Topic 22 - Tích Phân Mặt

Bài 1 Cho S là mặt biên của một chiếc hộp được bao quanh bởi các mặt phẳng $x = 0, x = 2, y = 0, y = 4, z = 0$ và $z = 6$. Tính xấp xỉ $\iint\limits_S e^{-0.1(x+y+z)} dS$ bằng cách sử dụng tổng Riemann như trong định nghĩa, lấy các mảnh S_{ij} hình chữ nhật là các mặt của hộp S và các điểm P_{ij}^* là tâm của các hình chữ nhật.

Bài 2 Một mặt S bao gồm mặt trụ $x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1$ cùng với các đĩa tròn trên đỉnh và dưới đáy. Giả sử bạn biết f là một hàm liên tục với

$$f(\pm 1, 0, 0) = 2, \qquad f(0, \pm 1, 0) = 3, \qquad f(0, 0, \pm 1) = 4$$

Ước tính giá trị của $\iint\limits_S f(x, y, z) dS$ bằng cách sử dụng tổng Riemann, lấy các mảnh S_{ij} là một phần tử của bốn phần mặt trụ và các đĩa tròn trên đỉnh và đáy.

Bài 3 Cho H là bán cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 50, z \geq 0$, và giả sử f là hàm liên tục với $f(3, 4, 5) = 7,\ f(3, -4, 5) = 8,\ f(-3, 4, 5) = 9$ và $f(-3, -4, 5) = 12$. Bằng cách chia H bằng bốn mảnh, hãy ước tính giá trị của $\iint\limits_H f(x, y, z) dS$.

Bài 4 Giả sử $f(x, y, z) = g(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$, trong đó g là hàm một biến sao cho $g(2) = -5$. Tính $\iint\limits_S f(x, y, z) dS$, trong đó S là mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Bài 5 Tính tích phân mặt.

1) $\iint\limits_S (x + y + z) dS$, S là hình bình hành có các phương trình tham số $x = u + v,\ y = u - v,\ z = 1 + 2u + v,\ 0 \leq u \leq 2,\ 0 \leq v \leq 1$.

2) $\iint\limits_S xyz dS$, S là mặt nón có các phương trình tham số $x = u \cos v,\ y = u \sin v,\ z = u,\ 0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq \dfrac{\pi}{2}$.

3) $\iint\limits_S y dS$, S là mặt xoắn ốc có phương trình vector $r(u, v) = \langle u \cos v, u \sin v, v \rangle$ $0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq \pi$.

4) $\iint\limits_S (x^2 + y^2 dS$, S là mặt có phương trình vector $r(u, v) = \langle 2uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2 \rangle,\ u^2 + v^2 \leq 1$.

5) $\iint\limits_S x^2 yz dS$, S là một phần của mặt phẳng $z = 1 + 2x + 3y$ nằm phía trên hình chữ nhật $[0, 3] \times [0, 2]$.

6) $\displaystyle\iint_S xz\,dS$, S là một phần của mặt phẳng $2x+2y+z=4$ nằm trong phần tám thứ nhất.

7) $\displaystyle\iint_S x\,dS$, S là mặt $z=\dfrac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}})$ $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$.

8) $\displaystyle\iint_S x^2z^2\,dS$, S là phần của mặt nón $z^2=x^2+y^2$ nằm giữa các mặt phẳng $z=1$ và $z=3$.

9) $\displaystyle\iint_S z\,dS$, S là mặt $x=y+2z^2$ $0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1$.

10) $\displaystyle\iint_S y\,dS$, S là phần của mặt paraboloid $y=x^2+z^2$ nằm trong mặt trụ $x^2+z^2=4$.

11) $\displaystyle\iint_S y^2\,dS$, S là phần của mặt cầu $x^2+y^2+z^2=4$ nằm bên trong mặt trụ $x^2+y^2=1$ và trên mặt phẳng xy.

12) $\displaystyle\iint_S (x^2z+y^2z)\,dS$, S là nửa mặt cầu $x^2+y^2+z^2=4,\ z\ge 0$.

13) $\displaystyle\iint_S xz\,dS$, S là biên của miền được bao quanh bởi mặt trụ $y^2+z^2=9$, và các mặt phẳng $x=0,\ x+y=5$.

14) $\displaystyle\iint_S (z+x^2y)\,dS$, S là phần của mặt trụ $y^2+z^2=1$ nằm giữa các mặt phẳng $x=0$ và $x=3$ trong góc phần tám thứ nhất.

15) $\displaystyle\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,dS$, S là phần của mặt trụ $x^2+y^2=9$ giữa các mặt phẳng $z=0$ và $z=2$, cùng với các mặt đĩa tròn trên đỉnh và đáy.

Bài 6 Tính tích phân mặt $\displaystyle\iint_S F.dS$ của trường vector F được cho và mặt định hướng S. Nói cách khác, tìm thông lượng của F qua S. Với các mặt đóng, sử dụng định hướng dương (ra ngoài).

1) $F(x,y,z)=ze^{xy}\mathbf{i}-3ze^{xy}\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$, S là hình bình hành có các phương trình tham số $x=u+v,\ y=u-v,\ z=1+2u+v,\ 0\le u\le 2,\ 0\le v\le 1$ với định hướng lên.

2) $F(x,y,z)=z\mathbf{i}+y\mathbf{j}+x\mathbf{k}$, S là mặt xoắn ốc có phương trình vector $r(u,v)=\langle u\cos v,u\sin v,v\rangle$ $0\le u\le 1,\ 0\le v\le \pi$ với định hướng lên.

3) $F(x,y,z)=xy\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+zx\mathbf{k}$, S là phần của mặt paraboloid $z=4-x^2-y^2$ nằm phía trên hình vuông $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$ với định hướng lên.

4) $F(x,y,z) = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$, S là phần của mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ giữa các mặt phẳng $z = 1$ và $z = 3$ với định hướng xuống.

5) $F(x,y,z) = x\mathbf{i} - z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, S là phần của mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 4$ trong góc phần tám thứ nhất, với định hướng tới góc tọa độ.

6) $F(x,y,z) = xz\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, S là nửa mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 25$, $y \geq 0$ định hướng theo hướng trục y dương.

7) $F(x,y,z) = y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$, S chưa mặt paraboloid $y = x^2+z^2$, $0 \leq y \leq 1$, và đĩa $x^2+z^2 \leq 1, y = 1$.

8) $F(x,y,z) = xy\mathbf{i} + 4x^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$, S là mặt $z = xe^y, 0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ định hướng lên.

9) $F(x,y,z) = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$, S là hình lập phương có các đỉnh $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

10) $F(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, S là biên của miền được bao quanh bởi mặt trụ $x^2+z^2 = 1$ và các mặt phẳng $y = 0$ và $x + y = 2$.

11) $F(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, S là biên của nửa mặt trụ đặc $0 \leq z \leq \sqrt{1-y^2}$, $0 \leq x \leq 2$.

12) $F(x,y,z) = y\mathbf{i} + (z-y)\mathbf{j} + x\mathbf{k}$, S là bề mặt của khối tứ diện có các đỉnh $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1$