Môn học

CƠ SỞ TỰ ĐỘNG

Biên soạn: TS. Huỳnh Thái Hoàng
Bộ môn điều khiển tự động
Khoa Điện – Điện Tử
Đại học Bách Khoa TPHCM
Email: hthoang@hcmut.edu.vn
Homepage: www4.hcmut.edu.vn/~hthoang/
Giảng viên: HTHoàng, NVHảo, NĐHoàng, BTHuyền, HHPhương, HMTrí

Chương 8

PHÂN TÍCH
HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN RỜI RẠC

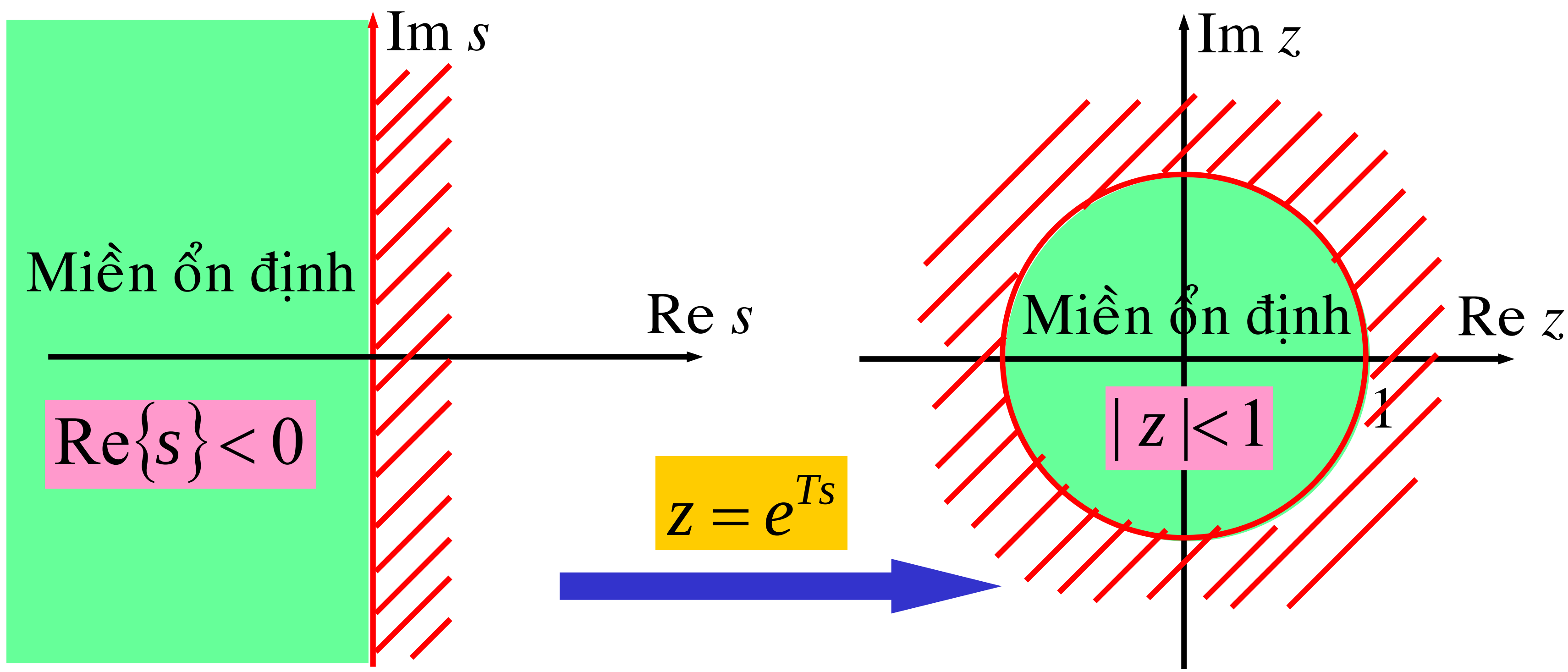
Nội dung chương 8

- ✶ Điều kiện ổn định của hệ rời rạc
- ✶ Tiêu chuẩn Routh-Hurwitz mở rộng
- ✶ Tiêu chuẩn Jury
- ✶ Quỹ đạo nghiệm số
- ✶ Sai số xác lập
- ✶ Chất lượng quá độ của hệ rạc

Điều kiện ổn định của hệ rời rạc

Điều kiện ổn định của hệ rời rạc

★ Hệ thống ổn định BIBO (Bounded Input Bounded Output) nếu tín hiệu vào bị chặn thì tín hiệu ra bị chặn.

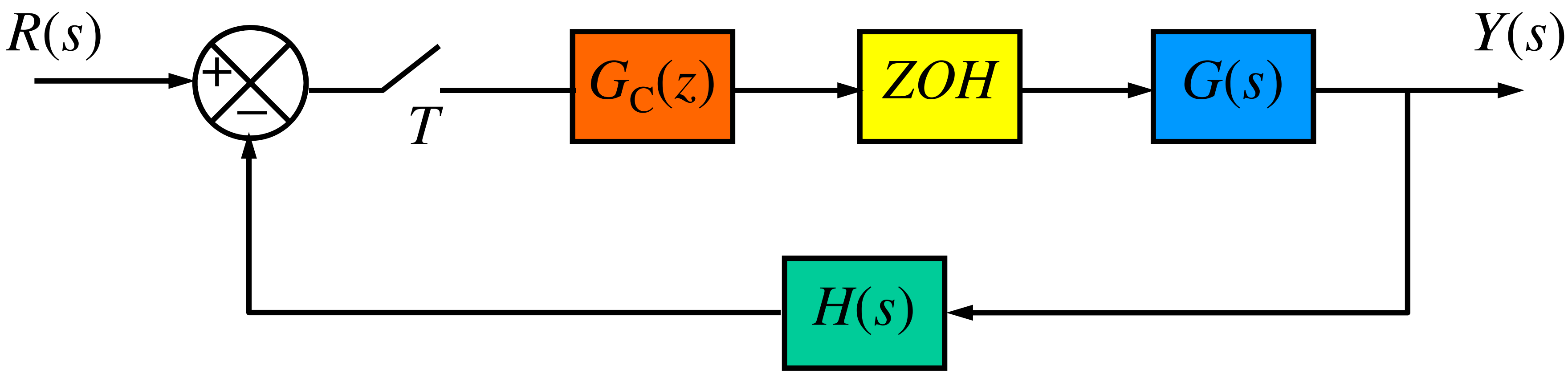


Miền ổn định của hệ liên tục là nữa trái mặt phẳng s

Miền ổn định của hệ rời rạc là vùng nằm trong vòng tròn đơn vị

Phương trình đặc trưng của hệ rời rạc

★ Hệ thống điều khiển rời rạc mô tả bởi sơ đồ khối:



⇒ Phương trình đặc trưng: $1+G_C(z)GH(z)=0$

★ Hệ thống điều khiển rời rạc mô tả bởi PTTT:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}_d r(k) \\ y(k)=\boldsymbol{C}_d\boldsymbol{x}(k) \end{cases}$$

⇒ Phương trình đặc trưng: $\det(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_d)=0$

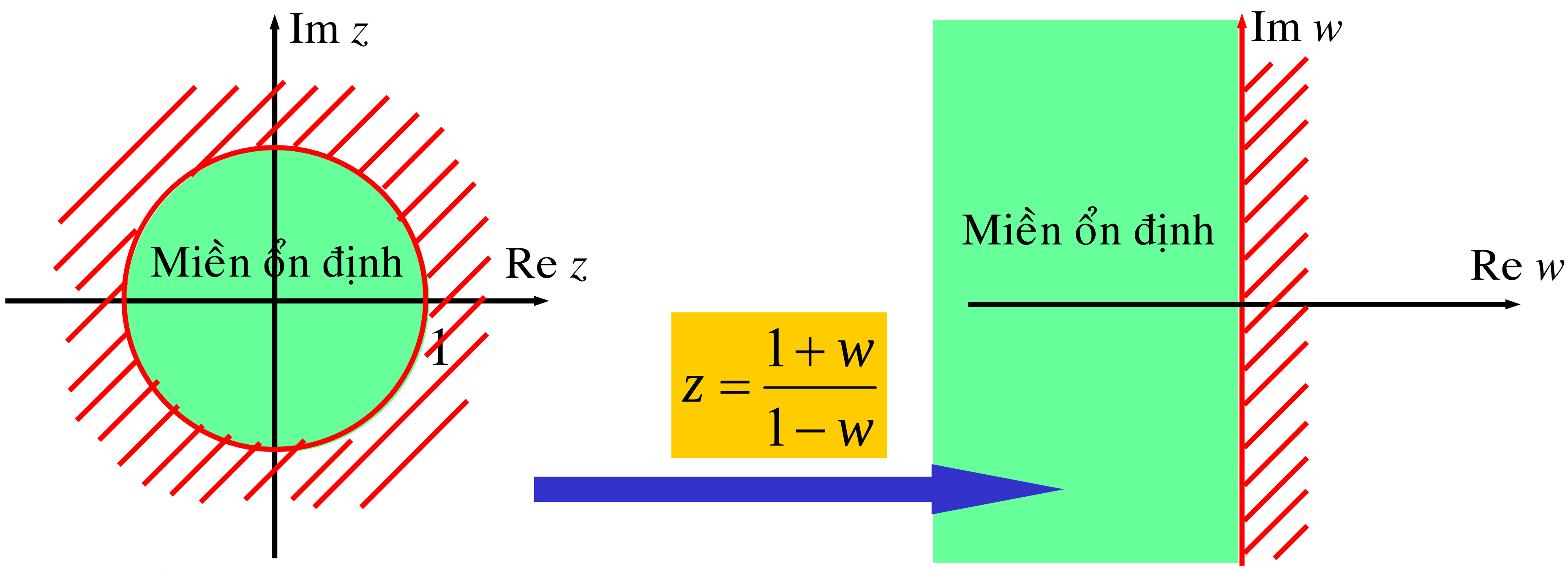
Phương pháp đánh giá tính ổn định của hệ rời rạc

