Lecture 4

Chương 3: Phân tích và thực hiện hệ thống LTI dùng biến đổi Laplace

3.1. Biến đổi Laplace

3.1. Biến đổi Laplace

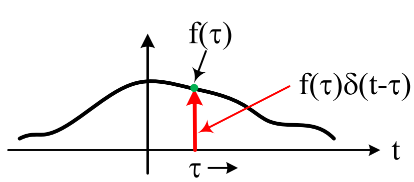
3.1.1 Giới thiệu

3.1.1. Giới thiệu

B/diễn TH trong miền t/gian

Cơ sở: $\mathbf{T}\{\delta(t)\}=h(t)$

Biểu diễn: $f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$

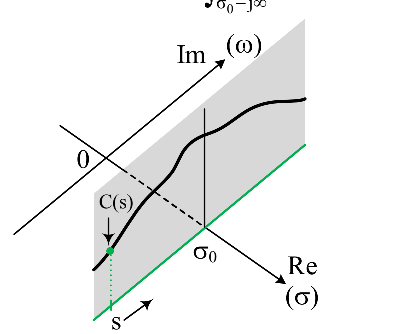


Dùng trực tiếp f(τ) thay cho f(t) → **tích chập**

B/diễn TH trong miền tần số

Cơ sở: $\mathbf{T}\{e^{st}\}=H(s)e^{st}$

Biểu diễn: $f(t)=\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} C(s)e^{st}ds$



Dùng C(s) thay thế cho f(t) → **biến đổi Laplace**

3.1. Biến đổi Laplace

3.1.2 Biến đổi Laplace

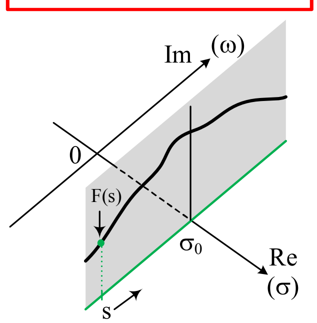
3.1.2. Biến đổi Laplace

- Biến đổi Laplace ngược: $$f(t)=\frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty}F(s)e^{st}ds$$
- Biến đổi Laplace thuận: $$F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$$
- Điều kiện tồn tại: $$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,e^{-\sigma t}dt \quad \text{h/h}$$
  $\sigma = \mathrm{Re}\{s\}$

Kí hiệu: $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$

(Gốc) $f(t) \leftrightarrow F(s)$ (Ảnh)



3.1.2. Biến đổi Laplace

Ví dụ 1:

Dùng biến đổi Laplace để biểu diễn cho tín hiệu $f(t)=e^{-2t}u(t)$

Có: $F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt=\int_{0}^{+\infty} e^{-(s+2)t}dt=\frac{1}{s+2};\mathrm{Re}\{s\}>-2$

Nên: $f(t)=\frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} F(s)e^{st}ds=\frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty}\frac{1}{s+2}e^{st}ds;\sigma_0>-2$

Ví dụ 2:

Dùng biến đổi Laplace để biểu diễn cho tín hiệu $f(t)=-e^{-2t}u(-t)$

Có: $F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt=-\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+2)t}dt=\frac{1}{s+2};\mathrm{Re}\{s\}<-2$

Nên: $f(t)=\frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} F(s)e^{st}ds=\frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty}\frac{1}{s+2}e^{st}ds;\sigma_0<-2$

3.1. Biến đổi Laplace

3.1.3. Đồ thị các điểm cực – điểm không và ROC của biến đổi Laplace

a) Đồ thị các điểm cực – điểm không

Biến đổi Laplace thường có dạng hàm phân thức như sau:

$$F(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+....+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+....+a_1 s+a_0}$$

Đặt z_1, z_2,…z_m là m nghiệm của đa thức tử số bằng không, gọi là các điểm không (zero) của F(s) vì khi $s=z_k$ thì $F(s)=0$

Đặt p_1, p_2,…p_n là n nghiệm của đa thức mẫu số bằng không, gọi là các điểm cực (pole) của F(s) vì khi $s=p_k$ thì $F(s)=\infty$

F(s) được viết lại như sau: $F(s)=\frac{b_m}{a_n}\frac{(s-z_1)(s-z_2)....(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)....(s-p_n)}$

