BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 2

CHƯƠNG 1-BÀI 3. ĐẠO HÀM THEO HƯỚNG

TS. NGUYỄN ĐÌNH DƯƠNG
BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG - KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG

Email: duongnd@hcmut.edu.vn

Ngày 15/02/2021

1.1 Bài 1.1: Hàm nhiều biến
1.2 Bài 1.2: Đạo hàm riêng
1.3 Bài 1.3: Đạo hàm theo hướng và Gradient
1.4 Bài 1.4: Đạo hàm hàm hợp, hàm ẩn
1.5 Bài 1.5: Công thức Taylor
1.6 Bài 1.6: Cực trị hàm nhiều biến
1.7 Bài 1.7: Giá trị bé nhất, lớn nhất trên miền đóng, bị chặn

Nội dung

Đạo hàm theo hướng

Vector gradient
2.1 Tốc độ biến thiên lớn nhất
2.2 Vector gradient và đường mức
2.3 Hàm 3 biến

Trao đổi

Chuẩn đầu ra

- Tính được *đạo hàm theo hướng* của hàm 2 biến, 3 biến
- Viết được *vector gradient* ∇f và mối liên hệ với đạo hàm theo hướng
- Mô tả được ý nghĩa của đạo hàm theo hướng

Nhắc lại

Quy tắc đạo hàm hàm hợp (TH1) Nếu

$$z = f(x,y),\ x = g(t),\ y = h(t),$$

thì

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Biết

$$f'_x(1,3) = -2, \quad f'_y(1,3) = 4,$$
$$x(t) = t, \quad y(t) = 3t.$$

Tính đạo hàm của $z = f(x(t), y(t))$ tại $t = 1$.

Nhắc lại

Quy tắc đạo hàm hàm hợp (TH 1) Nếu

$$z = f(x, y), \; x = g(t), \; y = h(t),$$

thì

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Nếu $x(t) = x_0 + at, y(t) = y_0 + bt$ thì $\dfrac{d}{dt} f(x(t), y(t))$ tại $t = 0$ bằng bao nhiêu?

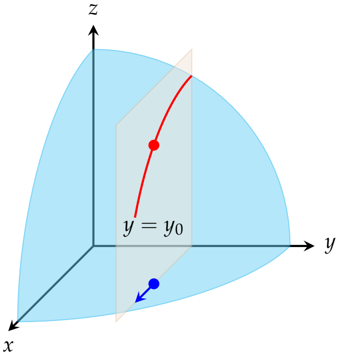
Nội dung

Đạo hàm theo hướng

Vector gradient
2.1 Tốc độ biến thiên lớn nhất
2.2 Vector gradient và đường mức
2.3 Hàm 3 biến

Trao đổi

1. Đạo hàm theo hướng

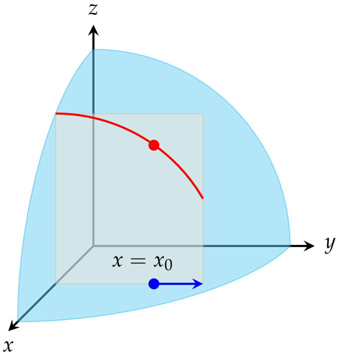


Giả sử $f(x, y)$ là hàm 2 biến và $(x_0, y_0) \in \mathscr{D}$. Đạo hàm riêng của f theo x và y lần lượt là:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

(thay đổi theo phương ngang $(1, 0)$)

1. Đạo hàm theo hướng



Giả sử $f(x, y)$ là hàm 2 biến và $(x_0, y_0) \in \mathscr{D}$. Đạo hàm riêng của f theo x và y lần lượt là:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

(thay đổi theo phương ngang $(1, 0)$)

$$f'_y(x_0, , y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

(thay đổi theo phương thẳng đứng $(0, 1)$)

1. Đạo hàm theo hướng

Hình bên là đồ thị mức của hàm nhiệt độ $T(x, y)$ tại bang California.

