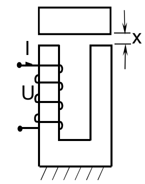
Chương 4:
Giải tích hệ thống điện cơ
dùng các phương pháp năng lượng

4.1 Khảo sát hệ thống (biến đổi năng lượng) điện cơ
4.2 Ví dụ hệ thống điện cơ chuyển động thẳng và chuyển động quay
4.3 Phân tích lực dùng khái niệm năng lượng hoặc đồng năng lượng
4.4 Phân tích lực của hệ thống bao gồm nhiều biến điện và biến cơ
4.5 Sự bảo toàn và biến đổi năng lượng
4.6 Dùng mô hình không gian trạng thái phân tích hệ thống điện cơ

4.1 Khảo sát hệ thống điện cơ

4.1 Khảo sát hệ thống (biến đổi năng lượng) điện cơ
4.2 Ví dụ hệ thống điện cơ chuyển động thẳng và chuyển động quay
4.3 Phân tích lực dùng khái niệm năng lượng hoặc đồng năng lượng
4.4 Phân tích lực của hệ thống bao gồm nhiều biến điện và biến cơ
4.5 Sự bảo toàn và biến đổi năng lượng
4.6 Dùng mô hình không gian trạng thái phân tích hệ thống điện cơ

Chương 4



Đối tượng khảo sát:

Khảo sát các hệ thống điện cơ tần số công nghiệp, với thông số tập trung, i.e. các hệ thống có kích thước rất nhỏ so với bước sóng của trường điện từ (xét trường từ chuẩn dừng).

Mục tiêu:

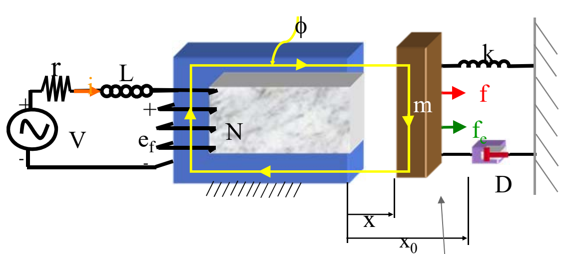
• Tính lực hoặc mô men do từ trường tác động lên các phần tử vật liệu từ hoặc dây dẫn có dòng điện qua.

• Phân tích các hệ thống điện cơ trong miền thời gian.
- Xây dựng hệ phương trình vi phân biến trạng thái (mô hình không gian trạng thái) cho hệ thống điện cơ.
- Giải hệ phương trình (phân tích mô hình).

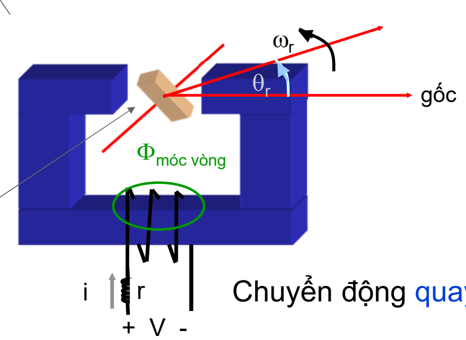
3

Hệ thống biến đổi điện cơ

Hệ thống biến đổi điện cơ gồm mạch từ có các bộ phận chuyển động.



Chuyển động thẳng



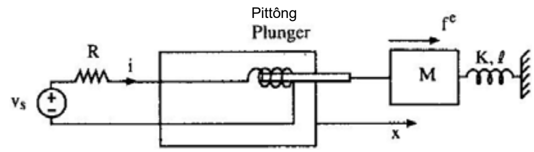
Phần tử chuyển động gọi là phần ứng.

Chuyển động quay

4

Hệ thống điện cơ là mạng 2 cổng

Ví dụ một hệ thống điện cơ là mạng 2 cửa



- Chiều của lực f^e quy ước lấy theo chiều dương của x
- ℓ chiều dài của lò xo ở trạng thái cân bằng
- $f^e = f^e(\lambda, x) = f^e(i, x)$: lực điện từ

Mô tả trạng thái (state) của một hệ thống động bằng một tập hợp các biến trạng thái (state variables) như:
- khoảng cách dịch chuyển x hoặc góc quay θ của phần ứng
- dòng điện hay từ thông móc vòng trong cuộn dây,...

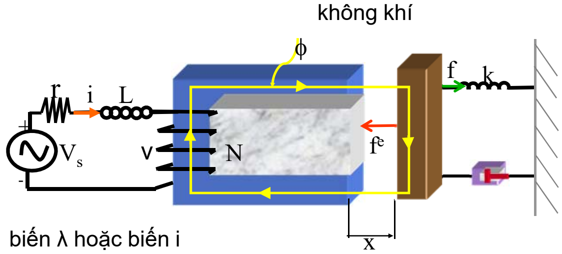
Các biến trạng thái là những biến mô tả hành vi của hệ thống trong tương lai khi trạng thái hiện thời của hệ thống và các tín hiệu vào đã được biết.

Biến trạng thái hệ thống điện cơ

❑ Trường hợp chỉ có một cửa (cổng) điện và một cửa (cổng) cơ

- Chuyển động thẳng

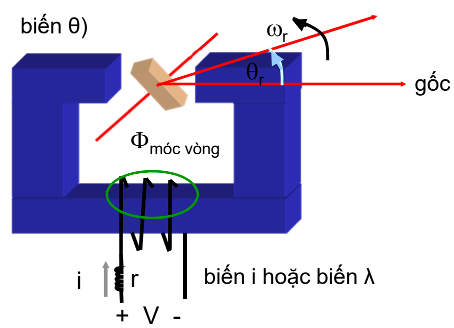
Biến x là khe hở không khí



biến λ hoặc biến i

- Chuyển động xoay

biến θ)



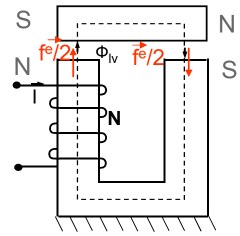
biến i hoặc biến λ

f^e: lực có nguồn gốc từ điện (force of electric origin).

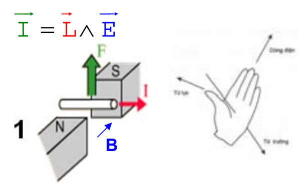
Lực có nguồn gốc từ điện

Lực có nguồn gốc từ điện f^e gồm lực điện từ và lực điện động.

- Lực tác động lên các vật liệu dẫn từ đặt trong từ trường gọi là **lực điện từ**.

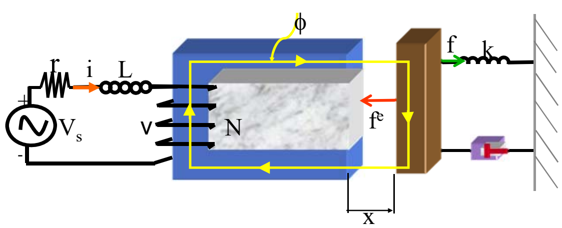


- Lực tác động lên vật dẫn điện đặt trong từ trường khi có dòng điện chạy trong vật dẫn điện này gọi là **lực điện động** (lực Lorentz hay lực Laplace).



7

Các bước phân tích hệ thống điện cơ



- Dùng các định luật KVL, KCL (Ampere vòng và Gauss)
  → các phương trình nút/mắt lưới → Φ→ λ=λ (i, x) hay λ=λ (i, θ)

- Tính điện áp cảm ứng: $v = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial\lambda}{\partial i}\frac{di}{dt} + \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{dx}{dt}$

  Điện áp do biến đổi dòng — Điện áp do tốc độ

- Tính lực hút điện từ f^e bằng phương pháp cân bằng năng lượng.
- Các phương trình cân bằng lực (dùng định luật Newton).
- Giải ra các biến trạng thái.

8

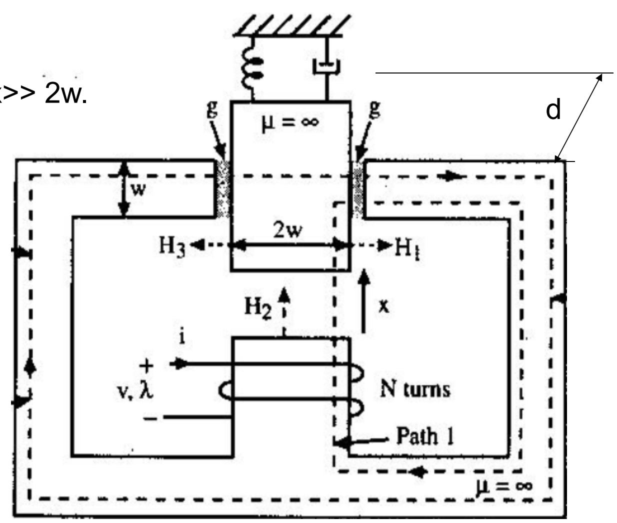
4.2 Ví dụ hệ thống điện cơ chuyển động thẳng và chuyển động quay

Ví dụ hệ thống điện cơ chuyển động thẳng

Ví dụ 4.1 Tìm λ và v.

