



# BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 2

## CHƯƠNG 2-BÀI 1. TÍCH PHÂN BỘI

TS. NGUYỄN ĐÌNH DƯƠNG  
BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG - KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG

Email: [duongnd@hcmut.edu.vn](mailto:duongnd@hcmut.edu.vn)

Ngày 15/02/2021



## Chương 2: Tích phân bội

2.1 Tích phân bội 2

2.2 **Đổi biến trong tích phân bội 2**

2.3 Tích phân bội 3

2.4 **Đổi biến trong tích phân bội 3**



# Nội dung

Tích phân bội 2 trong tọa độ cực

Ứng dụng tích phân bội 2

2.1 Thể tích vật thể

2.2 Tính khối lượng bản phẳng



# Nội dung

## Tích phân bội 2 trong tọa độ cực

### Ứng dụng tích phân bội 2

#### 2.1 Thể tích vật thể

#### 2.2 Tính khối lượng bản phẳng

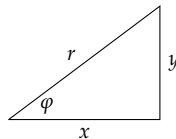
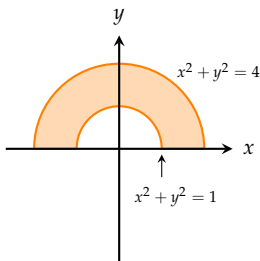
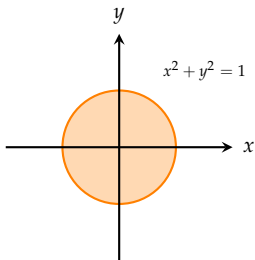
# Chuẩn đầu ra

- Nhắc lại Hệ tọa độ cực
- Tính được tích phân bội 2 trong hệ tọa độ cực trên miền chữ nhật
- Tính được tích phân bội 2 trong hệ tọa độ cực trên miền tổng quát
- Tính được thể tích vật thể sử dụng tích phân bội 2 trong hệ tọa độ cực

# 1. Tích phân bội 2 trong tọa độ cực

	Giải tích I	Giải tích II
Tổng Riemann	$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$	$\sum_{i,j=1}^n f(x_i^*, y_j^*) \Delta A$
Tích phân Riemann	$\int_a^b f(x) dx$	$\iint_D f(x, y) dA$
Cách tính	$F(b) - F(a)$	Tích phân lặp
Ý nghĩa hình học	Diện tích nằm dưới đường cong	Thể tích dưới mặt cong

# Hệ tọa độ cực



Ta có

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

và

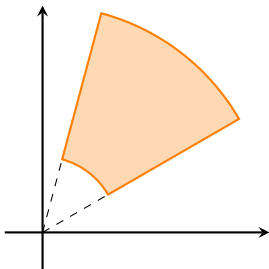
$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}.$$

Miền tô màu hình bên được mô tả như thế nào trong tọa độ cực?

# Hình chữ nhật trong tọa độ cực

*Hình chữ nhật trong tọa độ cực là miền*

$$R = \{(r, \varphi) : a \leq r \leq b, \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta\}.$$

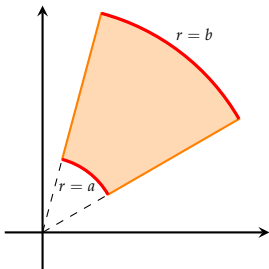




# Hình chữ nhật trong tọa độ cực

*Hình chữ nhật trong tọa độ cực là miền*

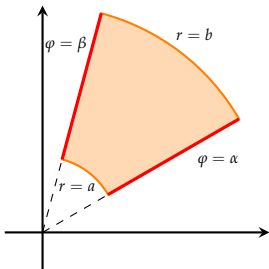
$$R = \{(r, \varphi) : a \leq r \leq b, \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta\}.$$



# Hình chữ nhật trong tọa độ cực

*Hình chữ nhật trong tọa độ cực là miền*

$$R = \{(r, \varphi) : a \leq r \leq b, \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta\}.$$

