Chương 6:

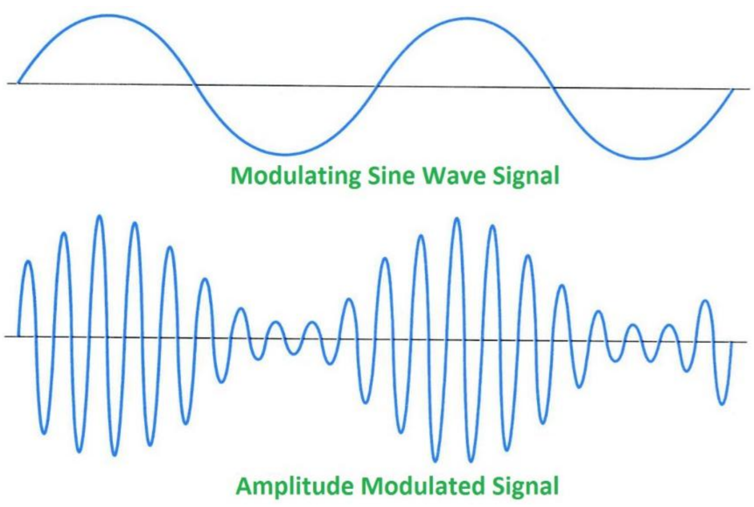
Ứng dụng của biến đổi Fourier

1. ***Điều chế biên độ***
   - *Điều chế góc*
2. *Lấy mẫu và khôi phục tín hiệu*

Created and edited by: **Nguyen Phuoc Bao Duy**
HCMC University of Technology

Điều chế biên độ

- Điều chế và giải điều chế là các khâu rất quan trọng trong các lĩnh vực như:
  - ✓ Truyền thông
  - ✓ Radar, siêu âm, MRI
  - ✓ Tín hiệu quang học
- Có rất nhiều phương pháp điều chế khác nhau.
- Có nhiều phương pháp để tách tín hiệu.
- Điều chế biên độ có nghĩa là tín hiệu thông tin cần truyền đi $m(t)$ được biểu diễn dưới dạng biên độ (thay đổi) của tín hiệu sóng mang.

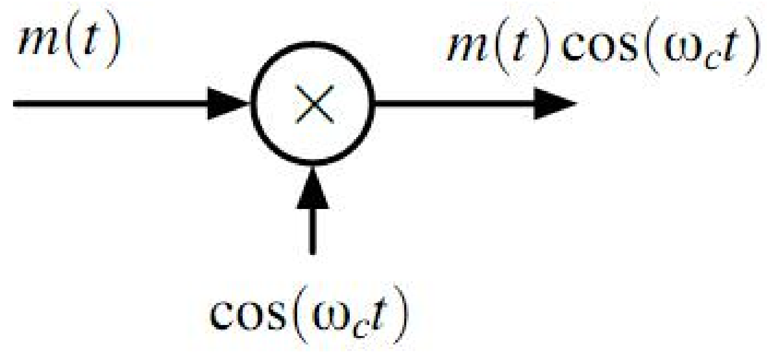


Điều chế biên độ

Điều chế hai dãi bên, triệt sóng mang (Double-Sideband, Suppressed Carrier - DSB-SC)

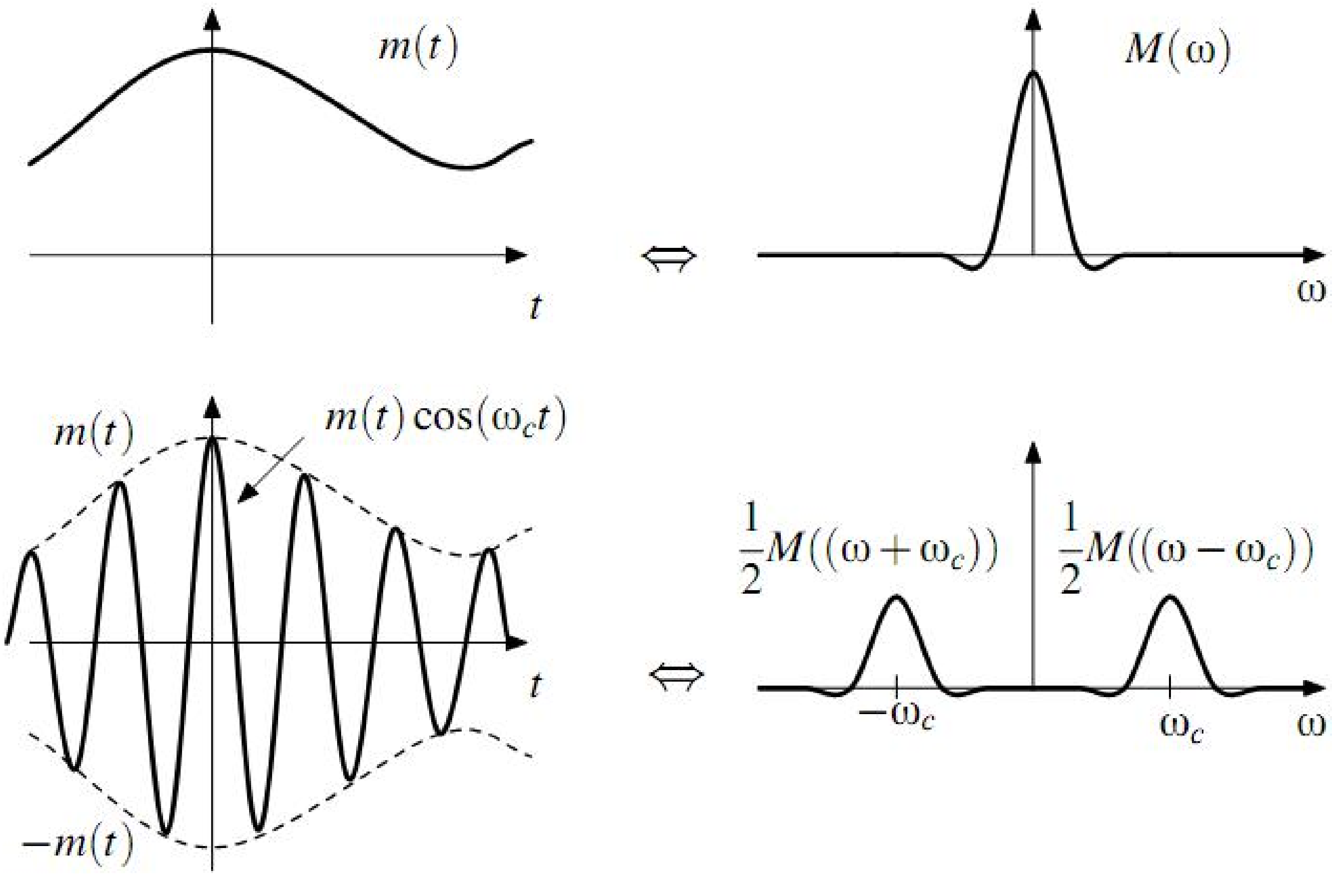
- Ta có tín hiệu thông tin $m(t)$, và tín hiệu $\cos(\omega_c t)$ có tần số góc là ω_c. Tín hiệu sau khi điều chế về biến đổi Fourier của nó là:

$$y_{AM}(t) = m(t)\cos(\omega_c t) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[M(\omega+\omega_c)+M(\omega-\omega_c)\right]$$



Điều chế biên độ

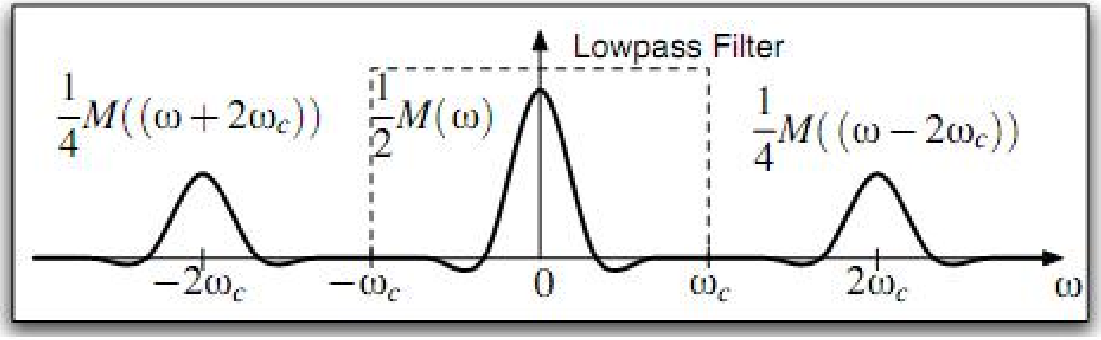
$$Y_{AM}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[M(\omega) * \left(\pi\delta(\omega+\omega_c) + \pi\delta(\omega-\omega_c)\right)\right]$$



Điều chế biên độ

- Để giải điều chế (tức là khôi phục lại tín hiệu $m(t)$), thì tín hiệu sau điều chế một lần nữa được nhân $\cos(\omega_c t)$.

