

# BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 2

## CHƯƠNG 1-BÀI 1. HÀM NHIỀU BIẾN

TS. NGUYỄN ĐÌNH DƯƠNG  
BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG - KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG

Email: duongnd@hcmut.edu.vn

Ngày 15/02/2021



- 1.1 Bài 1.1: Hàm nhiều biến
- 1.2 Bài 1.2: Đạo hàm riêng
- 1.3 Bài 1.3: Đạo hàm theo hướng và Gradient
- 1.4 Bài 1.4: Đạo hàm hàm hợp, hàm ẩn
- 1.5 Bài 1.5: Công thức Taylor
- 1.6 Bài 1.6: Cực trị hàm nhiều biến
- 1.7 Bài 1.7: Giá trị bé nhất, lớn nhất trên miền đóng, bị chặn

# Nội dung

Hàm nhiều biến

Đồ thị mức

Trao đổi

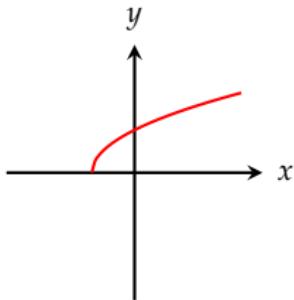
# Nội dung

Hàm nhiều biến

Đồ thị mức

Trao đổi

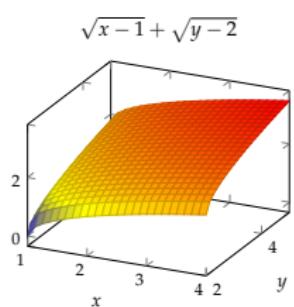
# 1. Hàm nhiều biến



Hàm một biến chính là ánh xạ  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  trong đó miền xác định  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$

Ví dụ:  $f(x) = \sqrt{1+x}$ ,  $\mathcal{D} = [-1, \infty)$

Đồ thị của  $f$  là tập hợp các điểm  $(x, f(x))$  trong  $(Oxy)$ , trong đó  $x \in \mathcal{D}$



Hàm 2 biến là ánh xạ  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  trong đó miền xác định  $D \subset \mathbb{R}^2$ .

Ví dụ:  $f(x, y) = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-2}$ ,

$$U = \{(x, y) : x \geq 1, y \geq 2\}$$

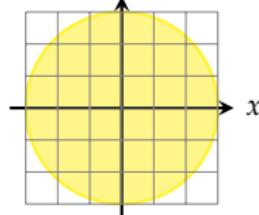
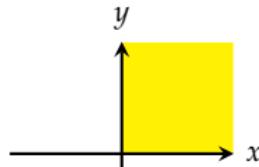
Đồ thị của  $f$  là tập hợp các điểm  $(x, y, f(x, y))$  trong mặt phẳng  $(Oxyz)$ , trong đó  $(x, y) \in \mathcal{D}$

# 1. Hàm nhiều biến

Tìm hàm số tương ứng với đồ thị có miền xác định bởi các hình dưới đây trong ( $Oxy$ ).

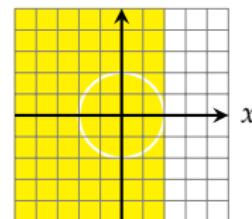
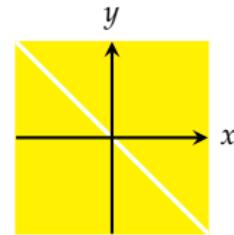
①  $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

②  $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$



③  $f(x, y) = \frac{\ln(2 - x)}{4 - x^2 - y^2}$

④  $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

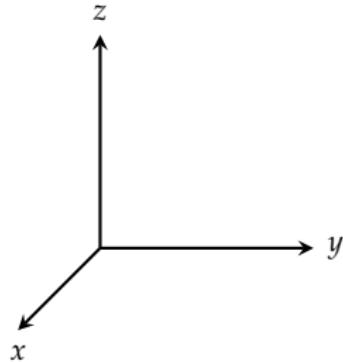


# 1. Hàm nhiều biến

Hàm số có dạng  $f(x, y) = ax + by + c$  với các hệ số  $a, b$  và  $c$  được gọi là *hàm tuyến tính*. Đồ thị của nó là mặt phẳng:

$$z = ax + by + c \Rightarrow ax + by - z = c$$

Bạn đã biết cách vẽ đồ thị này!

