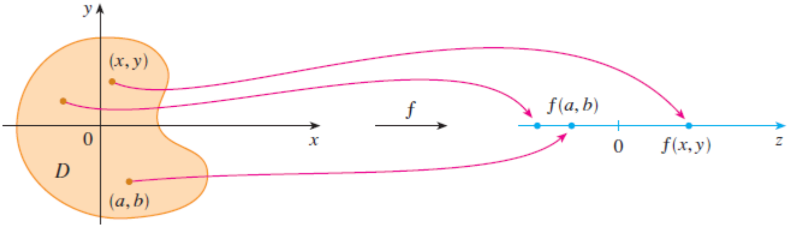
Định nghĩa

Một **hàm số hai biến (function of two variables)** *f là một quy tắc đặt tương ứng mỗi cặp số thực $(x; y)$ trong một tập D với một số thực duy nhất ký hiệu là $f(x; y)$.*

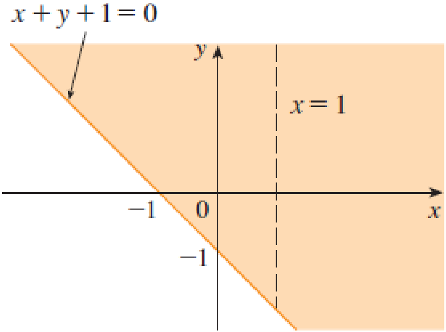
- Tập D được gọi là **miền xác định (domain)** của f.
- Tập $\{f(x; y) | (x; y) \in D\}$ được gọi là **tập giá trị (range)** của f.
- Ta thường viết hàm số hai biến f bởi $z = f(x; y)$.



Ví dụ

Tính giá trị $f(3;2)$ *và tìm miền xác định của hàm số hai biến sau:*

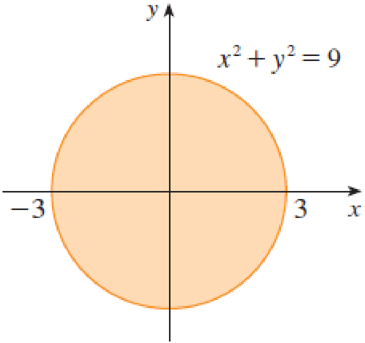
$$f(x;y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}.$$



Ví dụ

Tìm miền xác định và miền giá trị của hàm số hai biến sau:

$$g(x; y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$



Ví dụ

Tại những nơi có mùa đông giá rét, **chỉ số gió lạnh (wind-chill index)** thường được dùng để mô tả mức độ nghiêm trọng của giá rét. Chỉ số này, ký hiệu là W, là nhiệt độ mà chủ thể cảm nhận được, nó phụ thuộc vào nhiệt độ thực T và tốc độ gió v. Do đó, W là một hàm số của T và v, và ta có thể viết

$$W = f(T; v).$$

Bảng sau đây được đưa ra bởi National Weather Service của US và Meteorological Service của Canada:

Ví dụ

Wind speed (km/h)

Actual temperature (°C)

T \ v	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
5	4	3	2	1	1	0	−1	−1	−2	−2	−3
0	−2	−3	−4	−5	−6	−6	−7	−8	−9	−9	−10
−5	−7	−9	−11	−12	−12	−13	−14	−15	−16	−16	−17
−10	−13	−15	−17	−18	−19	−20	−21	−22	−23	−23	−24
−15	−19	−21	−23	−24	−25	−26	−27	−29	−30	−30	−31
−20	−24	−27	−29	−30	−32	−33	−34	−35	−36	−37	−38
−25	−30	−33	−35	−37	−38	−39	−41	−42	−43	−44	−45
−30	−36	−39	−41	−43	−44	−46	−48	−49	−50	−51	−52
−35	−41	−45	−48	−49	−51	−52	−54	−56	−57	−58	−60
−40	−47	−51	−54	−56	−57	−59	−61	−63	−64	−65	−67