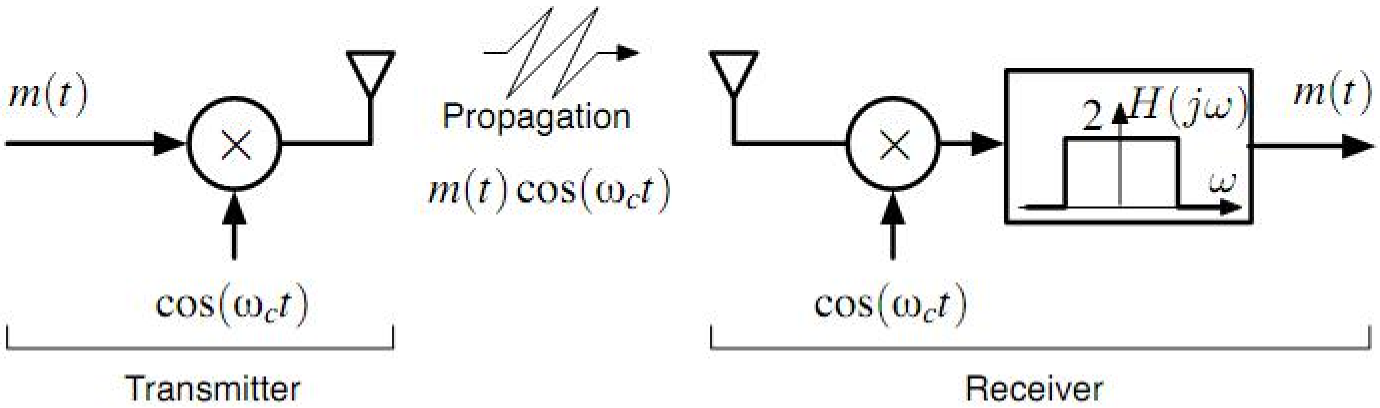
$$y_{AM}(t)\cos(\omega_c t) \Leftrightarrow \frac{1}{4}M(\omega+2\omega_c)+\frac{1}{2}M(\omega)+\frac{1}{4}M(\omega-2\omega_c)$$



- Cuối cùng ta sử dụng một bộ lọc thông thấp để tách tín hiệu $m(t)$.

Điều chế biên độ

- Sơ đồ khối của toàn bộ hệ thống điều chế - giải điều chế:

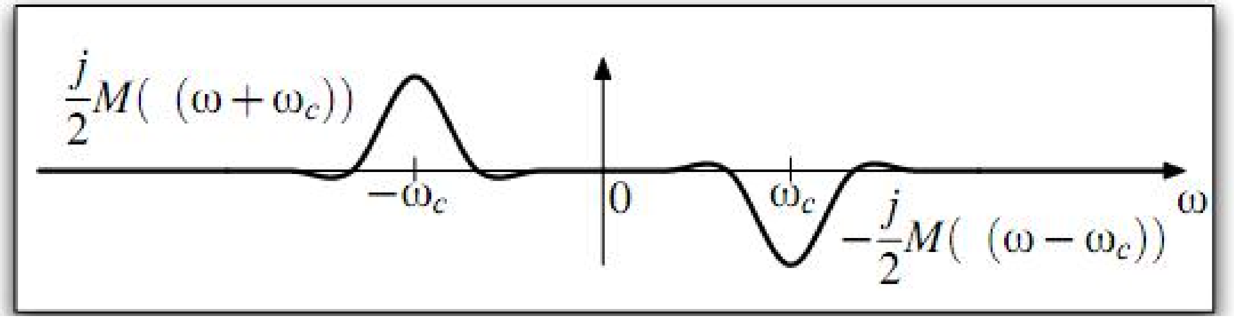


- Hệ thống này yêu cầu bộ truyền và bộ nhận phải sử dụng các sóng mang cùng pha.
- Trong thực tế thì pha của bộ truyền và bộ nhận có sự sai biệt do nhiều lý do dẫn đến tín hiệu sau khi khôi phục bị sai lệch so với tín hiệu ban đầu.

Điều chế biên độ

- Ví dụ, xét trường hợp đặc biệt khi sóng mang của bộ truyền và bộ nhận tín hiệu bị lệch pha π/2, khi đó tín hiệu điều chế có dạng:

$$m(t)\cos\left(\omega_c t - \frac{\pi}{2}\right) = m(t)\sin\left(\omega_c t\right) \Leftrightarrow \frac{j}{2}M(\omega+\omega_c) + \frac{j}{2}M(\omega-\omega_c)$$

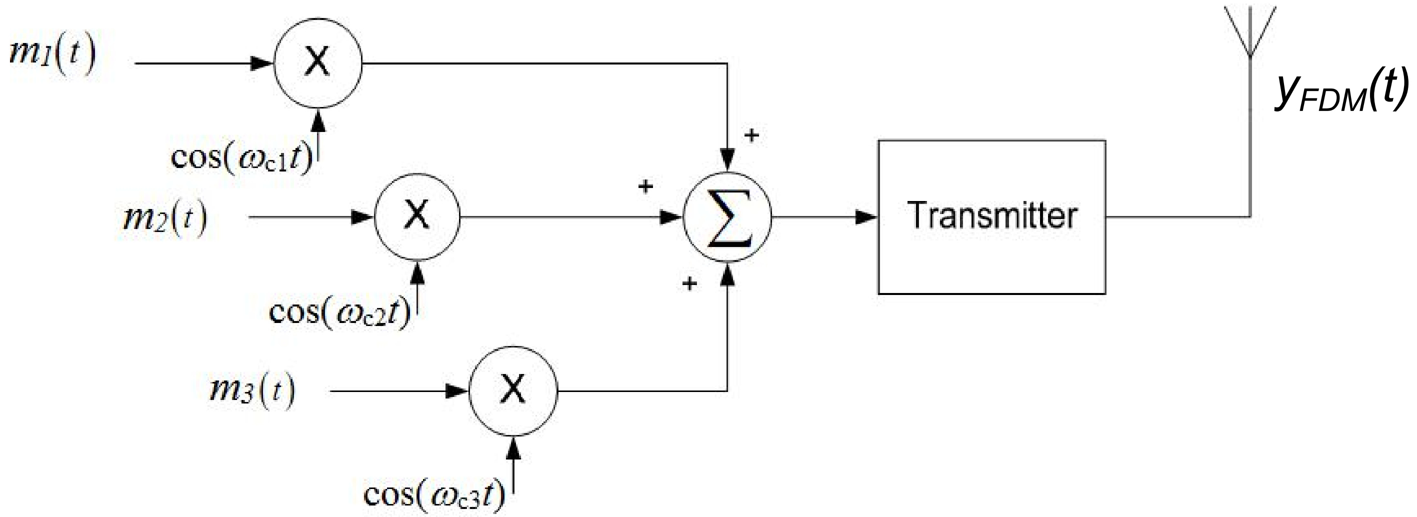


- Lúc này, nếu giải điều chế với sóng mang cos($\omega_c t$), thì tín hiệu bị triệt tiêu và không khôi phục được. (Giải thích?)

Created and edited by: **Nguyen Phuoc Bao Duy**
HCMC University of Technology

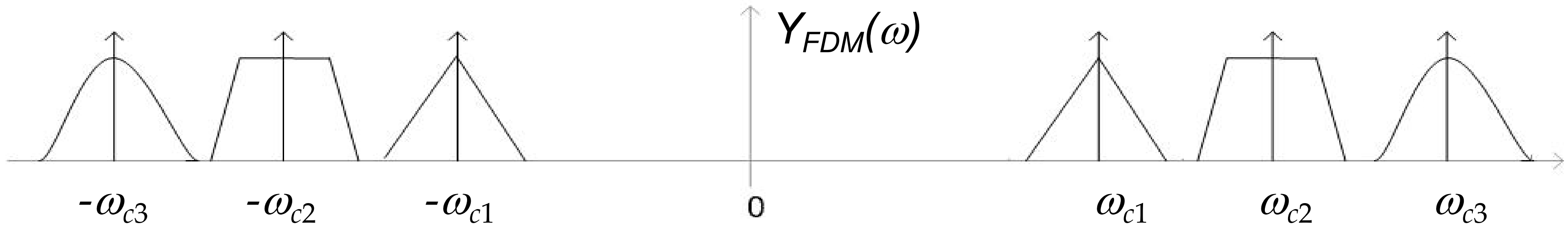
Bộ ghép kênh theo tần số (Frequency Division Multiplexing - FDM)

- Giả sử có N tín hiệu với băng thông giới hạn ω_m , mỗi tín hiệu sẽ được điều chế với một tần số sóng mang khác nhau ω_{cm}.
- Các tần số sóng mang phải chọn khác nhau sao cho phổ các tín hiệu sau khi điều chế không bị chồng lên nhau.