Nhận xét: ngoại trừ hằng số b_m/a_n, ta có thể thể hiện F(s) thông qua vị trí các điểm cực (x) và các điểm không (o) trên mặt phẳng phức → **đồ thị điểm cực điểm-không**

a) Đồ thị các điểm cực – điểm không

Ví dụ: vẽ **đồ thị điểm cực điểm-không** của F(s) như sau:

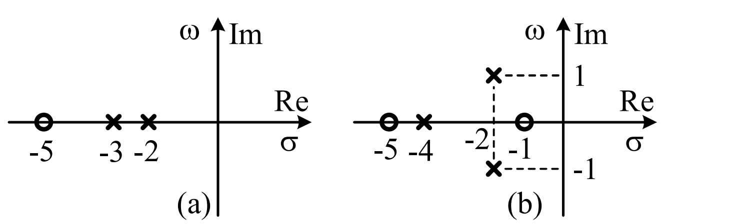
(a) $F(s)=\frac{2s+10}{3s^2+15s+18}$ (b) $F(s)=\frac{s^2+6s+5}{2s^3+16s^2+42s+40}$

$z_1=-5; p_1=-2, p_2=-3$

$F(s)=\frac{2}{3}\frac{(s+5)}{(s+2)(s+3)}$

$z_1=-1, z_2=-5; p_1=-4,$
$p_2=-2+j,\ p_3=-2-j$

$F(s)=\frac{1}{2}\frac{(s+1)(s+5)}{(s+4)(s+2-j)(s+2+j)}$



b) ROC của biến đổi Laplace

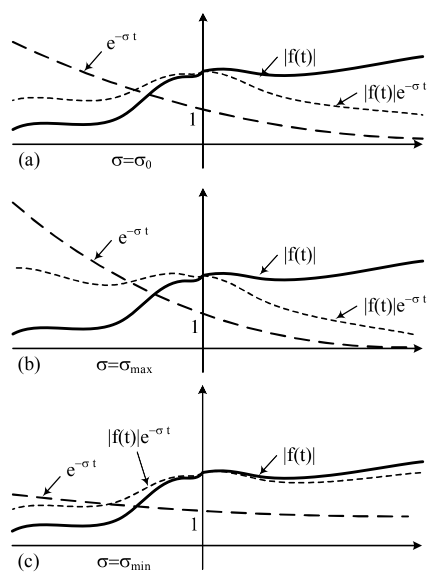
Ngoài F(s), ROC là thông số quan trọng để phân biệt biến đổi Laplace của các tín hiệu khác nhau. ROC là tập hợp các biến phức s trên mặt phẳng phức thỏa mãn:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, e^{-\sigma t} dt \ \ \text{h/h};\ \sigma = \mathrm{Re}\{s\}$$

Sau đây ta sẽ khảo sát các đặc trưng của ROC cho các tín hiệu khác nhau thông qua các tính chất của ROC

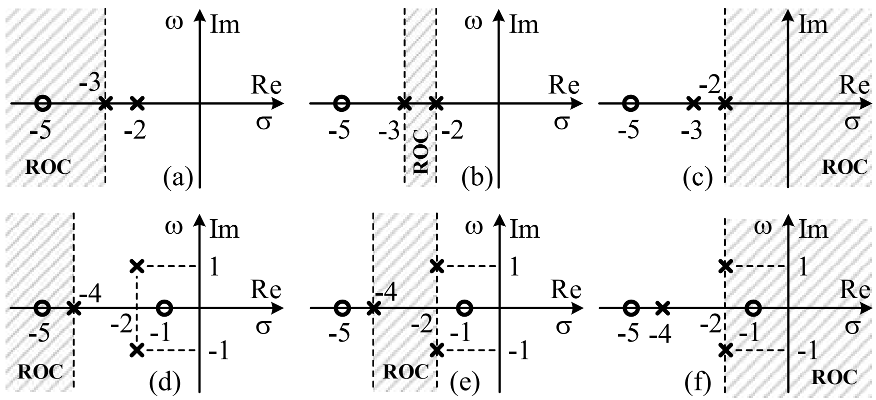
b) ROC của biến đổi Laplace

Tính chất 1: Một tín hiệu nếu tồn tại biến đổi Laplace thì ROC là một dải không chứa cực, song song với trục ảo và giới hạn bởi 2 cực kế nhau; hoặc khi không có cực nào có phần thực bằng ±∞, ROC nằm về bên trái của cực bên trái nhất hoặc bên phải cực bên phải nhất