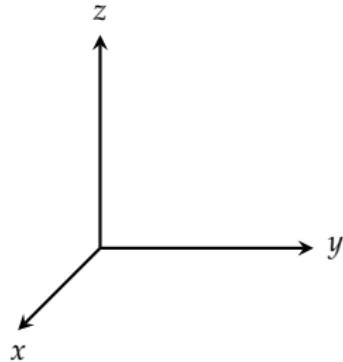


# 1. Hàm nhiều biến

Hàm số có dạng  $f(x, y) = ax + by + c$  với các hệ số  $a, b$  và  $c$  được gọi là *hàm tuyến tính*. Đồ thị của nó là mặt phẳng:

$$z = ax + by + c \Rightarrow ax + by - z = c$$

Bạn đã biết cách vẽ đồ thị này!



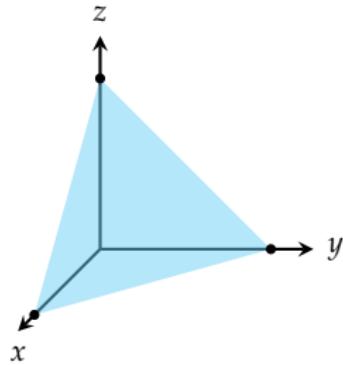
Vẽ đồ thị của  $f(x, y) = 2 - x - y$

# 1. Hàm nhiều biến

Hàm số có dạng  $f(x, y) = ax + by + c$  với các hệ số  $a, b$  và  $c$  được gọi là *hàm tuyến tính*. Đồ thị của nó là mặt phẳng:

$$z = ax + by + c \Rightarrow ax + by - z = c$$

Bạn đã biết cách vẽ đồ thị này!



Vẽ đồ thị của  $f(x, y) = 2 - x - y$

$$x + y + z = 2$$

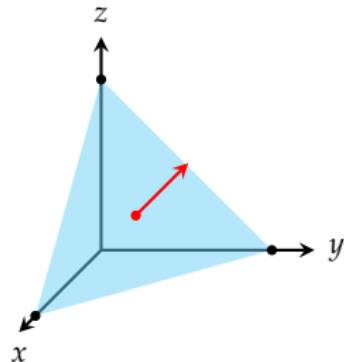
$(2, 0, 0), (0, 2, 0)$  và  $(0, 0, 2)$  nằm trên  
mặt phẳng này

# 1. Hàm nhiều biến

Hàm số có dạng  $f(x, y) = ax + by + c$  với các hệ số  $a, b$  và  $c$  được gọi là *hàm tuyến tính*. Đồ thị của nó là mặt phẳng:

$$z = ax + by + c \Rightarrow ax + by - z = c$$

Bạn đã biết cách vẽ đồ thị này!



Vẽ đồ thị của  $f(x, y) = 2 - x - y$

$$x + y + z = 2$$

$(2, 0, 0), (0, 2, 0)$  và  $(0, 0, 2)$  nằm trên  
mặt phẳng này

Véc tơ pháp tuyến  $\vec{n} = (1; 1; 1)$

# 1. Hàm nhiều biến

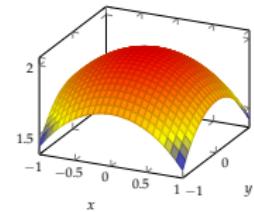
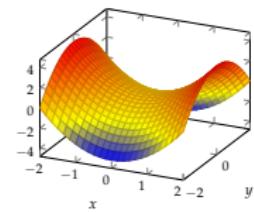
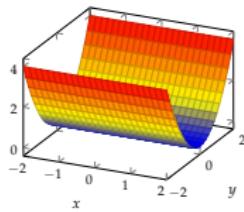
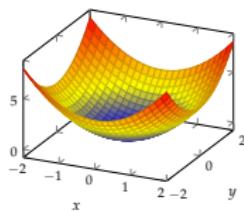
Tìm hàm số tương ứng với các đồ thị dưới đây.

I  $f(x, y) = y^2$

II  $f(x, y) = x^2 - y^2$

III  $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

IV  $f(x, y) = x^2 + y^2$

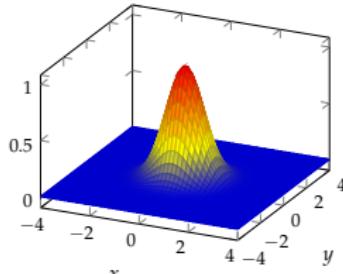
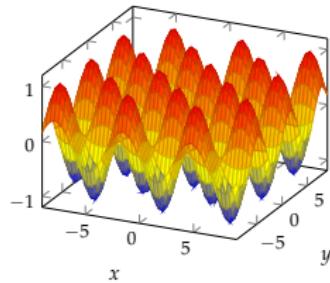


# 1. Hàm nhiều biến

Tìm hàm số tương ứng với các đồ thị dưới đây.