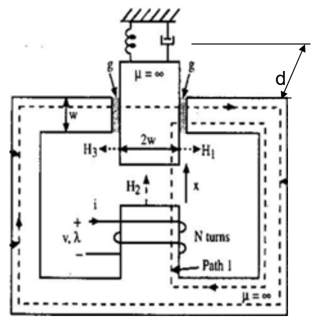
Giả thiết: $\mu_{\text{lõi thép}} = \infty$, g >> w, x>> 2w.

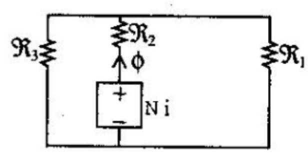
Bỏ qua từ thông rò, tản.



Ví dụ hệ thống điện cơ chuyển động thẳng

Ví dụ 4.1 (tt)





Tính các từ trở

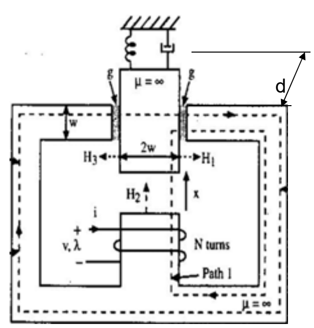
Từ trở tương đương

11

Ví dụ hệ thống điện cơ chuyển động thẳng

Ví dụ 4.1 (tt)

Bài tập: giải 4.1 dùng mạch từ thay thế



- Từ thông và từ thông móc vòng

- Điện cảm

- Điện áp cảm ứng

$$v(t) = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\mu_0 2wdN^2}{g+x}\frac{di}{dt} - \frac{\mu_0 2wdN^2 i}{(g+x)^2}\frac{dx}{dt}$$

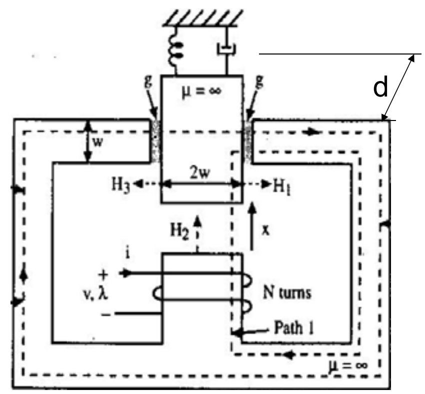
12

Ví dụ hệ thống điện cơ chuyển động thẳng

Ví dụ 4.1 Tìm λ và v.
Cách khác

Tìm từ thông móc vòng λ và điện áp cảm ứng v trong cuộn dây ?

v ← λ ← H_2 ← quan hệ H_1 , H_2 và H_3



Ví dụ hệ thống điện cơ chuyển động thẳng

Ví dụ 4.1 (tt)

Định luật Ampere vòng (ACL)

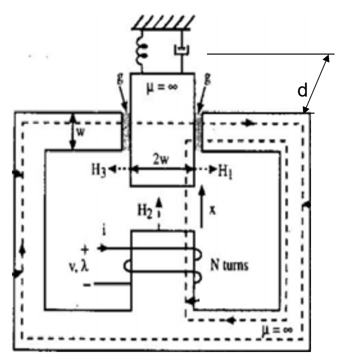
$$H_1 g - H_3 g = 0 \rightarrow H_1 = H_3$$

$$H_1 g + H_2 x = NI$$

Định luật Gauss

$$2(\mu_0 H_1)(wd) - \mu_0 H_2 (2wd) = 0$$

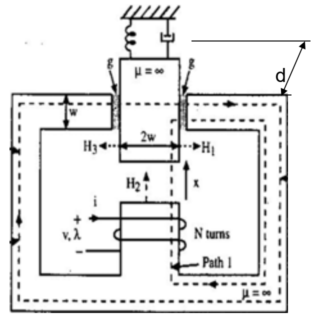
$$\Longrightarrow \quad H_1 = H_2 = \frac{Ni}{g + x}$$



Ví dụ hệ thống điện cơ chuyển động thẳng

Ví dụ 4.1 (tt)

- Từ thông móc vòng



$$\lambda = N\Phi = N\left(2wd\right)\mu_0 H_2 = \frac{2wd\mu_0 N^2 i}{g+x}$$ *λ(i) tuyến tính*

⟶ • Điện cảm

$$L\left(x\right) = \frac{\lambda}{i} = \frac{2wd\mu_0 N^2}{g+x}$$

- Điện áp cảm ứng

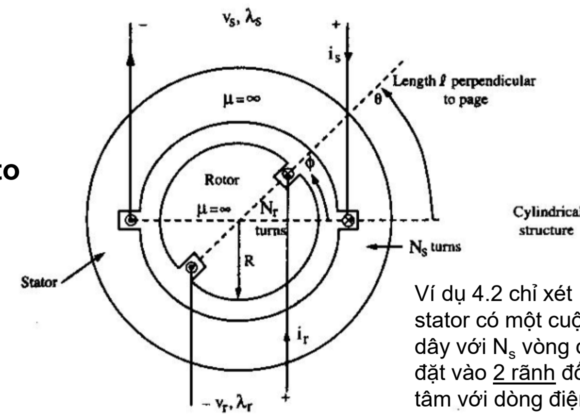
$$v(t) = \frac{2wd\mu_0 N^2}{g+x}\frac{di}{dt} - \frac{2wd\mu_0 N^2 i}{(g+x)^2}\frac{dx}{dt}$$

Ví dụ hệ thống điện cơ chuyển động quay

Ví dụ 4.2 (hình 4.7), tìm **λ** $_s$, **λ** $_r$ theo i_s, i_r, và θ, và tìm v_s và v_r của stator và rotor. Giả thiết: $\mu_{\text{lõi thép}} = \infty$, g << R và ℓ.

Lưu ý: kết quả của ví dụ này dùng để khảo sát các máy điện quay.

stato



Ví dụ 4.2 chỉ xét stator có một cuộn dây với N_s vòng dây đặt vào <u>2 rãnh</u> đối tâm với dòng điện i_s.

Tương tự cho rotor có N_r vòng dây và dòng điện i_r.

Ví dụ hệ thống điện cơ chuyển động quay

Ví dụ 4.2 (tt)

$$Tính\ H_{ri} \rightarrow B_{ri} \rightarrow \Phi \rightarrow \lambda \rightarrow v$$

Định luật Ampere vòng (ACL)

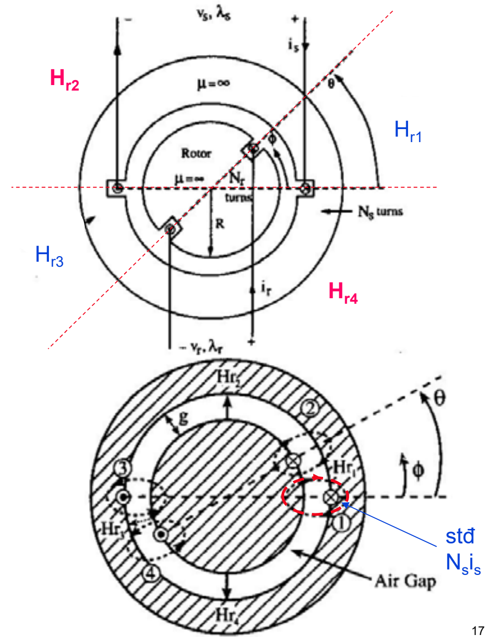
$$H_{r1} - H_{r4} = \frac{N_s i_s}{g}$$

Tương tự

$$H_{r2} - H_{r1} = \frac{N_r i_r}{g}$$

$$H_{r2} - H_{r3} = -\frac{N_s i_s}{g}$$

$$H_{r4} - H_{r3} = -\frac{N_r i_r}{g}$$

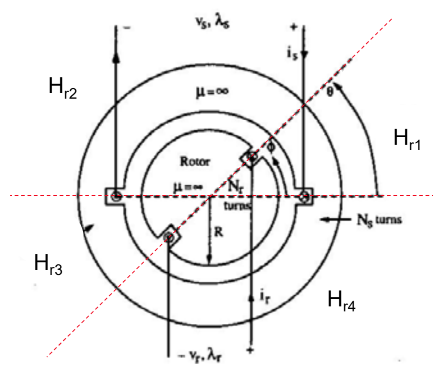


Ví dụ hệ thống điện cơ chuyển động quay

Ví dụ 4.2 (tt)

$$\Longrightarrow \quad H_{r1} = -H_{r3} = \frac{N_s i_s - N_r i_r}{g}$$

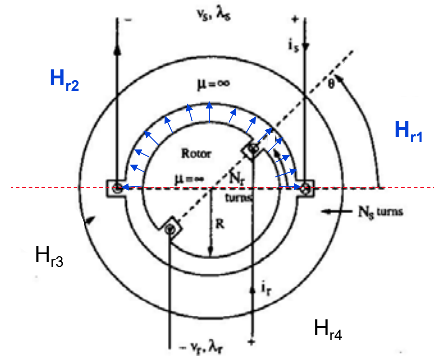
$$H_{r2} = -H_{r4} = \frac{N_s i_s + N_r i_r}{g}$$