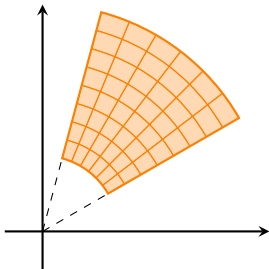


# Hình chữ nhật trong tọa độ cực

*Hình chữ nhật trong tọa độ cực là miền*

$$R = \{(r, \varphi) : a \leq r \leq b, \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta\}.$$

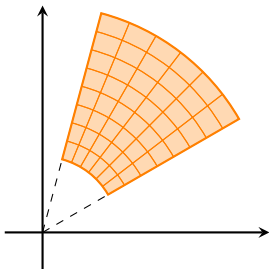
*Tương tự, hình chữ nhật trong tọa độ cực được chia thành các hình chữ nhật con*



# Hình chữ nhật trong tọa độ cực

Hình chữ nhật trong tọa độ cực là miền

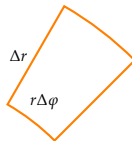
$$R = \{(r, \varphi) : a \leq r \leq b, \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta\}.$$



Tương tự, hình chữ nhật trong tọa độ cực được chia thành các hình chữ nhật con

Mỗi hình chữ nhật nhỏ có diện tích

$$\Delta A \simeq r \Delta r \Delta \varphi$$



# Tích phân bội 2 trong tọa độ cực

Tích phân  $\iint_R f(x, y) dA$  là giới hạn của tổng Riemann:

$$\sum_{i,j=1}^n f(r_i^* \cos \varphi_j^*, r_i^* \sin \varphi_j^*) \color{red}{r_j} \Delta r \Delta \varphi$$

Hình chữ nhật  $R_{ij}$  cho bởi

$$R_{ij} = \{(r, \varphi) : r_{i-1} \leq r \leq r_i, \varphi_{j-1} \leq \varphi \leq \varphi_j\}$$

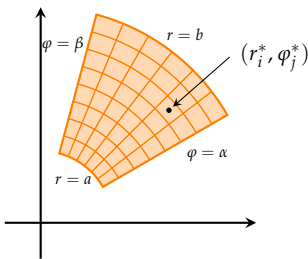
$$r_i = a + i\Delta r, \quad \varphi_j = \alpha + j\Delta \varphi$$

trong đó

$$\Delta r = \frac{b-a}{n}, \quad \Delta \varphi = \frac{\beta - \alpha}{n}$$

Lấy giới hạn trên sẽ dẫn tới tích phân lặp

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \color{red}{r} dr d\varphi$$



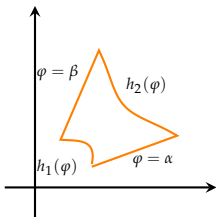
# Tích phân bội 2 trong tọa độ cực

**Tích phân bội 2 trong tọa độ cực** Tích phân của hàm liên tục  $f(x, y)$  trên miền hình chữ nhật trong tọa độ cực  $R$  cho bởi  $a \leq r \leq b, \alpha \leq \varphi \leq \beta$ , là

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

- 1 Tính  $\iint_D (2x - y) dA$  với  $D$  là miền giới hạn bởi đường tròn  $x^2 + y^2 = 4$ , các đường  $x = 0$  và  $y = x$  trong góc phần tư thứ nhất.
- 2 Tính  $\iint_D e^{-x^2-y^2} dA$  với  $D$  là miền giới hạn bởi nửa phải đường tròn  $x = \sqrt{4 - y^2}$  và trục  $Oy$ .

# Tích phân bội 2 trong tọa độ cực



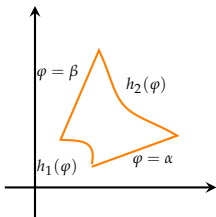
Nếu  $f$  liên tục trên miền tọa độ cực cho bởi

$$D = \{(r, \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, h_1(\varphi) \leq r \leq h_2(\varphi)\}$$

thì

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\varphi)}^{h_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \color{red}{r} dr d\varphi$$

