Lecture 10

Chương 5. Phân tích phổ tín hiệu và ứng dụng

5.1. Giới thiệu phổ tín hiệu

5.1.1. Khái niệm phổ (tần số) của tín hiệu

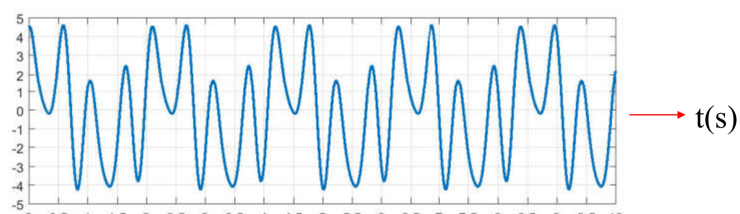
- Một tín hiệu là tổng của các tín hiệu điều hòa (thực/phức) thì có thể thay thế việc biểu diễn trên trục thời gian thành việc biểu diễn trên trục tần số.
- Biểu diễn độ lớn (biên độ)/pha ban đầu của từng thành phần điều hòa trên trục tần số được gọi là phổ biên độ/pha.
- Thành phần điều hòa thực chỉ được biểu diễn ở tần số dương gọi là phổ một bên. Thành phần điều hòa phức có thể được biểu diễn cả tần số dương và tần số âm khi đó gọi là phổ hai bên.

5.1.2. Ví dụ

- Xét tín hiệu f(t):

$$f(t)=2\cos(3t-45^0)+3\cos(12t-30^0)+\cos(18t+60^0)$$

- Biễu diễn f(t) trên trục thời gian:

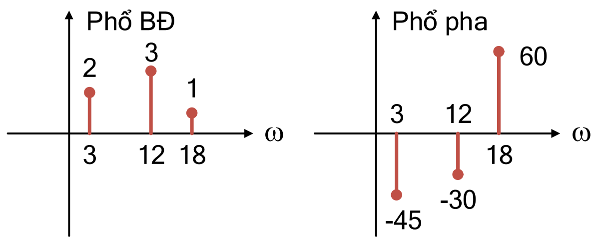


5.1.2. Ví dụ

- Xét tín hiệu f(t):

$$f(t)=2\cos(3t-45^0)+3\cos(12t-30^0)+\cos(18t+60^0)$$

- Biểu diễn f(t) trên trục tần số (phổ 1 bên):



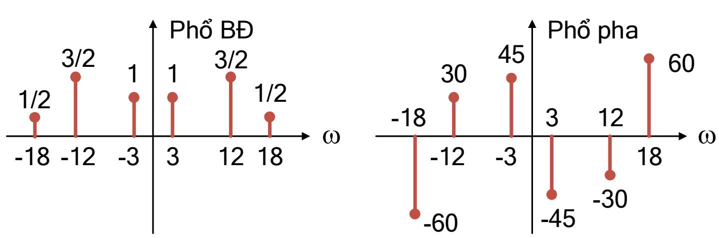
5.1.2. Ví dụ

- Xét tín hiệu f(t):

$$f(t)=2\cos(3t-45^0)+3\cos(12t-30^0)+\cos(18t+60^0)$$

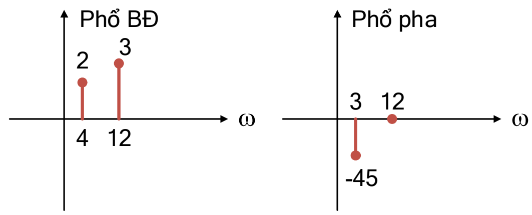
$$\Longrightarrow f(t)=e^{j(3t-45^0)}+e^{j(-3t+45^0)}+\tfrac{3}{2}e^{j(12t-30^0)}+\tfrac{3}{2}e^{j(-12t+30^0)}+\tfrac{1}{2}e^{j(18t+60^0)}+\tfrac{1}{2}e^{j(-18t-60^0)}$$

- Biểu diễn f(t) trên trục tần số (phổ 2 bên):