Ví dụ hệ thống điện cơ chuyển động quay

Ví dụ 4.2 (tt) tính λ_s

Từ thông đi xuyên qua 1 vòng dây quấn stator



$$\phi_s = \int_0^{\pi} \vec{B}.\vec{n}da = \int_0^{\theta} \mu_0 H_{r1} lRd\varphi + \int_{\theta}^{\pi} \mu_0 H_{r2} lRd\varphi$$

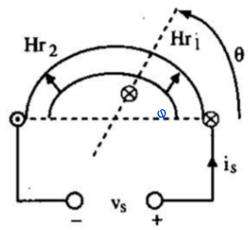
do g<<R

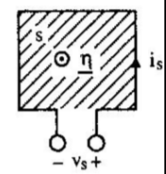
Từ thông móc vòng qua N_s vòng dây:

$$\lambda_s = N_s\phi_s = L_s i_s + M_{sr}(\theta) i_r$$

tự cảm và hỗ cảm
$$\begin{cases} L_s = N_s^2 L_0 \\ M_{sr}(\theta) = N_s N_r L_0 \left(1 - \dfrac{2\theta}{\pi}\right) \end{cases}$$

với: $L_0 = \mu_0 R l \pi / (2g)$





Ví dụ hệ thống điện cơ chuyển động quay

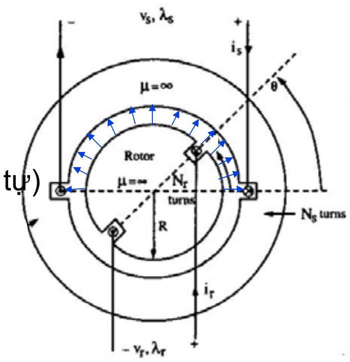
Ví dụ 4.2 (tt) tính λ_r

- Từ thông móc vòng dây quấn stator

$$\lambda_s = L_s i_s + M_{sr}(\theta) i_r$$

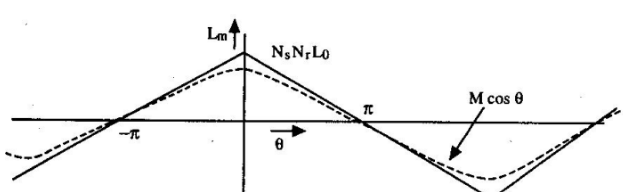
- Từ thông móc vòng dây quấn rotor (tương tự)

$$\lambda_r = M_{sr}(\theta) i_s + L_r i_r$$



tự cảm và hỗ cảm
$$\begin{cases} L_s = N_s^2 L_0 \\ L_r = N_r^2 L_0 \\ M_{sr}(\theta) = N_s N_r L_0 \left(1 - \dfrac{2\theta}{\pi}\right) \end{cases}$$

với $L_0 = \mu_0 R l \pi / (2g)$



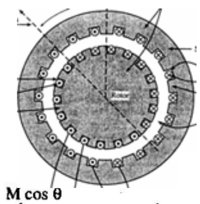
Nhận xét: chỉ có hệ số hỗ cảm M_{sr} phụ thuộc vào θ

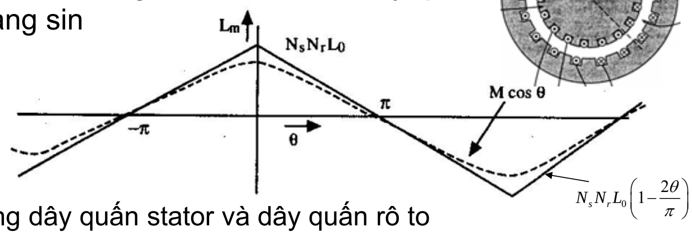
Ví dụ hệ thống điện cơ chuyển động quay

Ví dụ 4.2 (tt)

Đối với máy điện thực tế, thường làm nhiều rãnh dây quấn

→ $M_{sr} \cong M\cos(\theta)$ có dạng sin





• **Điện áp cảm ứng** trong dây quấn stator và dây quấn rô to (tính theo định luật cảm ứng điện từ Faraday):

$$\begin{cases} v_s(t) = \dfrac{d\lambda_s}{dt} = L_s\dfrac{di_s}{dt} + M\cos(\theta)\dfrac{di_r}{dt} - i_r M\sin(\theta)\dfrac{d\theta}{dt} \\ v_r(t) = \dfrac{d\lambda_r}{dt} = L_r\dfrac{di_r}{dt} + M\cos(\theta)\dfrac{di_s}{dt} - i_s M\sin(\theta)\dfrac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

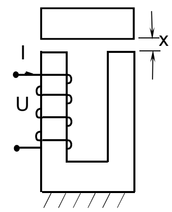
❑ Công thức này sẽ được sử dụng khi học máy điện quay.

4.3 Phân tích lực dùng khái niệm năng lượng hoặc đồng năng lượng

Năng lượng từ trường dự trữ trong hệ thống

❑ **Chỉ khảo sát các mạng hai cửa không có tổn thất công suất.**

• Năng lượng từ trường dự trữ trong hệ thống khi chỉ có một cuộn dây:



$$W_m = \frac{1}{2}L(x)i^2$$

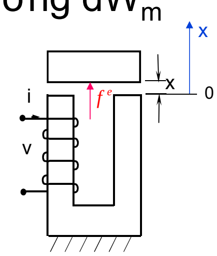
$$L(x) = \frac{\lambda}{i} = \frac{N\phi}{i} = \frac{NNi}{i(2R_c)} = \frac{NNi}{i(2R_c)} = \frac{N^2\mu_0 A_c}{2x}$$

Nhận xét:
✓Năng lượng từ trường dự trữ trong hệ thống phụ thuộc vào L(x), nghĩa là phụ thuộc vào x.
✓ Mỗi vị trí x khác nhau sẽ có một năng lượng từ trường dự trữ trong hệ thống khác nhau.

→ Khi **x** thay đổi **dx** thì năng lượng từ trường dự trữ sẽ thay đổi **dW_m**

23

Tính độ thay đổi năng lượng từ trường dW_m dự trữ trong hệ thống



Do mạng hai cửa không có tổn thất công suất, theo định luật bảo toàn năng lượng, xét phần ứng dịch chuyển dx trong thời gian dt:

Độ thay đổi năng lượng từ trường dự trữ trong hệ thống	=	Năng lượng điện nhận vào	–	Cơ năng ở đầu ra
dW_m	=	$vidt$	–	$f^e dx$

$$\frac{dW_m}{dt} = vi - f^e\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dW_m}{dt} = i\frac{d\lambda}{dt} - f^e\frac{dx}{dt}$$

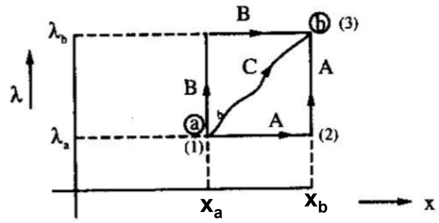
$$dW_m = id\lambda - f^e dx$$

24

Tính năng lượng từ trường W_m dự trữ trong hệ thống

$$dW_m = id\lambda - f^e dx$$

Tính W_m bằng cách tích phân dW_m từ một điểm ban đầu đến một điểm bất kỳ.



- Chọn λ, i là các biến độc lập
→ f_e và x là các hàm số

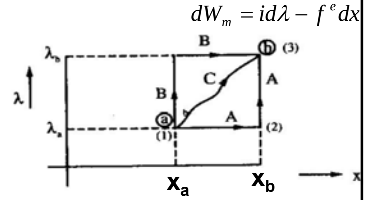
- Tính độ thay đổi năng lượng dự trữ khi đi từ điểm a đến điểm b dọc theo một đường C bất kỳ.

Ta có thể chọn lấy tích phân theo đường A hoặc B do mạng 2 cửa không có tổn hao

25

Tính năng lượng từ trường W_m dự trữ trong hệ thống

$$dW_m = id\lambda - f^e dx$$



Tích phân theo đường A

$$W_m(\lambda_b, x_b) - W_m(\lambda_a, x_a) = -\int_{x_a}^{x_b} f^e(\lambda_a, x)dx + \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} i(\lambda, x_b)d\lambda$$

- *Chọn gốc tọa độ tại điểm (x_a, λ_a):* x_a=0, λ_a=0.