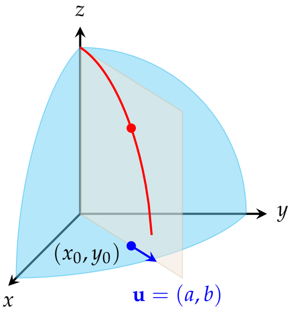
Khi đó T'_x tại Reno chính là tốc độ thay đổi nhiệt độ khi di chuyển theo phương ngang, T'_y cho biết tốc độ thay đổi nhiệt độ khi di chuyển theo phương thẳng đứng.

1. Đạo hàm theo hướng

Hình bên là đồ thị mức của hàm nhiệt độ $T(x, y)$ tại bang California.

Khi đó T'_x tại Reno chính là tốc độ thay đổi nhiệt độ khi di chuyển theo phương ngang, T'_y cho biết tốc độ thay đổi nhiệt độ khi di chuyển theo phương thẳng đứng. Tuy nhiên, ta cần biết tốc độ thay đổi nhiệt độ theo hướng Reno đến Las Vegas (hướng đông nam) ???

1. Đạo hàm theo hướng



Giả sử $f(x,y)$ có tập xác định $\mathscr{D}$, $(x_0, y_0) \in \mathscr{D}$ và $\vec{\mathbf{u}} = (a, b)$ là vector đơn vị.

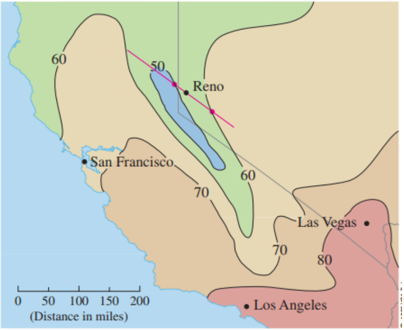
Đạo hàm của f theo hướng $\vec{\mathbf{u}} = (a, b)$ tại (x_0, y_0) là

$$D_{\vec{\mathbf{u}}}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ah, y_0 + bh) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$*$ **Chú ý:** nếu $\vec{\mathbf{u}} = (1; 0)$ thì $D_{\vec{\mathbf{u}}} = f'_x$, còn nếu $\vec{\mathbf{u}} = (0; 1)$ thì $D_{\vec{\mathbf{u}}} = f'_y$

1. Đạo hàm theo hướng

$$D_{\vec{u}}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + ah, y_0 + bh) - f(x_0, y_0)}{h}$$



Ví dụ 1.1

Tốc độ thay đổi nhiệt độ tại Reno theo hướng đông nam

$$D_{\vec{u}} \approx \frac{60 - 50}{75} \approx 0.13^{\circ}\text{F/mile}.$$

1. Đạo hàm theo hướng

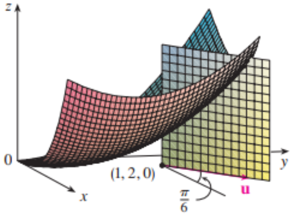
$$D_{\vec{\mathbf{u}}}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + ah, y_0 + bh) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Công thức trên chính là đạo hàm của $g(t) = f(x_0 + at, y_0 + bt)$ tại $t = 0$.

Theo quy tắc đạo hàm hàm hợp

$$\boxed{D_{\vec{\mathbf{u}}}(x_0, y_0) = af'_x(x_0, y_0) + bf'_y(x_0, y_0)}$$

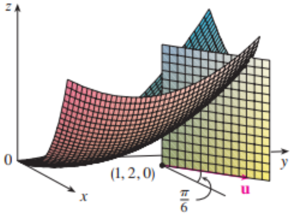
1. Đạo hàm theo hướng



Ví dụ 1.2

Tính đạo hàm theo hướng của vector đơn vị $\vec{\mathbf{u}}$ tạo với tia Ox góc $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ tại điểm $(1, 2)$ của hàm $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$.