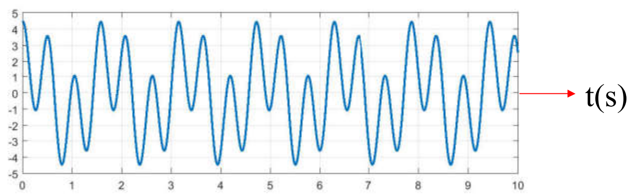
5.1.2. Ví dụ

- Xét tín hiệu f(t) có phổ 1 bên:



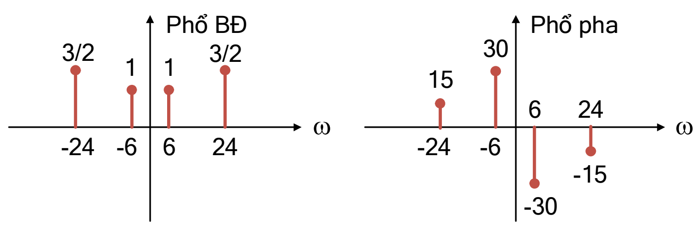
- Xác định f(t) và biểu diễn trên trục thời gian:

$$f(t)=2\cos(4t-45^0)+3\cos(12t)$$



5.1.2. Ví dụ

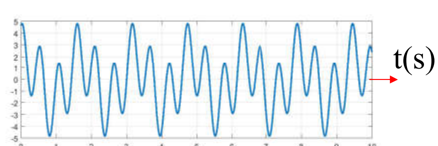
- Xét tín hiệu f(t) có phổ 2 bên:



- Xác định f(t) và biểu diễn trên trục thời gian:

$$f(t)=e^{j(6t-30^0)}+e^{j(-6t+30^0)}+\tfrac{3}{2}e^{j(24t-15^0)}+\tfrac{3}{2}e^{j(-24t+15^0)}$$

$$f(t)=2\cos(6t-30^0)+3\cos(24t-15^0)$$



5.2. Phân tích phổ tín hiệu không tuần hoàn

5.2.1. Biến đổi Fourier

a. Xác định biến đổi Fourier từ biến đổi Laplace

b. Biến đổi Fourier (thông thường) và Fourier giới hạn

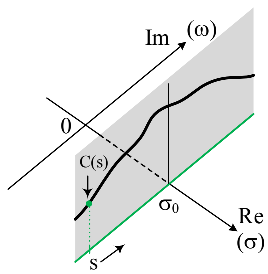
c. Các tính chất của biến đổi Fourier

a. Xác định biến đổi Fourier từ biến đổi Laplace

BĐ Laplace:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)e^{-\sigma_0 t}|\,dt < +\infty$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

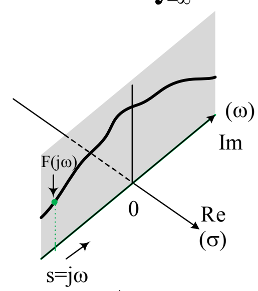


$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s)e^{st}\,ds$$

BĐ Fourier:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt < +\infty$$

$$F(\omega) \equiv F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$



$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

Cặp biến đổi Fourier **$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$** là duy nhất

b. Biến đổi Fourier (thông thường) & Fourier giới hạn

- Xét tín hiệu năng lượng:

$$E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,dt \text{ h/h}$$

nên $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ h/h

Kết luận: tất cả các tín hiệu năng lượng đều tồn tại biến đổi Fourier (thông thường) theo phương trình: $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$

b. Biến đổi Fourier (thông thường) & Fourier giới hạn

- Xét tín hiệu công suất:

$$E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt = \infty \text{ và } P_f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |f(t)|^2\, dt \text{ h/h}$$

nên $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt = \infty$ (ngoại trừ xung đơn vị)

Kết luận: tất cả các tín hiệu công suất (ngoại trừ xung đơn vị) đều không tồn tại biến đổi Fourier: $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$