Do λ_a=0 → f^e=0

$$\longrightarrow \quad W_m(\lambda_b, x_b) - W_m(0,0) = \int_0^{\lambda_b} i(\lambda, x_b)\, d\lambda$$

- Thay λ_b= λ bất kỳ và x_b=x bất kỳ

$$W_m(\lambda, x) = \int_0^{\lambda} i(\lambda, x)\, d\lambda$$ **năng lượng từ trường dự trữ trong hệ thống**

❑ Tính được $W_m(\lambda,x)$ nếu biết $i(\lambda,x)$

26

Tính lực có nguồn gốc điện bằng phương pháp năng lượng

Do $W_m=W_m(\lambda,x)$, ta có vi phân toàn phần

$$dW_m = \frac{\partial W_m(\lambda,x)}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial W_m(\lambda,x)}{\partial x} dx$$

Từ định luật bảo toàn năng lượng

$$dW_m = i d\lambda - f^e dx$$

$\Longrightarrow$

$$i = \frac{\partial W_m(\lambda,x)}{\partial \lambda}$$

$$f^e = -\frac{\partial W_m(\lambda,x)}{\partial x}$$

Công thức tính lực bằng **phương pháp năng lượng**

Với $W_m(\lambda,x) = \int_0^{\lambda} i(\lambda,x)\, d\lambda$

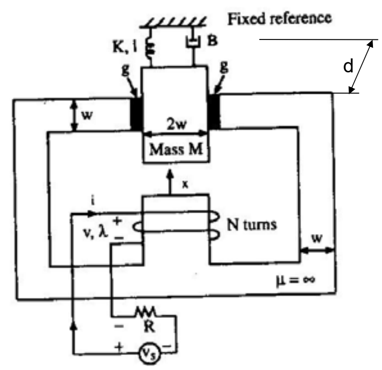
27

Ví dụ áp dụng

Ví dụ 4.5 tính $f^e(\lambda, x)$ và $f^e(i, x)$

Từ ví dụ 4.1 tính được:

$$\lambda = N\Phi = \frac{2wd\mu_0 N^2 i}{g+x} = \frac{2wd\mu_0 N^2}{g}\frac{i}{1+x/g} = L_0 \frac{i}{1+x/g}$$



Suy ra i

$$i = \frac{\lambda}{L_0}(1 + x/g)$$

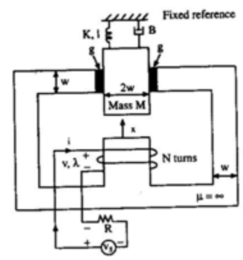
$$W_m = \int_0^{\lambda} i(\lambda,x) d\lambda = \int_0^{\lambda} \frac{\lambda}{L_0}(1+x/g) d\lambda = \frac{\lambda^2}{2L_0}(1+x/g)$$

28

Ví dụ áp dụng

Ví dụ 4.5 (tt)

$$W_m = \int_0^{\lambda} i(\lambda, x) d\lambda = \int_0^{\lambda} \frac{\lambda}{L_0}(1 + x/g) d\lambda = \frac{\lambda^2}{2L_0}(1 + x/g)$$



Tính f^e

$$f^e(\lambda, x) = -\frac{\partial W_m}{\partial x}(\lambda, x) = -\frac{\lambda^2}{2L_0 g}$$

Do $\quad \lambda = \dfrac{2wd\mu_0 N^2 i}{g + x}$

Suy ra $\quad f^e(i, x) = -\dfrac{L_0^2 i^2}{2L_0 g(1 + x/g)^2} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{L_0 i^2}{(1 + x/g)^2}$

Ý nghĩa $f^e<0$? Lực điện từ ngược chiều với x, là lực hút phần ứng

29

Các bước tính lực dùng phương pháp năng lượng

1/ Giải mạch từ → Φ → λ = λ(i,x) → i=i(λ,x)

2/ Tính W_m $\qquad W_m = \int_0^{\lambda} i(\lambda', x) d\lambda'$

3/ Tính f^e $\qquad f^e = -\dfrac{\partial W_m(\lambda, x)}{\partial x}$

30

Tính lực bằng **phương pháp đồng năng lượng**

Dùng khái niệm đồng năng lượng để tính lực trực tiếp từ biểu thức λ = λ(i,x)

Tính đồng năng lượng

Đạo hàm $d(\lambda i) = i d\lambda + \lambda di$

Suy ra $i d\lambda = d(\lambda i) - \lambda di$

Bảo toàn NL $dW_m = i d\lambda - f^e dx$

Do đó $dW_m = d(\lambda i) - \lambda di - f^e dx$

$\Rightarrow \quad d(\lambda i - W_m) = \lambda di + f^e dx$

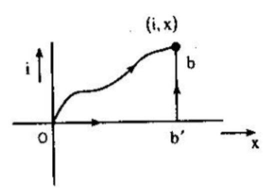
Đặt $W_m^{'} = \lambda i - W_m$ gọi là đồng năng lượng

Suy ra $dW_m^{'} = \lambda di + f^e dx$

31

Tính lực bằng phương pháp đồng năng lượng

Tích phân $dW_m^{'} = \lambda di + f^e dx$



Chọn điểm ban đầu tại gốc tọa độ

Do i=0 → f^e=0

$\longrightarrow \quad W_m^{'}(i,x) = \int_0^i \lambda(i,x)\, di$ **đồng năng lượng của hệ thống**

Từ $dW_m^{'} = \dfrac{\partial W_m^{'}}{\partial i} di + \dfrac{\partial W_m^{'}}{\partial x} dx$ và $dW_m^{'} = \lambda di + f^e dx$

$$f^e = \frac{\partial W_m^{'}(i,x)}{\partial x}$$

Công thức tính lực bằng
phương pháp đồng năng lượng

32

Tính lực bằng phương pháp đồng năng lượng

Các bước tính lực dùng phương pháp đồng năng lượng:

1/ Giải mạch từ → Φ → λ = λ(i,x)

2/ Tính W'$_m$ $\quad W'_m(i,x) = \int_0^i \lambda(i,x)\,di$

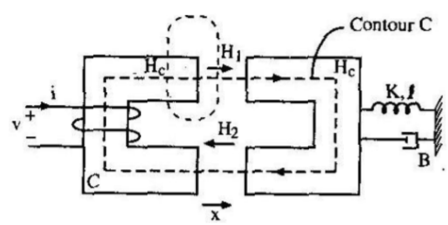
3/ Tính f^e $\quad f^e = \dfrac{\partial W'_m(i,x)}{\partial x}$

• Tính điện áp cảm ứng: $\quad v = \dfrac{d\lambda}{dt} = \dfrac{\partial\lambda}{\partial i}\dfrac{di}{dt} + \dfrac{\partial\lambda}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}$

33

Ví dụ áp dụng

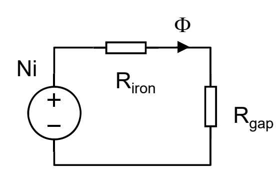
Ví dụ 4.8 tìm f^e



Giải mạch từ, ta có

$$R_{iron} = \frac{l_c}{\mu A} \qquad R_{gap} = \frac{2x}{\mu_0 A}$$

$$\Phi = \frac{Ni}{R_{iron} + R_{gap}} = \frac{Ni}{\frac{l_c}{\mu A} + \frac{2x}{\mu_0 A}} = \frac{Ni}{R(x)}$$



Với $\quad R(x) = \dfrac{l_c}{\mu A} + \dfrac{2x}{\mu_0 A}$

Suy ra $\quad \lambda = N\Phi = \dfrac{N^2 i}{R(x)}$

34

Ví dụ áp dụng

Ví dụ 4.8 (tt)

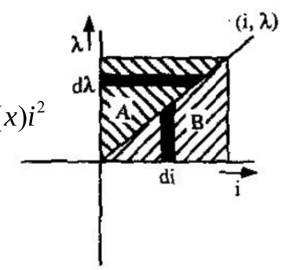
Tính đồng năng lượng và lực:

$$W_m' = \int_0^i \lambda(i,x)\,di = \frac{N^2 i^2}{2R(x)}$$

$$f^e = \frac{\partial W_m'}{\partial x} = \frac{N^2 i^2}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{R(x)}\right) = -\frac{N^2 i^2}{\mu_0 A\left(\frac{l_c}{\mu A} + \frac{2x}{\mu_0 A}\right)^2}$$

So sánh phương pháp năng lượng và phương pháp đồng năng lượng

Xét hệ thống điện tuyến tính (L không phụ thuộc i)



$$W_m = \int_0^\lambda i(\lambda,x)\,d\lambda = \int_0^\lambda \frac{\lambda(i,x)}{L(x)}\,d\lambda = \frac{\lambda^2(i,x)}{2L(x)} = \frac{L^2(x)i^2}{2L(x)} = \frac{1}{2}L(x)i^2$$

$$W_m' = \int_0^i \lambda(i,x)\,di = \int_0^i L(x)i\,di = \frac{1}{2}L(x)i^2$$

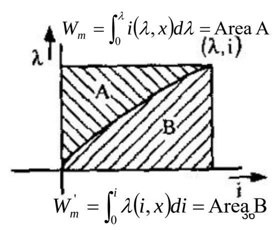
→ $W_m = W'_m$

Trên đồ thị ta cũng có được quan hệ trên

$$W_m = \int_0^\lambda i(\lambda,x)\,d\lambda = \text{Area A} \quad = \quad W_m' = \int_0^i \lambda(i,x)\,di = \text{Area B}$$

→ Đồng năng lượng cũng là năng lượng

Xét hệ thống điện không tuyến tính (L phụ thuộc i), cả hai phương pháp cũng tính ra cùng lực f^e (xem [1]).

