

Topic 19 - Tích Phân Ba Lớp Trong Hệ Tọa độ Trụ

Bài 1 Vẽ điểm có các hệ tọa độ trụ cho trước. Sau đó tìm các tọa độ Descartes vuông góc của điểm đó.

- a) $(4, \frac{\pi}{3}, -2)$. b) $(2, -\frac{\pi}{2}, 1)$. c) $(\sqrt{2}, 3\frac{\pi}{4}, 2)$. d) $(1, 1, 1)$.

Bài 2 Chuyển đổi từ tọa độ Descartes vuông góc sang tọa độ trụ.

- a) $(-1, 1, 1)$. b) $(-2, 2\sqrt{3}, 3)$. c) $(2\sqrt{3}, 2, -1)$. d) $(4, -3, 2)$.

Bài 3 Mô tả bằng lời mặt có phương trình được cho như sau.

- 1) $\theta = \frac{\pi}{4}$. 2) $r = 5$.

Bài 4 Xác định mặt có phương trình được cho như sau.

- 1) $z = 4 - r^2$. 2) $2r^2 + z^2 = 1$.

Bài 5 Viết các phương trình sau theo hệ tọa độ trụ

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------|
| 1. $x^2 - x + y^2 + z^2 = 1$. | 3. $3x + 2y + z = 6$. |
| 2. $z = x^2 - y^2$. | 4. $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$. |

Bài 6 Phát họa hình khối được mô tả bởi các bất phương trình sau.

1. $0 \leq r \leq 2$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq z \leq 1$ 2. $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $r \leq z \leq 2$

Bài 7 Một vỏ trụ dài $20cm$, có bán kính bên trong là $6cm$ và bán kính bên ngoài là $7cm$. Viết các bất phương trình mô tả vỏ trụ trong một hệ tọa độ thích hợp. Giải thích cách chọn hệ tọa độ của bạn dựa theo vỏ trụ.

Bài 8 Sử dụng một thiết bị vẽ đồ thị để vẽ hình khối bị giới hạn bởi các paraboloid $z = x^2 + y^2$ và $z = 5 - x^2 - y^2$.

Bài 9 Phát họa hình khối có thể tích được cho bởi tích phân và tích phân đó.

- 1)
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^{r^2} r dz dr d\theta.$$
 2)
$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^r r dz d\theta dr.$$

Bài 10 Sử dụng hệ tọa độ trụ để:

- 1) Tính $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2} dV$, trong đó E là miền nằm bên trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 16$ và nằm giữa các mặt phẳng $z = -5, z = 4$.

- 2) Tính $\iiint_E z dV$, trong đó E bị giới hạn bởi paraboloid $z = x^2 + y^2$ và mặt phẳng $z = 4$.
- 3) Tính $\iiint_E (x + y + z) dV$, trong đó E là hình khối trong góc phần tám thứ nhất, nằm dưới paraboloid $z = 4 - x^2 - y^2$.
- 4) Tính $\iiint_E x^2 dV$, trong đó E là hình khối nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$, nằm trên mặt phẳng $z = 0$, và nằm mặt nón $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.
- 5) Tính thể tích hình khối nằm trong cả mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$ và mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
- 6) Tính thể tích hình khối bị giới hạn bởi mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
- 7) Tính thể tích hình khối nằm giữa paraboloid $z = x^2 + y^2$ và mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Bài 11 a) Tìm thể tích của miền E bị giới hạn bởi các paraboloid $z = x^2 + y^2$ và $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.

b) Tìm trọng tâm của E (khối tâm trong trường hợp mật độ không đổi).

Bài 12 a) Tìm thể tích của hình khối được tạo ra khi mặt trụ $r = a \cos \theta$ được cắt khỏi mặt cầu có bán kính a và tâm đặt tại gốc tọa độ.

b) Minh họa hình khối ở câu (a) bằng cách vẽ đồ thị mặt cầu và mặt trụ trên cùng một hệ tọa độ.

Bài 13 Tìm khối lượng và khối tâm của hình khối S bị giới hạn bởi paraboloid $z = 4x^2 + 4y^2$ và mặt phẳng $z = a$ ($a > 0$) nếu S có mật độ K không đổi.

Bài 14 Tìm khối lượng của một hình cầu B được cho bởi $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ nếu mật độ tại điểm bất kỳ trên hình cầu tỷ lệ với khoảng cách từ nó đến trục z .

Bài 15 Tính tích phân bằng cách chuyển sang hệ tọa độ trụ

$$1) \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 xz dz dx dy. \quad 2) \int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dz dy dx.$$