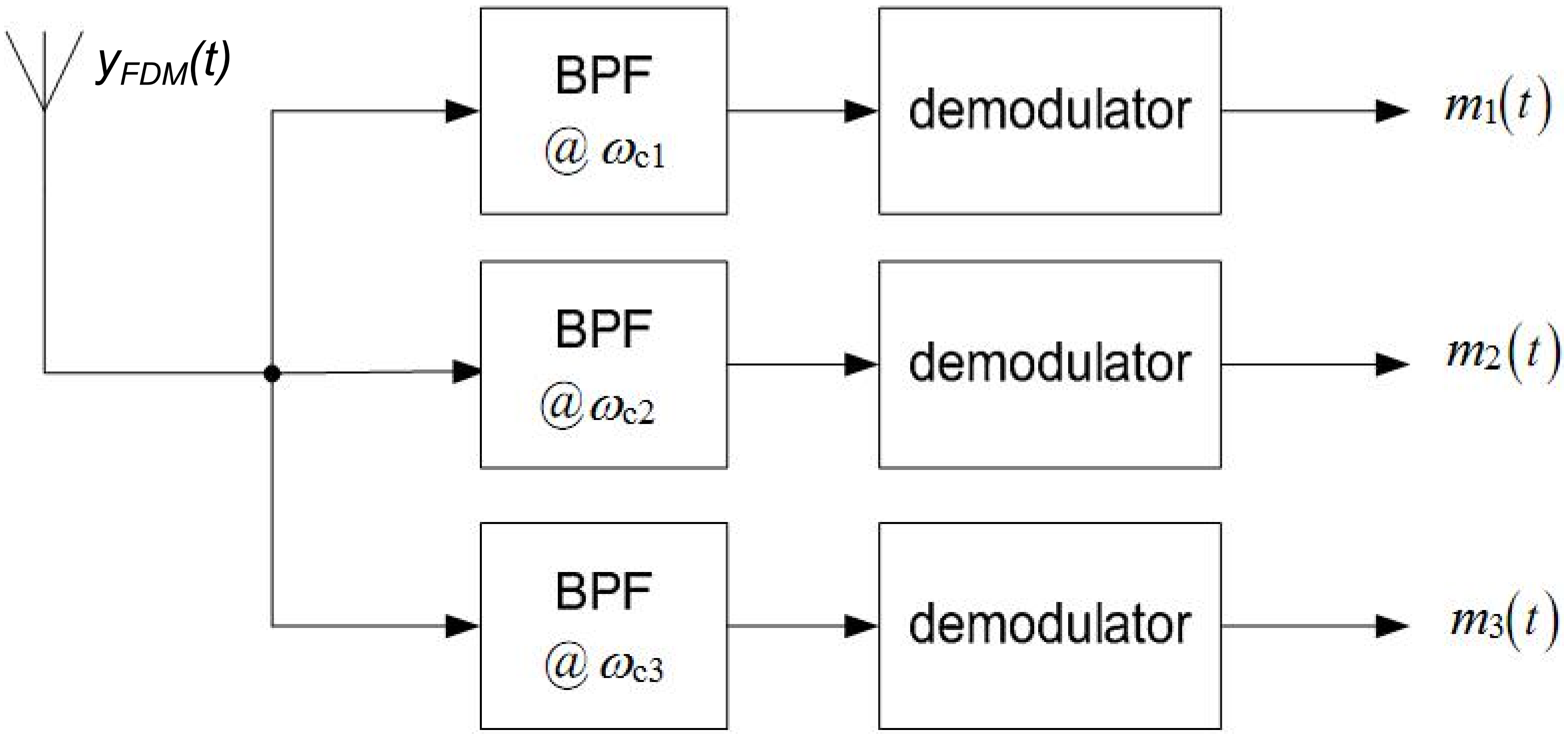


Bộ ghép kênh theo tần số

- Các tín hiệu sau điều chế sẽ được ghép vào cùng một tín hiệu bằng cách lấy tổng.
- Để khôi phục tín hiệu sau khi đã ghép kênh, ta sử dụng hai bước cơ bản:
  - Lọc thông dãi để tách phần tín hiệu cần khôi phục.
  - Giải điều chế để khôi phục tín hiệu ban đầu



Bộ ghép kênh theo tần số



Created and edited by: **Nguyen Phuoc Bao Duy**
HCMC University of Technology

<u>*Chương 6:*</u>

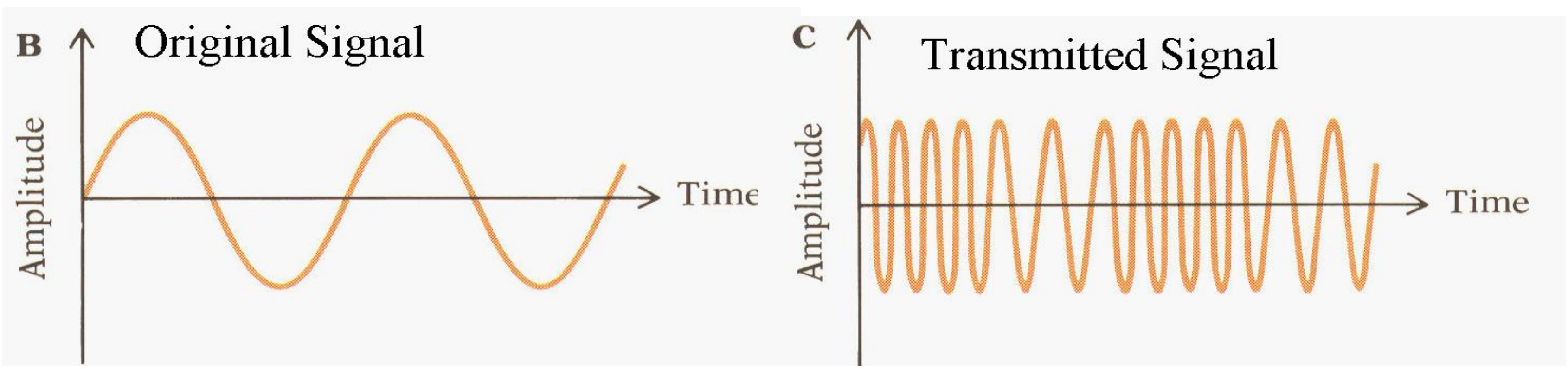
Ứng dụng của biến đổi Fourier

1. *Điều chế biên độ*
   - ***<u>Điều chế góc</u>***
2. *Lấy mẫu và khôi phục tín hiệu*

Created and edited by: **Nguyen Phuoc Bao Duy**
HCMC University of Technology

Angle Modulation (nonlinear)

- The information content of the signal $m(t)$ is carried by the angle (which includes frequency and phase) of the carrier.



Angle Modulation (nonlinear)

- The generalized angle modulated signal can be describe as:

$$y_{EM}(t) = A\cos[\theta_c(t)] = A\cos[\omega_c t + k\psi(t)]$$

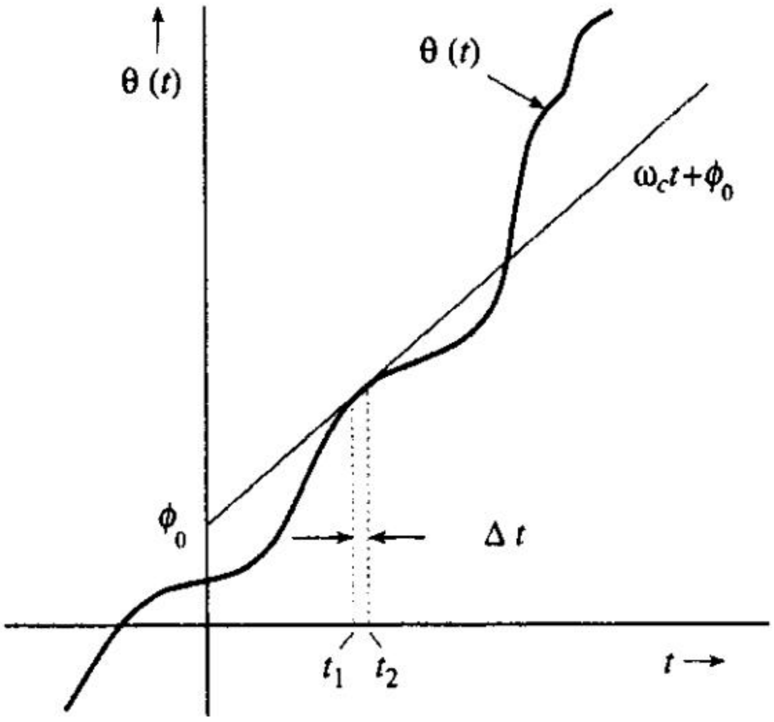
- k is an arbitrary constant and $\psi(t)$ is obtained by an invertible linear operation on the message $m(t)$.
- We have variety of subclasses of angle modulation. Two simple possibilities are phase modulation (PM) and frequency modulation (FM).
  - PM: the phase of $y(t)$ will be proportional to the amplitude of $m(t)$.
  - FM: $y(t)$ is sinusoidial with a frequency that is proportional to the amplitude of $m(t)$.

Angle Modulation (nonlinear)

- The concept of Instantaneous Frequency:

$$y(t) = A\cos\left[\theta(t)\right]$$

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$



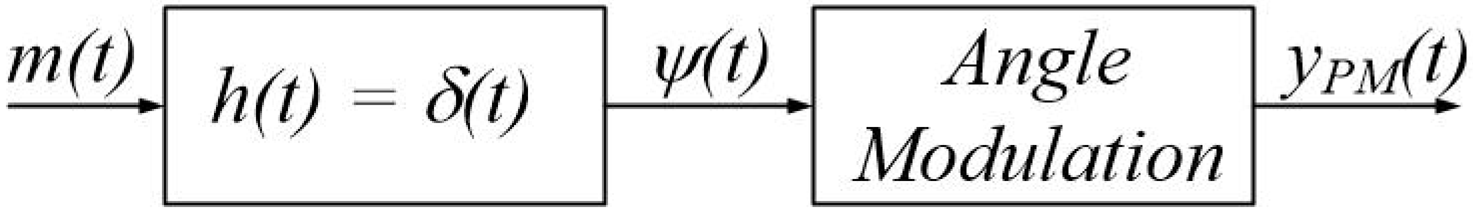
Angle Modulation (nonlinear)

- Phase Modulation:

$$\theta(t) = \omega_c t + k_p m(t)$$

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta}{dt} = \omega_c + k_p m'(t)$$

$$y_{PM}(t) = A\cos\left[\omega_c t + k_p m(t)\right]$$



Created and edited by: **Nguyen Phuoc Bao Duy**
HCMC University of Technology

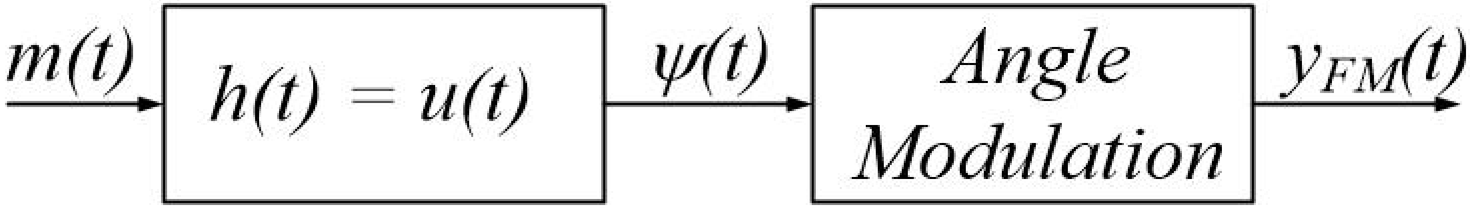
Angle Modulation (nonlinear)

