BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 2

CHƯƠNG 1-BÀI 6. CỰC TRỊ HÀM NHIỀU BIẾN

TS. NGUYỄN ĐÌNH DƯƠNG
BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG - KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG

Email: duongnd@hcmut.edu.vn

Ngày 15/02/2021

Nội dung

Cực trị tự do

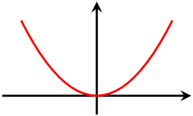
GTLN, GTNN

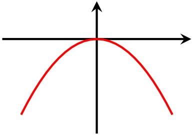
Trao đổi

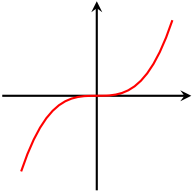
Chuẩn đầu ra

- Tìm được điểm dừng (tới hạn) của hàm 2 biến
- Sử dụng đạo hàm cấp 2 để xác định điểm dừng là điểm cực đại, cực tiểu hay không là điểm cực trị
- Sử dụng đạo hàm cấp 2 để tìm GTLN, GTNN của một số bài toán đơn giản

Nhắc lại Giải tích I





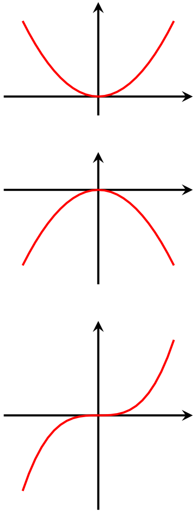


Nếu $y = f(x)$ thì cực đại và cực tiểu xảy ra tại các *điểm dừng* a thỏa mãn $f'(a) = 0$ hoặc $f'(a)$ không tồn tại. Có 2 cách để tìm cực trị:

Sử dụng đạo hàm cấp 1:

- Nếu $f'(a) = 0$ và $f'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua $x = a$ thì $f(a)$ là cực tiểu
- Nếu $f'(a) = 0$ và $f'(x)$ đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi qua $x = a$ thì $f(a)$ là cực đại
- Nếu $f'(a) = 0$ nhưng $f'(x)$ không đổi dấu khi qua $x = a$ thì $f(a)$ không phải cực trị

Nhắc lại Giải tích I

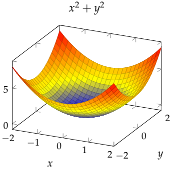


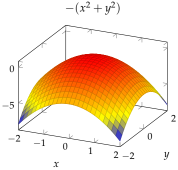
Nếu $y = f(x)$ thì cực đại và cực tiểu xảy ra tại các *điểm dừng* a thỏa mãn $f'(a) = 0$ hoặc $f'(a)$ không tồn tại. Có 2 cách để tìm cực trị:

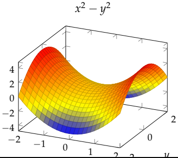
Sử dụng đạo hàm cấp 2:

- Nếu $f'(a) = 0$ và $f''(a) > 0$ thì $f(a)$ là cực tiểu
- Nếu $f'(a) = 0$ và $f''(a) < 0$ thì $f(a)$ là cực đại
- Nếu $f'(a) = 0$ và $f''(a) = 0$ thì không kết luận được gì

Trong Giải tích II







Không "sử dụng được đạo hàm cấp 1" mà phụ thuộc vào *ma trận Hessian*

$$\text{Hess}(f)(a,b) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{yx}(a,b) & f''_{yy}(a,b) \end{pmatrix},$$

và định thức của nó

$$D = f''_{xx}(a,b)f''_{yy}(a,b) - f''_{xy}(a,b)^2$$

Xét đồ thị bên trái:

- $\text{Hess}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D = +4$
- $\text{Hess}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = +4$
- $\text{Hess}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad D = -4$

Nội dung

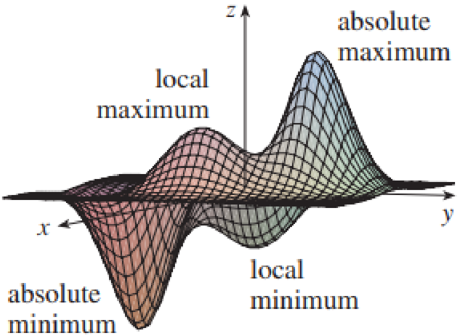
Cực trị tự do

GTLN, GTNN

Trao đổi

Cực trị địa phương và toàn cục

- Hàm $f(x,y)$ đại cực đại tại (a,b) nếu $f(x,y) \leq f(a,b)$ với mọi (x,y) trong lân cận (a,b).
- Hàm $f(x,y)$ đạt cực tiểu tại (a,b) nếu $f(x,y) \geq f(a,b)$ với mọi (x,y) trong lân cận (a,b).
- Cần phân biệt hàm đạt cực trị toàn cục (GTLN, GTNN) tại (a,b)



Điều kiện cần của cực trị

Định lý 1.1

Nếu f đạt cực trị tại (a, b) và các đạo hàm riêng cấp 1 của f tồn tại tại đó thì

$$f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0.$$

Điểm (a, b) tại đó $f'_x(a, b)$ và $f'_y(a, b)$ bằng 0 hoặc không tồn tại được gọi là điểm dừng của f.