Ví dụ

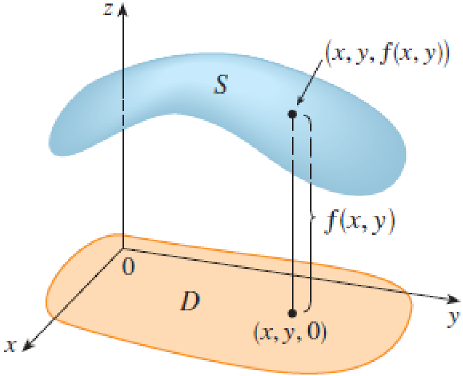
Vào năm 1928, Charles Cobb và Paul Douglas đã xuất bản một nghiên cứu mà trong đó họ mô hình hóa sự tăng trưởng của nền kinh tế Mỹ trong giai đoạn 1899 - 1922. Họ đã xem xét một quan điểm kinh tế được đơn giản hóa mà trong đó sản lượng (P) được quyết định bởi lượng nhân công (L) và lượng vốn đầu tư (K). Mặc dù có nhiều yếu tố khác ảnh hưởng đến hiệu quả kinh tế nhưng mô hình của họ đã chứng tỏ là rất chính xác. Hàm số mà họ sử dụng để mô hình hóa sản lượng có dạng:

$$P(L;K) = b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{1-\alpha},$$

trong đó b và α là các hằng số.

Định nghĩa

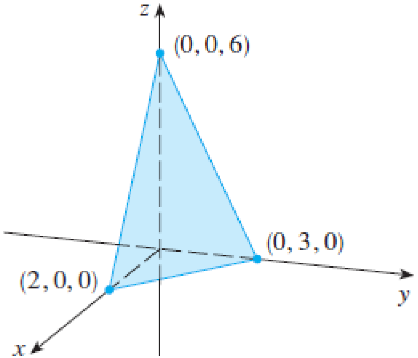
Cho f là một hàm số hai biến với miền xác định D. **Đồ thị (graph)** *của f là tập hợp tất cả các điểm $(x; y; z)$ trong $\mathbb{R}^3$ sao cho $z = f(x; y)$ và $(x; y) \in D$.*



Ví dụ

Hãy vẽ đồ thị của hàm số hai biến sau:

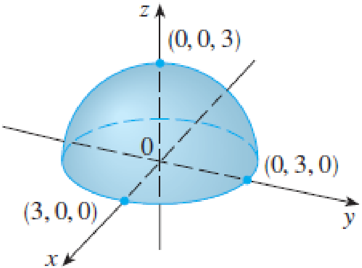
$$f(x;y) = 6 - 3x - 2y.$$



Ví dụ

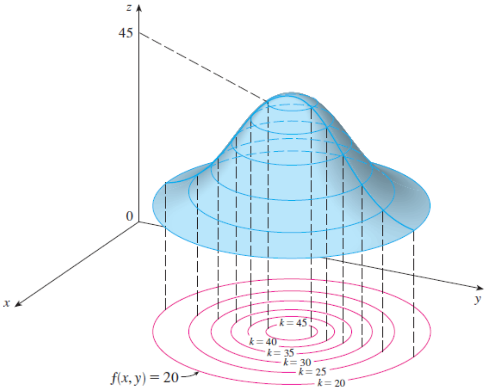
Hãy vẽ đồ thị của hàm số hai biến sau:

$$g(x;y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

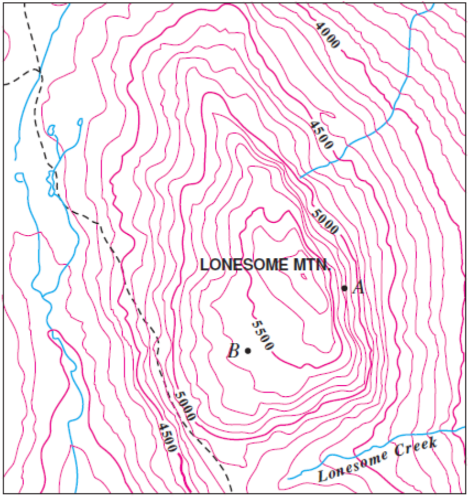


Định nghĩa

Các đường mức (level curves) *của một hàm số $f(x;y)$ là các đường cong có phương trình $f(x;y)=k$, trong đó k là hằng số (nằm trong miền giá trị của f).*

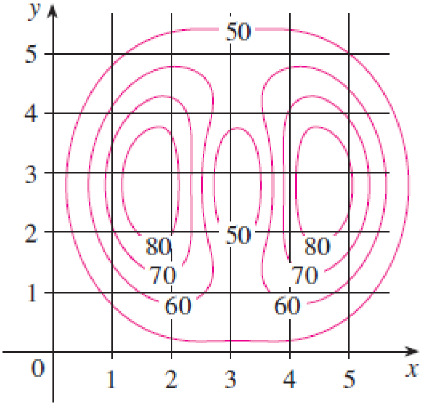


Ví dụ: Các đường mức thường được ứng dụng phổ biến trong các bản đồ địa hình vùng núi.



