

# Chương 2

## TÍCH PHÂN BỘI

### 1 Tích phân kép

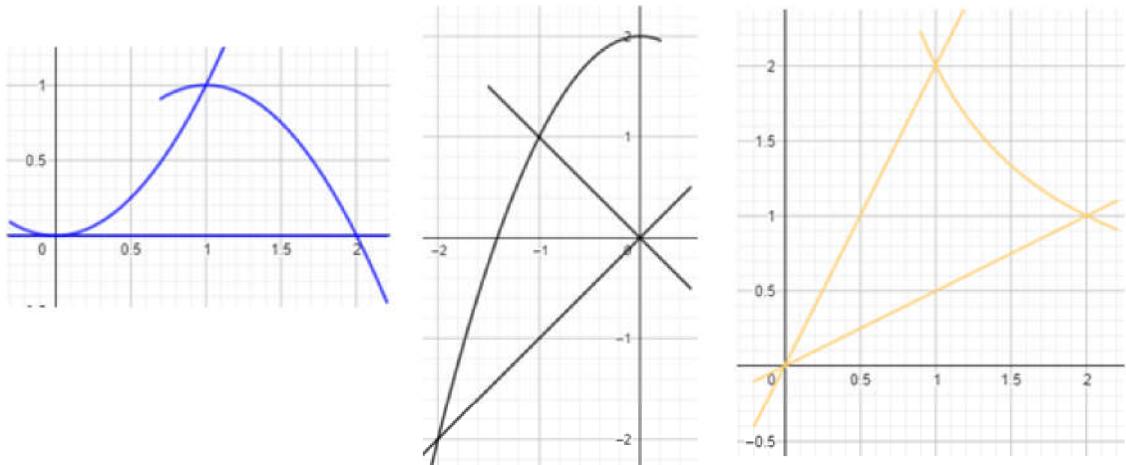
#### 1.1 Tọa độ Descartes

- Nhận Dạng miền lấy tích phân  $D$ : Xác định từng miền trong mặt phẳng  $Oxy$  ở hình vẽ dưới đây tương ứng với các biểu thức  $D_1, D_2, D_3$  nào.

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2 - x^2, x + y \geq 0, x - y \geq 0\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2, y \leq 2x - x^2, y \geq 0\}$$

$$D_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \frac{2}{x}, \frac{x}{2} \leq y \leq 2x \right\}$$



- Tính tích phân lặp và vẽ hình miền tính tích phân

$$I_3 = \int_{-2}^3 dx \int_{x^2-9}^{x-3} 2y dy$$

3. Tính tích phân kép với miền  $D$  cho trước:

$$I_1 = \iint_D (x - 2y^2) dxdy, D : x^2 + y^2 \leq 2x, x + y \geq 0, y \geq 0$$

$$I_2 = \iint_D xy dxdy, D : y = x^2 - 2x, y = x, y = 0$$

4. Mô tả bằng hình vẽ vật thể dạng trụ cong có thể tích được tính bằng tích phân bên dưới (đáy dưới là miền  $D$  trong mặt phẳng Oxy, nắp trên là mặt cong  $z = f(x, y)$ ,  $f(x, y)$  là hàm dưới dấu tích phân):

$$I_9 = \iint_D (4 - x^2 - y^2) dxdy, D : x^2 + y^2 \leq 4$$

5. Tính giá trị trung bình của  $f(x, y)$  trên miền  $D$ .

$$f(x, y) = x \sin y, D \text{ giới hạn bởi các đường cong } y = 0, y = 1, y = x^2$$