- Frequency Modulation:

$$\omega_i(t) = \omega_c + k_f m(t)$$

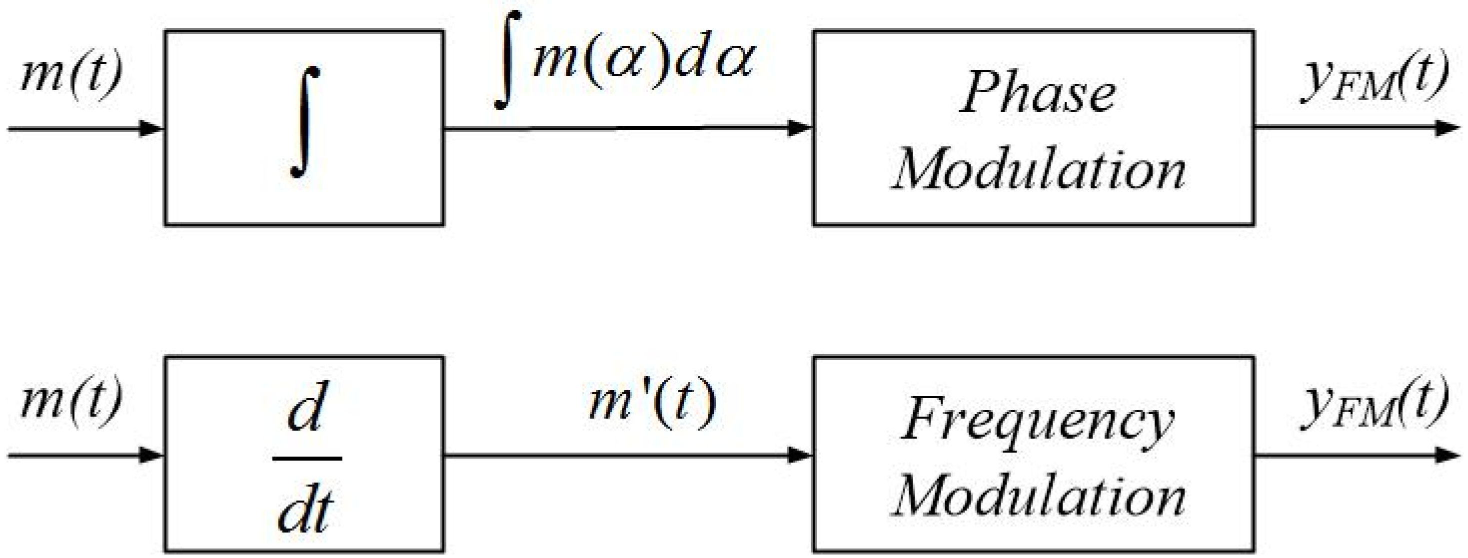
$$\theta(t) = \omega_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} m(\alpha) d\alpha$$

$$y_{FM}(t) = A\cos\left[\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} m(\alpha) d\alpha\right]$$



Angle Modulation (nonlinear)

- Phase and frequency modulation are inseparable:



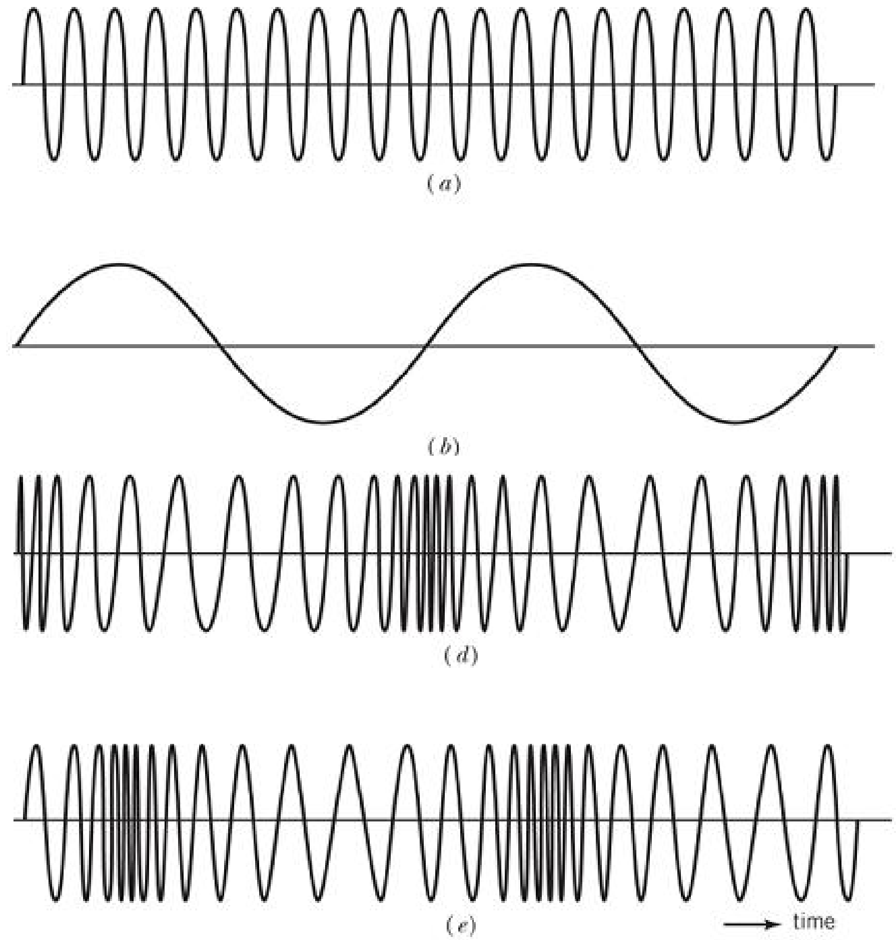
Angle Modulation (nonlinear)

Carrier

Sinusoidial modulating signal

Phase-modulated signal

Frequency-modulated signal

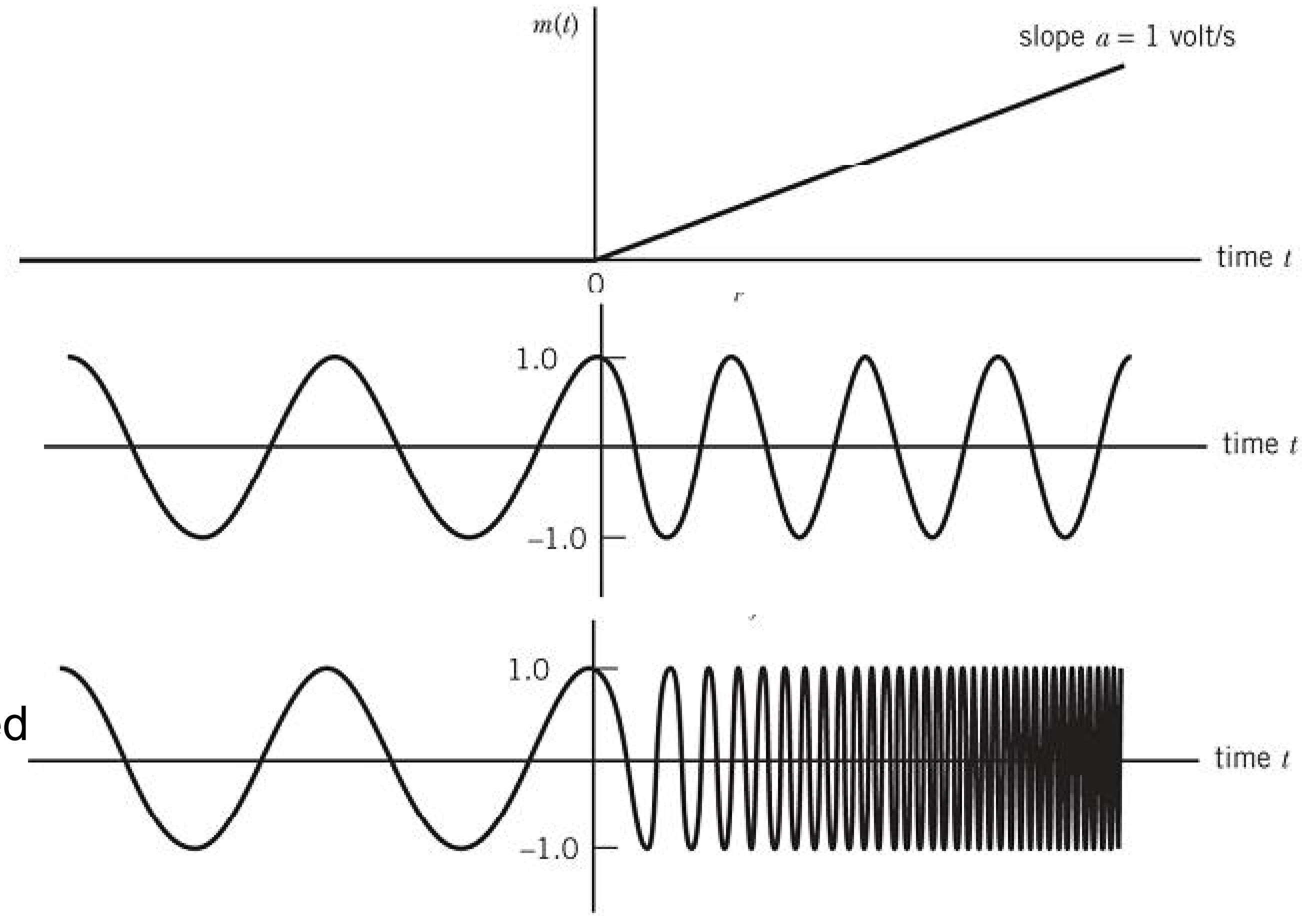


Angle Modulation (nonlinear)