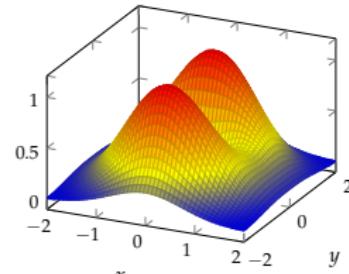
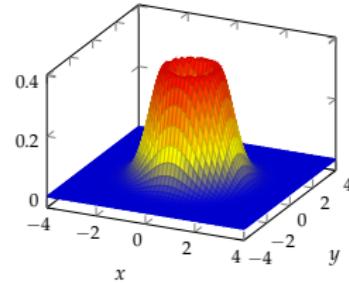
I  $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$

II  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$



III  $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

IV  $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$



# Nội dung

Hàm nhiều biến

Đồ thị mức

Trao đổi

## 2. Đồ thị mức

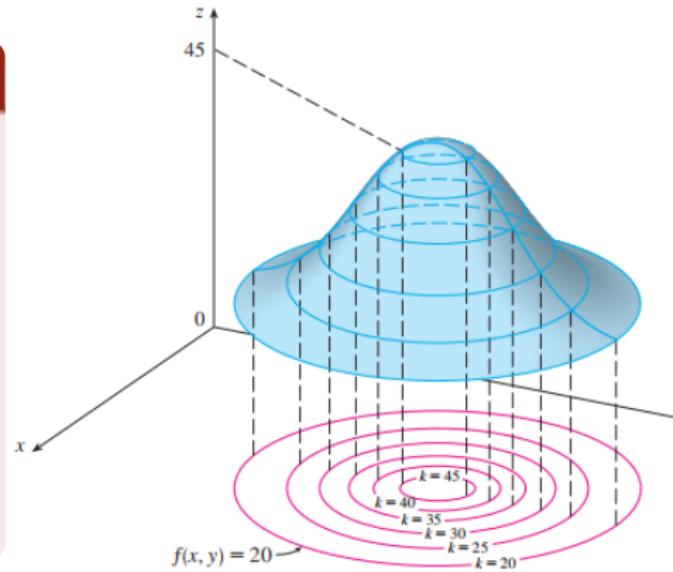
### Định nghĩa 2.1 (Đồ thị mức)

**Đường mức** (hay đường đẳng trị) của hàm 2 biến  $z = f(x, y)$  là các đường cong có phương trình

$$f(x, y) = k,$$

$k = \text{const}$  thuộc miền giá trị của  $f$ .

**Đồ thị mức** là tập hợp các đường mức của  $f$ .



#### ⊕ Nhận xét:

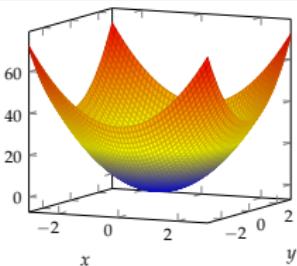
- Các đường mức sẽ **không cắt nhau**
- Bề mặt cong sẽ **dốc** ở nơi các đường mức gần nhau và **phẳng hơn** khi các đường mức cách xa nhau.

## 2. Đồ thị mức

**Đường mức** của  $z = f(x, y)$  là các đường cong có phương trình

$$f(x, y) = k.$$

**Đồ thị mức** tập hợp các đường mức của  $f$ .

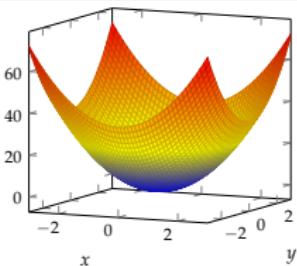


## 2. Đồ thị mức

**Đường mức** của  $z = f(x, y)$  là các đường cong có phương trình

$$f(x, y) = k.$$

**Đồ thị mức** tập hợp các đường mức của  $f$ .

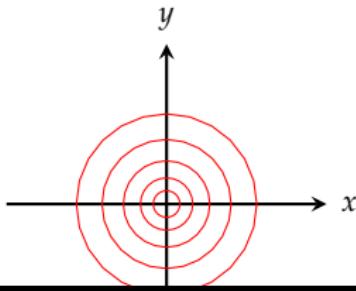
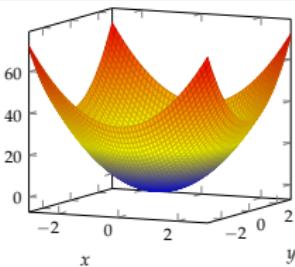