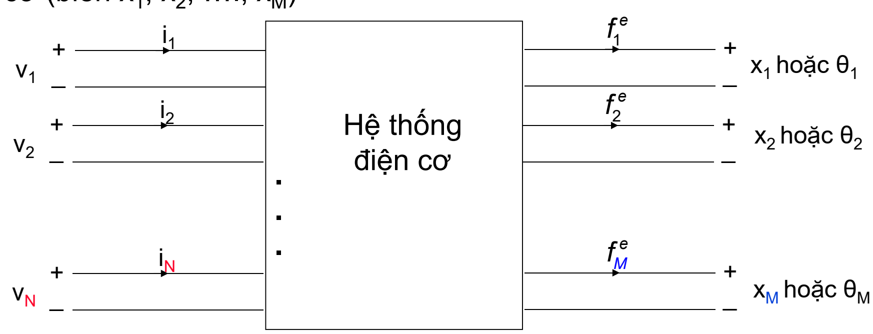


4.4 Phân tích hệ thống điện cơ đa cổng

4.1 Khảo sát hệ thống (biến đổi năng lượng) điện cơ
4.2 Ví dụ hệ thống điện cơ chuyển động thẳng và chuyển động quay
4.3 Phân tích lực dùng khái niệm năng lượng hoặc đồng năng lượng
4.4 Phân tích lực của hệ thống điện cơ đa cổng.
4.5 Sự bảo toàn và biến đổi năng lượng
4.6 Dùng mô hình không gian trạng thái phân tích hệ thống điện cơ

Hệ thống điện cơ có nhiều cổng

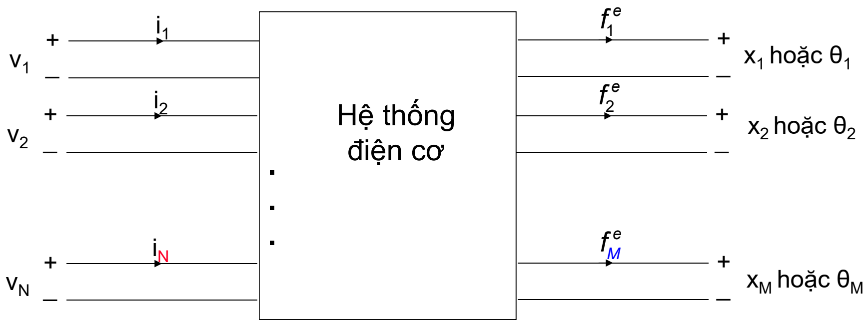
Xét hệ thống điện cơ có nhiều cửa: N cửa điện (biến i_1, i_2, …., i_N) và M cửa cơ (biến x_1, x_2, …., x_M)



• Từ thông móc vòng ở bất cứ cửa điện nào, λ_k, là hàm của tất cả các biến i và x:

$$\lambda_k = \lambda_k(i_1, i_2, ..., i_N, x_1, x_2, ..., x_M)$$

Hệ thống điện cơ có nhiều cổng



• Điện áp cảm ứng: $v_k = \dfrac{d\lambda_k}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \dfrac{\partial \lambda_k}{\partial i_j}\dfrac{di_j}{dt} + \sum_{j=1}^{M} \dfrac{\partial \lambda_k}{\partial x_j}\dfrac{dx_j}{dt}$ $\quad k = 1,2,\ldots,N$

• Lực điện từ tác động lên phần ứng phụ thuộc vào các dòng điện và khoảng cách dịch chuyển:

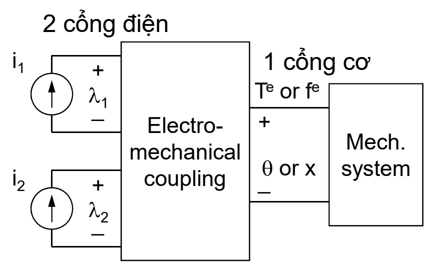
$$f_i^e = f_i^e(i_1, i_2, \ldots, i_N, x_1, x_2, \ldots, x_M)$$

Đồng năng lượng của hệ thống gồm 2 cổng điện và 1 cổng cơ

Xét hệ thống điện 2 cổng điện và 1 cổng cơ

2 cổng điện → 2 từ thông móc vòng:

$\lambda_1 = \lambda_1(i_1, i_2, x)$ và $\lambda_2 = \lambda_2(i_1, i_2, x)$



Từ định luật bảo toàn năng lượng đối với hệ thống không tổn hao

$$dW_m = v_1 i_1 dt + v_2 i_2 dt - f^e dx$$

$$do\ v_1 = d\lambda_1 / dt \quad \text{và} \quad v_2 = d\lambda_2 / dt$$

$$\rightarrow \quad dW_m = i_1 d\lambda_1 + i_2 d\lambda_2 - f^e dx$$

$$\text{Vì} \quad i_1 d\lambda_1 + i_2 d\lambda_2 = d\left(\lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2\right) - \lambda_1 di_1 - \lambda_2 di_2$$

$$d\left(\underbrace{\lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 - W_m}\right) = \lambda_1 di_1 + \lambda_2 di_2 + f^e dx$$

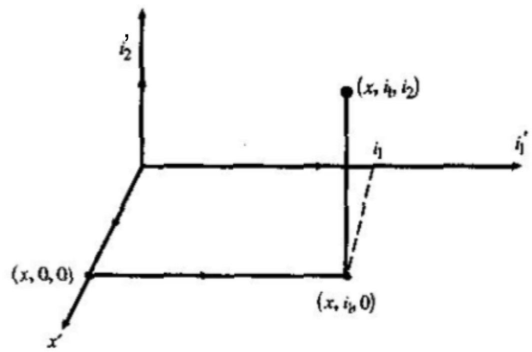
$$\Rightarrow \qquad dW_m' = \lambda_1 di_1 + \lambda_2 di_2 + f^e dx$$

Đồng năng lượng W'$_m$ của hệ thống gồm 2 cổng điện và 1 cổng cơ

Tích phân $dW_m^{'} = \lambda_1 di_1 + \lambda_2 di_2 + f^e dx$

Đồng năng lượng của hệ thống điện cơ

$$W_m^{'}(i_1, i_2, x) = \int_0^{i_1} \lambda_1(i_1^{'}, 0, x)\, di_1^{'} + \int_0^{i_2} \lambda_2(i_1, i_2^{'}, x)\, di_2^{'}$$



41

Đồng năng lượng W'$_m$ của hệ thống đa cổng

Tổng quát hóa: Xét một hệ thống gồm N cổng điện và M cổng cơ với từ thông móc vòng: $\lambda_1(i_1, ..., i_N, x_1, ..., x_M), ..., \lambda_N(i_1, ..., i_N, x_1, ..., x_M)$.

• Độ biến thiên năng lượng từ trường dự trữ trong hệ thống:

$$dW_m = d\lambda_1 i_1 + ... + d\lambda_N i_N - f_1^e dx_1 - ... - f_M^e dx_M$$

Ta có $d(\lambda_1 i_1 + ... + \lambda_N i_N) = (d\lambda_1 i_1 + ... + d\lambda_N i_N) + (\lambda_1 di_1 + ... + \lambda_N di_N)$

Suy ra $$d\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i i_i - W_m\right)}_{W_m^{'}} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i di_i + \sum_{i=1}^{M} f_i^e dx_i$$

• Độ biến thiên đồng năng lượng

$$dW_m^{'} = \lambda_1 di_1 + ... + \lambda_N di_N + f_1^e dx_1 + ... + f_M^e dx_M$$

→ Tính đồng năng lượng W'$_m$

42

Đồng năng lượng W'_m của hệ thống đa cổng

• Tính đồng năng lượng bằng cách tích phân dW'_m từ gốc tọa độ đến 1 điểm bất kỳ ($i_1, \ldots, i_N, x_1, \ldots, x_M$) trong không gian của một hệ trục tọa độ N+M chiều.

$$dW'_m = \lambda_1 di_1 + \ldots + \lambda_N di_N + f_1^e dx_1 + \ldots + f_M^e dx_M$$

$$W'_m = \int_0^{i_1} \lambda_1\left(i'_1, 0, \ldots, 0, x_1, x_2, \ldots x_M\right) di'_1$$

$$+ \int_0^{i_2} \lambda_2\left(i_1, i'_2, \ldots, 0, x_1, x_2, \ldots x_M\right) di'_2 + \ldots$$

$$+ \int_0^{i_N} \lambda_N\left(i_1, i_2, \ldots, i_{N-1}, i'_N, x_1, x_2, \ldots x_M\right) di'_N$$

• Tính lực điện từ

$$f_i^e = \frac{\partial W'_m}{\partial x_i} \quad i = 1, \ldots, M$$

43

Ví dụ cho hệ thống gồm 2 cổng điện và 2 cổng cơ

$$W'_m = \int_0^{i_1} \lambda_1\left(i'_1, 0, x_1, x_2\right) di'_1 + \int_0^{i_2} \lambda_2\left(i_1, i'_2, x_1, x_2\right) di'_2$$