Điểm dừng

Để tìm điểm dừng của $f(x,y)$, ta cần giải hệ $\begin{cases} f'_x(a,b) = 0 \\ f'_y(a,b) = 0. \end{cases}$

Ví dụ 1.1

Tìm các điểm dừng của

1. $f(x,y) = x^3 - 3x + 3xy^2$
2. $f(x,y) = x^2 + y^4 + 2xy$
3. $f(x,y) = e^x \cos y$

Điều kiện đủ của cực trị

Định lý 1.2

Giả sử f có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trong lân cận điểm (a,b) và $f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0$. Đặt

$$D = \begin{vmatrix} f''_{xx}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{xy}(a,b) & f''_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$$

(a) *Nếu $D > 0$ và $f''_{xx}(a,b) > 0$ thì $f(a,b)$ là cực tiểu*

(b) *Nếu $D > 0$ và $f''_{xx}(a,b) < 0$ thì $f(a,b)$ là cực đại*

(c) *Nếu $D < 0$ thì $f(a,b)$ không là cực trị*

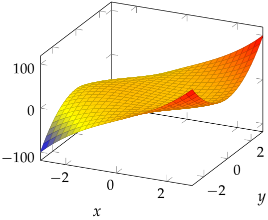
1. Cực trị tự do

(a) Nếu $D > 0$ và $f''_{xx}(a,b) > 0$ thì $f(a,b)$ là cực tiểu
(b) Nếu $D > 0$ và $f''_{xx}(a,b) < 0$ thì $f(a,b)$ là cực đại
(c) Nếu $D < 0$ thì $f(a,b)$ không là cực trị

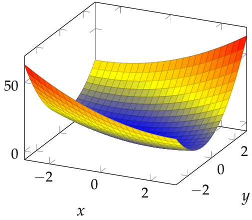
Cho kết luận về điểm dừng của các hàm sau:

1. $f(x,y) = x^3 - 3x + 3xy^2$
2. $f(x,y) = x^2 + y^4 + 2xy$
3. $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$

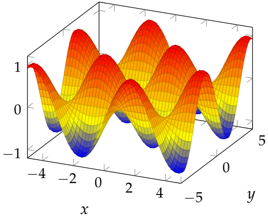
$x^3 - 3x + 3xy^2$



$x^2 + 4y^2 + 2xy$



$\sin x \sin y$



Nội dung

Cực trị tự do

GTLN, GTNN

Trao đổi

2. GTLN, GTNN

1. Tìm khoảng cách từ điểm $(2, 0, -3)$ tới mặt phẳng $x + y + z = 1$.
2. Tìm điểm trên mặt cong $x - 2y^3z = 6$ gần nhất với $(0, 1, 1)$.
3. Tìm thể tích lớn nhất của hình hộp chữ nhật (không có nắp) được làm từ 12m^2 bìa các tông.

Nhắc lại Giải tích I

Phương pháp tìm GTLN, GTNN trên đoạn Để tìm *GTLN, GTNN* của hàm liên tục trên $[a, b]$:

1. Tìm các giá trị của f tại các điểm dừng của f trong $[a, b]$
2. Tìm các giá trị của f tại 2 đầu mút
3. So sánh các giá trị tìm được ở Bước 1 và Bước 2. Giá trị lớn nhất chính là GTLN của f trên $[a, b]$; giá trị nhỏ nhất chính là GTNN của f trên $[a, b]$.

Với hàm 2 biến:

1. "Khoảng đóng" trên trục số được thay bằng "tập đóng" trong mặt phẳng
2. Biên của tập đóng là *một đường cong* chứ không phải 2 đầu mút

Nhắc lại Giải tích I

Phương pháp tìm GTLN, GTNN trên đoạn Để tìm *GTLN, GTNN* của hàm liên tục trên $[a, b]$:

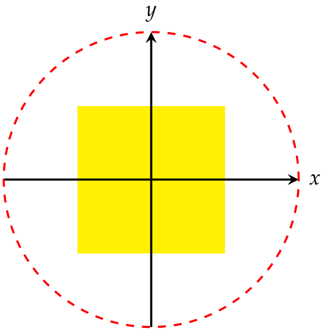
1. Tìm các giá trị của f tại các điểm dừng của f trong $[a, b]$
2. Tìm các giá trị của f tại 2 đầu mút
3. So sánh các giá trị tìm được ở Bước 1 và Bước 2. Giá trị lớn nhất chính là GTLN của f trên $[a, b]$; giá trị nhỏ nhất chính là GTNN của f trên $[a, b]$.