- Tiêu chuẩn ổn định đại số
  - Tiêu chuẩn Routh – Hurwitz mở rộng
  - Tiêu chuẩn Jury
- Phương pháp quỹ đạo nghiệm số
- Phương pháp đặc tính tần số

Tiêu chuẩn Routh-Hurwitz mở rộng

Tiêu chuẩn Routh – Hurwitz mở rộng

★ PTĐT của hệ rời rạc: $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$



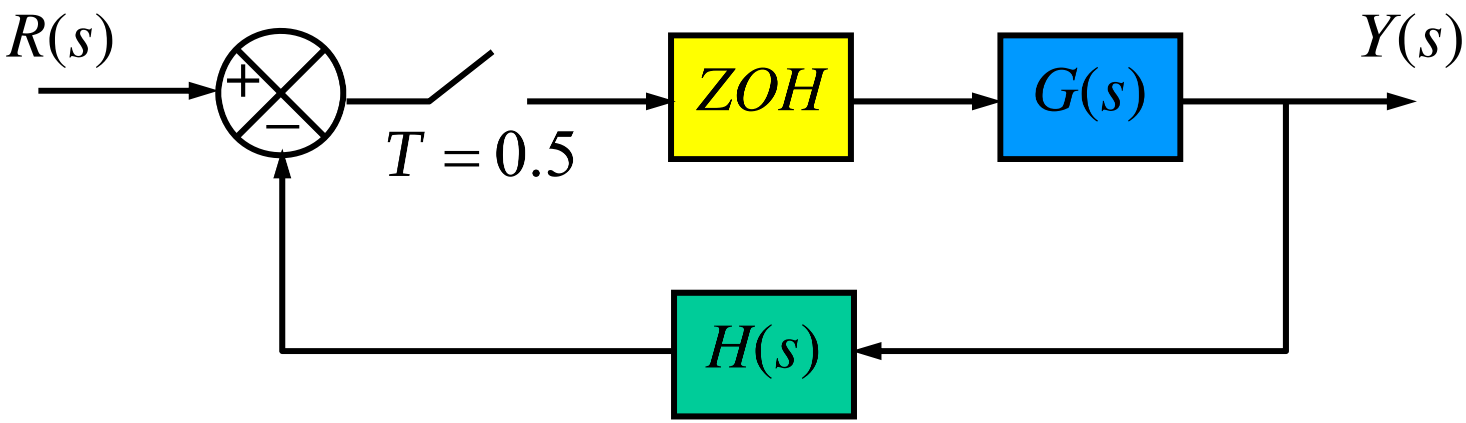
$$z = \frac{1+w}{1-w}$$

Miền ổn định: trong vòng tròn đơn vị của mặt phẳng Z

Miền ổn định: nữa trái mặt phẳng W

★ Tiêu chuẩn Routh – Hurwitz mở rộng: đổi biến z → w, sau đó áp dụng tiêu chuẩn Routh – Hurwitz cho phương trình đặc trưng theo biến w.

★ Đánh giá tính ổn định của hệ thống:



Biết rằng: $G(s) = \dfrac{3e^{-s}}{s+3}$ $\quad H(s) = \dfrac{1}{s+1}$

★ Giải:

Phương trình đặc trưng của hệ thống:

$$1 + GH(z) = 0$$

Thí dụ xét ổn định dùng tiêu chuẩn Routh – Hurwitz mở rộng

- $$GH(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)H(s)}{s}\right\}$$

$$= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{3e^{-s}}{s(s+3)(s+1)}\right\}$$

$$= 3(1 - z^{-1})z^{-2}\frac{z(Az+B)}{(z-1)(z-e^{-3\times0.5})(z-e^{-1\times0.5})}$$

$$A = \frac{(1-e^{-3\times0.5}) - 3(1-e^{-0.5})}{3(1-3)} = 0.0673$$

$$B = \frac{3e^{-3\times0.5}(1-e^{-0.5}) - e^{-0.5}(1-e^{-3\times0.5})}{3(1-3)} = 0.0346$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{GH(z) = \frac{0.202z + 0.104}{z^2(z-0.223)(z-0.607)}}$$

Thí dụ xét ổn định dùng tiêu chuẩn Routh – Hurwitz mở rộng

⇒ Phương trình đặc trưng:

$$1 + GH(z) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \frac{0.202z + 0.104}{z^2(z-0.223)(z-0.607)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad z^4 - 0.83z^3 + 0.135z^2 + 0.202z + 0.104 = 0$$

★ Đổi biến: $z = \dfrac{1+w}{1-w}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^4 - 0.83\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^3 + 0.135\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + 0.202\left(\frac{1+w}{1-w}\right) + 0.104 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 1.867w^4 + 5.648w^3 + 6.354w^2 + 1.52w + 0.611 = 0$$

Thí dụ xét ổn định dùng tiêu chuẩn Routh – Hurwitz mở rộng

★ Bảng Routh

w^4	1.867	6.354	0.611
w^3	5.648	1.52	0
w^2	$6.354-\dfrac{1.867}{5.648}\times 1.52=5.852$	0.611	0
w^1	$1.52-\dfrac{5.648}{5.852}\times 0.611=0.93$	0	
w^0	0.611		

★ Kết luận: Hệ thống ổn định do tất cả các hệ số ở cột 1 của bảng Routh đều dương

Tiêu chuẩn Jury

Tiêu chuẩn Jury

★ Xét tính ổn định của hệ rời rạc có PTĐT:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

★ Bảng Jury: gồm có $(2n+1)$ hàng.

- Hàng 1 là các hệ số của PTĐT theo thứ tự chỉ số tăng dần.
- Hàng chẳn (bất kỳ) gồm các hệ số của hàng lẻ trước đó viết theo thứ tự ngược lại.
- Hàng lẽ thứ $i = 2k+1$ $(k \geq 1)$ gồm có $(n-k+1)$ phần tử, phần tử ở hàng i cột j xác định bởi công thức:

$$c_{ij} = \frac{1}{c_{i-2,1}} \begin{vmatrix} c_{i-2,1} & c_{i-2,n-j-k+3} \\ c_{i-1,1} & c_{i-1,n-j-k+3} \end{vmatrix}$$

★ Tiêu chuẩn Jury: Điều kiện cần và đủ để hệ thống rời rạc ổn định là tất cả các hệ số ở hàng lẻ, cột 1 của bảng Jury đều dương.

Thí dụ xét ổn định dùng tiêu chuẩn Jury

- Xét tính ổn định của hệ rời rạc có PTĐT là: $5z^3 + 2z^2 + 3z + 1 = 0$
- Bảng Jury

Hàng 1	5	2	3	1
Hàng 2	1	3	2	5
Hàng 3	$\frac{1}{5}\begin{vmatrix}5 & 1\\1 & 5\end{vmatrix} = 4.8$	$\frac{1}{5}\begin{vmatrix}5 & 3\\1 & 2\end{vmatrix} = 1.4$	$\frac{1}{5}\begin{vmatrix}5 & 2\\1 & 3\end{vmatrix} = 2.6$	
Hàng 4	2.6	1.4	4.8	
Hàng 5	$\frac{1}{4.8}\begin{vmatrix}4.8 & 2.6\\2.6 & 4.8\end{vmatrix} = 3.39$	$\frac{1}{4.8}\begin{vmatrix}4.8 & 1.4\\2.6 & 1.4\end{vmatrix} = 0.61$		
Hàng 6	0.61	3.39		
Hàng 7	$\frac{1}{3.39}\begin{vmatrix}3.39 & 0.61\\0.61 & 3.39\end{vmatrix} = 3.28$			

- Do các hệ số ở hàng lẻ cột 1 bảng Jury đều dương nên hệ thống ổn định.