Suy ra

$$f_1^e = \frac{\partial W'_m}{dx_1}$$

$$f_2^e = \frac{\partial W'_m}{dx_2}$$

44

Ví dụ áp dụng

Ví dụ 4.9 cho từ thông móc vòng của hệ thống 2 cổng điện và 2 cổng cơ với lực f^e phụ thuộc vào 2 biến x_1 và x_2, tính lực?

$$\lambda_1 = a_1 x_1^2 i_1^3 + b x_2^2 x_1 i_2$$

$$\lambda_2 = b x_2^2 x_1 i_1 + c x_2^2 i_2^3$$

Nhận xét: khó tính i_1 và i_2 từ λ_1 và λ_2 → dùng phương pháp tính lực từ đồng năng lượng

$$W_m^{'}(i_1, i_2, x) = \int_0^{i_1} a_1 x_1^2 i_1^{'3} di_1^{'} + \int_0^{i_2} (b x_2^2 x_1 i_1 + c x_2^2 i_2^{'3}) di_2^{'}$$

$$W_m^{'}(i_1, i_2, x) = \frac{a_1 x_1^2 i_1^4}{4} + b x_2^2 x_1 i_1 i_2 + \frac{c x_2^2 i_2^4}{4}$$

$$f_1^e = \frac{\partial W_m^{'}}{dx_1} = \frac{a_1 x_1 i_1^4}{2} + b x_2^2 i_1 i_2$$

$$f_2^e = \frac{\partial W_m^{'}}{dx_2} = 2b x_2 x_1 i_1 i_2 + \frac{c x_2 i_2^4}{2}$$

45

Ví dụ áp dụng

Ví dụ 4.10 tính đồng năng lượng và mô men lực của một hệ thống gồm 3 cổng điện và 2 cổng cơ (hoặc 1 cổng cơ phụ thuộc vào 2 biến góc xoay Φ và Ψ)

$$\lambda_1 = L_{11} i_1 + M i_3 \cos(\phi - \psi)$$

$$\lambda_2 = L_{22} i_2 + M i_3 \sin(\phi - \psi)$$

$$\lambda_3 = L_{33} i_3 + M i_1 \cos(\phi - \psi) + M i_2 \sin(\phi - \psi)$$

$$W_m^{'} = \int_0^{i_1} \lambda_1 (i_1^{'}, 0, 0, \phi, \psi) di_1^{'} + \int_0^{i_2} \lambda_2 (i_1, i_2^{'}, 0, \phi, \psi) di_2^{'} + \int_0^{i_3} \lambda_3 (i_1, i_2, i_3^{'}, \phi, \psi) di_3^{'}$$

$$= \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2 + \frac{1}{2} L_{33} i_3^2 + M i_1 i_3 \cos(\phi - \psi) + M i_2 i_3 \sin(\phi - \psi)$$

$$\begin{cases} T_\phi^e = \dfrac{\partial W_m^{'}}{\partial \phi} = -M i_1 i_3 \sin(\phi - \psi) + M i_2 i_3 \cos(\phi - \psi) \\ T_\psi^e = \dfrac{\partial W_m^{'}}{\partial \psi} = M i_1 i_3 \sin(\phi - \psi) - M i_2 i_3 \cos(\phi - \psi) \end{cases}$$

46

4.5 Sự bảo toàn và biến đổi năng lượng

4.1 Khảo sát hệ thống (biến đổi năng lượng) điện cơ
4.2 Ví dụ hệ thống điện cơ chuyển động thẳng và chuyển động quay
4.3 Phân tích lực dùng khái niệm năng lượng hoặc đồng năng lượng
4.4 Phân tích lực của hệ thống điện cơ đa cổng.
4.5 Sự bảo toàn và biến đổi năng lượng
4.6 Dùng mô hình không gian trạng thái phân tích hệ thống điện cơ

Sự biến đổi năng lượng giữa 2 điểm

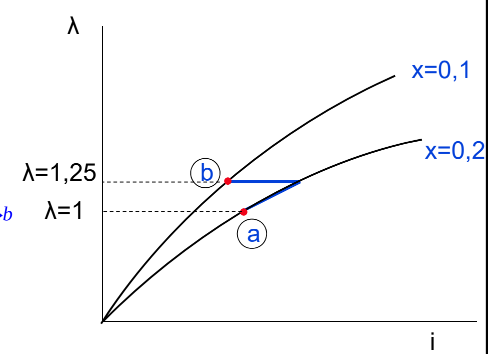
Trong mặt phẳng λ-i, tính độ thay đổi năng lượng từ trường dự trữ trong hệ thống ΔW_m khi điểm làm việc thay đổi từ vị trí a đến vị trí b.

Ta có vi phân dW_m: $dW_m = id\lambda + \left(-f^e dx\right)$

Tích phân từ điểm a đến điểm b:

$$\underbrace{W_m(\lambda_b, x_b) - W_m(\lambda_a, x_a)}_{\Delta W_m|_{a\to b}} = \underbrace{\int_{\lambda_a}^{\lambda_b} id\lambda}_{EFE|_{a\to b}} + \underbrace{\left(-\int_{x_a}^{x_b} f^e dx\right)}_{EFM|_{a\to b}}$$

$$\Delta W_m\big|_{a\to b} = EFE\big|_{a\to b} + EFM\big|_{a\to b}$$



Độ thay đổi năng lượng ΔW_m này bao gồm 2 thành phần:

- **Điện năng** $EFE\big|_{a\to b} = \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} id\lambda$
- **Cơ năng** $EFM\big|_{a\to b} = -\int_{x_a}^{x_b} f^e dx$

Sự bảo toàn và biến đổi năng lượng

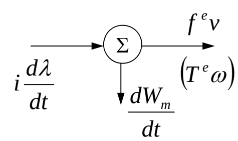
Nếu **hoạt động theo chu kỳ** → kết thúc mỗi chu kỳ, hệ thống trở lại trạng thái ban đầu.

$$dW_m = id\lambda - f^e dx$$

$$0 = \oint id\lambda - \oint f^e dx = \oint id\lambda + \left(-\oint f^e dx\right)$$

$$\oint EFE + \oint EFM = 0$$

$$EFE\big|_{cycle} + EFM\big|_{cycle} = 0$$



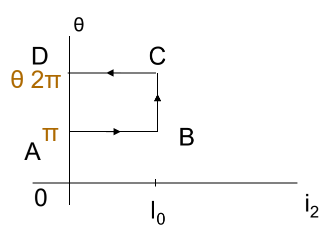
→ **Sự bảo toàn và biến đổi năng lượng**

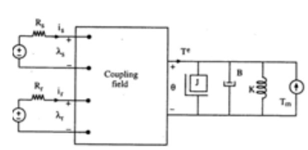
Để biết hệ thống hoạt động như máy phát hay động cơ,
ta tính EFE hoặc EFM của hệ thống trong một chu kỳ:

- Nếu EFE>0 (hay EFM<0): hệ thống hoạt động như một **động cơ** (nhận công suất điện và phát ra cơ năng)
- Nếu EFE<0 (hay EFM>0): hệ thống hoạt động như một **máy phát điện** (nhận cơ năng và phát ra điện năng)

Ví dụ áp dụng

Ví dụ 4.14 cho máy điện có quan hệ λ-i như hình vẽ





$$\lambda_1 = L_{11}i_1 + M\cos\theta i_2$$

$$\lambda_2 = M\cos\theta i_1 + L_{22}i_2$$

Máy điện hoạt động theo chu kỳ, với $i_1=I_0$, i_2 theo đồ thị.
Tìm năng lượng biến đổi từ điện năng thành cơ năng trong mỗi chu kỳ. Máy điện hoạt động như động cơ hay máy phát?

Ví dụ áp dụng

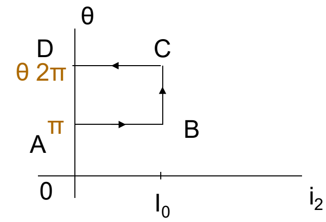
Ví dụ 4.14 cho máy điện có quan hệ λ-i như hình vẽ

- Tính mô men

$$W_m^{'}\left(i_1,i_2,\theta\right)=\int_0^{i_1}\lambda_1\left(i_1^{'},0,\theta\right)di_1^{'}+\int_0^{i_2}\lambda_2\left(i_1,i_2^{'},\theta\right)di_2^{'}$$

$$W_m^{'}=\frac{1}{2}L_{11}i_1^2+M\cos\theta i_1 i_2+\frac{1}{2}L_{22}i_2^2$$

$$T^e=\frac{\partial W_m^{'}}{\partial\theta}=-Mi_1i_2\sin\theta$$



- Tính cơ năng phát ra trong một chu kỳ

$$EFM\Big|_{cycle}=-\int_0^{2\pi}T^e d\theta=-\left[\int_0^{\pi}T^e d\theta+\int_{\pi}^{2\pi}T^e d\theta\right]$$

$$EFM\Big|_{cycle}=\int_0^{A}-T^e d\theta+\int_A^{B}-T^e d\theta+\int_B^{C}-T^e d\theta+\int_C^{D}-T^e d\theta$$

$$EFM\Big|_{cycle}=\int_B^{C}-T^e d\theta=\int_{\pi}^{2\pi}MI_0^2\sin\theta d\theta=-2MI_0^2<0$$