## 2. Đồ thị mức

**Đường mức** của  $z = f(x, y)$  là các đường cong có phương trình

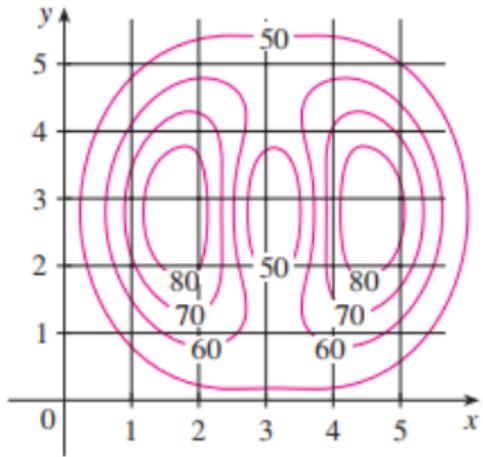
$$f(x, y) = k.$$

**Đồ thị mức** tập hợp các đường mức của  $f$ .



- Miền xác định của  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ? (**Paraboloid Elliptic**)
- Mô tả đồ thị mức của  $f$

## 2. Đồ thị mức

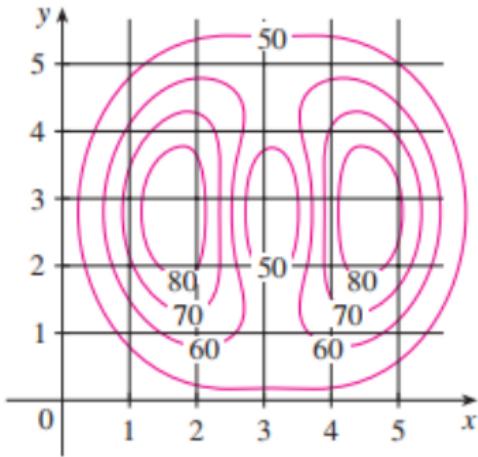


Ví dụ 2.1

Cho đồ thị mức của hàm  $f(x, y)$  như hình vẽ bên. Ước lượng giá trị  $f(1, 3)$ ,  $f(4, 5)$ .

Giải

## 2. Đồ thị mức



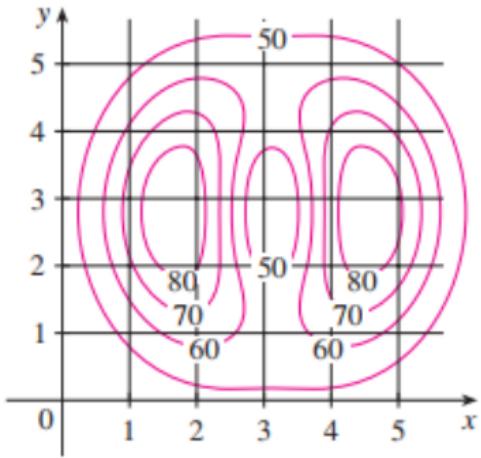
Ví dụ 2.1

Cho đồ thị mức của hàm  $f(x, y)$  như hình vẽ bên. Ước lượng giá trị  $f(1, 3)$ ,  $f(4, 5)$ .

Giải

$$f(1, 3) \approx 73;$$

## 2. Đồ thị mức



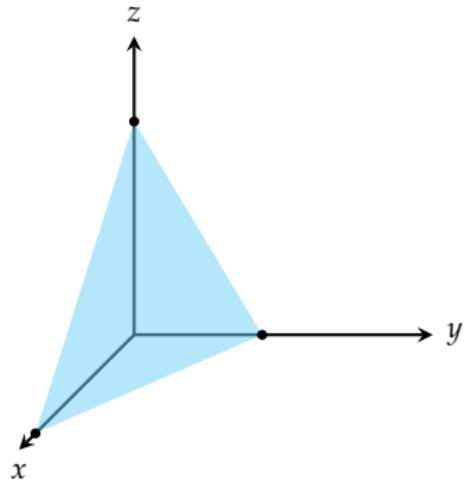
Ví dụ 2.1

Cho đồ thị mức của hàm  $f(x, y)$  như hình vẽ bên. Ước lượng giá trị  $f(1, 3)$ ,  $f(4, 5)$ .