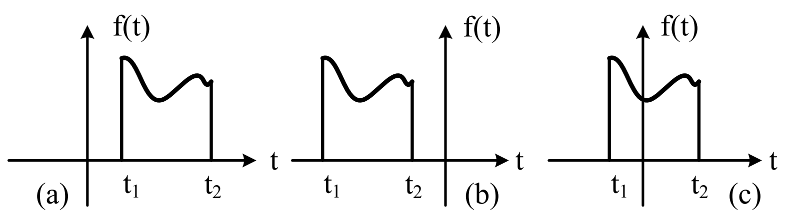


b) ROC của biến đổi Laplace

Ví dụ:



b) ROC của biến đổi Laplace



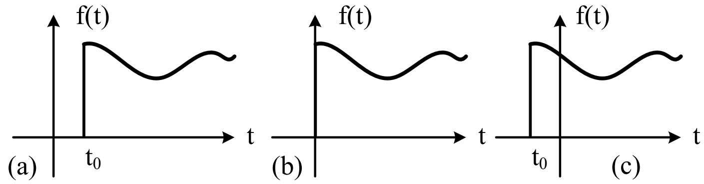
Tính chất 2: Một tín hiệu tồn tại trong một khoảng thời gian hữu hạn nếu tồn tại biến đổi Laplace thì ROC thỏa:

(a) $Re\{s\}>-\infty$ nếu $t_1\geq 0$;

(b) $Re\{s\}<+\infty$ nếu $t_2\leq 0$;

(c) $-\infty<Re\{s\}<+\infty$ nếu $t_1<0$ & $t_2>0$.

b) ROC của biến đổi Laplace



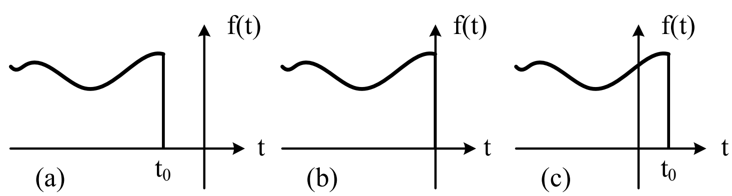
Tính chất 3: Một tín hiệu phía phải nếu tồn tại biến đổi Laplace thì ROC thỏa:

(a) $Re\{s\}>\sigma_{min}$ nếu $t_0 \geq 0$;

(b) $\sigma_{min} < Re\{s\} < +\infty$ nếu $t_0 < 0$;

Hay tín hiệu phía phải có ROC nằm về bên phải cực bên phải nhất và loại trừ $+\infty$ nếu $t_0<0$.

b) ROC của biến đổi Laplace



Tính chất 4: Một tín hiệu phía trái nếu tồn tại biến đổi Laplace thì ROC thỏa:

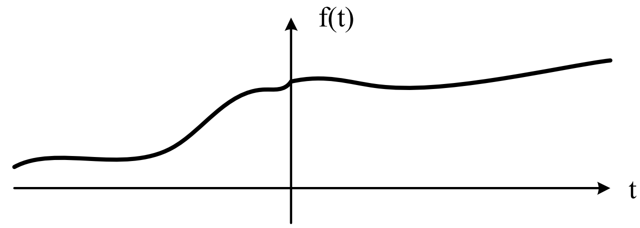
(a) $Re\{s\}<\sigma_{max}$ nếu $t_0 \leq 0$;

(b) $-\infty < Re\{s\} < \sigma_{max}$ nếu $t_0>0$;

Hay tín hiệu phía trái có ROC nằm về bên trái cực bên trái nhất và loại trừ $-\infty$ nếu $t_0>0$

Signals and Systems --HK191-- © Tran Quang Viet – FEEE – HCMUT

b) của biến đổi Laplace



Tính chất 5: Một tín hiệu hai phía nếu tồn tại biến đổi Laplace thì ROC thỏa $\sigma_{min}<Re\{s\}<\sigma_{max}$