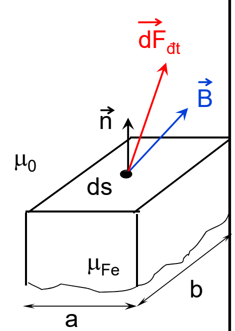
Nhận xét: EFM<0 hay EFE>0 ⇨ Máy điện hoạt động như động cơ

Tính lực điện từ theo công thức Maxwell

Lực điện từ $F_{đt}$ tác động lên bề mặt diện tích S của vật liệu từ đặt trong môi trường không khí có từ cảm B xuyên qua

$$\overrightarrow{F_{dt}}=\int_S\overrightarrow{dF_{dt}}=\frac{1}{\mu_0}\int_S\left[\left(\overrightarrow{B}\ \vec{n}\right)\overrightarrow{B}-\frac{1}{2}B^2\ \vec{n}\right]ds$$

$dF_{đt}$: Vi phân lực điện từ tác động lên vi phân diện tích ds
$\vec{n}$: Vectơ pháp tuyến đơn vị



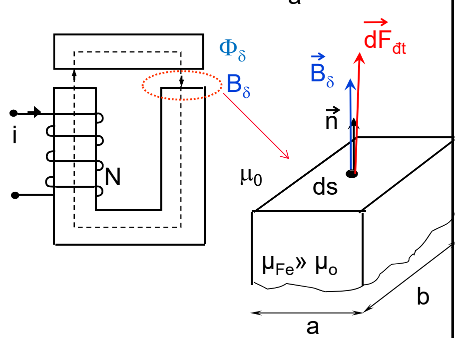
✦ Thông thường từ thẩm μ_{Fe} >> μ_o
➔ Vectơ từ cảm trên bề mặt phân cách với không khí : $\vec{B}_\delta$ *(còn gọi là B_{lv} trong phần trước)* song song $\vec{n}$:

$$\overrightarrow{F_{dt}}=\frac{1}{\mu_0}\int_S\overrightarrow{F_{dt}}\ ds=\frac{1}{2\mu_0}\int_S\left[B_\delta^2\ \vec{n}\ \right]ds$$

✦ Nếu từ trường phân bố đồng đều B_δ = hằng số

$$\boxed{F_{dt}=\frac{1}{2\mu_0}B_\delta^2\ S=\frac{1}{2\mu_0}\frac{\Phi_\delta^2}{S}}$$

Φ_δ [Wb]:Từ thông trong khe hở kk (từ thông làm việc Φ_{lv} .
$F_{đt}$ [N]: Lực điện từ



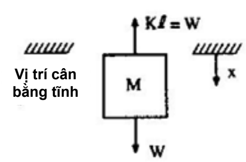
4.6 Dùng mô hình không gian trạng thái phân tích hệ thống điện cơ

4.1 Khảo sát hệ thống (biến đổi năng lượng) điện cơ
4.2 Ví dụ hệ thống điện cơ chuyển động thẳng và chuyển động quay
4.3 Phân tích lực dùng khái niệm năng lượng hoặc đồng năng lượng
4.4 Phân tích lực của hệ thống điện cơ đa cổng.
4.5 Sự bảo toàn và biến đổi năng lượng
4.6 Dùng mô hình không gian trạng thái phân tích hệ thống điện cơ

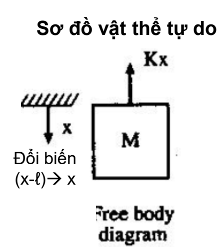
Hệ thống cơ gồm lò xo và vật nặng

Xét hệ thống cơ có thông số tập trung bao gồm khối lượng M (động năng) treo bằng lò xo có độ cứng K (thế năng):

- **Vị trí cân bằng tĩnh**: trọng lực Mg cân bằng với lực kéo của lò xo có độ giãn hay nén ℓ : Kℓ.



- **Sơ đồ vật thể tự do**
 Nếu chọn vị trí cân bằng tĩnh làm gốc tọa độ → chỉ quan tâm đến lực lò xo khi M rời khỏi vị trí cân bằng.
 Nếu M bị tác động di chuyển theo chiều dương của x
 → lực lò xo kéo M lên phía trên. Ta có sơ đồ vật thể tự do:

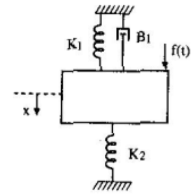


- Dùng định luật Newton viết phương trình cân bằng lực:

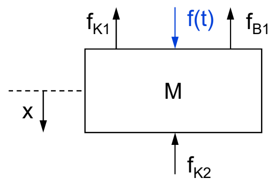
$$M\ddot{x} = -Kx \qquad \text{hay} \qquad M\ddot{x} + Kx = 0$$

Hệ thống cơ gồm lò xo và vật nặng

Ví dụ: hệ thống cơ có thông số tập trung bao gồm khối lượng M gắn với hai lò xo K_1, K_2 và một bộ giảm chấn B_1. f(t) là lực đặt vào M, x là khoảng dịch chuyển từ vị trí cân bằng.



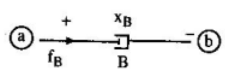
- Sơ đồ vật thể tự do



- Phương trình cân bằng lực:

$$M\ddot{x} = f(t) - f_{K1} - f_{K2} - f_B$$
$$= f(t) - K_1x - K_2x - B\frac{dx}{dt}$$

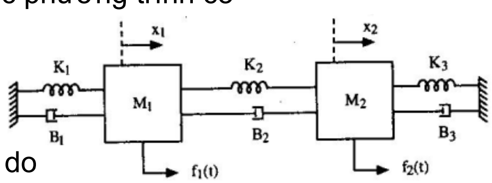
Ghi chú: Bộ giảm chấn là phần tử tiêu thụ năng lượng



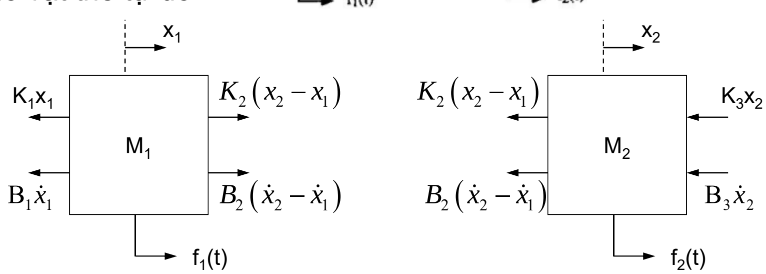
$$f_B = B\frac{dx_B}{dt}$$

Ví dụ áp dụng

Ví dụ 4.17 viết các phương trình cơ



- Sơ đồ vật thể tự do



- Phương trình cân bằng lực:

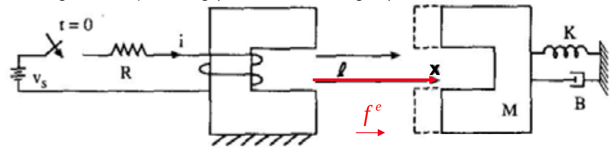
$$M_1\ddot{x}_1 = f_1(t) + K_2(x_2 - x_1) + B_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - B_1\dot{x}_1 - K_1x_1$$
$$M_2\ddot{x}_2 = f_2(t) - B_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - K_2(x_2 - x_1) - B_3\dot{x}_2 - K_3x_2$$

Mô hình không gian trạng thái

Mô hình không gian trạng thái của hệ thống điện cơ:
→ mô tả động học đầy đủ của hệ thống bằng hệ các phương trình điện và cơ, được viết dưới dạng hệ các phương trình vi phân bậc nhất.