Giải

$$f(1, 3) \approx 73; \quad f(4, 5) \approx 56.$$

## 2. Đồ thị mức



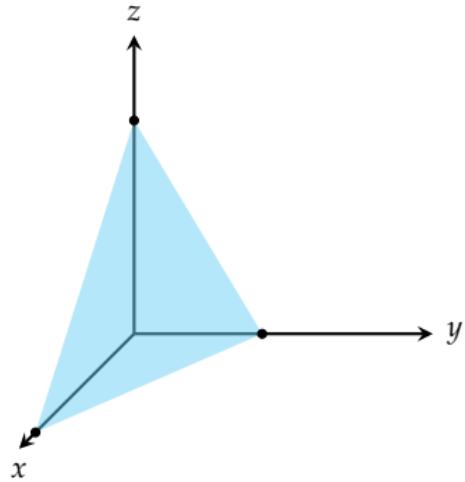
Ví dụ 2.2

Vẽ đồ thị mức cho hàm

$$f(x, y) = 6 - 3x - 2y$$

với  $k = -6, 0, 6, 12$ .

## 2. Đồ thị mức



Ví dụ 2.2

Vẽ đồ thị mức cho hàm

$$f(x, y) = 6 - 3x - 2y$$

với  $k = -6, 0, 6, 12$ .

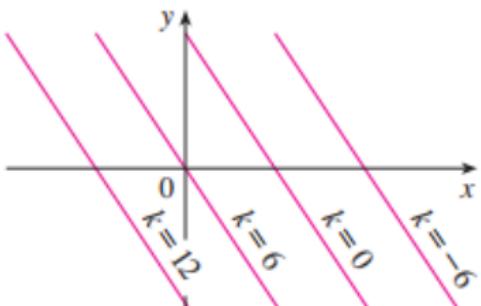
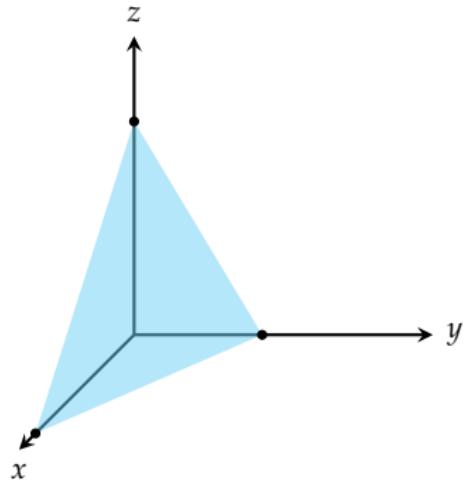
Giải

Các đường mức có phương trình là

$$6 - 3x - 2y = k$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2y + (k - 6) = 0$$

## 2. Đồ thị mức



Ví dụ 2.2

Vẽ đồ thị mức cho hàm

$$f(x, y) = 6 - 3x - 2y$$

với  $k = -6, 0, 6, 12$ .

Giải

Các đường mức có phương trình là

$$6 - 3x - 2y = k$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2y + (k - 6) = 0$$

## 2. Đồ thị mức

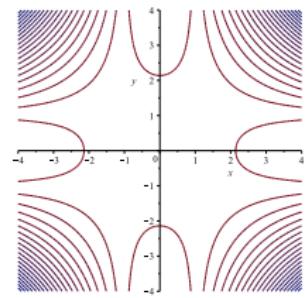
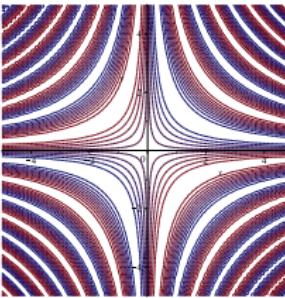
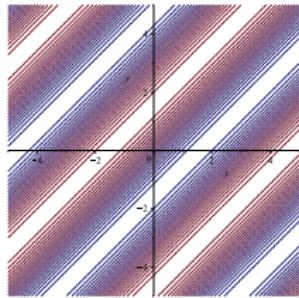
**Đường mức** của  $z = f(x, y)$  là các đường cong có phương trình

$$f(x, y) = k.$$

**Đồ thị mức** tập hợp các đường mức của  $f$ .

Tìm đồ thị mức tương ứng với các hàm dưới đây.

$$f(x, y) = \sin(xy) \quad f(x, y) = (1 - x^2)(1 - y^2) \quad f(x, y) = \sin(x - y)$$



# Nội dung

Hàm nhiều biến

Đồ thị mức

Trao đổi

# TRAO ĐỔI