1. Đạo hàm theo hướng



Ví dụ 1.2

Tính đạo hàm theo hướng của vector đơn vị $\vec{\mathbf{u}}$ tạo với tia Ox góc $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ tại điểm $(1, 2)$ của hàm $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$.

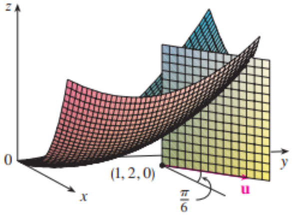
Giải

Ta có

$$D_{\vec{\mathbf{u}}}(x, y) = f'_x \cos\frac{\pi}{6} + f'_y \sin\frac{\pi}{6}$$

$$= (3x^2 - 3y)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y)\frac{1}{2}$$

1. Đạo hàm theo hướng



Ví dụ 1.2

Tính đạo hàm theo hướng của vector đơn vị $\vec{\mathbf{u}}$ tạo với tia Ox góc $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ tại điểm $(1,2)$ của hàm $f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$.

Giải

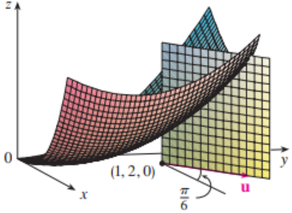
Ta có

$$D_{\vec{\mathbf{u}}}(x,y) = f'_x \cos\frac{\pi}{6} + f'_y \sin\frac{\pi}{6}$$

$$= (3x^2 - 3y)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y)\frac{1}{2}$$

Suy ra $D_{\vec{\mathbf{u}}}(1,2) = \dfrac{13 - 3\sqrt{3}}{2}$.

1. Đạo hàm theo hướng



Ví dụ 1.2

Tính đạo hàm theo hướng của vector đơn vị $\vec{\mathbf{u}}$ tạo với tia Ox góc $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ tại điểm $(1,2)$ của hàm $f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$.

Giải

Ta có

$$D_{\vec{\mathbf{u}}}(x,y) = f'_x \cos\frac{\pi}{6} + f'_y \sin\frac{\pi}{6}$$

$$= (3x^2 - 3y)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y)\frac{1}{2}$$

Suy ra $D_{\vec{\mathbf{u}}}(1,2) = \dfrac{13 - 3\sqrt{3}}{2}$.

Nội dung

Đạo hàm theo hướng

Vector gradient

2.1 Tốc độ biến thiên lớn nhất

2.2 Vector gradient và đường mức

2.3 Hàm 3 biến

Trao đổi

2. Vector gradient

Có thể viết lại công thức

$$D_{\vec{\mathbf{u}}}(x_0, y_0) = af'_x(x_0, y_0) + bf'_y(x_0, y_0) = \Big(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)\Big) \cdot \vec{\mathbf{u}}$$

Kí hiệu

$$\nabla f(x_0, y_0) = \Big(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)\Big) = f'_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f'_y(x_0, y_0)\mathbf{j}$$

Khi đó

$$\boxed{D_{\vec{\mathbf{u}}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{\mathbf{u}}}$$

$\nabla f(x_0, y_0)$ được gọi là *vector gradient của f tại (x_0, y_0)*.

2. Vector gradient

Ví dụ 2.1

Tìm vector gradient và tính đạo hàm của $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$ theo hướng vector $\vec{v} = (1, 5)$ tại điểm $(2, -1)$.

2. Vector gradient

Ví dụ 2.1

Tìm vector gradient và tính đạo hàm của $f(x,y) = x^2y^3 - 4y$ theo hướng vector $\vec{v} = (1,5)$ tại điểm $(2,-1)$.

Giải

Ta có $f'_x = 2xy^3$, $f'_y = 3x^2y^2 - 4 \Rightarrow \nabla f(2,-1) = (-4,8)$.

2. Vector gradient

Ví dụ 2.1

Tìm vector gradient và tính đạo hàm của $f(x,y) = x^2y^3 - 4y$ theo hướng vector $\vec{v} = (1,5)$ tại điểm $(2,-1)$.