Giải pháp: ta xác định biến đổi Fourier của các tín hiệu này thông qua biến đổi Fourier của một tín hiệu năng lượng → BĐ Fourier giới hạn. Có thể xác định biến đổi Fourier giới hạn qua các tính chất!

$$\boxed{f_\alpha(t) \leftrightarrow F_\alpha(\omega) \text{ và } f(t) = \lim_{\alpha\to 0} f_\alpha(t) \text{ thì } F(\omega) = \lim_{\alpha\to 0} F_\alpha(\omega)}$$

(Biến đổi Fourier giới hạn)

b. Các tính chất của biến đổi Fourier

$\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(t) \leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k F_k(\omega)$	$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega)$
$f(t-t_0) \leftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega t_0}$	$2\pi f_1(t) f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) * F_2(\omega)$
$f(t) e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$	$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$
$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$	$t^n f(t) \leftrightarrow (j)^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$
$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{\lvert a\rvert} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau \leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(\omega)}{j\omega}$
$f(-t) \leftrightarrow F(-\omega)$	$f^*(t) \leftrightarrow F^*(-\omega)$

5.2. Phân tích phổ tín hiệu không tuần hoàn

5.2.2. Phân tích phổ tín hiệu không tuần hoàn

a. Phổ của tín hiệu không tuần hoàn
b. Đặc điểm phổ của tín hiệu thực
c. Phổ của của một số tín hiệu thường gặp
d. Mật độ phổ năng lượng và mật độ phổ công suất
e. Băng thông của tín hiệu

a. Phổ của tín hiệu không tuần hoàn

$$f(t)=\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega=\lim_{\Delta\omega\to 0}\tfrac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\Delta\omega)e^{jn\Delta\omega t}\Delta\omega$$

Gọi D(ω) là phổ của tín hiệu. Trên khoảng Δω tại tần số ω, ta có:

$$\Delta D(\omega)=\tfrac{1}{2\pi}F(\omega)\Delta\omega$$

$$\Longrightarrow\ D(\omega)=\lim_{\Delta\omega\to 0}\tfrac{1}{2\pi}F(\omega)\Delta\omega=\tfrac{1}{2\pi}F(\omega)\lim_{\Delta\omega\to 0}\Delta\omega=0$$

$$\Longrightarrow\ F(\omega)=2\pi\lim_{\Delta\omega\to 0}\tfrac{\Delta D(\omega)}{\Delta\omega}\neq 0$$: Phổ trên 1 đơn vị tần số (Phổ/Hz)
(Mật độ phổ tín hiệu)

Kết luận: tín hiệu không tuần hoàn có phổ D(ω)=0 và mật độ phổ F(ω)≠0 → Với tín hiệu không tuần hoàn ta sẽ dùng mật độ phổ để thay thế cho phổ của tín hiệu.

$$F(\omega)=|F(\omega)|\angle F(\omega)\ \Longrightarrow\ \begin{cases}|F(\omega)| & :\text{ Phổ biên độ}\\ \angle F(\omega) & :\text{ Phổ pha}\end{cases}$$

b. Đặc điểm phổ của tín hiệu thực

- Gọi f(t) là tín hiệu thực. Khi đó: f(t)=f*(t) ⟹ $F(\omega) = F^*(-\omega)$
  - Phổ biên độ: $|F(\omega)| = |F^*(-\omega)| = |F(-\omega)|$ ⟹ Chẵn
  - Phổ biên pha: $\angle F(\omega) = \angle F^*(-\omega) = -\angle F(-\omega)$ ⟹ Lẻ
- f(t) thực chẵn: kết hợp f(t)=f(-t) ⟹ $F(\omega) = F(-\omega)$