Modulating signal

Phase-modulated signal

Frequency-modulated signal



Created and edited by: **Nguyen Phuoc Bao Duy**
HCMC University of Technology

Angle Modulation (nonlinear)

- Bandwidth of Angle-Modulated Signals

$$\begin{aligned} y_{EM}(t) &= A\cos\left[\omega_c t + k\psi(t)\right] \\ &= A\cos(\omega_c t)\cos\left[k\psi(t)\right] - A\sin(\omega_c t)\sin\left[k\psi(t)\right] \\ &\approx A\cos(\omega_c t) - Ak\psi(t)\sin(\omega_c t) \quad \text{when } k \to 0 \end{aligned}$$

- When $k \to 0$, $y_{EM}(t)$ is similar to $y_{AM}(t)$. If $m(t)$ is bandlimited to $\omega_M$rad/s, then the bandwidth of $\psi(t)$ is also $\omega_M$rad/s, hence the bandwidth of $y_{EM}(t)$ is $2\omega_M$rad/s.
- In the general case, the carrier frequency varies in the range from $\omega_c - \Delta\omega$ to $\omega_c + \Delta\omega$, but the bandwidth of the angle modulated signal is larger than $2\Delta\omega$.

Angle Modulation (nonlinear)

- Determine $\Delta\omega$:

$$\omega_i(t) = \omega_c + k\psi'(t)$$
$$\Rightarrow \Delta\omega = k.\max|\psi'(t)|$$

- The angle modulated signal bandwidth is larger than $2\Delta\omega$:

$$Bandwidth = 2\Delta\omega + X$$

- Let $k \to 0$, we have $X = 2\omega_M$

$$Bandwidth = 2(\Delta\omega + \omega_M)$$

  - FM: $Bandwidth = 2[k_f \max|m(t)| + \omega_M]$
  - PM: $Bandwidth = 2[k_p \max|m'(t)| + \omega_M]$

Demodulation of Angle Modulated Signals

- FM demodulator, with some minor modification, can be used for demodulation of any other form of angle modulation.
- The istantaneous frequency of FM wave is proportional t the baseband signal $m(t)$, so an FM demodulator is a device whose output is proportional to frequency of the input signal.
- Let's consider an ideal differentiator, with the input signal is an angle modulated signal $y_{EM}(t) = \cos[\omega_c t + k\psi(t)]$, the output $y(t)$ is given by:

$$y(t) = \frac{dy_{EM}(t)}{dt} = \left[\omega_c + k\psi'(t)\right]\sin\left[\omega_c t + k\psi(t) + \pi\right]$$

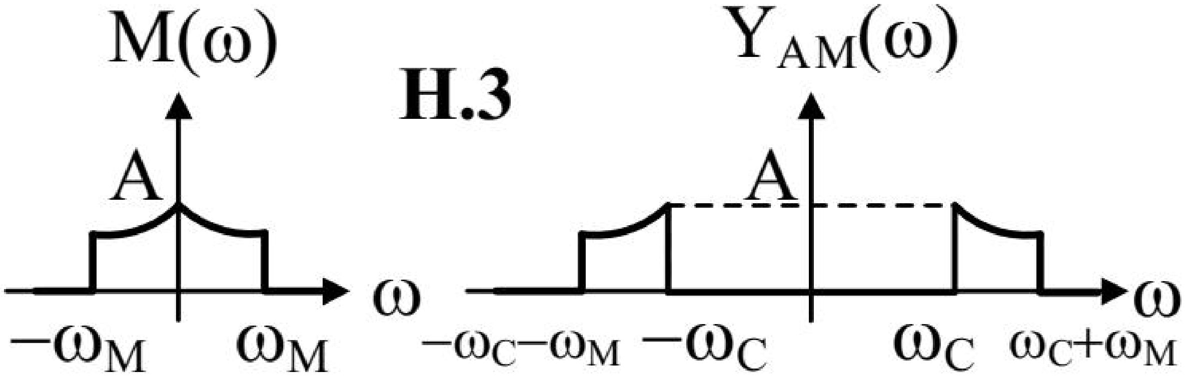
Demodulation of Angle Modulated Signals

$$y(t) = \left[\omega_c + k\psi'(t)\right]\sin\left[\omega_c t + k\psi(t) + \pi\right]$$

- An envelop detector will result in the output $\omega_c + k\psi'(t)$.
- Blocking the DC (coupling capacitor), we obtain $k\psi'(t)$.
- For FM: $\psi'(t) = m(t)$.
- There're many other kind of angle demodulator!

- **Bài tập**

Bài 1: Tín hiệu m(t) có phổ M(ω), tín hiệu điều chế biên độ một dãi bên $y_{AM}(t)$ có phổ $Y_{AM}(\omega)$ như trên H.3, với $\omega_C > \omega_M$. Trình bày đầy đủ các bước để xác định và vẽ sơ đồ khối của hệ thống điều chế (ngõ vào m(t), ngõ ra $y_{AM}(t)$) và hệ thống giải điều chế (ngõ vào $y_{AM}(t)$, ngõ ra m(t)).



Ứng dụng của biến đổi Fourier

1. *Điều chế biên độ*
   - *Điều chế góc*
2. ***Lấy mẫu và khôi phục tín hiệu***

Created and edited by: **Nguyen Phuoc Bao Duy**
HCMC University of Technology

Định lý lấy mẫu

Biến đổi Fourier của tín hiệu tuần hoàn

- Tín hiệu tuần hoàn *f*(*t*) với chu kỳ T_o được biểu diễn dưới dạng chuỗi Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

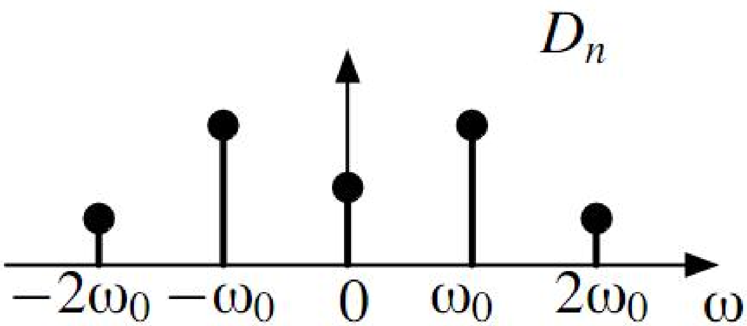
- Từ đó tìm được biến đổi Fourier của *f*(*t*):

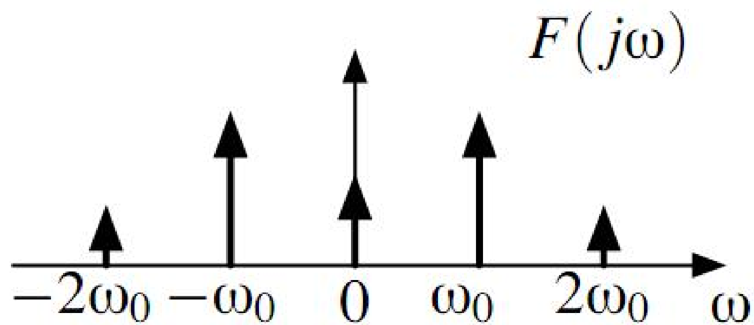
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \Leftrightarrow F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n 2\pi\delta(\omega - n\omega_0)$$

Định lý lấy mẫu

Biến đổi Fourier của tín hiệu tuần hoàn

- Ta thấy dạng các hệ số của chuỗi Fourier và Biến đổi Fourier có cùng dạng (tỉ lệ theo 2π).





