

Chương 3

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

1 MẢNG BÀI TOÁN THỰC TẾ

1. Hình học

2. Vật lý

2 Tham số hóa đường cong

2.1 Đường cong phẳng

1. Trường hợp đặc biệt: đường cong là 1 phần đường ellipse có tâm đối xứng $I(x_0, y_0)$, trục thứ nhất song song với trục Ox chiều dài $2a$ và trục thứ hai song song với trục Oy chiều dài $2b$ có phương trình là:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

thì phương trình tham số là

$$x = \textcolor{red}{x}_0 + \textcolor{blue}{a} \cos t, y = \textcolor{red}{y}_0 + \textcolor{blue}{b} \sin t$$

Áp dụng cho các trường hợp sau:

a. Viết pt tham số đường tròn $x^2 + y^2 = 4x$.

b. Viết pt tham số của nửa đường ellipse có tâm đối xứng là $I(0, 1)$, trục lớn nằm trên trục Ox có chiều dài là 9, trục nhỏ nằm trên trục Oy có chiều dài là 4; phần ứng với $x \geq 0$.

c. Viết phương trình tham số của nửa đường tròn tâm $I(0, 1)$, bán kính 1, phần ứng với $y \geq x$.

d. Viết phương trình tham số của phần đường ellipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, với $y \leq \frac{3}{2}x$.

2. Trường hợp không đặc biệt: phần đường cong **không phải đường tròn hoặc ellipse** có phương trình $y = f(x)$ từ điểm $A(x_A, f(x_A))$ đến điểm $B(x_B, f(x_B))$ có phương trình tham số là

$$x = t, y = f(t), t : x_A \rightarrow x_B$$

Ta có thể đổi vai trò x với y .

2.2 Đường cong trong không gian

Xét trường hợp cho giao tuyến của 2 mặt cong có 2 phương trình là $F(x, y, z) = 0$ và $G(x, y, z) = 0$.

Khử 1 trong 3 biến x, y, z từ 2 phương trình trên để được 1 phương trình chỉ còn 2 biến (chẳng hạn khử z còn 2 biến x, y : $f(x, y) = 0$):

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Với phương trình $f(x, y) = 0$, ta quay trở lại trường hợp đường cong trong mặt phẳng ở phần 2.1 trên, tham số hóa để được $x = x(t), y = y(t)$ rồi thay vào phương trình $G(x, y, z) = 0$ để tính $z = z(t)$.

Viết phương trình tham số của các đường cong dưới đây:

1. Giao tuyến của mặt cầu và mặt nón: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$

2. Giao tuyến của mặt paraboloid và mặt phẳng: $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 2x - 4y + 4 \end{cases}$
3. Giao tuyến của mặt trụ và mặt phẳng: $\begin{cases} y = x^2 \\ z = 2 + x \end{cases}$ phần từ điểm $A(-2, 4, 0)$ đến điểm $B(0, 0, 2)$.

3 Tích phân đường loại 1

1. Tính các tích phân đường dưới đây:

$$I_1 = \int_C (2x - 3y)dl \text{ với } C \text{ là đường cong } y = |x - 1| \text{ phần ứng với } 0 \leq x \leq 2$$

$$I_2 = \int_C (2xy + 1)dl \text{ với } C \text{ là nửa đường tròn } y = \sqrt{2x - x^2}.$$

$$I_3 = \int_C (x + yz)dl \text{ với } C \text{ là nửa đường tròn: } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x = 1 \end{cases} \text{ phần ứng với } y \geq 0.$$

2. Tính diện tích phần mặt trụ T song song với trục Oz giới hạn bởi mặt phẳng $z = 0$ và mặt cong $z = f(x, y)$ dưới đây:

a/ Phần mặt trụ $T : y = x^2 + 1$ ứng với $0 \leq x \leq 2$, mặt cong $z = y$

b/ Phần mặt trụ $T : x^2 + y^2 + 2x = 0$ ứng với $-1.5 \leq x \leq 0$, mặt cong $z = 1 + x^2 + y^2$