6. Không làm các bài tập đổi thứ tự tích phân lặp

## 1.2 Đổi biến tọa độ cực

1. Viết cận các tích phân sau khi đổi biến  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$

a/  $I_1 = \iint_D f(x, y) dxdy, D : x^2 + y^2 + 2x = 0, x + y = 0, x = 0$

b/  $I_2 = \iint_D f(x, y) dxdy, D : x^2 + y^2 + 2y \leq 0, x^2 + y^2 \leq 2$

2. Tính tích phân sau

$$I_5 = \iint_D (y + 1) dxdy, D : x^2 + y^2 \leq 2x, x^2 + y^2 \leq 2y$$

3. Tính các tích phân sau bằng cách sử dụng **tọa độ cực mở rộng**

a/  $I_7 = \iint_D (2x - y + 1) dxdy, D : x^2 + y^2 + 4y \leq 2x, 2x + y \leq 0$

b/  $I_8 = \iint_D (2x - y) dxdy, D : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1, 3x + 2y \leq 0, x \leq 0$

### 1.3 Ứng dụng

1. Tính diện tích các miền phẳng dưới đây:

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq -2x, x + \sqrt{3}y \leq 0, y \geq 0\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^x, x + y = 1, y = 4\}$$

2. Tính thể tích vật thể  $V_i$  giới hạn bởi các mặt cong dưới đây:

$$V_1 : z = 0, z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1$$

$$V_2 : z \geq 0, z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \geq 1$$

3. Tính khối lượng mảnh phẳng  $D$  có hàm mật độ  $\rho(x, y) = 4 - y$  tại mỗi điểm  $(x, y) \in D$ :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0, x + y = 2, y = 0\}, \text{ với } \rho(x, y) = 4 - y$$

## 2 Tích phân bội ba

### 2.1 Tọa độ Descartes

Tính các tích phân sau:

$$1. I_1 = \iiint_{\Omega} (2z - x) dx dy dz,$$

$\Omega$  giới hạn bởi các mặt  $y = 4 - x^2, y = 2 + x^2, z = 2, z = -2x$ .

$$2. I_2 = \iiint_{\Omega} (z \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz,$$

$\Omega$  giới hạn bởi các mặt  $z = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

$$3. I_3 = \iiint_{\Omega} (x + 2y) dx dy dz, \Omega \text{ giới hạn bởi các mặt } z = x^2 + y^2, z = 2x.$$

### 2.2 Đổi biến

1. Tính các tích phân sau bằng cách đổi sang tọa độ trụ:

$$\text{a/ } I_3 = \iiint_{\Omega} (x + y + z) dx dy dz, \Omega \text{ giới hạn bởi các mặt } z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = x^2 + y^2$$

b/  $I_4 = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) dx dy dz,$

$\Omega$  giới hạn bởi các mặt cong  $x^2 + z^2 = 1, x^2 + z^2 = 4, y = 1, y = -1$

2. Tính các tích phân sau bằng cách đổi sang tọa độ cầu thường:  $x = \rho \sin \theta \cos \varphi, y = \rho \sin \theta \sin \varphi, z = \rho \cos \theta$ .

a.  $I_1 = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) dx dy dz,$

$\Omega$  giới hạn bởi các mặt cong  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \leq 0, z \geq 0$

b.  $I_2 = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz,$

$\Omega$  giới hạn bởi  $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0, y \geq x, y \geq -x\sqrt{3}\}$

c.  $I_3 = \iiint_{\Omega} (\sqrt{x^2 + y^2} + 2z) dx dy dz,$

$\Omega$  giới hạn bởi  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, y \leq x\}$

## 2.3 Ứng dụng

1. Tính thể tích các vật thể  $V$  dưới đây:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2, z = 0, y = x, y = -x\sqrt{3}\}$$

2. Tính khối lượng vật thể  $V$  với khối lượng riêng (hàm mật độ) tại mỗi điểm  $(x, y, z) \in V$  tương ứng.

$$3. V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 3 - x^2 - y^2, z \geq 2x\}; \rho(x, y, z) = 4 - z$$

4. Tính giá trị trung bình của hàm  $f(x, , z)$  trên khối  $\Omega$  tương ứng:

$$5. f(x, y, z) = x + y + z; \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, z = \sqrt{x^2 + y^2}; z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}\}$$