Với hàm 2 biến:

1. "Khoảng đóng" trên trục số được thay bằng "tập đóng" trong mặt phẳng
2. Biên của tập đóng là *một đường cong* chứ không phải 2 đầu mút

Ý tưởng là giống nhau!!!

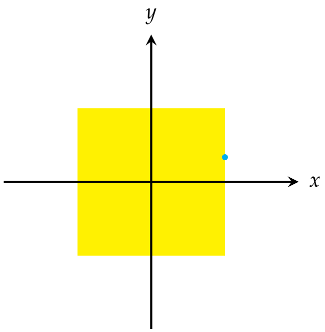
Tập bị chặn, Tập đóng, Biên



Cho $D \subset R^2$.

- D được gọi là *tập bị chặn* nếu tồn tại một hình tròn đủ lớn chứa nó

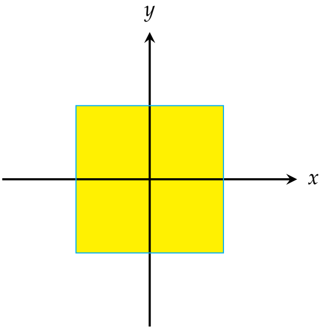
Tập bị chặn, Tập đóng, Biên



Cho $D \subset R^2$.

- D được gọi là *tập bị chặn* nếu tồn tại một hình tròn đủ lớn chứa nó
- Điểm (a, b) được gọi là *điểm biên* nếu tồn tại các điểm thuộc D và các điểm không thuộc D trong lân cận bất kì của nó

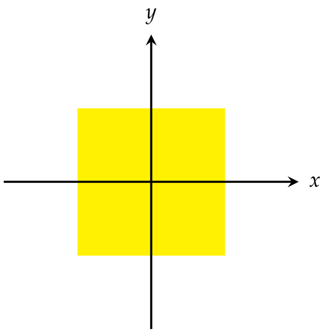
Tập bị chặn, Tập đóng, Biên



Cho $D \subset R^2$.

- D được gọi là *tập bị chặn* nếu tồn tại một hình tròn đủ lớn chứa nó
- Điểm (a, b) được gọi là *điểm biên* nếu tồn tại các điểm thuộc D và các điểm không thuộc D trong lân cận bất kì của nó
- Tập hợp các điểm biên của D được gọi là *biên* của D

Tập bị chặn, Tập đóng, Biên



Cho $D \subset R^2$.

- D được gọi là *tập bị chặn* nếu tồn tại một hình tròn đủ lớn chứa nó
- Điểm (a, b) được gọi là *điểm biên* nếu tồn tại các điểm thuộc D và các điểm không thuộc D trong lân cận bất kì của nó
- Tập hợp các điểm biên của D được gọi là *biên* của D
- D được gọi là *tập đóng* nếu D chứa tất cả các điểm biên của nó.

Tập bị chặn, Tập đóng, Biên

Xác định tập bị chặn, không bị chặn và tập đóng, tập mở trong các tập dưới đây:

1. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$
2. $D = \{(x, y,) : x^2 + y^2 \leq 1\}$
3. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1\}$
4. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$

2. GTLN, GTNN

Định lý 2.1

Nếu f liên tục trên một tập đóng, bị chặn $D \subset \mathbb{R}^2$ thì f đạt được GTLN, GTNN trên D, tức là tồn tại điểm $(a_1, b_1) \in D$ và $(a_2, b_2) \in D$ sao cho:

$$\begin{cases} f(a_1, b_1) = \max\limits_{D} f(x, y) \\ f(a_2, b_2) = \min\limits_{D} f(x, y) \end{cases}$$

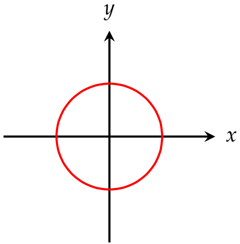
$\oplus$ **Nhận xét**: GTLN, GTNN chỉ có thể đạt được tại các điểm trong của D (sử dụng các đạo hàm riêng cấp 2 để xét) hoặc các điểm trên biên của D (sử dụng cách tìm như trong Giải tích I).