3. Tính khối lượng của 1 dây mỏng L có hàm mật độ $\rho(x, y)$ hoặc $\rho(x, y, z)$ dưới đây:

a/ $L : y = e^x, -1 \leq x \leq 1$ và hàm mật độ $\rho(x, y) = y + x^2$

b/ $L : \begin{cases} z = 1 + y^2 \\ y = 2x + 1 \end{cases},$ từ điểm $A(-1, -1, 2)$ đến điểm $B(1, 3, 10)$ và hàm mật độ $\rho(x, y, z) = x + 2y + 3z$

4. Tính chiều dài đoạn đường cong C :

a/ Phần đường cong $y = x^2 + 1$ ứng với $-1 \leq x \leq 2$

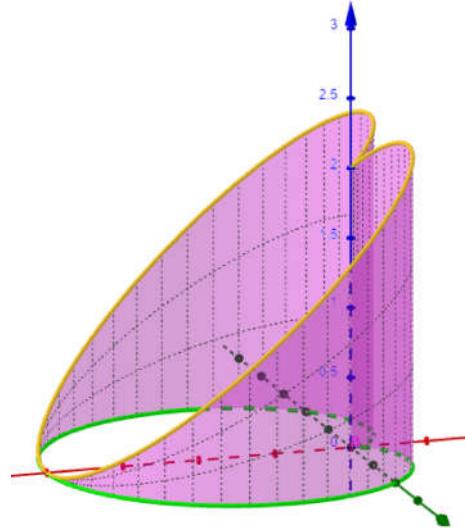
b/

5. Trong khuôn viên một nhà hàng, ban quản lý làm một tiểu cảnh hình trái tim như trong hình vẽ dưới đây. Trong đó, phần phía dưới được bao bởi đường hình tim màu xanh tròn cỏ xanh có phương trình là:

$$x = (1 + \cos t) \cos t, y = (1 + \cos t) \sin t], 0 \leq t \leq 2\pi$$

phía trên (kết đèn màu vàng) là giao tuyến của mặt phẳng $z = 2 - x$ và mặt trụ, xung quanh làm thành bức tường hoa màu hồng. Đơn vị tính trên các trục là mét, tính:

- a/ Chiều dài dây đèn màu vàng.
- b/ Diện tích bức tường hoa hồng.
- c/ Diện tích thảm cỏ màu xanh. (Sử dụng tích phân đường loại 2)



4 Tích phân đường loại 2

1. Tham số hóa đường cong với chiều đường đi cho trước. (**Lưu ý: nếu là đường cong không gian thì lấy ngược chiều kim đồng hồ hay cùng chiều kim đồng hồ khi nhìn theo hướng của các trục tọa độ.**)

2. Tính các tích phân đường dạng $I = \int_C Pdx + Qdy + Rdz$, với các hàm $P(x, y), Q(x, y)$ hoặc $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ và đường cong C dưới đây.

- a/ 2 hàm $P(x, y) = 2xy + 1, Q(x, y) = x^2 - y^2$, đường cong C là phần parabol $y = x - x^2$ từ điểm $A(1, 0)$ đến điểm $B(-1, -2)$

- b/ 2 hàm $P(x, y) = 2x + y, Q(x, y) = 3y - x$, đường cong C là phần đường tròn $x^2 + y^2 + 2x = 0$ từ điểm $O(0, 0)$ đến điểm $A(-1, -1)$ theo cùng chiều kim đồng hồ.

c/ 3 hàm $P(x, y, z) = xy$, $Q(x, y, z) = y + z$, $R(x, y, z) = z$, đường cong C là giao tuyến của 2 mặt $y = x^2$, $z = x$ đi từ điểm $A(1, 1, 1)$ đến điểm $B(2, 4, -2)$

d/ 3 hàm $P(x, y, z) = xyz$, $Q(x, y, z) = xy - yz$, $R(x, y, z) = 2x + 3y - z$, đường cong C là giao tuyến của 2 mặt $x^2 + y^2 = 4$, $z = 4 + 2x - 4y$ lấy hướng ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ gốc tọa độ về hướng dương trục Oz

e/ 3 hàm $P(x, y, z) = x^2$, $Q(x, y, z) = y^2$, $R(x, y, z) = 1 - z$, đường cong C là giao tuyến của 2 mặt $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ lấy hướng ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ gốc tọa độ về hướng dương trục Oz

