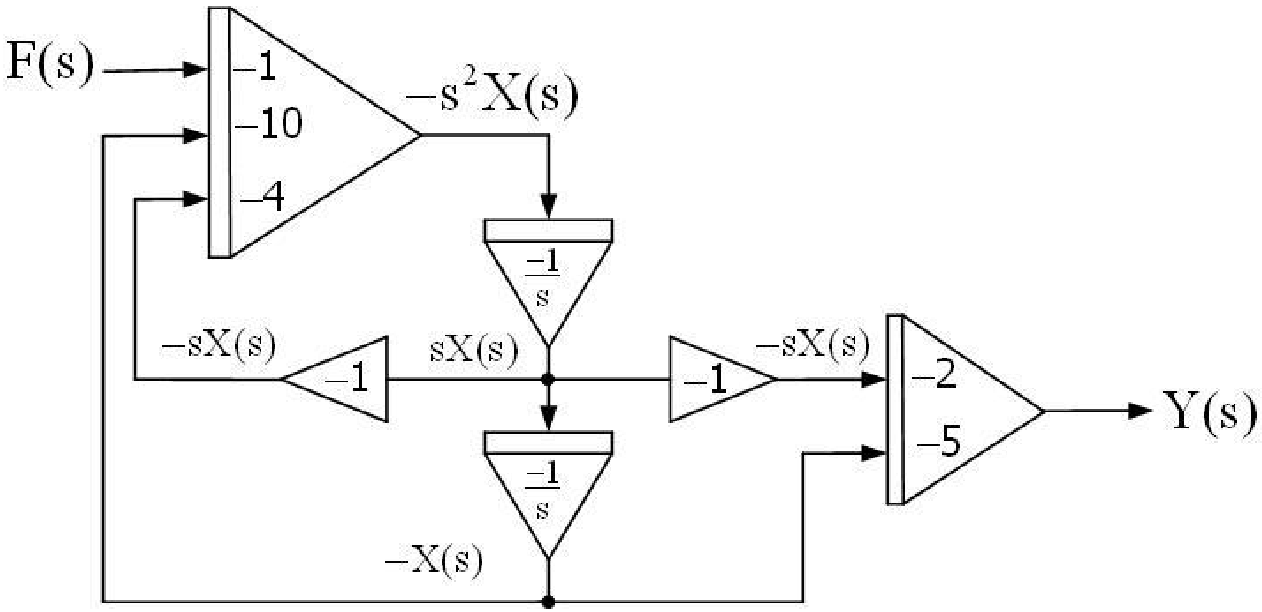
$$Y(s) = -R_f\left[\frac{F_1(s)}{R_1} + \frac{F_2(s)}{R_2} + \ldots \frac{F_n(s)}{R_n}\right]$$