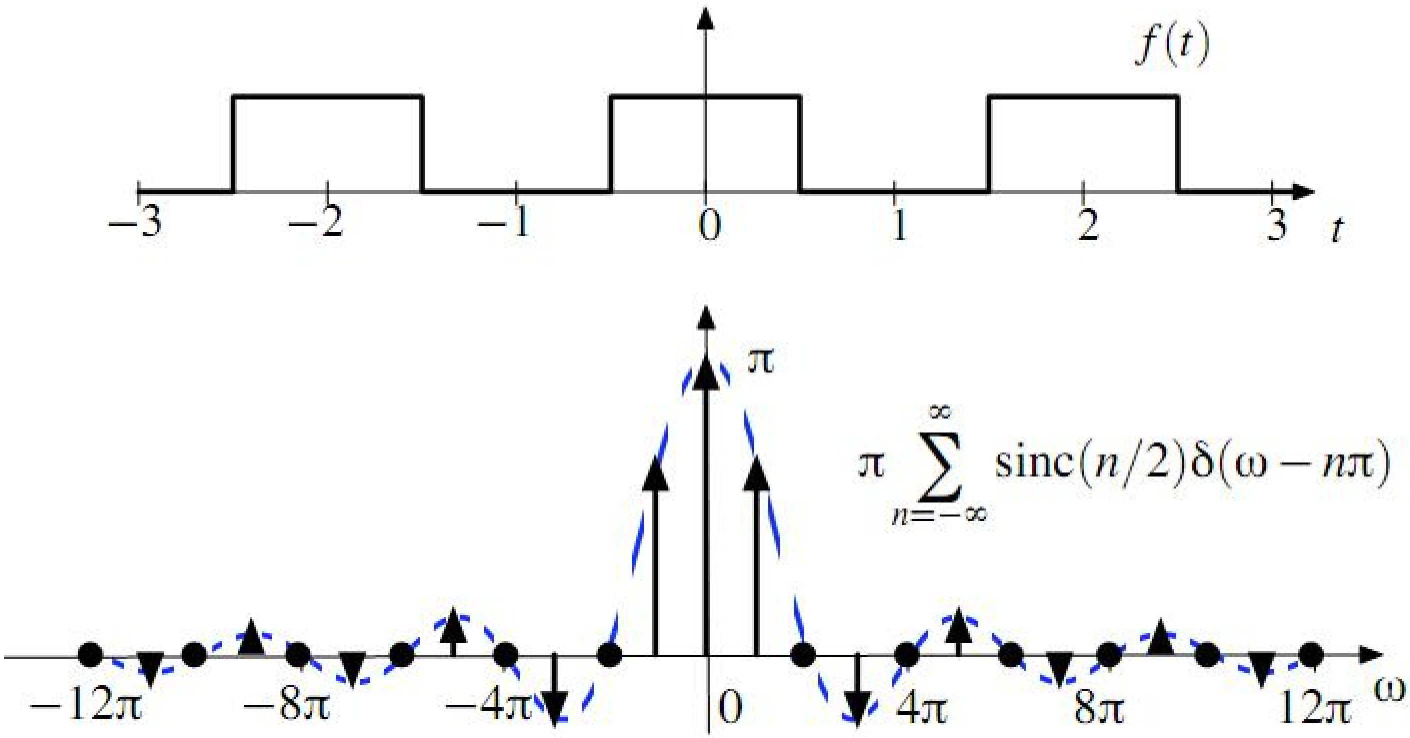
- *Ví dụ:*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} rect(t-2n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) e^{jn\pi t}$$

$$\Leftrightarrow F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)\left[2\pi\delta(\omega - n\pi)\right]$$

Định lý lấy mẫu

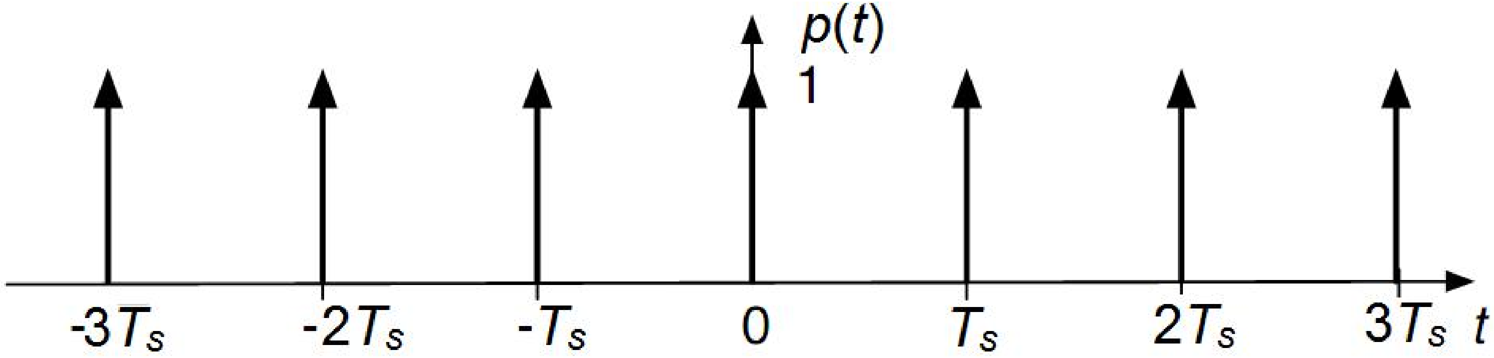
Biến đổi Fourier của tín hiệu tuần hoàn



Định lý lấy mẫu

Dãy xung đơn vị

- Định nghĩa hàm $p(t)$ là một dãy xung đơn vị δ cách nhau một khoảng T_s:



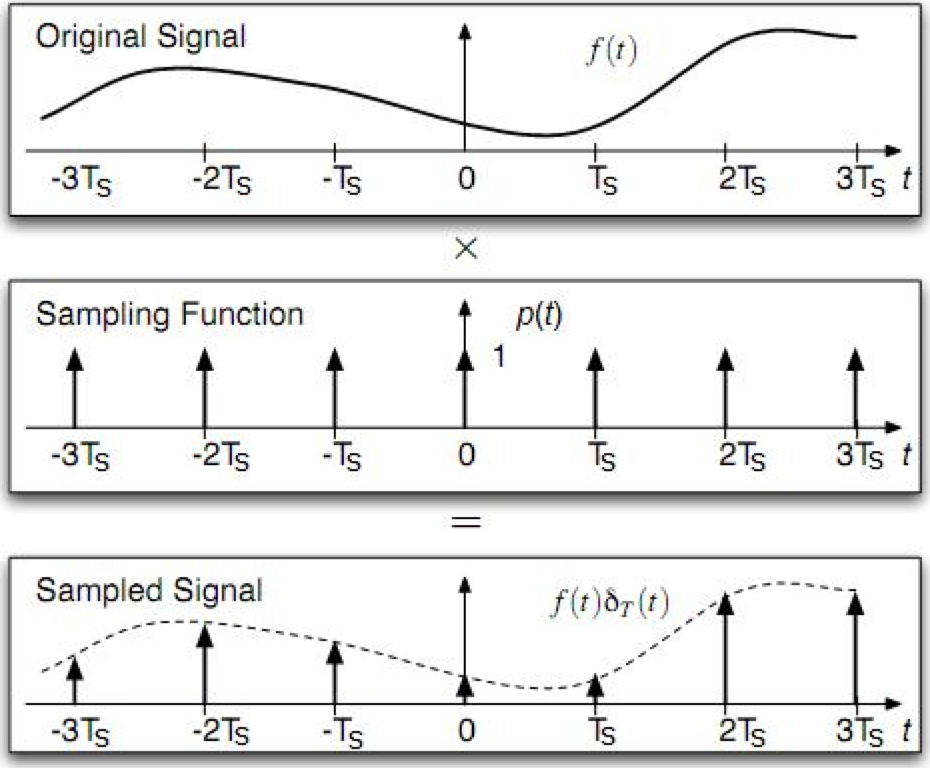
$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s) \overset{\text{Fourier Series}}{=} \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jn\omega_s t};\ \omega_s=\frac{2\pi}{T_s}$$

$$P(\omega)=\omega_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)$$

Định lý lấy mẫu

Định lý lấy mẫu

- Nếu $f(t)$ là tín hiệu cần lấy mẫu thì:



$$\bar{f}(t) = f(t)p(t) = f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT_s)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

Định lý lấy mẫu

- Biến đổi Fourier của tín hiệu sau khi đã lấy mẫu:

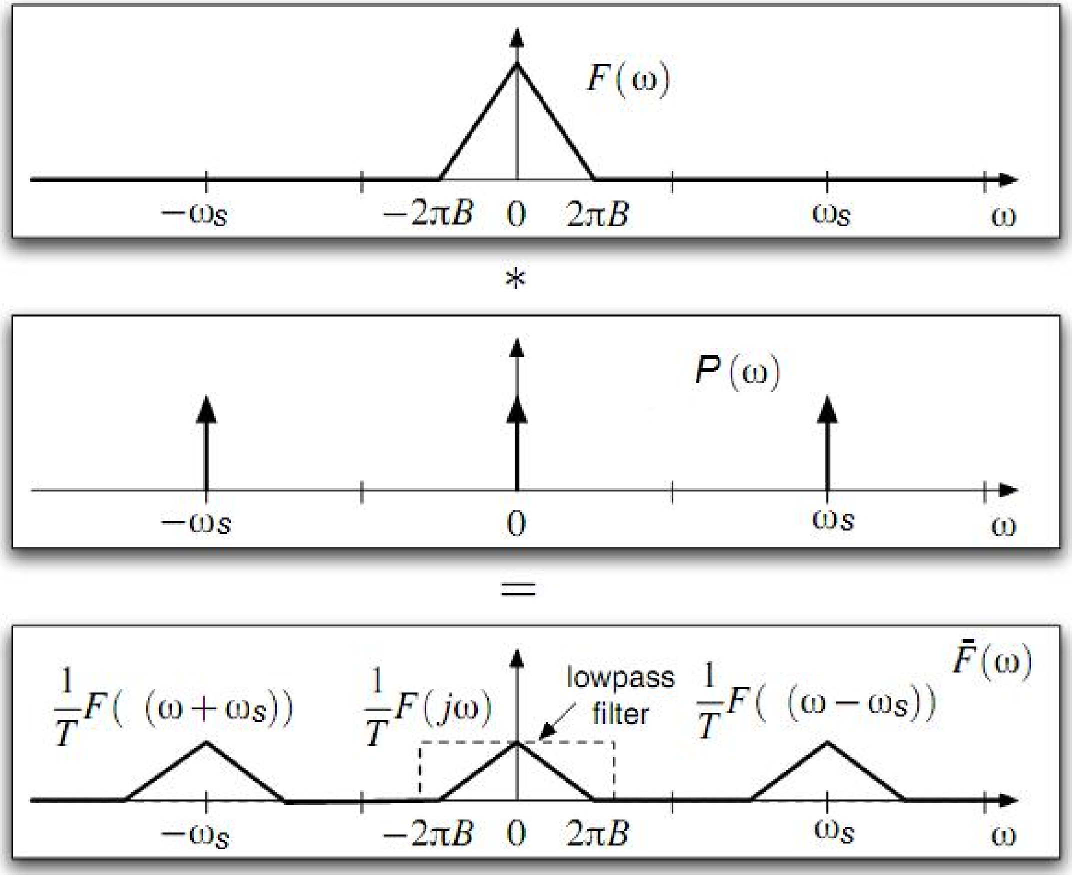
$$\bar{f}(t) = f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT_s) \Leftrightarrow \bar{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi}F(\omega) * \frac{2\pi}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\omega_s)$$

$$= \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega - n\omega_s)$$

- The spectrum of the sampled signal consists of shifted replicas of the original spectrum, scaled by $1/T_s$.
- If the bandwidth of $f(t)$ is BHz, the plot in the next slide shows the case where $\omega_s > 2*(2\pi B)$ (the sampling rate > $2B$)