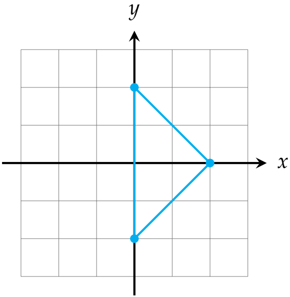
2. GTLN, GTNN

Phương pháp tìm GTLN, GTNN Để tìm GTLN, GTNN của hàm liên tục f trên tập đóng, bị chặn D:

1. Tìm giá trị của f tại các điểm dừng thuộc D
2. Tìm cực trị của f trên biên của D
3. Giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) tìm được ở Bước 1 và Bước 2 chính là GTLN (GTNN) của f.

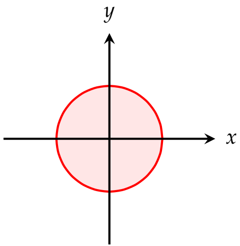
2. GTLN, GTNN

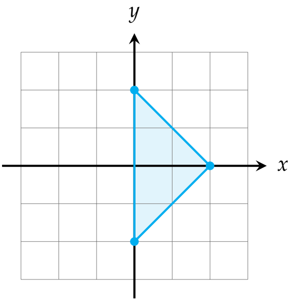




1. Tìm GTLN, GTNN của
$$f(x,y) = x^2 - y^2$$
trên biên của hình tròn $x^2 + y^2 = 1$
2. Tìm GTLN, GTNN của
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$$
trên biên của hình tam giác với các đỉnh là $(2,0)$, $(0,2)$ và $(0,-2)$.

2. GTLN, GTNN

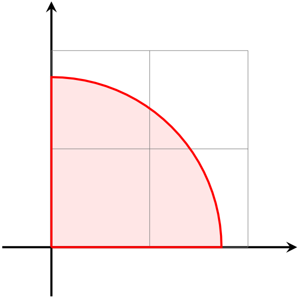




1. Tìm GTLN, GTNN của
$$f(x,y) = x^2 - y^2$$
trên hình tròn
$$\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

2. Tìm GTLN, GTNN của
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$$
trên hình tam giác với các đỉnh $(2,0)$, $(0,2)$ and $(0,-2)$.

2. GTLN, GTNN



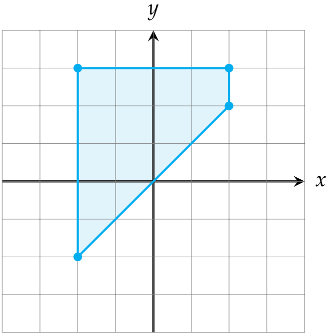
Tìm GTLN, GTNN của

$$f(x,y) = xy^2$$

trên miền

$$D = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}$$

2. GTLN, GTNN



Tìm GTLN, GTNN của

$$f(x,y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y$$

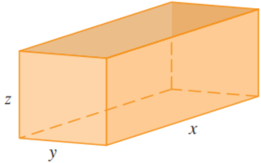
với D là hình tứ giác có các đỉnh là $(-2,3)$, $(2,3)$, $(2,2)$ và $(-2,-2)$.

Bài toán thực tế

Tìm thể tích lớn nhất của hình hộp chữ nhật (không có nắp) làm từ 12m^2 bìa các tông.

Bài toán thực tế

Tìm thể tích lớn nhất của hình hộp chữ nhật (không có nắp) làm từ 12m^2 bìa các tông.



Giải

Ta có $\begin{cases} V = xyz \\ 2xz + 2yz + xy = 12 \end{cases}$

Suy ra $V = xy\dfrac{12 - xy}{2(x+y)} = \dfrac{12xy - x^2y^2}{2(x+y)}$.

Giải hệ $\begin{cases} V'_x = 0 \\ V'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x+y)^2} = 0 \\ \dfrac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x+y)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

từ đó ta tìm được $V = 1$.

Tổng kết

- Nhắc lại cách tìm cực trị của hàm 1 biến
- Học cách tìm điểm cực trị của hàm 2 biến sử dụng gradient ∇f (tìm điểm dừng) và sử dụng định thức của ma trận Hessian (chỉ ra điểm cực đại, cực tiểu hay ko là điểm cực trị)
- Hiểu được các khái niệm tập đóng, bị chặn và biên của một tập con trong $\mathbb{R}^2$
- Hiểu khái niệm và tìm được GTLN, GTNN của hàm 2 biến liên tục trên tập đóng, bị chặn

Nội dung

Cực trị tự do

GTLN, GTNN

Trao đổi

TRAO ĐỔI