Ví dụ 4.19 viết hệ phương trình không gian trạng thái của hệ thống sau

l : vị trí cân bằng tĩnh của phần ứng (lò xo chưa bị kéo giãn) khi i=0

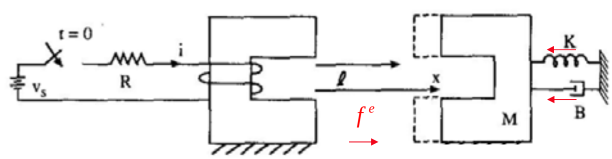


- Giải mạch từ và dùng đồng năng lượng
→ lực điện từ (kết quả từ ví dụ 4.7 và 4.8)

$$f^e = -\frac{N^2 i^2}{\mu_0 A\left(\frac{l_c}{\mu A} + \frac{2x}{\mu_0 A}\right)^2}$$

Mô hình không gian trạng thái

Ví dụ 4.19 (tt)



- Phương trình cân bằng lực Newton

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + K(x-l) + B\frac{dx}{dt} = f^e = -\frac{N^2 i^2}{\mu_0 A\left(\frac{l_c}{\mu A} + \frac{2x}{\mu_0 A}\right)^2}$$

$Ma = f_e - B - k$

- Phương trình cân bằng điện áp

$$v_s = iR + \frac{d\lambda}{dt} = iR + \frac{N^2}{\left(\frac{l_c}{\mu A} + \frac{2x}{\mu_0 A}\right)}\frac{di}{dt} - \frac{N^2 i}{\left(\frac{l_c}{\mu A} + \frac{2x}{\mu_0 A}\right)^2}\frac{2}{\mu_0 A}\frac{dx}{dt}$$

Mô hình không gian trạng thái

Ví dụ 4.19 (tt)

Lập **mô hình không gian trạng thái** gồm 3 phương trình vi phân bậc nhất

- Bước 1: Xác định 3 biến trạng thái **x**, **v**, (v=dx/dt là vận tốc), và **i**
- Bước 2: Tính dx/dt, dv/dt, di/dt (theo x, v, i, v_s) từ các phương trình cân bằng lực và phương trình cân bằng điện áp:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{1}{M}\left[\dfrac{-N^2 i^2}{\mu_0 A R^2(x)} - K(x-l) - Bv\right] \\ \dfrac{di}{dt} = \dfrac{1}{L(x)}\left[-iR + \dfrac{N^2 i}{R^2(x)}\dfrac{2}{\mu_0 A} v + v_s\right] \end{cases}$$

Với $v_s(t)$: hàm cưỡng bức (forcing function)

Là hệ phương trình vi phân trạng thái của hệ thống điện cơ

- Bước 3: Xác định điều kiện ban đầu: x(0)=ℓ, v(0)=0, i(0)=0.

59

Mô hình không gian trạng thái

Ví dụ 4.19 (tt) viết hệ phương trình vi phân trạng thái dạng tổng quát

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{M}\left[\dfrac{-N^2 i^2}{\mu_0 A R^2(x)} - K(x-l) - Bv\right] \\ \dfrac{di}{dt} = \dfrac{1}{L(x)}\left[-iR + \dfrac{N^2 i}{R^2(x)}\dfrac{2}{\mu_0 A} v + v_s\right] \end{cases}$$

Điều kiện ban đầu: x(0), v(0), i(0)

đổi ký hiệu

$x = x_1$

$v = x_2$

$i = x_3$

$v_s = u$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3, u) \end{cases}$$

Điều kiện ban đầu: $x_1(0)$, $x_2(0)$, $x_3(0)$

Viết lại
$$\begin{cases} \underline{\dot{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) \\ \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Với

$$\underline{u} = u \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \underline{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

60

Điểm làm việc cân bằng của hệ thống

Điểm làm việc cân bằng của hệ thống

- Hệ phương trình vi phân trạng thái

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{f}\left(\underline{x},\underline{u}\right) = 0 \\ \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} \qquad \underline{u} = u = const \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình vi phân trạng thái
→ nghiệm cân bằng tĩnh/điểm làm việc cân bằng của hệ thống.

❑ Có thể giải bằng phương pháp đồ thị với những hệ thống nhỏ.

61

Ví dụ áp dụng

Xem ví dụ 4.19, tìm điểm làm việc cân bằng của hệ thống:

$$\frac{dx}{dt} = v = v^e = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{M}\left[\frac{-N^2 i^2}{\mu_0 A R^2(x)} - K(x-l) - Bv\right] = 0 \longrightarrow -K(x-l) = \frac{N^2 (i^e)^2}{\mu_0 A R^2(x)} = -f^e(i^e, x)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L(x)}\left[-iR + \frac{N^2 i}{R^2(x)}\frac{2}{\mu_0 A} v + v_s\right] = 0 \quad \rightarrow i^e = \frac{v^e}{R}$$

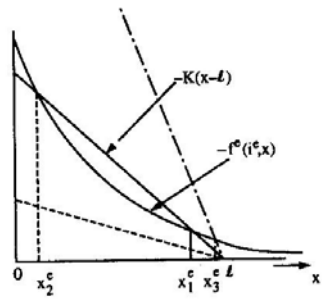
Đã biết i=i^e, chưa biết x → dùng phương pháp đồ thị

62

Ví dụ áp dụng

Ví dụ 4.19, phương pháp đồ thị

$$-K(x-l)=\frac{N^2\left(i^e\right)^2}{\mu_0 AR^2(x)}=-f^e\left(i^e,x\right) \qquad i^e=\frac{v^e}{R}$$



Tùy theo độ cứng của lò xo → vô nghiệm, một nghiệm, và hai nghiệm

63

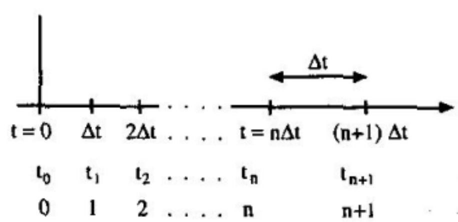
Phương pháp tích phân số giải phương trình vi phân

$$\dot{\underline{x}}=\underline{f}(\underline{x},\underline{u}) \qquad \underline{x}(0)=\underline{x}_0$$

Hai phương pháp: phương pháp tường minh (phương pháp Euler) và phương pháp không tường minh (để giải những hệ thống lớn vì dễ hội tụ hơn).

- **Phương pháp Euler**

$$\dot{\underline{x}}=\underline{f}(\underline{x},\underline{u}) \qquad \underline{x}(0)=\underline{x}_0$$



$$\Longrightarrow \int_{t_n}^{t_{n+1}}\dot{\underline{x}}(t)dt=\int_{t_n}^{t_{n+1}}\underline{f}(\underline{x},\underline{u})dt$$

$$\Longrightarrow \underline{x}(t_{n+1})-\underline{x}(t_n)=(t_{n+1}-t_n)\underline{f}(\underline{x}(t_n),\underline{u}(t_n))=\Delta t\left[\underline{f}(\underline{x}(t_n),\underline{u}(t_n))\right]$$

$$\underline{x}(t_{n+1})=\underline{x}(t_n)+\Delta t\left[\underline{f}(\underline{x}(t_n),\underline{u}(t_n))\right]$$

Tính giá trị các biến trạng thái ở thời điểm bất kỳ từ những giá trị đã biết ở các thời điểm trước đó, đặc biệt là thời điểm ban đầu.

64

Ví dụ áp dụng

Ví dụ 4.21 Giải nghiệm của phương trình sau tại các thời điểm 0,1; 0,2 và 0,3 giây

$$\dot{x} = -(t+2)x^2 = f(x,t) \qquad x(0) = 1$$

Chọn Δt=0,1 giây

Thuật toán: $x^{(n+1)} = x^{(n)} + \Delta t\left[f\left(x^{(n)}, t_n\right)\right] \qquad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$

- Tính $x^{(0)}$ khi n=0, t_0=0

$$x^{(0)} = 1 \qquad f\left(x^{(0)}, t_0\right) = -(0+2)1^2 = -2$$

- Tính $x^{(1)}$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta t\left[f\left(x^{(0)}, t_0\right)\right] = 1 + 0.1 \times (-2) = 0.8$$

$$x^{(1)} = 0.8 \qquad f\left(x^{(1)}, t_1\right) = -(0.1+2)0.8^2 = -1.344$$

- Tính $x^{(2)}$ $\quad x^{(2)} = x^{(1)} + \Delta t\left[f\left(x^{(1)}, t_1\right)\right] = 0.8 + 0.1 \times (-1.344) = 0.6656$

- Tính $x^{(3)}$,… $\quad x^{(3)} = 0.5681 \qquad x^{(4)} = 0.4939$

65

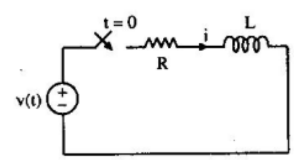
Ví dụ áp dụng

Ví dụ 4.22 tìm i(t) trong mạch LC theo phương pháp Euler

Các phương trình vi phân

$$L\frac{di}{dt} + iR = \frac{di}{dt} + i\left(1+3i^2\right) = v(t)$$

$$i(0) = 0$$



R = (1 + 3i²) Ω

L = 1 H, v(t) = 10t V.

Đặt i=x, v(t)=u(t) hàm cưỡng bức

→ phương trình trạng thái

$$\frac{dx}{dt} = -\left(1+3x^2\right)x + u(t) = f(x,u,t) \qquad x(0) = 0 = x^{(0)}$$

Thuật toán: $x^{(n+1)} = x^{(n)} + \Delta t f\left(x^{(n)}, u^{(n)}, t_n\right)$ n=0, 1, 2, … Chọn Δt=0,025 giây

$$x^{(0)} = 0 \qquad u^{(0)} = 0 \longrightarrow f\left(x^{(0)}, u^{(0)}, t_0\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta t\left[f\left(x^{(0)}, t_0\right)\right] = 0$$

$$x^{(1)} = 0 \qquad u^{(1)} = 10t = 10x0.025 = 0.25 \qquad f\left(x^{(1)}, u^{(1)}, t_1\right) = -\left(1+0^2\right)0 + 0.25 = 0.25$$

$$\Rightarrow \quad x^{(2)} = x^{(1)} + (0.025)(0.25) = 0.00625$$

66