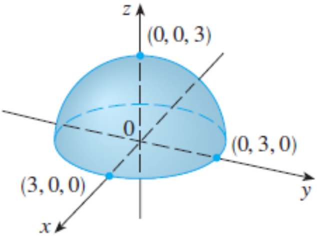
Ví dụ

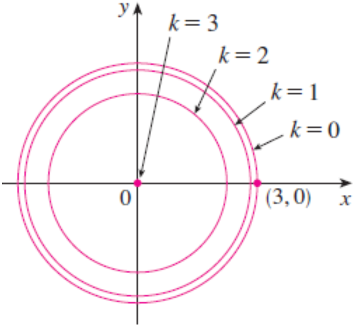
Các đường mức của hàm hai biến f được cho trong hình vẽ sau. Hãy ước lượng các giá trị của $f(1;3)$ và $f(4;5)$.



Ví dụ

Hãy vẽ các đường mức của hàm số hai biến $g(x; y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ *ứng với các giá trị* $k = 0; 1; 2; 3.$





- Cho f là một hàm số theo hai biến x và y.
- Nếu ta chỉ cho x biến thiên trong khi giữ y cố định, tức là $y = b$, với b là hằng số, thì ta có một hàm g theo một biến x:

$$g(x) = f(x; b).$$

Định nghĩa

Nếu g có đạo hàm tại a, ta gọi đạo hàm đó là **đạo hàm riêng của f theo biến x (partial derivative of f with respect to x)** *tại $(a; b)$, ký hiệu là $f_x(a; b)$. Tức là*

$$f_x(a; b) = g'(a).$$

$$f_x(a; b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h; b) - f(a; b)}{h}.$$

Nếu ta chỉ cho y biến thiên trong khi giữ x cố định, tức là $x = a$, với a là hằng số, thì ta có một hàm G theo một biến y:

$$G(y) = f(a; y).$$

Định nghĩa

Nếu G có đạo hàm tại b, ta gọi đạo hàm đó là **đạo hàm riêng của f theo biến y (partial derivative of f with respect to y)** *tại $(a; b)$, ký hiệu là $f_y(a; b)$. Tức là*

$$f_y(a; b) = G'(b).$$

$$f_y(a; b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a; b + h) - f(a; b)}{h}.$$

Ký hiệu

Cho hàm số hai biến $z = f(x; y)$. Ta viết:

- $f_x = f'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial x} = D_x f$
- $f_y = f'_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y} = D_y f$

Cách tính

- Để tìm f_x, ta xem y là hằng số và lấy đạo hàm của $f(x;y)$ theo biến x.
- Để tìm f_y, ta xem x là hằng số và lấy đạo hàm của $f(x;y)$ theo biến y.

Ví dụ

Cho $f(x;y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$. *Hãy tính* $f_x(2;1)$ *và* $f_y(2;1)$.

Ví dụ

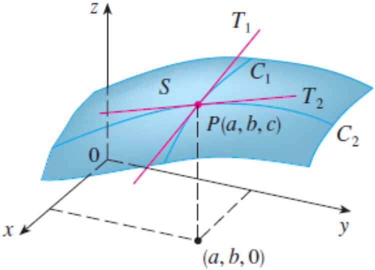
Cho $f(x; y) = \sin\left(\dfrac{x}{1+y}\right)$. *Hãy tính* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *và* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Ví dụ

Hãy tìm $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *và* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ *nếu* z *được xác định* **ẩn (implicit)** *như là hàm số theo hai biến* x *và* y *bởi phương trình*

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1.$$

Xét hàm số hai biến $z = f(x; y)$ có đồ thị là mặt cong S. Đặt $c = f(a; b)$.



- $f_x(a; b)$ là hệ số góc tiếp tuyến T_1 tại điểm $P(a; b; c)$ của đường cong C_1 là đồ thị của hàm số $g(x) = f(x; b)$.
- $f_y(a; b)$ là hệ số góc tiếp tuyến T_2 tại điểm $P(a; b; c)$ của đường cong C_2 là đồ thị của hàm số $G(y) = f(a; y)$.

Xét hàm số hai biến $z = f(x; y)$.

- $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ là tốc độ thay đổi của z theo x khi y được cố định.
- $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ là tốc độ thay đổi của z theo y khi x được cố định.