Giải

Ta có $f'_x = 2xy^3$, $f'_y = 3x^2y^2 - 4 \Rightarrow \nabla f(2,-1) = (-4,8)$.
$\vec{v}$ không phải vector đơn vị, vector đơn vị $\vec{\mathbf{u}}$ cùng hướng với $\vec{v}$ là

$$\vec{\mathbf{u}} = \frac{\vec{v}}{|v|} = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}\right)$$

Suy ra $D_{\vec{v}} = \nabla f(2,-1) \cdot \vec{\mathbf{u}} = \dfrac{32}{\sqrt{29}}$.

1. Tìm vector gradient của $f(x,y) = x/y$ tại $(2,1)$
2. Tính đạo hàm theo hướng của f tại $(2,1)$ theo hướng $\vec{\mathbf{u}} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$

2. Vector gradient

2. 1. Tốc độ biến thiên lớn nhất

Ta có
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\cos(\theta)$$
trong đó θ là góc giữa **a** và **b**.

Tích vô hướng đạt giá trị lớn nhất khi vector **a** cùng hướng với **b**.

Do đó, $D_{\vec{\mathbf{u}}}(x_0, y_0)$ đạt giá trị lớn nhất khi $\vec{\mathbf{u}}$ cùng hướng với $\nabla f(x_0, y_0)$. Theo hướng này,
$$D_{\vec{\mathbf{u}}}(x_0, y_0) = |\nabla f(x_0, y_0)|$$

1. Cho $f(x, y) = xe^{xy}$. Tìm hướng mà tốc độ biến thiên của f tại $(0, 2)$ lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó.

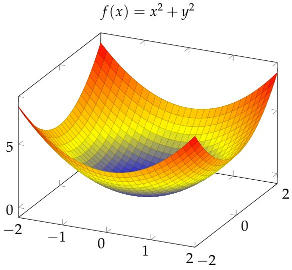
2. Vector gradient

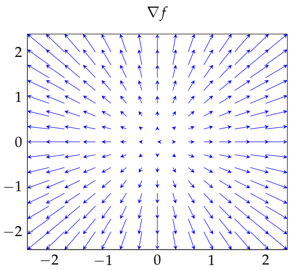
2. 1. Tốc độ biến thiên lớn nhất

⊕ **Nhận xét**: Nếu $f(x,y)$ là hàm 2 biến thì *trường vector gradient*

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathbf{j}$$

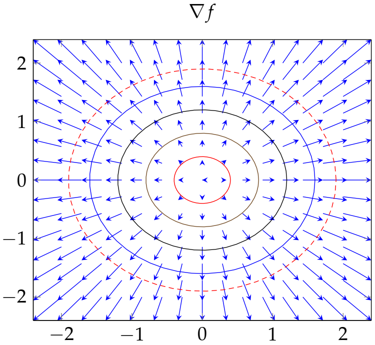
là hướng chuyển động mà f biến thiên lớn nhất.





2. Vector gradient

2. 2. Vector gradient và đường mức



Ta đều biết $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

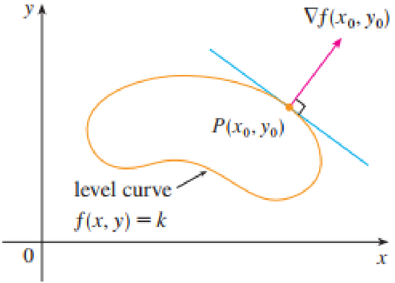
Đạo hàm theo hướng $D_{\vec{\mathbf{u}}} = 0$ khi $\vec{\mathbf{u}}$ chạy dọc theo đường mức.