# Tích phân bội 2 trong tọa độ cực



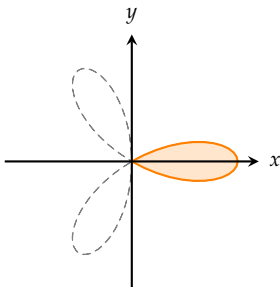
Nếu  $f$  liên tục trên miền tọa độ cực cho bởi

$$D = \{(r, \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, h_1(\varphi) \leq r \leq h_2(\varphi)\}$$

thì

$$\iint_D f(x, y) dA =$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\varphi)}^{h_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$



Tìm diện tích miền tô màu trong hình hoa hồng 3 cánh

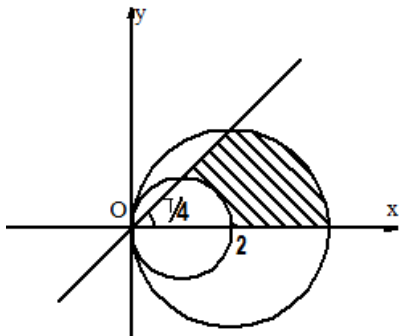
$$r = \cos 3\varphi$$



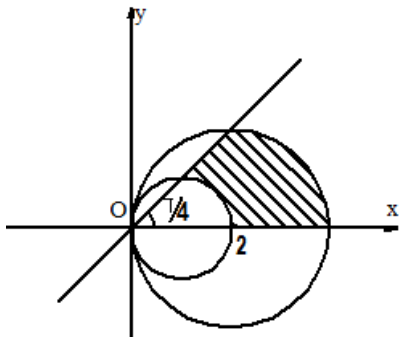
# 1. Tích phân bội 2 trong tọa độ cực

## Ví dụ 1.1

Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi các đường  $x^2 + y^2 = 2x$ ,  $x^2 + y^2 = 4x$ ,  $y = x$  và  $y = 0$ .



# 1. Tích phân bội 2 trong tọa độ cực



## Ví dụ 1.1

Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi các đường  $x^2 + y^2 = 2x$ ,  $x^2 + y^2 = 4x$ ,  $y = x$  và  $y = 0$ .

Giải

$$\begin{aligned}
 S &= \iint_D 1 \cdot dS \\
 &= \int_0^{\pi/4} \left( \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} r dr \right) d\varphi \\
 &= 6 \int_0^{\pi/4} \cos^2 \varphi d\varphi \\
 &= \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$



# Nội dung

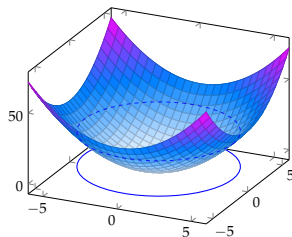
Tích phân bội 2 trong tọa độ cực

Ứng dụng tích phân bội 2

2.1 Thể tích vật thể

2.2 Tính khối lượng bản phẳng

# Thể tích vật thể



Tìm thể tích vật thể hình trụ nằm dưới paraboloid

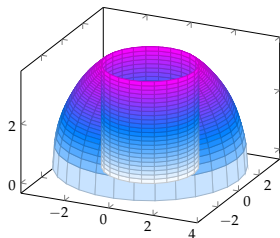
$$z = x^2 + y^2$$

và có mặt đáy là hình tròn

$$x^2 + y^2 \leq 25$$

- 1 Mô tả hình tròn đáy trong tọa độ cực
- 2 Chuyển hàm  $f(x, y)$  sang tọa độ cực

# Thể tích vật thể



Tìm thể tích vật thể nằm trong mặt cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

và nằm ngoài mặt trụ

$$x^2 + y^2 = 4$$

## 2. Ứng dụng tích phân bội 2 2.2. Tính khối lượng bản phẳng

### Khối lượng bản phẳng

Giả sử bản phẳng  $D \subset (Oxy)$  có khối lượng riêng tại mỗi điểm  $(x, y)$  là  $\rho(x, y)$ . Khi đó khối lượng của  $D$  tính bởi

$$m = \iint_D \rho(x, y) \, dS.$$

### Ví dụ 2.1

Tìm khối lượng của một bản phẳng  $D$  giới hạn bởi các đường  $y = e^x$ ,  $y = 1$ ,  $x = 1$  biết rằng khối lượng riêng tại mỗi điểm là  $\rho(x, y) = \frac{1}{y}$ .



# TRAO ĐỔI