Ví dụ

Một ngọn đồi có hình dạng bề mặt được mô tả bởi hàm số

$$z = 1000 - 0.005x^2 - 0.01y^2,$$

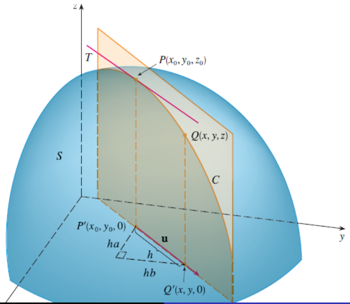
trong đó x, y, z *được tính bằng mét. Hãy tính* $z_x(20; -10)$ *và* $z_y(20; -10)$*, và cho biết sự thay đổi chiều cao của ngọn đồi từ điểm* $(20; -10; 997)$ *theo các hướng trục* Ox *và* Oy*.*

Định nghĩa

Đạo hàm theo hướng (directional derivative) *của* f *tại* $(x_0; y_0)$ *theo hướng của vectơ đơn vị* $\mathbf{u} = (a; b)$ *là*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0; y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha; y_0 + hb) - f(x_0; y_0)}{h},$$

nếu giới hạn này tồn tại.



Định lý

Nếu f là một hàm khả vi theo hai biến x và y, thì với mọi vectơ đơn vị $\mathbf{u} = (a; b)$, ta có

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x; y) = f_x(x; y) \cdot a + f_y(x; y) \cdot b.$$

Ví dụ

Cho hàm số $f(x; y) = x^3 - 3xy + 4y^2$. Hãy tìm đạo hàm theo hướng $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(1; 2)$ với $\mathbf{u} = (\sqrt{3}/2; 1/2)$.

Định nghĩa

Cho f là một hàm số của hai biến x và y. **Gradient** *của f là hàm vectơ ∇f định bởi*

$$\nabla f(x;y) = \Big(f_x(x;y); f_y(x;y)\Big) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}.$$

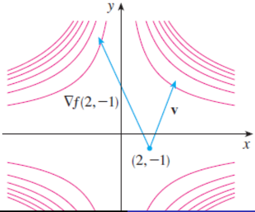
Định lý

Nếu f là một hàm khả vi theo hai biến x và y, thì với mọi vectơ đơn vị $\mathbf{u}$, *ta có*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x;y) = \nabla f(x;y)\cdot \mathbf{u}.$$

Ví dụ

Cho hàm số $f(x;y) = x^2y^3 - 4y$. *Hãy tìm đạo hàm theo hướng của f tại điểm* $(2;-1)$ *theo hướng của vectơ* $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.



Định lý

Cho f là một hàm khả vi theo hai biến x và y. Khi đó, tại điểm $(x_0; y_0)$ bất kỳ, ta có:

$$-|\nabla f(x_0; y_0)| \leq \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0; y_0) \leq |\nabla f(x_0; y_0)|,$$

với mọi vectơ đơn vị $\mathbf{u}$.

Như vậy:

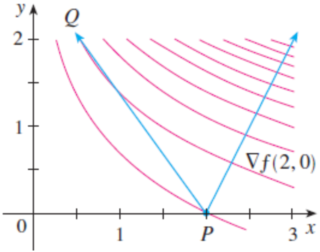
- $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0; y_0)$ đạt giá trị lớn nhất khi $\mathbf{u}$ cùng hướng với vectơ gradient $\nabla f(x_0; y_0)$.
- $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0; y_0)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $\mathbf{u}$ ngược hướng với vectơ gradient $\nabla f(x_0; y_0)$.

Ví dụ

Cho hàm số $f(x;y) = xe^y$.

(a) *Hãy tìm tốc độ thay đổi của* f *tại điểm* $P(2;0)$ *theo hướng từ* P *đến* $Q(1/2;2)$.

(b) *Hàm* f *có tốc độ thay đổi lớn nhất theo hướng nào?*



Ví dụ

Giả sử nhiệt độ tại một điểm $(x; y; z)$ *trong không gian được cho bởi*

$$T(x; y; z) = \frac{80}{1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2},$$

trong đó T *được đo theo độ Celsius và* x, y, z *được đo theo mét. Nhiệt độ tăng nhanh nhất theo hướng nào tại điểm* $(1; 1; -2)$*? Tốc độ tăng lớn nhất là bao nhiêu?*

Ví dụ

Một ngọn đồi có hình dạng bề mặt được mô tả bởi hàm số

$$z = 1000 - 0.005x^2 - 0.01y^2,$$

trong đó x, y, z *được tính bằng mét. Một người đang đứng ở tọa độ* $(60; 40; 966)$. *Giả sử chiều dương của Ox là hướng Đông và chiều dương của Oy là hướng Bắc.*

(a) *Nếu người đó đi về hướng Nam thì anh ta đang đi lên hay đi xuống? Độ dốc là bao nhiêu?*

(b) *Câu hỏi tương tự nếu anh ta đi theo hướng Tây Bắc?*

(c) *Đi theo hướng nào thì ngọn đồi có độ dốc cao nhất?*