Phương pháp quỹ đạo nghiệm số (QĐNS)

- Quỹ đạo nghiệm số là tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng của hệ thống khi có một thông số nào đó trong hệ thay đổi từ $0 \rightarrow \infty$.
- Xét hệ rời rạc có phương trình đặc trưng:

$$1 + K\frac{N(z)}{D(z)} = 0$$

Đặt: $$G_0(z) = K\frac{N(z)}{D(z)}$$

Gọi n và m là số cực và số zero của $G_0(z)$

- Các qui tắc vẽ QĐNS hệ liên tục có thể áp dụng để vẽ QĐNS của hệ rời rạc, chỉ khác qui tắc 8.

Quỹ đạo nghiệm số hệ rời rạc

Qui tắc vẽ QĐNS

- ***Qui tắc 1:*** Số nhánh của quỹ đạo nghiệm số = bậc của phương trình đặc tính = số cực của $G_0(z) = n$.
- ***Qui tắc 2:***
  - Khi $K = 0$: các nhánh của quỹ đạo nghiệm số xuất phát từ các cực của $G_0(z)$.
  - Khi K tiến đến $+\infty$: m nhánh của quỹ đạo nghiệm số tiến đến m zero của $G_0(z)$, $n-m$ nhánh còn lại tiến đến ∞ theo các tiệm cận xác định bởi qui tắc 5 và qui tắc 6.
- ***Qui tắc 3:*** Quỹ đạo nghiệm số đối xứng qua trục thực.
- ***Qui tắc 4:*** Một điểm trên trục thực thuộc về quỹ đạo nghiệm số nếu tổng số cực và zero của $G_0(z)$ bên phải nó là một số lẻ.

Qui tắc vẽ QĐNS (tt)

- ***Qui tắc 5:*** : Góc tạo bởi các đường tiệm cận của quỹ đạo nghiệm số với trục thực xác định bởi :

$$\alpha = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} \qquad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

- ***Qui tắc 6:*** : Giao điểm giữa các tiệm cận với trục thực là điểm A có tọa độ xác định bởi:

$$OA = \frac{\sum \text{cực} - \sum \text{zero}}{n-m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

(p_i và z_i là các cực và các zero của $G_0(z)$)

- ***Qui tắc 7:*** : Điểm tách nhập (nếu có) của quỹ đạo nghiệm số nằm trên trục thực và là nghiệm của phương trình:

$$\frac{dK}{dz} = 0$$

Qui tắc vẽ QĐNS (tt)

- **_Qui tắc 8:_** : Giao điểm của quỹ đạo nghiệm số với vòng tròn đơn vị có thể xác định bằng cách áp dụng tiêu chuẩn Routh–Hurwitz mở rộng hoặc thay $z=a+jb$ $(a^2+b^2=1)$ vào phương trình đặc trưng.

- **_Qui tắc 9:_** Góc xuất phát của quỹ đạo nghiệm số tại cực phức p_j được xác định bởi:

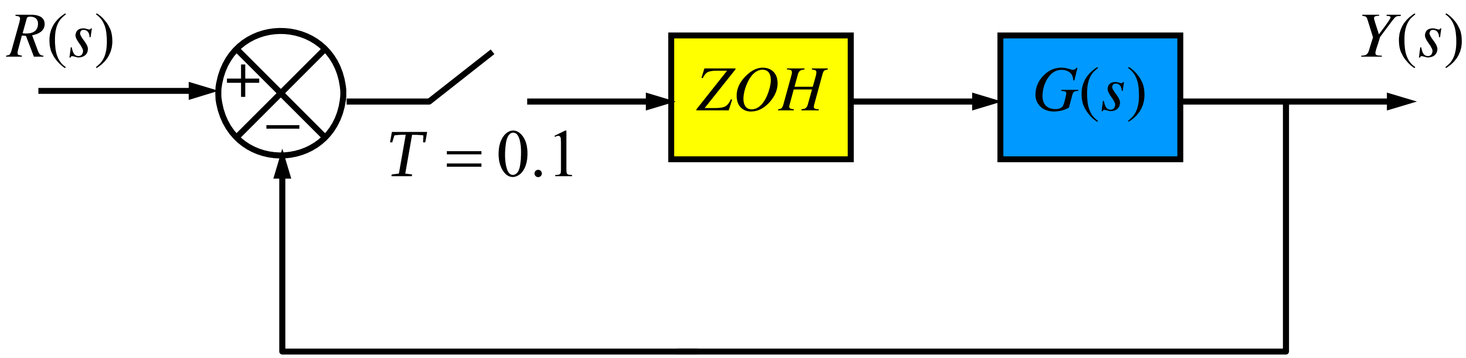
$$\theta_j = 180^0 + \sum_{i=1}^{m}\arg(p_j - z_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n}\arg(p_j - p_i)$$

Dạng hình học của công thức trên là:

$$\theta_j = 180^0 + (\sum \text{góc từ các zero đến cực } p_j) - (\sum \text{góc từ các cực còn lại đến cực } p_j)$$

Thí dụ vẽ QĐNS hệ rời rạc

★ Cho hệ thống rời rạc có sơ đồ khối:



$$G(s) = \frac{5K}{s(s+5)}$$

★ Hãy vẽ QĐNS của hệ thống khi $K = 0 \rightarrow +\infty$. Tính K_{gh}

★ Giải:

Phương trình đặc trưng của hệ thống:

$$1 + G(z) = 0$$

Thí dụ vẽ QĐNS hệ rời rạc

- $$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

$$= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{5K}{s^2(s+5)}\right\}$$

$$= K(1 - z^{-1})\left(\frac{z[(0.5 - 1 + e^{-0.5})z + (1 - e^{-0.5} - 0.5e^{-0.5})]}{5(z-1)^2(z - e^{-0.5})}\right)$$

$$\Rightarrow \quad G(z) = K\frac{0.021z + 0.018}{(z-1)(z-0.607)}$$

★ Phương trình đặc trưng: $\boxed{1 + K\frac{0.021z + 0.018}{(z-1)(z-0.607)} = 0}$

★ Cực: $p_1 = 1 \quad p_2 = 0.607$

★ Zero: $z_1 = -0.857$

Thí dụ vẽ QĐNS hệ rời rạc

★ Tiệm cận:

$$\alpha = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} = \frac{(2l+1)\pi}{2-1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \pi}$$

$$OA = \frac{\sum \text{cực} - \sum \text{zero}}{n-m} = \frac{[1+0.607]-(-0.857)}{2-1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{OA = 2.464}$$

★ Điểm tách nhập:

(PTĐT) $\Leftrightarrow$ $$K = -\frac{(z-1)(z-0.607)}{0.021z+0.018} = -\frac{z^2-1.607z+0.607}{0.021z+0.018}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dK}{dz} = -\frac{0.021z^2+0.036z-0.042}{(0.021z+0.018)^2}$$

Do đó $$\frac{dK}{dz} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} z_1 = -2.506 \\ z_2 = 0.792 \end{cases}}$$

Thí dụ vẽ QĐNS hệ rời rạc

★ Giao điểm của QĐNS với vòng tròn đơn vị:

(PTĐT) $\Leftrightarrow \quad (z-1)(z-0.607)+K(0.021z+0.018)=0$

$$\Leftrightarrow \quad z^2+(0.021K-1.607)z+(0.018K+0.607)=0 \qquad (*)$$

Cách 1: Dùng tiêu chuẩn Routh – Hurwitz mở rộng:

Đổi biến $z=\dfrac{w+1}{w-1}$, (*) trở thành:

$$\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2+(0.021K-1.607)\left(\frac{w+1}{w-1}\right)+(0.018K+0.607)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0.039Kw^2+(0.786-0.036K)w+(3.214-0.003K)=0$$

Theo hệ quả của tiêu chuẩn Hurwitz, điều kiện ổn định là:

$$\begin{cases} K>0 \\ 0.786-0.036K>0 \\ 3.214-0.003K>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K>0 \\ K<21.83 \\ K<1071 \end{cases} \Rightarrow \quad K_{gh}=21.83$$

Thí dụ vẽ QĐNS hệ rời rạc

Thay giá trị $K_{gh} = 21.83$ vào phương trình (*), ta được:

$$z^2 - 1.1485z + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 0.5742 \pm j0.8187$$

Vậy giao điểm của QĐNS với vòng tròn đơn vị là:

$$z = 0.5742 \pm j0.8187$$

Cách 2: Thay $z = a + jb$ vào phương trình (*) :

$$(a + jb)^2 + (0.021K - 1.607)(a + jb) + (0.018K + 0.607) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + j2ab - b^2 + (0.021K - 1.607)a + j(0.021K - 1.607)b + (0.018K + 0.607) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + (0.021K - 1.607)a + (0.018K + 0.607) = 0 \\ j2ab + j(0.021K - 1.607)b = 0 \end{cases}$$

Thí dụ vẽ QĐNS hệ rời rạc

* Kết hợp với điều kiện $a^2 + b^2 = 1$, ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + (0.021K - 1.607)a + (0.018K + 0.607) = 0 \\ j2ab + j(0.021K - 1.607)b = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

* Giải hệ phương trình trên, ta được 4 giao điểm là:

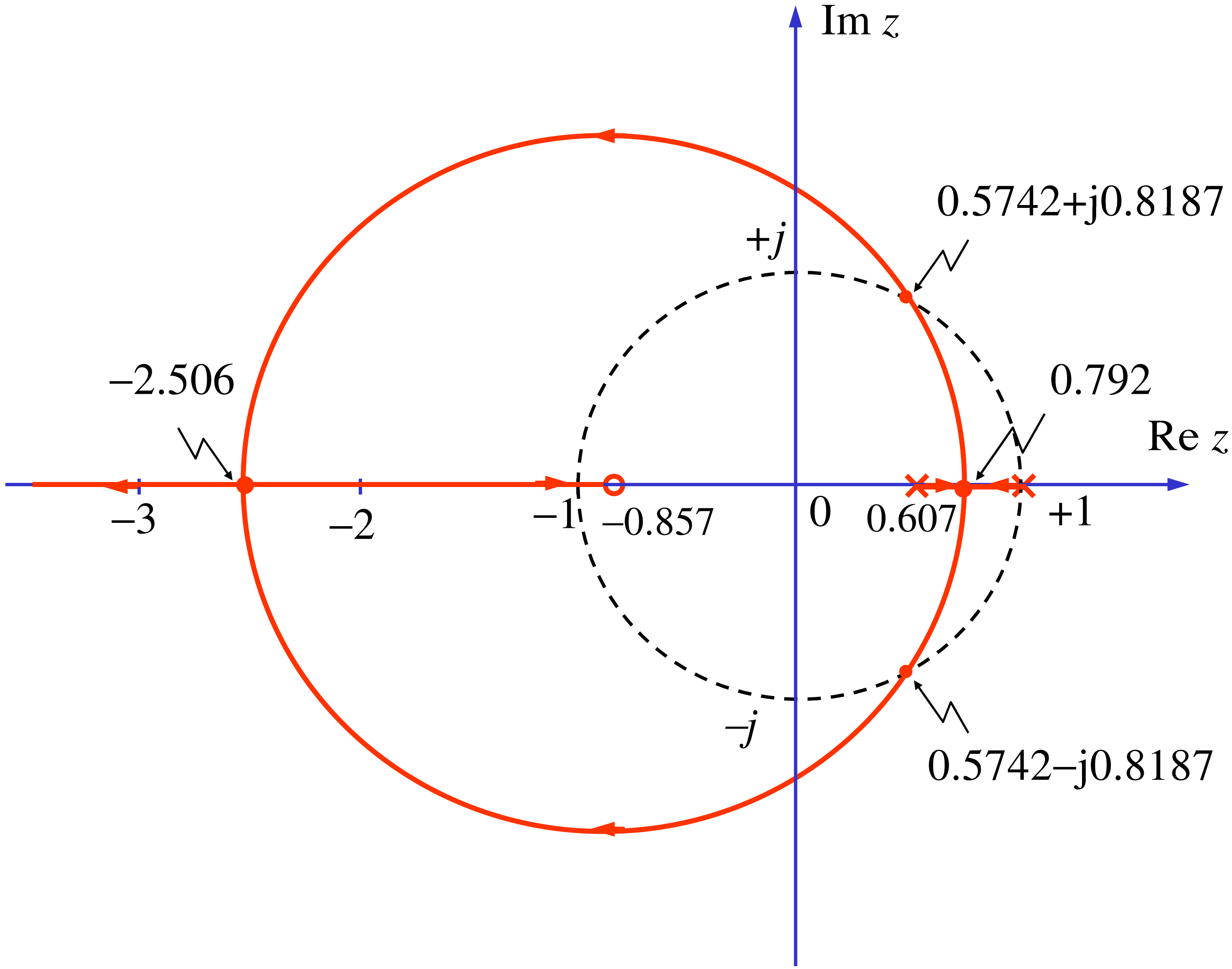
$z = 1$ khi $K = 0$

$z = -1$ khi $K = 1071$

$z = 0.5742 \pm j0.8187$ khi $K = 21.83$

$$\Rightarrow \quad \boxed{K_{gh} = 21.83}$$

Thí dụ vẽ QĐNS hệ rời rạc



Đặc tính tần số của hệ rời rạc

Đặc tính tần số hệ rời rạc

- Đặc tính tần số chính xác: thay $z = e^{j\omega T}$ vào hàm truyền $G(z)$

$$\Rightarrow \quad G(e^{j\omega T})$$

- Thí dụ: Hàm truyền: $G(z) = \dfrac{10}{z(z-0.6)}$

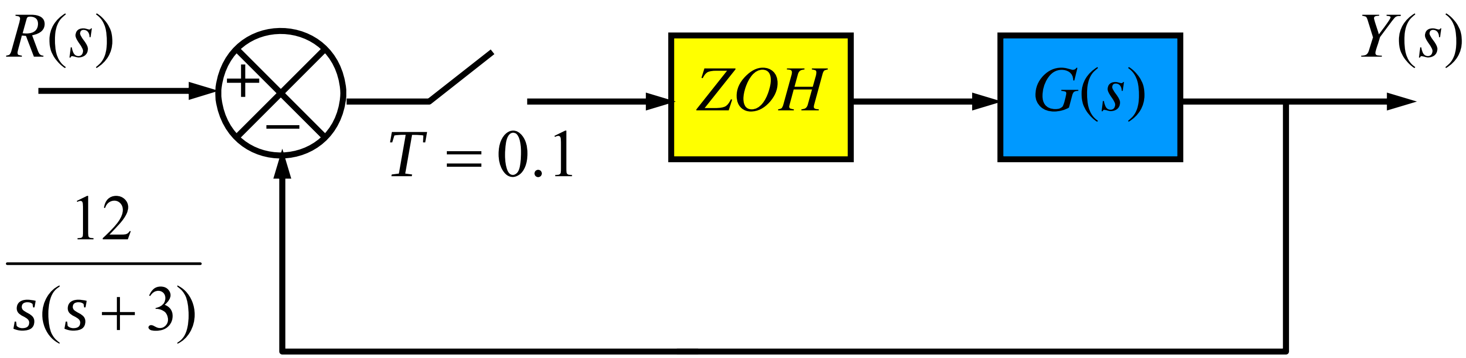
$\Rightarrow$ Đặc tính tần số: $G(e^{j\omega T}) = \dfrac{10}{e^{j\omega T}(e^{j\omega T} - 0.6)}$

- Vẽ biểu đồ Bode chính xác của hệ rời rạc:
  - Khó khăn
  - Không sử dụng được tính chất cộng biểu đồ Bode với trục hoành chia theo thang logarith
- Chú ý: Theo định lý lấy mẫu:

$$f \le \frac{f_s}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega \le \frac{\pi}{T}$$

Thí dụ đặc tính tần số hệ rời rạc

- Cho hệ thống rời rạc có sơ đồ khối:



$$G(s) = \frac{12}{s(s+3)}$$

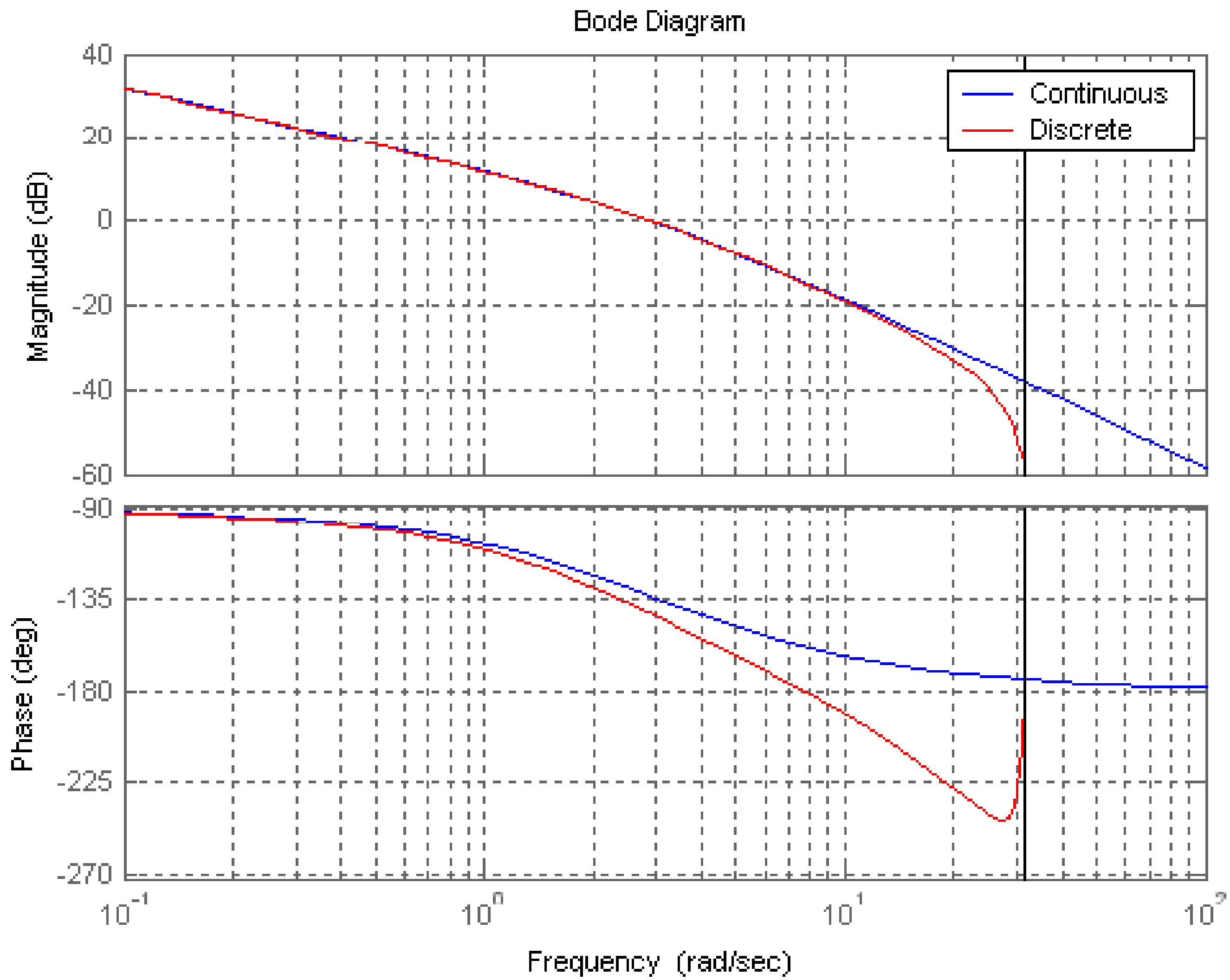
- Hãy khảo sát đặc tính tần số của hệ rời rạc hở
- ***Giải:***
- Hàm truyền rời rạc:

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \quad \Rightarrow \quad G(z) = \frac{0.0544z + 0.0493}{z^2 - 1.741z + 0.741}$$

- Đặc tính tần số: $G(e^{j\omega T}) = \dfrac{0.0544e^{j\omega T} + 0.0493}{(e^{j\omega T})^2 - 1.741e^{j\omega T} + 0.741}$

Thí dụ đặc tính tần số hệ rời rạc

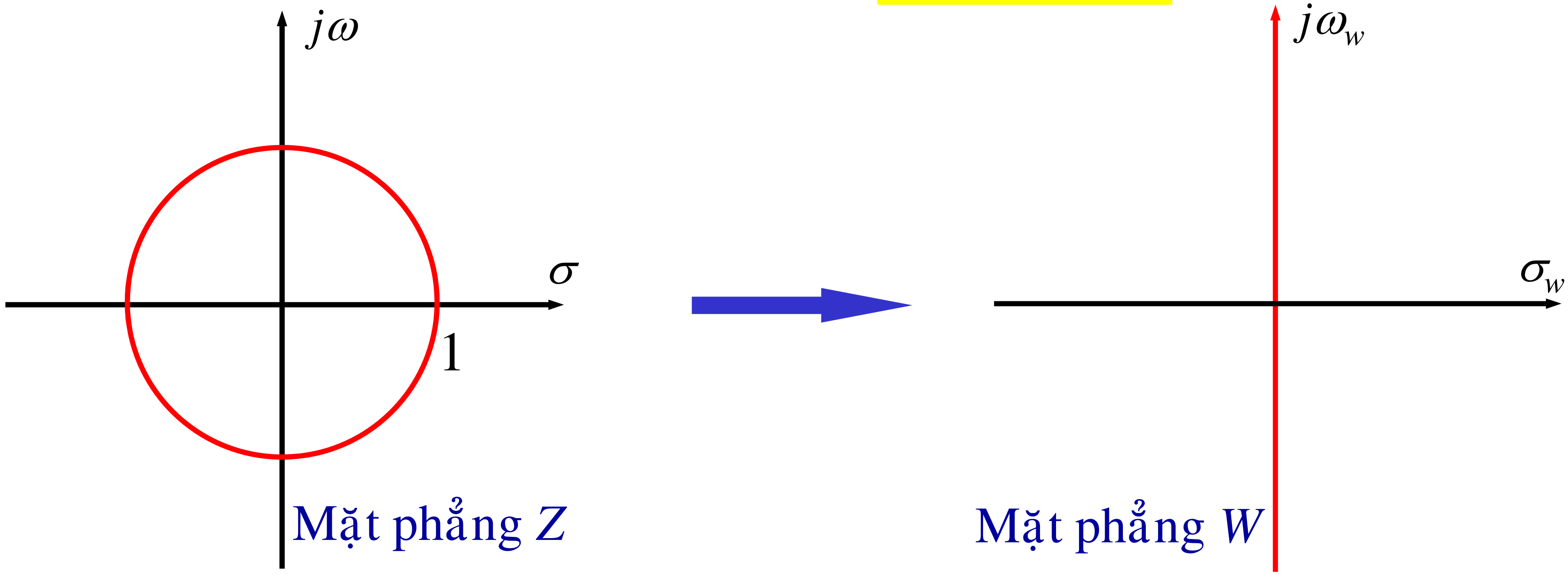
Biểu đồ Bode vẽ chính xác dùng Matlab



Phép biến đổi song tuyến

★ Phép biến đổi song tuyến (bilinear transformation):

$$z = \frac{1 + Tw/2}{1 - Tw/2} \quad \Leftrightarrow \quad w = \frac{2}{T}\left[\frac{z-1}{z+1}\right]$$



★ Đặc tính tần số của hệ rời rạc qua phép biến đổi song tuyến

$$G(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} \quad \Rightarrow \quad G(w)\Big|_{w=j\omega_w}$$

Quan hệ giữa tần số trong mặt phẳng W và tần số của hệ liên tục

- Trên trục ảo của mặt phẳng *W*:

$$w = j\omega_w$$

- Trên vòng tròn đơn vị của mặt phẳng Z:

$$\frac{2}{T}\left[\frac{z-1}{z+1}\right]\Bigg|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{2}{T}\left[\frac{e^{j\omega T}-1}{e^{j\omega T}+1}\right] = j\frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

- Do phép biến đổi song tuyến: $w = \dfrac{2}{T}\left[\dfrac{z-1}{z+1}\right]$

$$\Rightarrow \quad \boxed{j\omega_w = j\frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)}$$

- Ở miền tần số thấp thỏa $\omega T/2 \approx 0$ ta có $\tan\left(\dfrac{\omega T}{2}\right) \approx \dfrac{\omega T}{2}$ nên

$$\boxed{j\omega_w \approx j\omega}$$

Vẽ biểu đồ Bode gần đúng của hệ rời rạc

- Bước 1: Thực hiện phép biến đổi song tuyến

$$z = \frac{1 + Tw/2}{1 - Tw/2}$$

- Bước 2: Thay $w = j\omega_w$, sau đó áp dụng các qui tắc vẽ biểu đồ Bode bằng đường tiệm cận đã trình bày ở hệ liên tục

- ***Chú ý:***
  - Khi xác định tần số cắt biên, tần số cắt pha cần nhớ quan hệ:

$$\boxed{j\omega_w = j\frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)}$$

  - Độ dự trữ biên, độ dự trữ pha xác định như hệ liên tục

$\Rightarrow$ Đánh giá tính ổn định của hệ rời rạc dựa vào độ dự trữ biên và độ dự trữ pha như hệ liên tục

Chất lượng của hệ rời rạc

Đáp ứng của hệ rời rạc

- Đáp ứng của hệ rời rạc có thể tính bằng một trong hai cách sau:

  - *Cách 1:* nếu hệ rời rạc mô tả bởi hàm truyền thì trước tiên ta tính $Y(z)$, sau đó dùng phép biến đổi Z ngược để tìm $y(k)$.

  - *Cách 2:* nếu hệ rời rạc mô tả bởi PTTT thì trước tiên ta tính nghiệm $\boldsymbol{x}(k)$ của PTTT, sau đó suy ra $y(k)$.

- Cặp cực quyết định của hệ rời rạc là cặp cực nằm gần vòng tròn đơn vị nhất.

Cách 1: Đánh giá chất lượng quá độ dựa vào đáp ứng thời gian $y(k)$ của hệ rời rạc.

- Độ vọt lố:
$$POT = \frac{y_{\max} - y_{\mathrm{xl}}}{y_{\mathrm{xl}}} 100\%$$

trong đó $y_{\max}$ và y_{xl} là giá trị cực đại và giá trị xác lập của $y(k)$

- Thời gian quá độ:
$$t_{\text{qđ}} = k_{\text{qđ}} T$$

trong đó $k_{\text{qđ}}$ thỏa mãn điều kiện:

$$\left| y(k) - y_{\mathrm{xl}} \right| \le \frac{\varepsilon . y_{\mathrm{xl}}}{100}, \qquad \forall k \ge k_{\text{qđ}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{\varepsilon}{100}\right) y_{\mathrm{xl}} \le y(k) \le \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right) y_{\mathrm{xl}}, \qquad \forall k \ge k_{\text{qđ}}$$

Cách 2: Đánh giá chất lượng quá độ dựa vào cặp cực quyết định.