  ⟹ F(ω) thực chẵn
- f(t) thực lẻ: kết hợp f(t)=-f(-t) ⟹ $F(\omega) = -F(-\omega)$

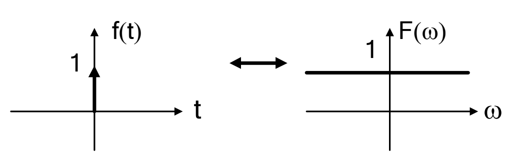
  ⟹ F(ω) thuần ảo lẻ
- $f(t)=f_e(t)+f_o(t)$ nên: $\mathrm{Re}\{F(\omega)\} = F_e(\omega); j\mathrm{Im}\{F(\omega)\} = F_o(\omega)$

c. Phổ của một số tín hiệu thường gặp

- Xung đơn vị:

  $f(t)=\delta(t)$ ⟹ $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt = 1$

  Nên: $\boxed{\delta(t) \leftrightarrow 1}$

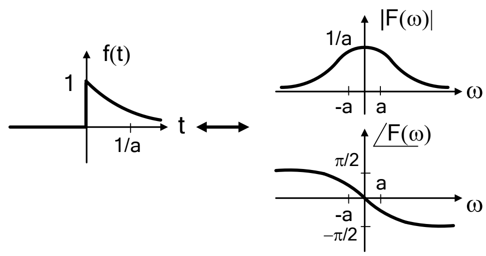


c. Phổ của một số tín hiệu thường gặp

- Hàm mũ thực:

$$f(t)=e^{-at}u(t),a>0 \Longrightarrow F(\omega)=\int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{j\omega+a}$$

Nên: $\boxed{e^{-at}u(t),a>0 \leftrightarrow \frac{1}{j\omega+a}}$



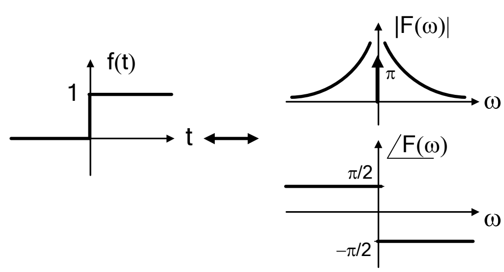
c. Phổ của một số tín hiệu thường gặp

- Hàm bước đơn vị:

$$f(t)=u(t) \Longrightarrow f(t)=\lim_{\alpha\to 0} e^{-\alpha t}u(t);\alpha>0 \Longrightarrow F(\omega)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{j\omega+\alpha}$$

$$F(\omega)=\lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{\alpha}{\omega^2+\alpha^2}-\frac{j\omega}{\omega^2+\alpha^2}\right]=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

Nên: $\boxed{u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}}$



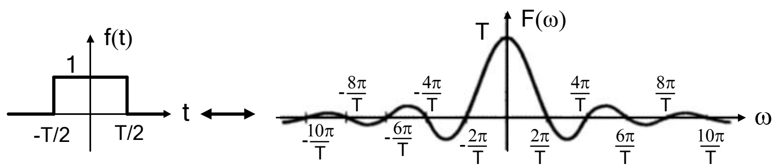
c. Phổ của các tín hiệu cơ bản

- Xung cổng đơn vị:

$f(t)=\mathrm{rect}(\frac{t}{T})$

$$\Rightarrow \quad F(\omega)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{-j\omega}\left(e^{-j\omega\frac{T}{2}} - e^{j\omega\frac{T}{2}}\right) = T\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} = T\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

Nên: $\boxed{\mathrm{rect}(\frac{t}{T}) \leftrightarrow T\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)}$



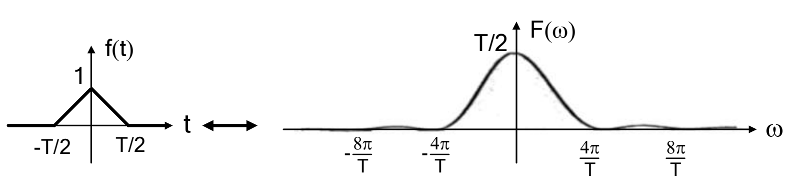
c. Phổ của các tín hiệu cơ bản

- Xung tam giác:

$f(t)=\Delta(\frac{t}{T}) \Rightarrow F(\omega)=\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(1+\frac{2t}{T})e^{-j\omega t}dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}}(1-\frac{2t}{T})e^{-j\omega t}dt$

$$...F(\omega) = \frac{T}{2}\frac{\sin^2\left(\omega\frac{T}{4}\right)}{\left(\omega\frac{T}{4}\right)^2} = \frac{T}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{4}\right)$$

Nên: $\boxed{\Delta(\frac{t}{T}) \leftrightarrow \frac{T}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{4}\right)}$



d. Mật độ phổ năng lượng và mật độ phổ công suất

- Với tín hiệu năng lượng ta có năng lượng tín hiệu được xác định:

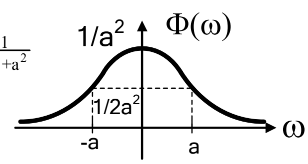
$$E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt \Longrightarrow \boxed{E_f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega} \quad \text{(Định lý Parseval)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{E_f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega)\, d\omega} \quad \boxed{\Phi(\omega) = |F(\omega)|^2}$$

Nhận xét: $\Phi(\omega)$ thể hiện sự phân bố của năng lượng tín hiệu trên thang tần số được gọi là mật độ phổ năng lượng (ESD – **E**nergy **S**pectral **D**ensity). ESD là một đặc tính tần số của tín hiệu. ESD của tín hiệu thực là hàm chẵn.

Ví dụ: $f(t)=e^{-at}u(t), a>0 \Longrightarrow$ ESD: $\Phi(\omega)=\frac{1}{\omega^2+a^2}$

$$E_f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega^2+a^2}\, d\omega = \frac{1}{2a}$$



d. Mật độ phổ năng lượng và mật độ phổ công suất

- Với tín hiệu công suất ta có công tín hiệu được xác định:

$$P_f = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2\, dt \Longrightarrow \boxed{P_f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\omega)\, d\omega}$$

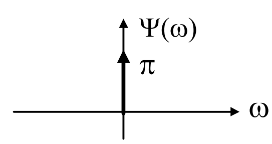
Trong đó: $\boxed{\Psi(\omega) = \lim_{T\to+\infty} \frac{\Phi_T(\omega)}{T} = |F_T(\omega)|^2}$ $\boxed{\Phi_T(\omega) = |F_T(\omega)|^2}$

Với: $\boxed{f_T(t) = f(t)\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow F_T(\omega)}$

Nhận xét: $\Psi(\omega)$ thể hiện sự phân bố của công suất tín hiệu trên thang tần số được gọi là mật độ phổ công suất (PSD – **P**ower **S**pectral **D**ensity). PSD là một đặc tính tần số của tín hiệu. PSD của tín hiệu thực là hàm chẵn.

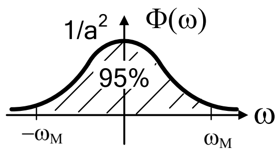
Ví dụ: $f(t)=u(t) \Longrightarrow$ PSD: $\Psi(\omega)=\pi\delta(\omega)$

$$\Longrightarrow P_f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2}$$



e. Băng thông của tín hiệu

- Định nghĩa: với tín hiệu có phổ trãi dài trên thang tần số, tần số ω_M được gọi là băng thông của tín hiệu khi năng lượng/công suất tập trung trong khoảng tần số từ - ω_M tới ω_M chiếm 95% năng lượng/công suất của tín hiệu.
- Thực tế ta hay xem tín hiệu có phổ giới hạn tới tần ω_M
- Ví dụ: xác định băng thông của tín hiệu $f(t)=e^{-at}u(t)$; a>0



$$E_f=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega^2+a^2}d\omega=\frac{1}{2a}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_M}^{+\omega_M}\frac{1}{\omega^2+a^2}d\omega=\frac{1}{\pi a}\tan^{-1}\left(\frac{\omega_M}{a}\right)=0.95E_f$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)=0.475\pi \Rightarrow \omega_M=12.7a$$