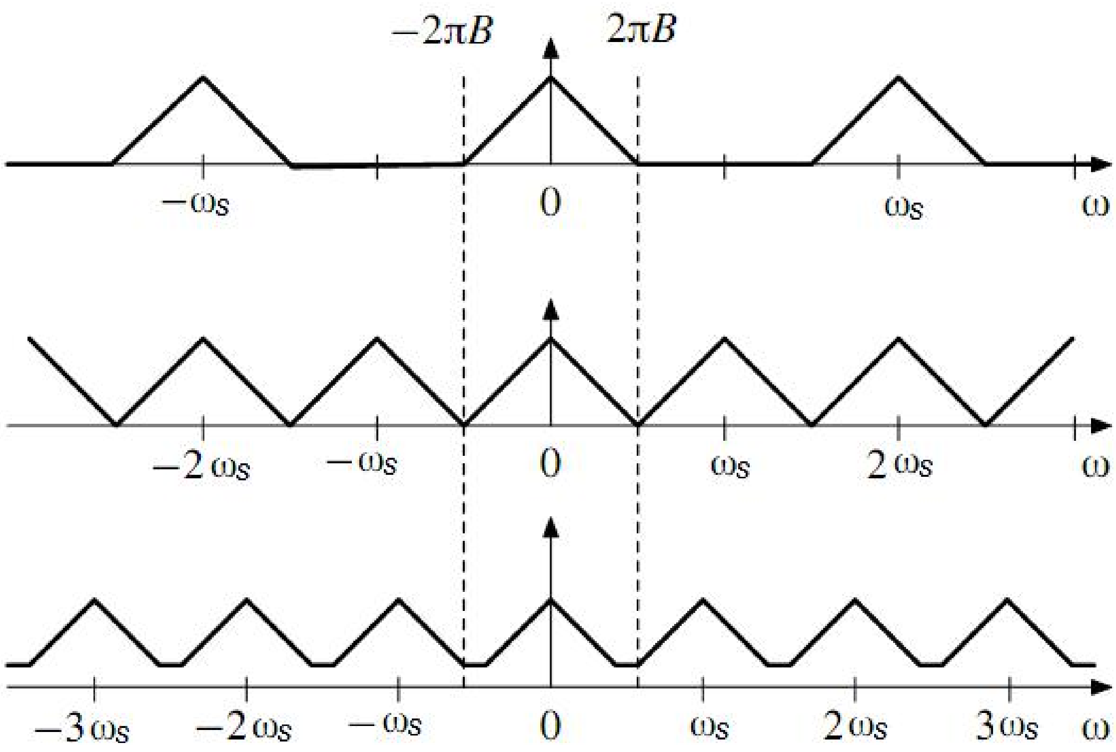
The Sampling Theorem

- If we lowpass filter the sampled signal, we can perfectly recover the orginal signal.



The Sampling Theorem

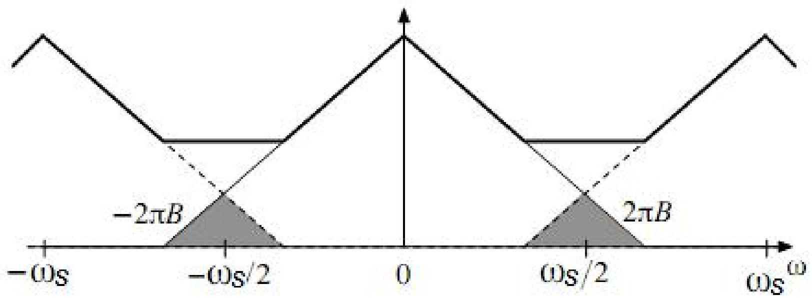
- As the sampling frequency decreases, spectral replicas get closer.



$F(\omega)$ cannot be recovered!

The Sampling Theorem

- The overlap is called *aliasing* because the low frequencies of one band appear (alias) as high frequencies of the next band.



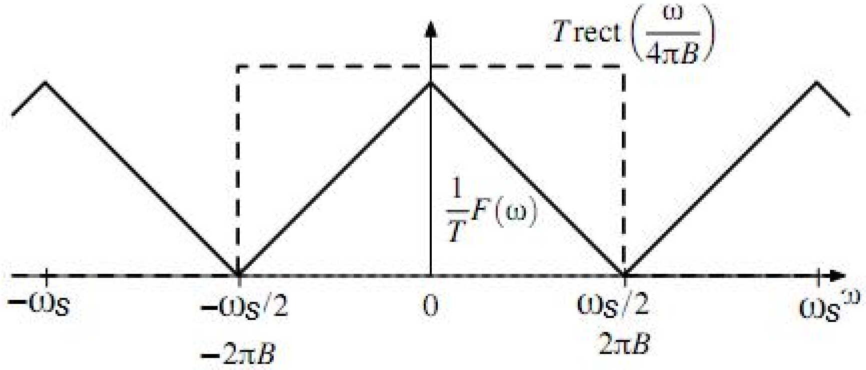
- No aliasing occoures only if

$$2\pi B < \frac{\omega_s}{2} \Leftrightarrow F_s = \frac{1}{T_s} \geq 2B$$

- The sampling rate 2B is the *Nyquist rate* for $f(t)$, the lowest rate that allows $f(t)$ to be perfectly recovered. T_s = 1/2B is the *Nyquist interval*.

Signal Reconstruction: the Interpolation Formula

- The ideal lowpass filter for $2B = 1/T_s$, sampling at the Nyquist rate, is:



- The lowpass filter has the Fourier transform:

$$H(\omega) = T_s.rect\left(\frac{\omega}{4\pi B}\right) \Leftrightarrow h(t) = \operatorname{sinc}(2Bt)$$

The Sampling Theorem

Signal Reconstruction: the Interpolation Formula

- The reconstructed signal is:

$$\bar{f}(t) * h(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s) \right] * h(t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)h(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\operatorname{sinc}\left[2B(t - nT_s)\right]$$

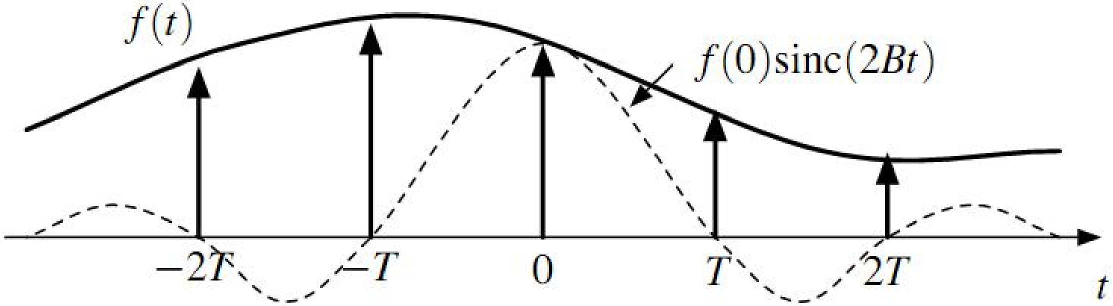
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\operatorname{sinc}(2Bt - n)$$

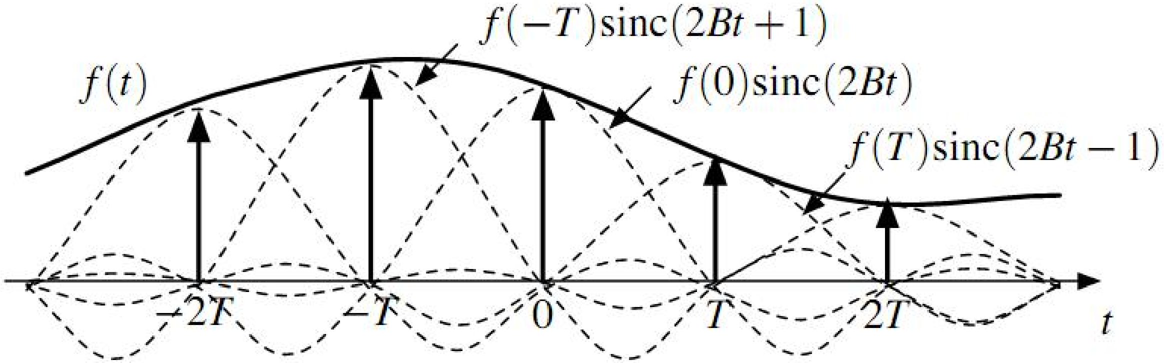
- This is the Whittaker-Kotelnikov-Shannon sampling theorem.
- The interpolated signal is a sum of shifted *sinc*-s, weighted by the samples *f*(*nT*).

The Sampling Theorem

Signal Reconstruction: the Interpolation Formula

- The *sinc* shifted to *nT* is 1 at *nT*, and zeros at all other samples!