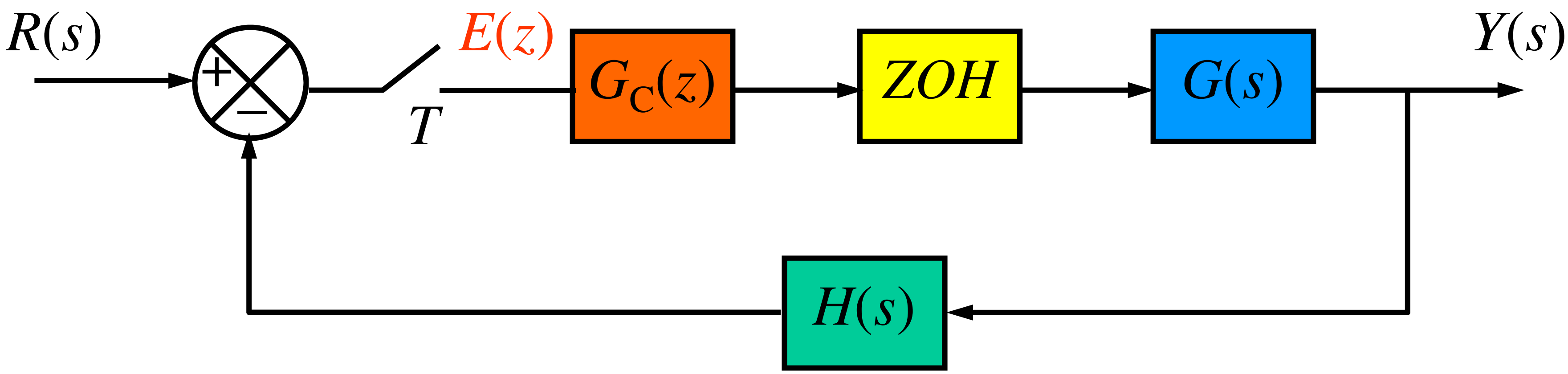
- Cặp cực quyết định: $z_{1,2}^{*} = re^{j\varphi}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi = \dfrac{-\ln r}{\sqrt{(\ln r)^2 + \varphi^2}} \\ \omega_n = \dfrac{1}{T}\sqrt{(\ln r)^2 + \varphi^2} \end{cases}$$

- Độ vọt lố: $POT = \exp\left(-\dfrac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \times 100\%$

- Thời gian quá độ: $t_{qđ} = \dfrac{3}{\xi\omega_n}$ (tiêu chuẩn 5%)

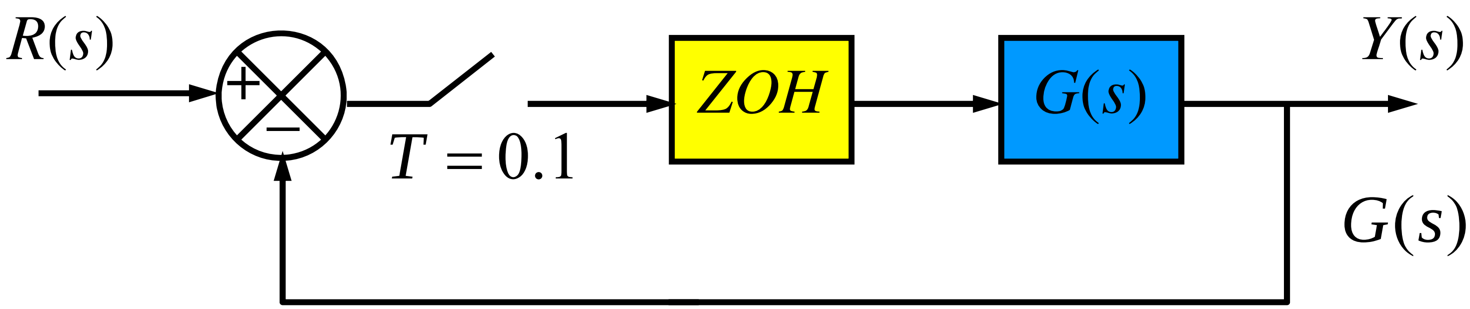
Sai số xác lập



★ Biểu thức sai số:
$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + G_C(z)GH(z)}$$

★ Sai số xác lập:
$$e_{xl} = \lim_{k \to \infty} e(k) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) E(z)$$

Chất lượng của hệ rời rạc. Thí dụ 1



$$G(s) = \frac{10}{(s+2)(s+3)}$$

1. Tính hàm truyền kín của hệ thống điều khiển trên.
2. Tính đáp ứng của hệ đối với tín hiệu vào là hàm nấc đơn vị.
3. Đánh giá chất lượng của hệ thống: độ vọt lố, thời gian quá độ, sai số xác lập.

★ Giải:

1. Hàm truyền kín của hệ thống: $G_k(z) = \dfrac{G(z)}{1+G(z)}$

Chất lượng của hệ rời rạc. Thí dụ 1

- $$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

$$= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{10}{s(s+2)(s+3)}\right\}$$

$$= 10(1 - z^{-1})\frac{z(Az + B)}{(z-1)(z - e^{-2\times 0.1})(z - e^{-3\times 0.1})}$$

$\Rightarrow$ $$\boxed{G(z) = \frac{0.042z + 0.036}{(z - 0.819)(z - 0.741)}}$$

Chất lượng của hệ rời rạc. Thí dụ 1

- $$G_k(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)}$$

$$= \frac{\dfrac{0.042z+0.036}{(z-0.819)(z-0.741)}}{1+\dfrac{0.042z+0.036}{(z-0.819)(z-0.741)}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{G_k(z) = \frac{0.042z+0.036}{z^2-1.518z+0.643}}$$

Chất lượng của hệ rời rạc. Thí dụ 1

2. Đáp ứng của hệ thống khi tín hiệu vào là hàm nấc đơn vị:

$$Y(z) = G_k(z)R(z)$$

$$= \frac{0.042z + 0.036}{z^2 - 1.518z + 0.643}R(z)$$

$$= \frac{0.042z^{-1} + 0.036z^{-2}}{1 - 1.518z^{-1} + 0.643z^{-2}}R(z)$$

$$\Rightarrow \quad (1 - 1.518z^{-1} + 0.643z^{-2})Y(z) = (0.042z^{-1} + 0.036z^{-2})R(z)$$

$$\Rightarrow \quad y(k) - 1.518y(k-1) + 0.643y(k-2) = 0.042r(k-1) + 0.036r(k-2)$$

$$\Rightarrow \quad y(k) = 1.518y(k-1) - 0.643y(k-2) + 0.042r(k-1) + 0.036r(k-2)$$

Chất lượng của hệ rời rạc. Thí dụ 1

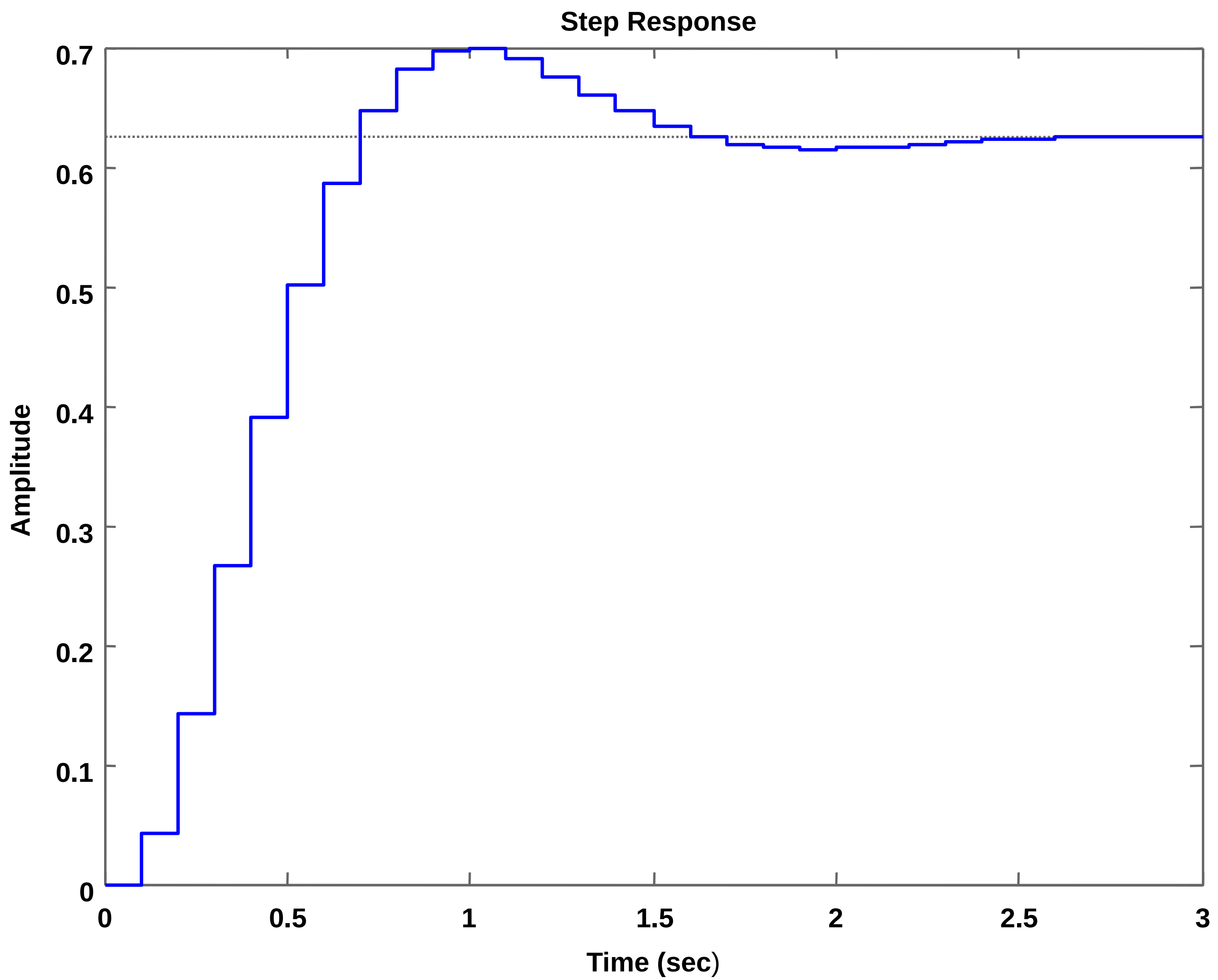
Tín hiệu vào là hàm nấc đơn vị: $r(k) = 1, \forall k \geq 0$