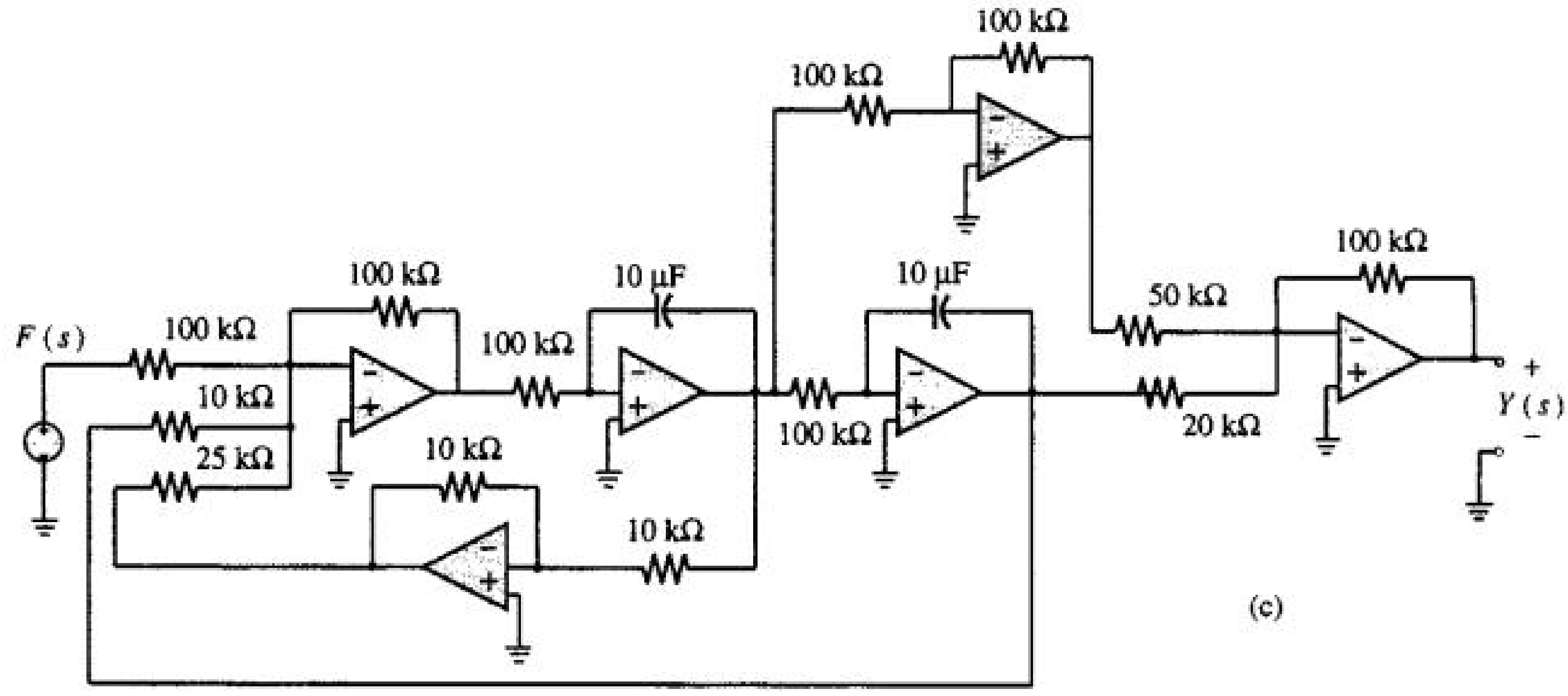
Các mạch OPAMP cơ bản:

- *Ví dụ 3.12:* Sử dụng các mạch OPAMP cơ bản để thực hiện hệ thống có hàm truyền sau:

$$H(s) = \frac{2s+5}{s^2+4s+10}$$



Thực hiện hệ thống dùng các mạch OPAMP cơ bản:



(c)

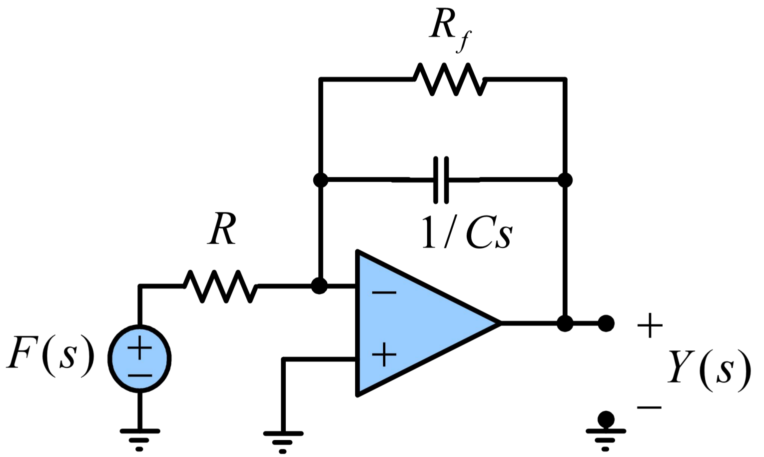
Created and edited by: **Nguyen Phuoc Bao Duy**
HCMC University of Technology

Mạch bậc nhất:

- Loại 1

$$H(s)=\frac{ka}{s+a}$$

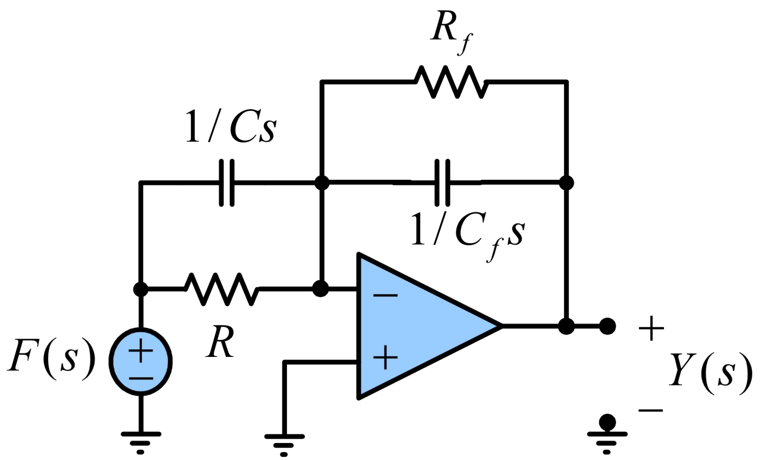
$$k=-\frac{R_f}{R};\quad a=\frac{1}{R_fC}$$



- Loại 2

$$H(s)=\frac{k(s+a)}{s+b}$$

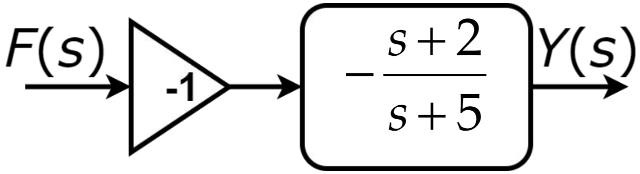
$$k=-\frac{C}{C_f};\ a=\frac{1}{RC};\ b=\frac{1}{R_fC_f}$$

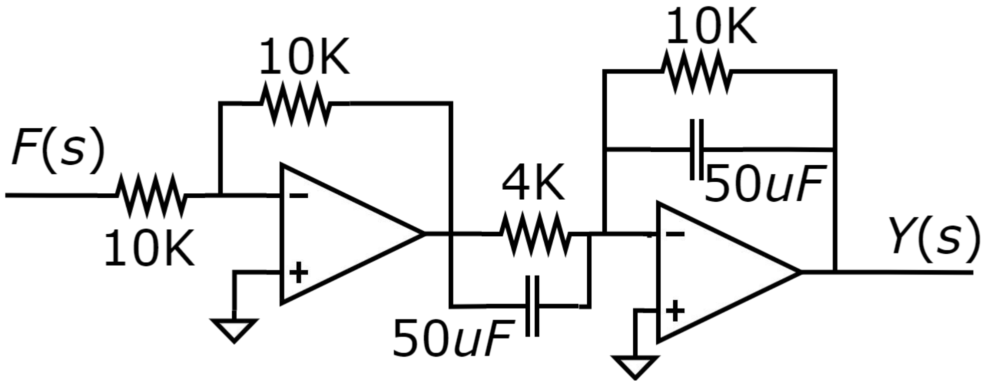


Mạch bậc nhất:

- *Ví dụ 3.13:* Thực hiện hệ thống $H(s)=\dfrac{s+2}{s+5}$ dùng các mạch OPAMP bậc nhất.