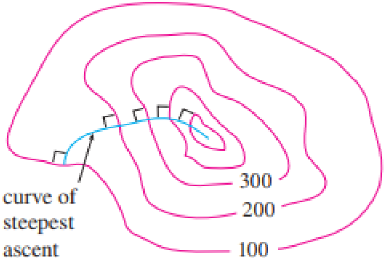
Mà $D_{\vec{\mathbf{u}}} = \nabla f \cdot \vec{\mathbf{u}} \Rightarrow \nabla f \perp \vec{\mathbf{u}}$, tức là ∇f vuông góc với tiếp tuyến của đường mức của f

2. Vector gradient

2. 2. Vector gradient và đường mức

Ý nghĩa của vector gradient





Đạo hàm theo hướng của $f(x,y,z)$

Đạo hàm của $f(x,y,z)$ tại (x_0,y_0,z_0) theo hướng vector đơn vị $\vec{\mathbf{u}} = (a,b,c)$ xác định bởi

$$D_{\vec{\mathbf{u}}} f(x_0,y_0,z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+ah, y_0+bh, z_0+ch) - f(x_0,y_0,z_0)}{h}$$

Để thuận tiện trong tính toán, ta sử dụng vector gradient

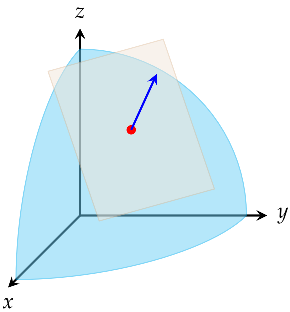
$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \left(f'_x(x_0,y_0,z_0), f'_y(x_0,y_0,z_0), f'_z(x_0,y_0,z_0)\right)$$

Khi đó,

$$D_{\vec{\mathbf{u}}} f(x_0,y_0,z_0) = \nabla f(x_0,y_0,z_0) \cdot \vec{\mathbf{u}}.$$

1. Tìm đạo hàm của $f(x,y,z) = y^2 e^{xyz}$ tại $(0,1,-1)$ theo hướng $\vec{\mathbf{u}} = \frac{3}{13}\mathbf{i} + \frac{4}{13}\mathbf{j} + \frac{12}{13}\mathbf{k}$.
2. Tìm hướng mà tốc độ biến thiên của $f(xy,z) = x\ln(yz)$ tại $(1,2,1/2)$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Mặt phẳng tiếp diện với mặt mức



Vector gradient của hàm 2 biến vuông góc với đường mức của hàm.

Vector gradient của hàm 3 biến vuông góc với mặt mức của hàm.

Khi đó $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ chính là vector pháp tuyến của mặt phẳng tiếp diện của f tại (x_0, y_0, z_0)

1. Tìm phương trình mặt phẳng tiếp diện và pháp tuyến với mặt $x = y^2 + z^2 + 1$ tại $(3, 1, -1)$.
2. Có những điểm nào trên hyperboloid $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ tại đó mặt phẳng tiếp diện song song với mặt phẳng $z = x + y$?

Tổng kết

- Định nghĩa đạo hàm có hướng $D_{\mathbf{u}} f(a, b)$ của hàm 2 biến - tốc độ biến thiên của f theo hướng $\vec{\mathbf{u}}$ tại (a, b)
- Giới thiệu vector gradient ∇f và công thức tính đạo hàm có hướng sử dụng vector gradient: $D_{\vec{\mathbf{u}}} f(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot \vec{\mathbf{u}}$
- Nêu các tính chất của ∇f:
    - $\nabla f(a, b)$ là hướng mà tốc độ biến thiên của f tại (a, b) đạt giá trị lớn nhất
    - $|\nabla f(a, b)|$ là giá trị lớn nhất của tốc độ biến thiên của f tại (a, b)
    - ∇f vuông góc với đường mức f (2 biến) hoặc mặt mức của f (3 biến)

Nội dung

Đạo hàm theo hướng

Vector gradient
2.1 Tốc độ biến thiên lớn nhất
2.2 Vector gradient và đường mức
2.3 Hàm 3 biến

Trao đổi

TRAO ĐỔI