Điều kiện đầu: $y(-1) = y(-2) = 0$

Thay vào biểu thức đệ qui tính $y(k)$:

$$y(k) = \{0;\ 0.0420;\ 0.1418;\ 0.2662;\ 0.3909;\ 0.5003;\ldots$$
$$0.5860;\ 0.6459;\ 0.6817;0.6975;\ 0.6985;\ 0.6898;\ldots$$
$$0.6760;\ 0.6606;\ 0.6461;\ 0.6341;\ 0.6251;\ 0.6191;\ldots\}$$

Chất lượng của hệ rời rạc. Thí dụ 1



Chất lượng của hệ rời rạc. Thí dụ 1

3. Chất lượng của hệ thống:

Giá trị xác lập của đáp ứng:

$$y_{xl} = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})Y(z)$$

$$= \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})G_k(z)R(z)$$

$$= \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\left(\frac{0.042z+0.036}{z^2-1.518z+0.643}\right)\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)$$

$\Rightarrow$ $y_{xl} = 0.624$

Giá trị cực đại của đáp ứng: $y_{\max} = 0.6985$

★ Độ vọt lố: $POT = \dfrac{y_{\max} - y_{xl}}{y_{xl}} 100\% = \dfrac{0.6985 - 0.624}{0.624} 100\%$

$$POT = 11.94\%$$

Chất lượng của hệ rời rạc. Thí dụ 1

- Thời gian quá độ theo tiêu chuẩn 5%:

Trước tiên ta cần xác định $k_{qđ}$ thỏa:

$$(1-\varepsilon)y_{xl} \le y(k) \le (1+\varepsilon)y_{xl}, \forall k \ge k_{qđ}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0.593 \le y(k) \le 0.655, \forall k \ge k_{qđ}$$

Theo kết quả tính đáp ứng ở câu 2 ta thấy: $k_{qđ} = 14$

$$t_{qđ} = k_{qđ}T = 14 \times 0.1$$

$$\Rightarrow \quad t_{qđ} = 1.4\,\text{sec}$$

- Sai số xác lập:

Do hệ thống hồi tiếp âm đơn vị nên ta có thể tính

$$e_{xl} = r_{xl} - y_{xl} = 1 - 0.624 \quad \Rightarrow \quad e_{xl} = 0.376$$

Chất lượng của hệ rời rạc. Thí dụ 1

★ Chú ý: Ta có thể tính *POT* và $t_{qđ}$ dựa vào cặp cực phức

Cặp cực phức của hệ thống kín là nghiệm của phương trình

$$z^2 - 1.518z + 0.643 = 0$$

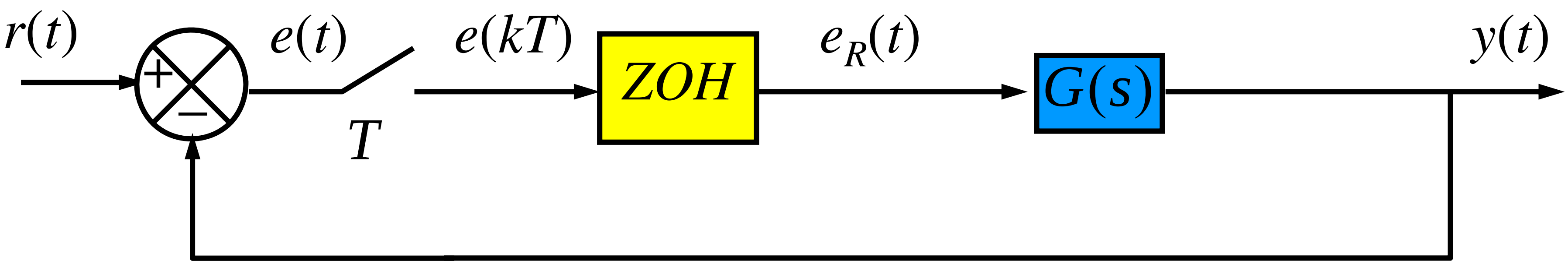
$$\Rightarrow \quad z_{1,2}^* = 0.7590 \pm j0.2587 = 0.8019\angle 0.3285$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi = \dfrac{-\ln r}{\sqrt{(\ln r)^2 + \varphi^2}} = \dfrac{-\ln 0.8019}{\sqrt{(\ln 0.8019)^2 + 0.3285^2}} = 0.5579 \\[2ex] \omega_n = \dfrac{1}{T}\sqrt{(\ln r)^2 + \varphi^2} = \dfrac{1}{0.1}\sqrt{(\ln 0.8019)^2 + 0.3285^2} = 0.3958 \end{cases}$$

$$POT = \exp\left(-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right).100\% = \exp\left(-\frac{0.5579 \times 3.14}{\sqrt{1-0.5579^2}}\right).100\% = 12.11\%$$

$$t_{qđ} = \frac{3}{\xi\omega_n} = \frac{3}{0.5579 \times 0.3958} = 1.36\sec$$

Chất lượng của hệ rời rạc. Thí dụ 2



Với $T = 0.1$ $$G(s) = \frac{2(s+5)}{(s+2)(s+3)}$$

1. Thành lập hệ phương trình trạng thái mô tả hệ thống trên.
2. Tính đáp ứng của hệ đối với tín hiệu vào là hàm nấc đơn vị (điều kiện đầu bằng 0) dựa vào phương trình trạng thái vừa tìm được.
3. Tính độ vọt lố, thời gian quá độ, sai số xác lập.

Chất lượng của hệ rời rạc. Thí dụ 2

★ Giải:

1. Thành lập phương trình trạng thái:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E_R(s)} = \frac{2(s+5)}{(s+2)(s+3)} = \frac{2s+10}{s^2+5s+6}$$

★ PTTT của hệ liên tục hở theo phương pháp tọa độ pha:

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}} e_R(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Chất lượng của hệ rời rạc. Thí dụ 2

★ Ma trận quá độ:

$$\Phi(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \left(s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ 6 & s+5 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{s(s+5)-6}\begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -6 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+5}{(s+2)(s+3)} & \dfrac{1}{(s+2)(s+3)} \\ \dfrac{-6}{(s+2)(s+3)} & \dfrac{s}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \mathscr{L}^{-1}[\Phi(s)] == \begin{bmatrix} \mathscr{L}^{-1}\left\{ \dfrac{3}{s+2} - \dfrac{2}{s+3} \right\} & \mathscr{L}^{-1}\left\{ \dfrac{1}{s+2} - \dfrac{1}{s+3} \right\} \\ \mathscr{L}^{-1}\left\{ -\dfrac{6}{s+2} + \dfrac{6}{s+3} \right\} & \mathscr{L}^{-1}\left\{ -\dfrac{2}{s+2} + \dfrac{3}{s+3} \right\} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(t) = \begin{bmatrix} (3e^{-2t} - 2e^{-3t}) & (e^{-2t} - e^{-3t}) \\ (-6e^{-2t} + 6e^{-3t}) & (-2e^{-2t} + 3e^{-3t}) \end{bmatrix}$$

