Bài Tập-Diện Tích Mặt

Bài 1 Tìm diện tích của mặt

1. Một phần của mặt phẳng $z = 2 + 3x + 4y$ nằm phía trên hình chữ nhật $[0, 5] \times [1, 4]$.
2. Một phần của mặt phẳng $2x + 5y + z = 10$ nằm bên trong hình trụ $x^2 + y^2 = 9$.
3. Một phần của mặt phẳng $3x + 2y + z = 6$ nằm trong góc phần tám đầu tiên.
4. Một phần của mặt $z = 1 + 3x + 2y^2$ nằm phía trên tam giác có các đỉnh $(0, 0), (0, 1)$ và $(2, 1)$.
5. Một phần của hình trụ $y^2 + z^2 = 9$ nằm phía trên hình chữ nhật có các đỉnh $(0, 0), (4, 0), (0, 2)$ và $(4, 2)$.
6. Một phần của paraboloid $z = 4 - x^2 - y^2$ nằm phía trên mặt phẳng xy.
7. Một phần của paraboloid hyperbolic $z = y^2 - x^2$ nằm giữa các mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$ và $x^2 + y^2 = 4$.
8. Mặt $z = \dfrac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}), 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$.
9. Một phần của mặt $z = xy$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.
10. Một phần của hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ nằm phía trên mặt phẳng $z = 1$.
11. Một phần của hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ nằm ngay trong mặt trụ $x^2 + y^2 = ax$ và phía trên mặt phẳng xy.
12. Một phần của hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ nằm bên trong paraboloid $z = x^2 + y^2$.

Bài 2 Tìm diện tích của mặt, lấy chính xác đến bốn chữ số thập phân, bằng cách biểu diễn diện tích dưới dạng một tích phân đơn và sử dụng máy tính để ước lượng tích phân đó.

1. Một phần của mặt cầu $z = e^{-x^2-y^2}$ nằm phía trên hình đĩa $x^2 + y^2 \leq 4$.
2. Một phần của mặt $z = \cos(x^2 + y^2)$ nằm bên trong hình trụ $x^2 + y^2 = 1$.

Bài 3 (a) Sử dụng quy tắc trung điểm cho các tích phân hai lớp với bốn hình vuông để ước tính diện tích một phần mặt của paraboloid $z = x^2 + y^2$ nằm phía trên hình vuông $[0, 1] \times [0, 1]$.

(b) Sử dụng một hệ thống đại số máy tính để tính xấp xỉ diện tích mặt cong trong câu (a), lấy chính xác đến bốn chữ số thập phân. So sánh với đáp án tìm được ở câu (a).

Bài 4 (a) Sử dụng quy tắc trung điểm cho các tích phân hai lớp với $m = n = 2$ để ước tính diện tích mặt $z = xy + x^2 + y^2$, với $0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2$.

(b) Sử dụng một hệ thống đại số máy tính để tính xấp xỉ diện tích mặt cong trong câu (a), lấy chính xác đến bốn chữ số thập phân. So sánh với đáp án tìm được ở câu (a).

Bài 5 Tìm diện tích chính xác của mặt $z = 1 + 2x + 3y + 4y^2$, với $1 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 1$.

Bài 6 Tìm diện tích chính xác của mặt

$$z = 1 + x + y + x^2 \qquad -2 \leq x \leq 1 \qquad -1 \leq y \leq 1$$

Minh họa bằng cách vẽ đồ thị của mặt.

Bài 7 Tìm diện tích của một phần mặt $z = 1 + x^2y^2$ nằm phía trên hình đĩa $x^2 + y^2 \leq 1$, lấy chính xác đến bốn chữ số thập phân.

Bài 8 Tìm diện tích một phần mặt $z = \dfrac{1+x^2}{1+y^2}$ nằm phía trên hình vuông $|x| + |y| \leq 1$. Minh họa bằng cách vẽ đồ thị phần này của mặt.

Bài 9 Chứng minh rằng diện tích phần mặt phẳng $z = ax + by + c$ chiếu trên một miền D nằm trong mặt phẳng xy với diện tích $A(D)$ là $\sqrt{a^2 + b^2 + 1}A(D)$.

Bài 10 Nếu bạn cố gắng sử dụng Công thức 2 để tính diện tích nửa phần trên của hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, bạn sẽ gặp một vài vấn đề nhỏ bởi vì tích phân hai lớp này có một tích phân suy rộng. Thực vậy, biểu thức lấy tích phân có một gián đoạn vô hanjtaij mỗi điểm thuộc đường tròn biên $x^2 + y^2 = a^2$. Tuy nhiên, chúng ta có thể tính tích phân này bằng cách tính giới hạn của tích phân trên hình đĩa $x^2 + y^2 \leq t^2$ khi $t \to a^-$. Sử dụng phương pháp này để chứng minh diện tích của một hình cầu có bán kính a là $4\pi a^2$.

Bài 11 Tính diện tích phần hữu hạn của paraboloid $y = x^2 + z^2$ bị cắt ra bởi mặt phẳng $y = 25$. [*Gợi ý:* Chiếu mặt lên mặt phẳng xz.]

Bài 12 Hình dưới đây biểu diễn bề mặt được tạo ra khi hình trụ $y^2 + z^2 = 1$ cắt hính trụ $x^2 + z^2 = 1$. Tìm diện tích của mặt này.