$$H(s)=(-1)\times\left(-\frac{s+2}{s+5}\right)$$

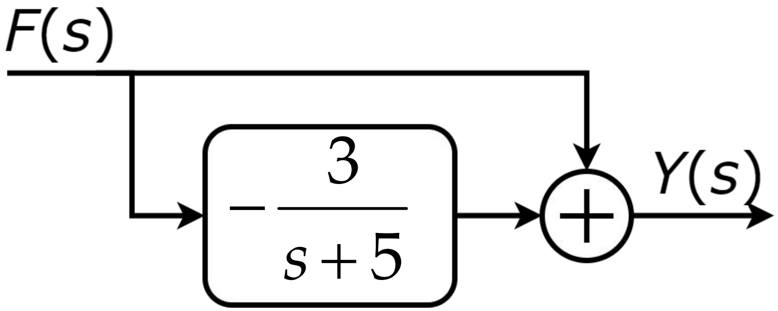


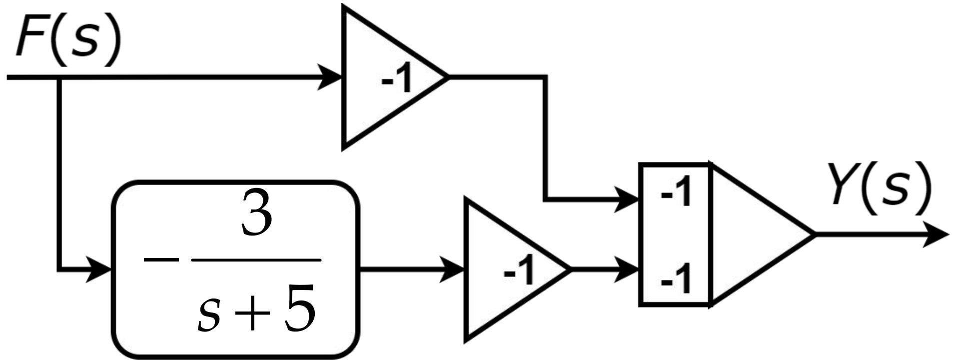


Created and edited by: **Nguyen Phuoc Bao Duy**
HCMC University of Technology

Mạch bậc nhất:

- *Ví dụ 3.13 (tt)* $$H(s) = 1 - \frac{3}{s+5}$$

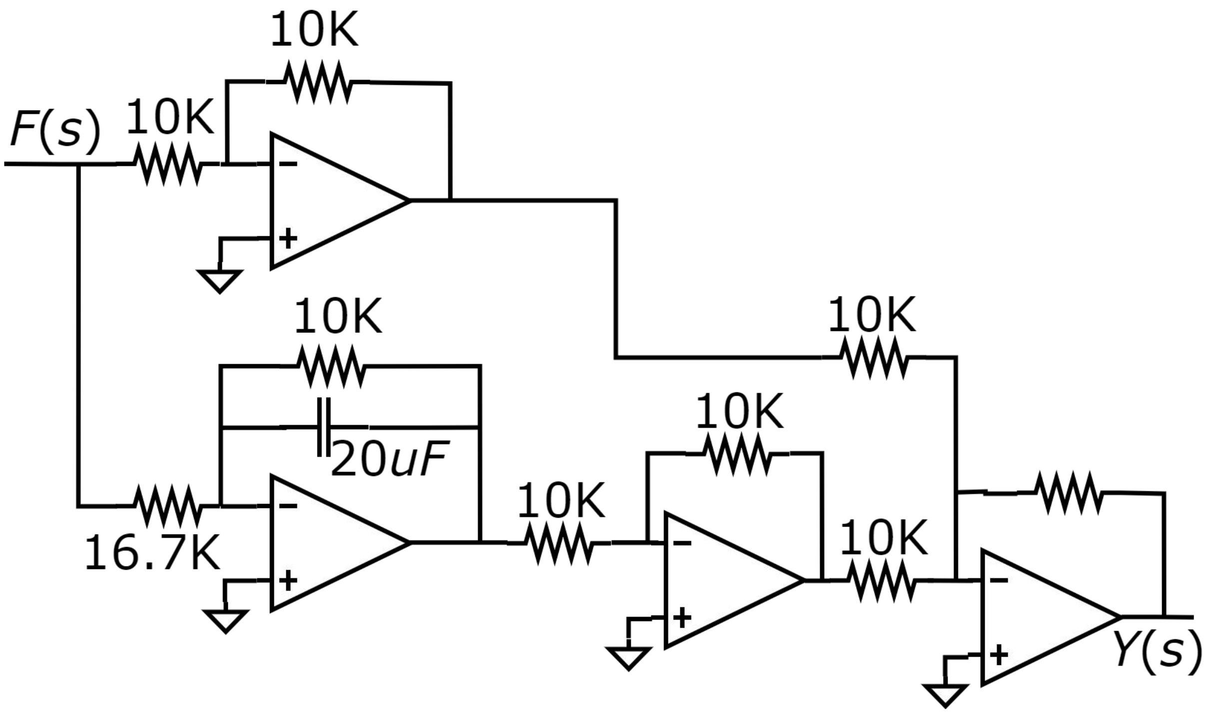




Mạch bậc nhất:

- *Ví dụ 3.13 (tt)*

$$H(s) = 1 - \frac{3}{s+5}$$

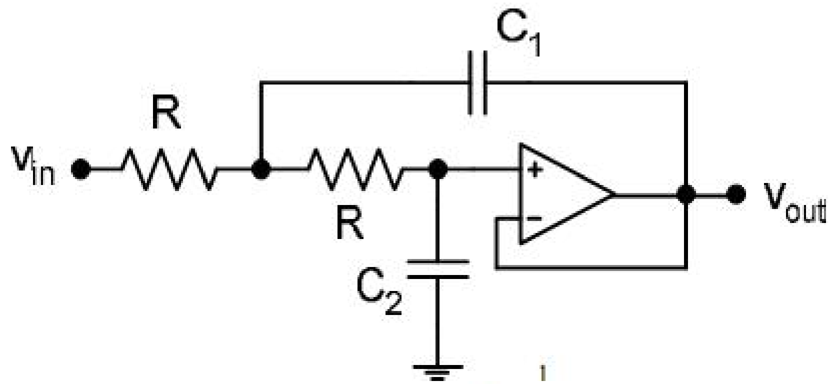


Mạch bậc 2:

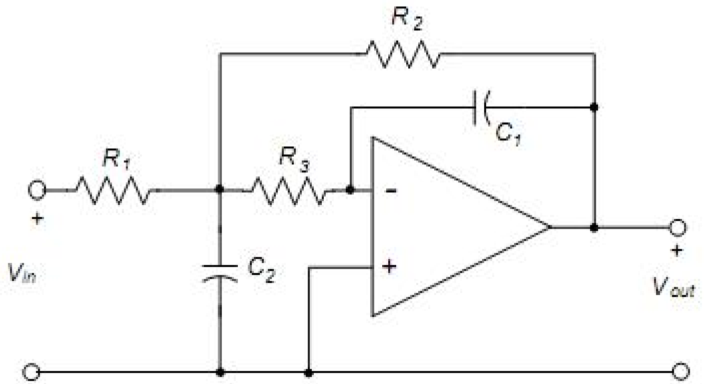
Mạch thông thấp

- Loại 1:

$$H(s)=\frac{\dfrac{1}{R^2C_1C_2}}{s^2+\dfrac{2}{RC_1}s+\dfrac{1}{R^2C_1C_2}}$$



- Loại 2:



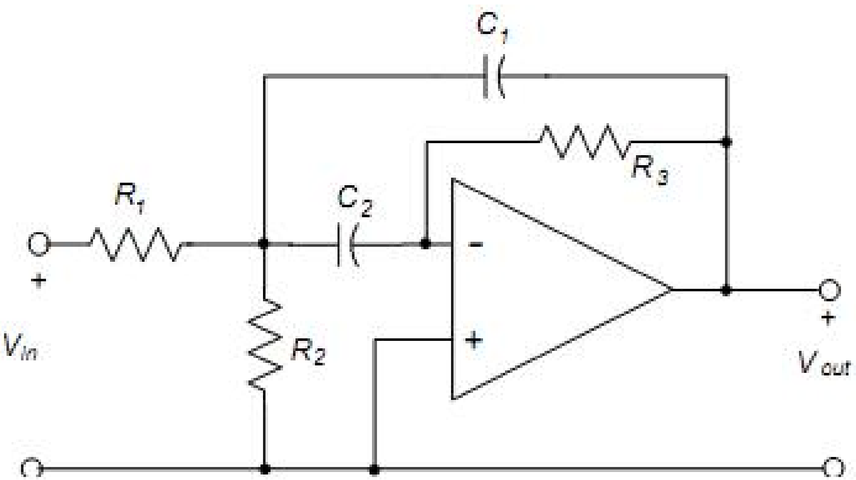
$$H(s)=\frac{-ka_0}{s^2+a_1s+a_0};a_0=\frac{1}{R_2R_3C_1C_2}$$

$$k=\frac{R_2}{R_1};\ a_1=\frac{1}{C_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)$$