Chất lượng của hệ rời rạc. Thí dụ 2

★ PTTT của hệ rời rạc hở:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}[(k+1)T] = \boldsymbol{A}_d \boldsymbol{x}(kT) + \boldsymbol{B}_d e_R(kT) \\ y(kT) = \boldsymbol{C}_d \boldsymbol{x}(kT) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A}_d = \Phi(T) = \begin{bmatrix} (3e^{-2T} - 2e^{-3T}) & (e^{-2T} - e^{-3T}) \\ (-6e^{-2T} + 6e^{-3T}) & (-2e^{-2T} + 3e^{-3T}) \end{bmatrix}_{T=0.1} = \begin{bmatrix} 0.9746 & 0.0779 \\ -0.4675 & 0.5850 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_d = \int_0^T \Phi(\tau)\boldsymbol{B}d\tau = \int_0^T \left\{ \begin{bmatrix} (3e^{-2\tau} - 2e^{-3\tau}) & (e^{-2\tau} - e^{-3\tau}) \\ (-6e^{-2\tau} + 6e^{-3\tau}) & (-2e^{-2\tau} + 3e^{-3\tau}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \right\}$$

$$= \int_0^T \left\{ \begin{bmatrix} (e^{-2\tau} - e^{-3\tau}) \\ (-2e^{-2\tau} + 3e^{-3\tau}) \end{bmatrix} d\tau \right\} = \begin{bmatrix} (-\dfrac{e^{-2\tau}}{2} + \dfrac{e^{-3\tau}}{3}) \\ (e^{-2\tau} - e^{-3\tau}) \end{bmatrix}_0^{0.1} = \begin{bmatrix} 0.0042 \\ 0.0779 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_d = \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \end{bmatrix}$$

Chất lượng của hệ rời rạc. Thí dụ 2

- PTTT rời rạc mô tả hệ kín

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}[(k+1)T] = [\boldsymbol{A}_d - \boldsymbol{B}_d \boldsymbol{C}_d]\boldsymbol{x}(kT) + \boldsymbol{B}_d r(kT) \\ y(kT) = \boldsymbol{C}_d \boldsymbol{x}(kT) \end{cases}$$

với

$$[\boldsymbol{A}_d - \boldsymbol{B}_d \boldsymbol{C}_d] = \begin{bmatrix} 0.9746 & 0.0779 \\ -0.4675 & 0.5850 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0042 \\ 0.0779 \end{bmatrix} [10 \quad 2] = \begin{bmatrix} 0.9326 & 0.0695 \\ -1.2465 & 0.4292 \end{bmatrix}$$

- Vậy phương trình trạng thái của hệ rời rạc cần tìm là:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9326 & 0.0695 \\ -1.2465 & 0.4292 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0042 \\ 0.0779 \end{bmatrix} r(kT)$$

$$y(k) = [10 \quad 2] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Chất lượng của hệ rời rạc. Thí dụ 2

2. Đáp ứng của hệ thống:

Từ PTTT ta suy ra:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 0.9326x_1(k) + 0.0695x_2(k) + 0.0042r(k) \\ x_2(k+1) = -1.2465x_1(k) + 0.4292x_2(k) + 0.0779r(t) \end{cases}$$

Với điều kiện đầu $x_1(-1)=x_2(-1)=0$, tín hiệu vào là hàm nấc đơn vị, suy ra nghiệm của PTTT là:

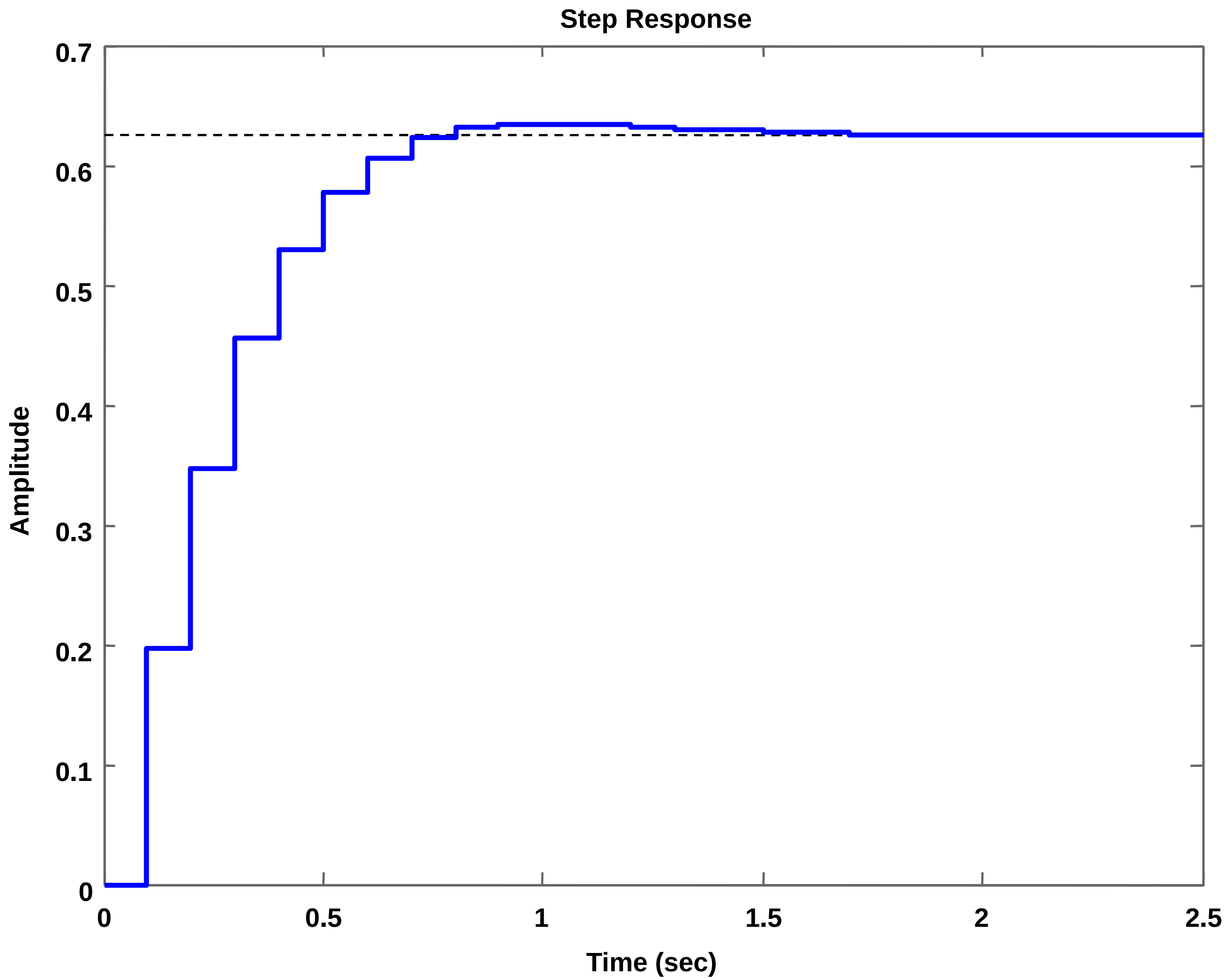
$$x_1(k) = 10^{-3} \times \{0; 4.2; 13.5; 24.2; 34.2; 42.6; 49.1; 54.0; 57.4; 59.7;\ldots$$
$$61.2; 62.0; 62.5; 62.7; 62.8; 62.8; 62.7; 62.7; 62.6; 62.6\ldots\}$$

$$x_2(k) = 10^{-3} \times \{0; 77.9; 106.1; 106.6; 93.5; 75.4; 57.2; 41.2; 28.3; 18.5;\ldots$$
$$11.4; 6.5; 3.4; 1.4; 0.3; \text{-}0.3; \text{-}0.5; \text{-}0.5; \text{-}0.5; \text{-}0.4\ldots\}$$

Đáp ứng của hệ thống: $y(k) = 10x_1(k) + 2x_2(k)$

$$y(k) = \{0; 0.198; 0.348; 0.455; 0.529; 0.577; 0.606; 0.622; 0.631; 0.634;\ldots$$
$$0.635; 0.634; 0.632; 0.630; 0.629; 0.627; 0.627; 0.626; 0.625; 0.625\ldots\}$$

Chất lượng của hệ rời rạc. Thí dụ 2



Chất lượng của hệ rời rạc. Thí dụ 2

3. Chất lượng của hệ thống:

★ Độ vọt lố:

$$y_{\max} = 0.635 \qquad y_{xl} = 0.625 \quad \Rightarrow \quad \boxed{POT = \frac{y_{\max} - y_{\mathrm{xl}}}{y_{\mathrm{xl}}} 100\% = 1.6\%}$$

★ Thời gian quá độ theo chuẩn 5%:

$$(1-0.05)y_{\mathrm{xl}} \le y(k) \le (1+0.05)y_{\mathrm{xl}}, \forall k \ge k_{\text{qđ}}$$

Theo đáp ứng của hệ thống:

$$0.594 \le y(k) \le 0.656, \qquad \forall k \ge 6$$

$$\Rightarrow \quad k_{\text{qđ}} = 6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{\text{qđ}} = k_{\text{qđ}} T = 0.6\,\text{sec}}$$

★ Sai số xác lập: $\boxed{e_{\mathrm{xl}} = r_{\mathrm{xl}} - y_{\mathrm{xl}} = 1 - 0.625 = 0.375}$