Hay tín hiệu hai phía có ROC nằm giữa hai đường thẳng song song đi qua hai cực kế nhau có phần thực hữu hạn

3.1. Biến đổi Laplace

3.1.4. Các tính chất của biến đổi Laplace

3.1.4. Các tính chất của biến đổi Laplace

Tính chất tuyến tính:

Nếu: $f_1(t) \leftrightarrow F_1(s)$; ROC: R_1

$f_2(t) \leftrightarrow F_2(s)$; ROC: R_2

Thì: $a_1f_1(t)+a_2f_2(t) \leftrightarrow a_1F_1(s)+a_2F_2(s)$; ROC: $R' \supset (R_1 \cap R_2)$

Tính chất dịch thời gian:

Nếu: $f(t) \leftrightarrow F(s)$; ROC: R

Thì: $f(t-t_0) \leftrightarrow e^{-st_0}F(s)$; ROC: $R' = (R \cap R_0)$

$$R_0 = \begin{cases} \mathrm{Re}\{s\} < +\infty; & t_0 < 0 \\ \mathrm{Re}\{s\} > -\infty; & t_0 > 0 \end{cases}$$

3.1.4. Các tính chất của biến đổi Laplace

Tính chất dịch trong miền s:

Nếu: $f(t) \leftrightarrow F(s)$; ROC: R

Thì: $e^{s_0t}f(t) \leftrightarrow F(s-s_0)$; ROC: $R' = R + \mathrm{Re}\{s_0\}$

Tính chất tỉ lệ thời gian:

Nếu: $f(t) \leftrightarrow F(s)$; ROC: R

Thì: $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(\frac{s}{a}\right)$; ROC: $R' = aR$

Tính chất đảo thời gian:

Nếu: $f(t) \leftrightarrow F(s)$; ROC: R

Thì: $f(-t) \leftrightarrow F(-s)$; ROC: $R' = -R$

3.1.4. Các tính chất của biến đổi Laplace

Tính chất đạo hàm trong miền thời gian:

Nếu: $f(t) \leftrightarrow F(s); \quad \text{ROC: } R$

Thì: $\dfrac{df(t)}{dt} \leftrightarrow sF(s); \quad \text{ROC: } R' \supset R$

Tính chất đạo hàm trong miền s:

Nếu: $f(t) \leftrightarrow F(s); \quad \text{ROC: } R$

Thì: $tf(t) \leftrightarrow -\dfrac{dF(s)}{ds}; \quad \text{ROC: } R' = R$

3.1.4. Các tính chất của biến đổi Laplace

Tính chất tích phân trong miền thời gian:

Nếu: $f(t) \leftrightarrow F(s); \quad \text{ROC: } R$

Thì: $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \dfrac{F(s)}{s}; \quad \text{ROC: } R' = R \cap (\text{Re}\{s\} > 0)$

Tính chất tích chập trong miền thời gian:

Nếu: $f_1(t) \leftrightarrow F_1(s); \quad \text{ROC: } R_1$

$f_2(t) \leftrightarrow F_2(s); \quad \text{ROC: } R_2$

Thì: $f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(s)F_2(s); \quad \text{ROC: } R' \supset (R_1 \cap R_2)$

3.1. Biến đổi Laplace

3.1.5. Biến đổi Laplace của các tín hiệu thông dụng

3.1.5. Biến đổi Laplace của các tín hiệu thông dụng

f(t)	F(s)	ROC
$\delta(t)$	1	s-plane
$u(t)$	$1/s$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$-u(-t)$	$1/s$	$\mathrm{Re}\{s\}<0$
$e^{-at}u(t)$	$1/(s+a)$	$\mathrm{Re}\{s\}>-\mathrm{Re}\{a\}$
$-e^{-at}u(-t)$	$1/(s+a)$	$\mathrm{Re}\{s\}<-\mathrm{Re}\{a\}$
$t^n u(t)$	$n!/s^{n+1}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$-t^n u(-t)$	$n!/s^{n+1}$	$\mathrm{Re}\{s\}<0$
$t^n e^{-at}u(t)$	$n!/(s+a)^{n+1}$	$\mathrm{Re}\{s\}>-\mathrm{Re}\{a\}$
$-t^n e^{-at}u(-t)$	$n!/(s+a)^{n+1}$	$\mathrm{Re}\{s\}<-\mathrm{Re}\{a\}$