3. Dùng công thức Green để tính tích phân

$$I = \int_C (x^2 - y^2 + xy)dx + (x^3 + xy - 2y)dy$$

với đường cong C là đường tròn $x^2 + y^2 + 2y = 0$ lấy cùng chiều kim đồng hồ

4. Dùng công thức Green để tính tích phân

$$I = \int_C (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy$$

với đường cong C là biên của miền D giới hạn bởi các đường cong $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$ lấy ngược chiều kim đồng hồ

5. Tính tích phân

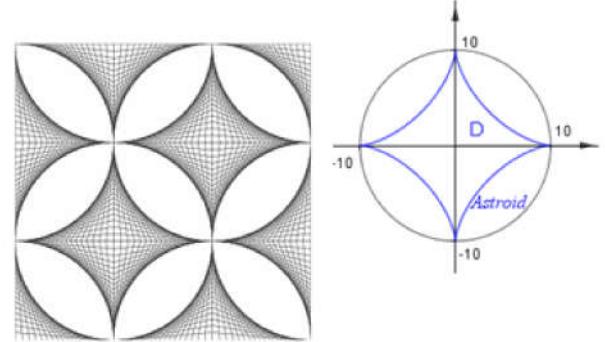
$$I = \int_C (x^2 + y \cos(xy))dx + (xy^2 - x + x \cos(xy))dy$$

với C là nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$, $y \geq 0$ lấy ngược chiều kim đồng hồ.

6. Người ta sản xuất một loại gạch trang trí có hoa văn được mô phỏng từ đường Astroid như trong hình dưới đây. Biết đường cong Astroid màu xanh có phương trình là:

$$x = 10 \cos^3 t, y = 10 \sin^3 t, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Đơn vị tính trên mỗi trục là cm, tính diện tích miền D bị giới hạn bởi đường astroid; từ đó suy ra diện tích phần gốm xanh trên mỗi viên gạch kích thước $30\text{cm} \times 30\text{cm}$.



7. Tính các tích phân sau:

$$I_1 = \int_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{xdy - ydx}{(x-y)^2} \text{ theo đường cong không cắt đường thẳng } y = x$$

$$I_2 = \int_{(0,0)}^{(1,-3)} e^x (\cos y dx - \sin y dy)$$

$$I_3 = \int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xy dx + (x^2 - z^2) dy - 2yz dz$$

8. Tính công của trường lực $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ sinh ra khi một hạt di chuyển trên nửa đường

$$\text{ellipse } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, y \geq 0 \text{ từ điểm } A(2, 0) \text{ đến điểm } B(-2, 0).$$

9. Tính công của trường lực $\vec{F} = y\vec{i} - z\vec{j} + x\vec{k}$ sinh ra khi di chuyển một hạt dọc theo

$$\text{ellipse } \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{2} + z^2 = 4 \\ x = y \end{cases} \text{ ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ nửa dương trục } Ox \text{ về} \\ \text{gốc tọa độ.}$$

Chương 4

TÍCH PHÂN MẶT

1 TÍCH PHÂN MẶT LOẠI 1

1. Tính các tích phân mặt loại 1 dưới đây:

a/ $I = \iint_S (yz + x) ds$ với S là mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.

b/ $I = \iint_S \frac{x+y+z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} ds$ với S là phần mặt paraboloid $z = 4 - x^2 - y^2$ nằm trong trục $x^2 + y^2 = 2x$.

c/ $I = \iint_S (xy - z^2) ds$ với S là phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ bị cắt bởi các mặt $y = x^2 - 2, y = x$.

2. Tính diện tích các mặt cong S dưới đây.

a/ S là phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 2y$

b/ S là phần mặt trụ $z = 4 - x^2$ bị cắt bởi các mặt phẳng $z = 0, y = 0, y + z = 4$

c/ S là phần mặt paraboloid $y = 4 - x^2 - 2z^2$ ứng với $y \geq 0, x \leq 0$

3. Tính khối lượng các mảnh mặt cong S với hàm mật độ $\rho(x, y, z)$ cho trước dưới đây.

a/ S là phần mặt nón $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ứng với $z \geq 0$, hàm mật độ là $\rho(x, y, z) = 2 - z$

b/ S là phần mặt phẳng $x + y + z = 0$ bị cắt bởi các mặt cong $y = 2 - x^2, y = x$, hàm