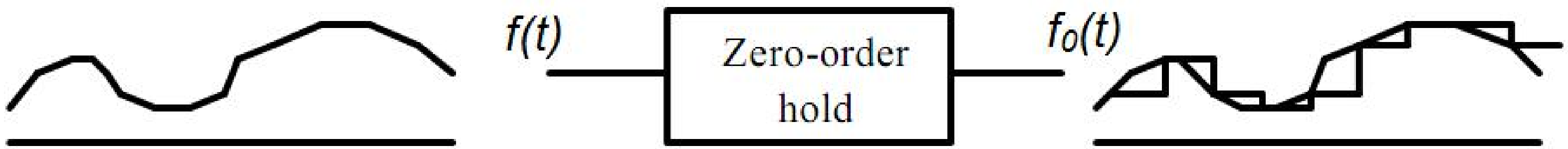


Created and edited by: **Nguyen Phuoc Bao Duy**
HCMC University of Technology

The Sampling Theorem

Sampling with a Zero-Order Hold

- An impulse train is very difficult to generate and transmit, and it is more convenient to generate the sampled signal in a form referred to as a zero-order hold (samples $f(t)$ at a given instant and holds that value until the next instant).

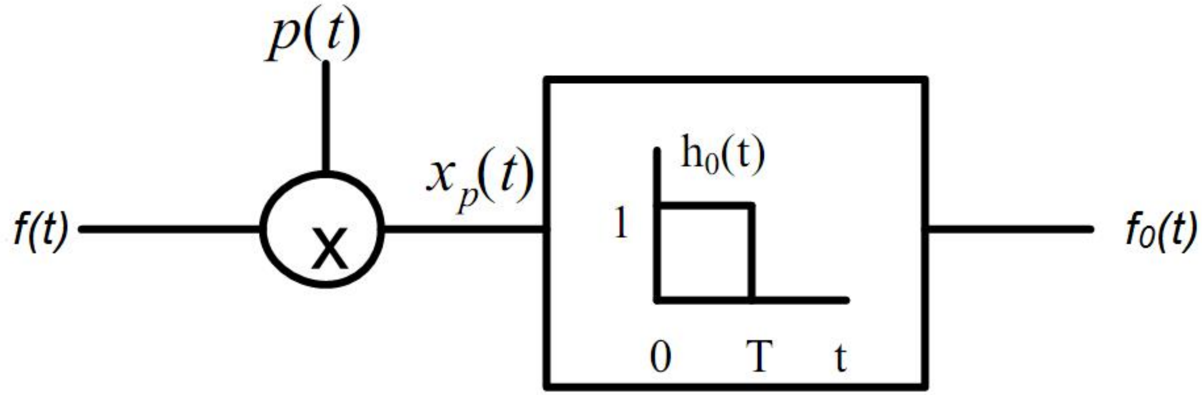


- The output $f_0(t)$ of the zero-order hold can be generated by impulse train sampling followed by an LTI system with rectangular impulse response.

Created and edited by: **Nguyen Phuoc Bao Duy**
HCMC University of Technology

The Sampling Theorem

Sampling with a Zero-Order Hold



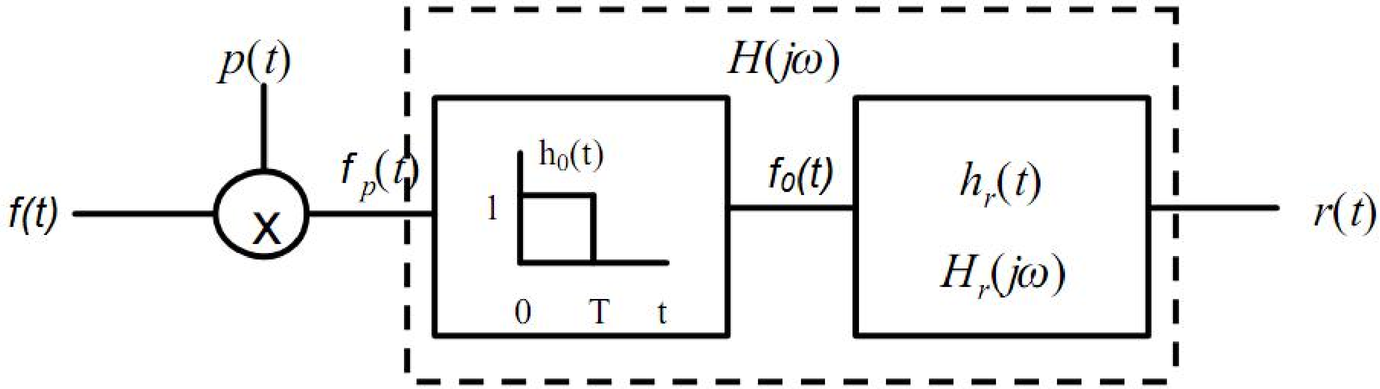
- The Fourier transform of $h_0(t)$ is the sinc function:

$$H_0(\omega) = e^{\frac{-j\omega T}{2}} \left[\frac{2\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega} \right]$$

The Sampling Theorem

Sampling with a Zero-Order Hold

- For perfect reconstruction, $r(t) = f(t)$, the cascade combination of $h_0(t)$ and $h_r(t)$ must be the ideal lowpass filter.

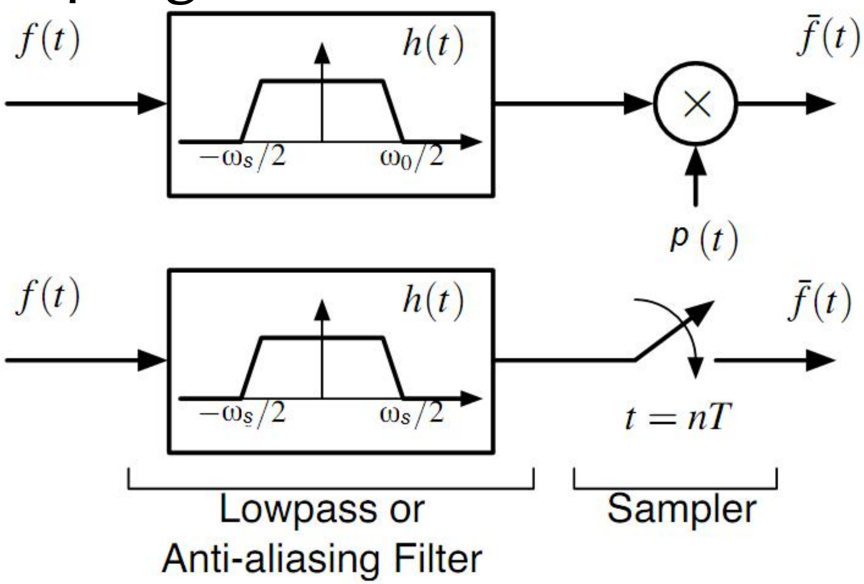


$$H_r(\omega) = e^{\frac{j\omega T}{2}} \frac{\omega H(\omega)}{2\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}; \quad H(\omega): ideal\ lowpass\ filter$$

The Sampling Theorem

Minimizing Aliasing

- A signal with finite duration has a infinite bandwidth, so once is has been sampled, there is no way to eliminate aliasing.
- Aliasing is minimized by first lowpass filtering the signal, then sampling.



Created and edited by: **Nguyen Phuoc Bao Duy**
HCMC University of Technology

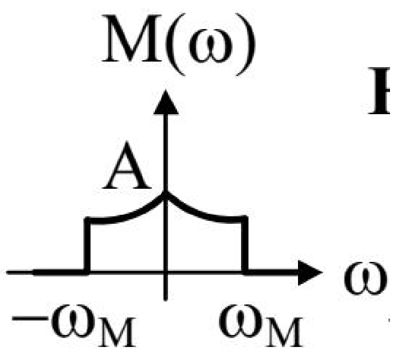
The Sampling Theorem

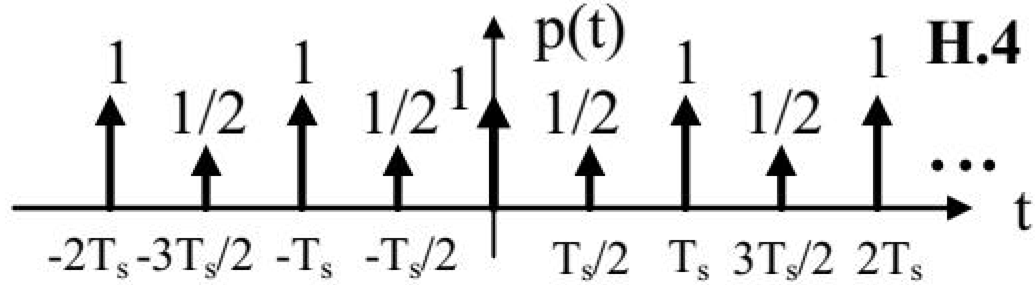
Minimizing Aliasing

- Any practical anti-aliasing filter will not be identically zero outside of its passband. Some aliasing will always occur.
- By bandlimiting with the anti-aliasing filter, we are choosing to distort the signal in a known way.
- Bandlimiting also suppresses noise.

- **Bài tập**

Bài 2: Tín hiệu m(t) có phổ M(ω) được lấy mẫu với dãy xung p(t) như H.4 để tạo ra y(t) = m(t).p(t). Trình bày đầy đủ các bước xác định Y(ω) theo M(ω), từ đó chứng minh rằng để khôi phục tín hiệu y(t) bằng bộ lọc thông thấp thì $T_s < \pi/\omega_M$, với điều kiện này, hãy vẽ Y(ω).





Created and edited by: **Nguyen Phuoc Bao Duy**
HCMC University of Technology