3.1.5. Biến đổi Laplace của các tín hiệu thông dụng

f(t)	F(s)	ROC
$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\omega_0/(s^2+\omega_0^2)$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$-\sin(\omega_0 t)u(-t)$	$\omega_0/(s^2+\omega_0^2)$	$\mathrm{Re}\{s\}<0$
$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$s/(s^2+\omega_0^2)$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$-\cos(\omega_0 t)u(-t)$	$s/(s^2+\omega_0^2)$	$\mathrm{Re}\{s\}<0$
$e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\omega_0/[(s+a)^2+\omega_0^2]$	$\mathrm{Re}\{s\}>-\mathrm{Re}\{a\}$
$-e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(-t)$	$\omega_0/[(s+a)^2+\omega_0^2]$	$\mathrm{Re}\{s\}<-\mathrm{Re}\{a\}$
$e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)$	$(s+a)/[(s+a)^2+\omega_0^2]$	$\mathrm{Re}\{s\}>-\mathrm{Re}\{a\}$
$-e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(-t)$	$(s+a)/[(s+a)^2+\omega_0^2]$	$\mathrm{Re}\{s\}<-\mathrm{Re}\{a\}$

3.1. Biến đổi Laplace

3.1.6. Xác định biến đổi Laplace ngược

3.1.6. Xác định biến đổi Laplace ngược

Tín hiệu f(t) được xác định từ biến đổi Laplace F(s) và ROC theo phương trình:

$$f(t)=\frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty}F(s)e^{st}ds$$

Do F(s) có dạng phân thức nên để tránh sự phức tạp trong việc tính trực tiếp tích phân Laplace; ta thường khai triển F(s) thành các phân thức tối giản sao cho có thể sử dụng các tính chất kết hợp với tra bảng để tìm f(t).

3.1.6. Xác định biến đổi Laplace ngược

Ví dụ 1: tìm f(t) biết $F(s)=\frac{s+2}{(s+3)(s+4)}$, và ROC tương ứng với các trường hợp sau:

(a) Re{s}<-4 (b) -4<Re{s}<-3 (c) Re{s}>-3

Giải: $F(s)=\frac{s+2}{(s+3)(s+4)}=\frac{2}{(s+4)}-\frac{1}{(s+3)}$

(a) $f(t)=-2e^{-4t}u(-t)+e^{-3t}u(-t)$ → Tín hiệu phía trái

(b) $f(t)=2e^{-4t}u(t)+e^{-3t}u(-t)$ → Tín hiệu hai phía

(c) $f(t)=2e^{-4t}u(t)-e^{-3t}u(t)$ → Tín hiệu phía phải

3.1.6. Xác định biến đổi Laplace ngược

Ví dụ 2: tìm f(t) biết $F(s)=\dfrac{s+2}{(s+3)(s+4)^2}$, và ROC tương ứng với các trường hợp sau:

(a) Re{s}<-4 (b) -4<Re{s}<-3 (c) Re{s}>-3

Giải: $F(s)=\dfrac{s+2}{(s+3)(s+4)}=\dfrac{2}{(s+4)^2}+\dfrac{1}{(s+4)}-\dfrac{1}{(s+3)}$

(a) $f(t)=-(2t+1)e^{-4t}u(-t)+e^{-3t}u(-t)$ → Tín hiệu phía trái

(b) $f(t)=(2t+1)e^{-4t}u(t)+e^{-3t}u(-t)$ → Tín hiệu hai phía

(c) $f(t)=(2t+1)e^{-4t}u(t)-e^{-3t}u(t)$ → Tín hiệu phía phải

3.1.6. Xác định biến đổi Laplace ngược

Ví dụ 3: tìm f(t) biết $F(s)=\dfrac{s+2}{(s+3)(s^2+2s+5)}$, và ROC tương ứng với các trường hợp sau:

(a) Re{s}<-3 (b) -3<Re{s}<-1 (c) Re{s}>-1