Chương 5. Phân tích phổ tín hiệu và ứng dụng

5.3. Phân tích phổ tín hiệu tuần hoàn

5.3.1. Chuỗi Fourier

5.3.2. Biến đổi Fourier của tín hiệu tuần hoàn

5.3.3. Phân tích phổ của tín hiệu tuần hoàn

5.3. Phân tích phổ tín hiệu tuần hoàn

5.3.1. Chuỗi Fourier

5.3.1. Chuỗi Fourier

- Xét tín hiệu $f_0(t)$ được biểu diễn dùng BĐ Fourier

$$f_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_0(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

- Đặt tín hiệu $f(t)$ là tín hiệu tuần hoàn với tần số $\Delta\omega$:

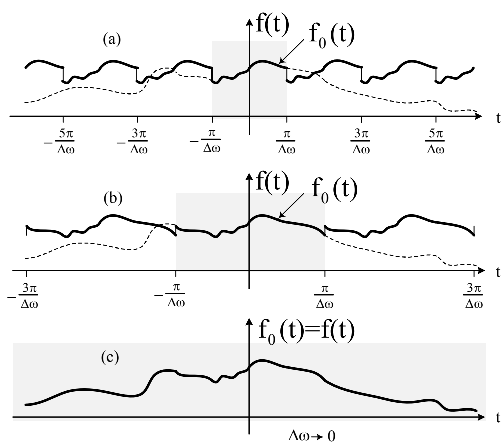
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_0(n\,\Delta\omega)e^{jn\Delta\omega t}\Delta\omega$$

- Khi đó tín hiệu $f_0(t)$ và tín hiệu $f(t)$ liên hệ với nhau như sau:

$$f_0(t) = \lim_{\Delta\omega\to 0} f(t)$$

5.3.1. Chuỗi Fourier

- Minh họa liên hệ giữa tín hiệu $f_0(t)$ và tín hiệu $f(t)$



5.3.1. Chuỗi Fourier

- **Kết luận**: tín hiệu f(t) tuần hoàn với chu kỳ T_0, tần số $\omega_0=2\pi/T_0$ được biểu diễn bằng chuỗi Fourier như sau:

$$\boxed{f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}} \quad \text{(Chuỗi Fourier)}$$

Với: $$\boxed{D_n=\frac{F_0(n\omega_0)}{T_0}=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt}$$

$f_0(t) \leftrightarrow F_0(\omega)$: là tín hiệu không tuần hoàn bằng đúng một chu kỳ của tín hiệu tuần hoàn f(t)

5.3. Phân tích phổ tín hiệu tuần hoàn

5.3.2. Biến đổi Fourier của tín hiệu tuần hoàn

5.3.2. Biến đổi Fourier của tín hiệu tuần hoàn

- **C**huỗi Fourier của tín hiệu f(t) tuần hoàn với chu kỳ T_0, tần số $\omega_0=2\pi/T_0$:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

- **B**iến đổi Fourier của tín hiệu f(t) tuần hoàn với chu kỳ T_0, tần số $\omega_0=2\pi/T_0$:

$$\boxed{F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi D_n \delta(\omega-n\omega_0)}$$

5.3.3. Phân tích phổ tín hiệu tuần hoàn

a. Phổ của tín hiệu tuần hoàn

Phổ của tín hiệu:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \Longrightarrow f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |D_n|\, e^{j(n\omega_0 t+\angle D_n)}$$

D_n :Phổ của tín hiệu. $|D_n|$:Phổ biên độ. $\angle D_n$:Phổ pha

Mật độ phổ:

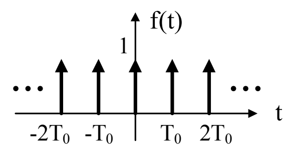
$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi D_n \delta(\omega-n\omega_0)$$

$F(\omega)$: (Mật độ) Phổ của tín hiệu. $|F(\omega)|$:Phổ biên độ. $\angle F(\omega)$:Phổ pha

b. Phổ của một số tín hiệu thường gặp

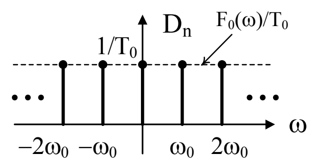
❑ Phổ của chuỗi xung đơn vị tuần hoàn:

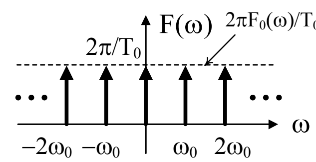
$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_0)$$



Đặt: $f_0(t)=\delta(t)\Rightarrow F_0(\omega)=1 \Longrightarrow D_n=\frac{1}{T_0}F_0(\omega)\big|_{\omega=n\omega_0=n\frac{2\pi}{T_0}}$

- Phổ : D_n
- Mật độ phổ : $F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}2\pi D_n\delta(\omega-n\omega_0)$

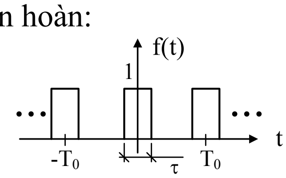




b. Phổ của một số tín hiệu thường gặp

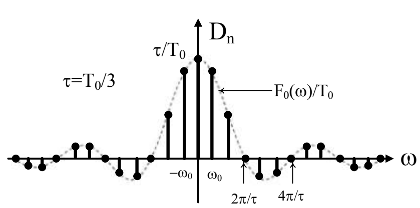
❑ Phổ của chuỗi xung vuông tuần hoàn:

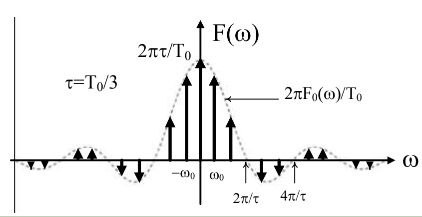
$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\text{rect}\left(\frac{t-kT_0}{\tau}\right)$$



Đặt: $f_0(t)=\text{rect}(\frac{t}{\tau})\Rightarrow F_0(\omega)=\tau\,\text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \Longrightarrow D_n=\frac{1}{T_0}F_0(\omega)\big|_{\omega=n\omega_0=n\frac{2\pi}{T_0}}$

- Phổ : D_n
- Mật độ phổ : $F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}2\pi D_n\delta(\omega-n\omega_0)$





c. Mật độ phổ công suất của tín hiệu tuần hoàn

- Chuỗi Fourier: $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$
- Xác định PSD:

Đặt: $f_T(t)=f(t)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

$\Rightarrow F_T(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n T\,\mathrm{sinc}\left[\frac{T}{2}(\omega-n\omega_0)\right]$

$\Rightarrow \Phi_T(\omega)=|F_T(\omega)|^2=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |D|_n^2 T^2\,\mathrm{sinc}^2\left[\frac{T}{2}(\omega-n\omega_0)\right]$

PSD: $\Psi(\omega)=\lim_{T\to 0}\frac{\Phi_T(\omega)}{T} \Rightarrow \boxed{\Psi(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|D|_n^2\,\delta(\omega-n\omega_0)}$

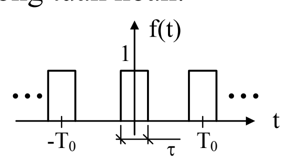
- Công suất của tín hiệu tuần hoàn:

$P_f=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi(\omega)\,d\omega \Rightarrow \boxed{P_f=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|D|_n^2}$ (Định lý Parseval)

c. Mật độ phổ công suất của tín hiệu tuần hoàn

- Ví dụ PSD của chuỗi xung vuông tuần hoàn:

$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathrm{rect}\left(\frac{t-kT_0}{\tau}\right)$



Đặt: $f_0(t)=\mathrm{rect}(\frac{t}{\tau})\Rightarrow F_0(\omega)=\tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

$\Rightarrow D_n=\frac{1}{T_0}F_0(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_0=n\frac{2\pi}{T_0}}$

$\Rightarrow \Psi(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|D|_n^2\,\delta(\omega-n\omega_0)$