mật độ là $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$

2 TÍCH PHÂN MẶT LOẠI 2

2.1 PHÁP VECTOR VÀ MẶT ĐỊNH HƯỚNG

1. Tìm pháp vector của các mặt định hướng dưới đây.
 - a/ Mặt trụ $y^2 + z^2 = 2$, lấy phía trong tại điểm M bất kỳ thuộc mặt trụ.
 - b/ Mặt trụ $y = x^2$, lấy phía bên trái (pháp vector hướng sang trái, ngược hướng trực Oy) tại điểm $M(-1, 1, 2)$.
 - c/ Mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, lấy phía dưới (pháp vector quay xuống dưới, ngược hướng với trực Oz) tại điểm $M(1, -1, \sqrt{2})$.
2. Mặt định hướng S có vector pháp đơn vị tại điểm M là \vec{n} , gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa vector \vec{n} và vector chỉ phương 3 trực Ox, Oy, Oz thì $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ được gọi là cosin chỉ phương của vector pháp đơn vị, ta có:

$$\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

Với các mặt định hướng dưới đây, tính theo yêu cầu.

- a/ Mặt trụ $z = 1 - x^2$ lấy phía dưới (pháp vector quay xuống dưới, cùng hướng với trực Oz), điểm $M(1, 1, 0)$, tính $\cos \alpha$.
- b/ Mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ lấy phía ngoài, điểm $M(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$, tính $\cos \gamma$.

2.2 TÍNH TÍCH PHÂN MẶT LOẠI 2

1. Tính các tích phân mặt loại 2 dưới đây.

- a/ $I_1 = \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$, S là phía trên (vector pháp hướng lên trên, cùng hướng trực Oz) mặt phẳng $x + 2y + 3z = 6$, phần bị cắt bởi các mặt cong $z = x^2 - 2x, z = 3x - 4$.

b/ $I_3 = \iint_S (z-y)dydz + (x-z)dzdx + (x-y)dxdy$, S là phia dưới (vector pháp quay xuống, ngược hướng trục Oz) mặt nón $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, phần nằm trên mặt phẳng $z = 0$.

c/ $I_4 = \iint_S zdydz + x^2dzdx - 3zdx dy$, S là phia trên (vector pháp quay lên, cùng hướng trục Oz) mặt trụ $z = x^2$, phần bị cắt bởi 2 mặt phẳng $y = 0, y + z = 4$.

2. Tính các tích phân mặt loại 2 dưới đây bằng cách dùng CÔNG THÚC GAUSS - OSTROGRATSKI

a/ $I_1 = \iint_S xydydz + yzdzdx + xzdx dy$, S là mặt biên phia ngoài của hình hộp chữ nhật $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, -1 \leq z \leq 0$.

b/ $I_2 = \iint_S (z-1)dxdy + (y-y^2)dzdx$, S là mặt biên phia trong của khối Ω giới hạn bởi các mặt cong $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 = 1, z = 0$.

c/ $I_3 = \iint_S (6x^2 + 2xy) dydz + (y + x^2z) dzdx + 4x^2y^3dxdy$, S là mặt biên phia trong của khối Ω giới hạn bởi các mặt cong $y = x^2, y + z = 1, z = 0$.

d/ $I_4 = \iint_S (x + y^2 - 3z^3) dydz + (2y - x^2z) dzdx + (x^4 + 2y^3 - z^2) dxdy$, S là phia ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$, phần nằm trên mặt phẳng $z = 3$.

2.3 CÔNG THÚC STOKES

Tính các tích phân đường loại 2 sau đây.

1/ $I = \int_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$ trong đó C là giao tuyến của mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$ với mặt phẳng $y + z = 1$ hướng ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ gốc tọa độ đến nửa dương trục Oz .

2/ $I = \int_C (z^3 - x^2) dx + (xy - xz) dy + (x^2 - y^2) dz$ trong đó C là giao tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$ với mặt phẳng $x + z = 3$ hướng ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ gốc tọa độ đến nửa dương trục Ox .

3/ $I = \int_C (2z + y) dx + (xy - 3z) dy + (y^2 - 3z) dz$ trong đó C là giao tuyến của mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$ với mặt trụ $z = y^2$ hướng cùng chiều kim đồng hồ khi nhìn từ gốc tọa độ đến nửa dương trực Oz .