Mạch bậc 2:

Mạch thông dãi

$$H(s) = \frac{-ka_1 s}{s^2 + a_1 s + a_0}$$



$$a_0 = \frac{1}{R_3 C_1 C_2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right); \quad a_1 = \frac{C_1 + C_2}{R_3 C_1 C_2}$$

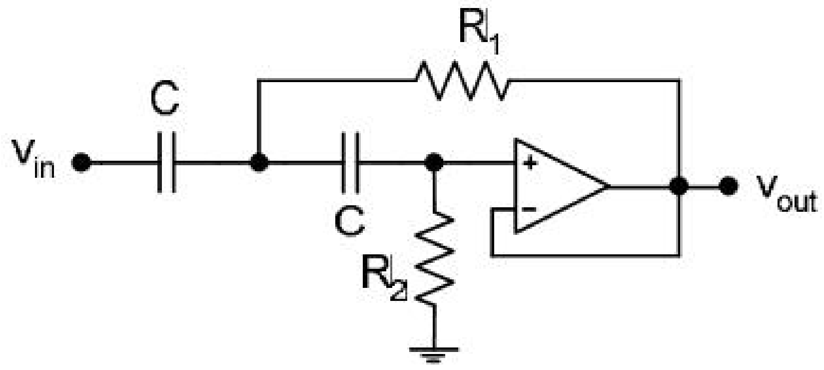
$$k = \frac{R_3 C_2}{R_1 (C_1 + C_2)};$$

Mạch bậc 2:

Mạch thông cao

- Loại 1

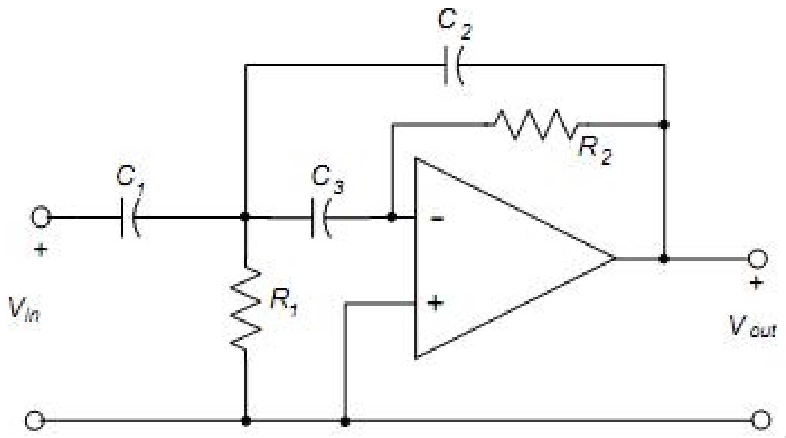
$$H(s)=\frac{s^2}{s^2+\frac{2}{R_2C}s+\frac{1}{R_1R_2C^2}}$$



- Loại 2

$$H(s)=\frac{-ks^2}{s^2+a_1s+a_0};a_0=\frac{1}{R_1R_2C_2C_3}$$

$$k=\frac{C_1}{C_2};\ \ a_1=\frac{C_1+C_2+C_3}{R_2C_2C_3}$$



Bài tập:

Bài 4: Trình bày đầy đủ các bước để vẽ sơ đồ khối và sơ đồ mạch điện dùng OPAMP thực hiện hệ thống LTI có hàm truyền

$$H(s) = \frac{3(s^2 + 8s + 15)}{s^2 + 10s + 24}$$

a. Chỉ sử dụng các mạch OPAMP cơ bản

b. Dùng các mạch OPAMP bậc 1 (có thể kết hợp thêm các mạch OPAMP cơ bản).