

BÀI TẬP ĐẠO HÀM HÀM NHIỀU BIẾN

1 Đạo hàm riêng và vi phân cấp một

Tính các đạo hàm riêng và vi phân cấp một tại các điểm được chỉ ra:

1. $f(x, y) = x^2y + 3xy^2$, $(x_0, y_0) = (2, -1)$.
2. $f(x, y) = x^3 \sin(y - x)$, $(x_0, y_0) = (\pi, \pi)$.
3. $f(x, y) = (y - 1)e^{x^2+2y}$, $(x_0, y_0) = (-1, 1)$.
4. $f(x, y) = \tanh\left(\frac{x}{y}\right)$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$.
5. $f(x, y) = \ln\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$ tại các điểm (x_0, y) sao cho $x_0 \neq 0$.

Tính đạo hàm riêng và vi phân cấp một của hàm ba biến.

1. Tính $f'_x(1, 0, 1)$, $f'_z(1, -1, 1)$ của $f(x, y, z) = \frac{y}{xz} \ln(y^2 + 2z)$.
2. Tính $f'_y(x, y, z)$ của $f(x, y, z) = y\sqrt{y^2 + x^2 + z^2}$.
3. Tính f'_x, f'_y, f'_z của $f(x, y, z) = \arctan \frac{x+z}{y}$ tại những điểm mà f xác định.
4. Tính $f'_x(x, y, z)$ của $f(x, y, z) = (xy)^z$
5. Tính $df(1, 2, 1)$ với $f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2}$.

Tìm miền xác định của

1. f'_x với $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
2. f'_y với $f(x, y) = \ln(x - 2y)$.
3. f'_x, f'_y với $f(x, y) = y\sqrt[3]{x^2 + y^2}$.
4. f'_x với $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-x^2-y^2}}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
5. f'_x, f'_y với $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x}, & x \neq 0 \\ y, & x = 0 \end{cases}$.

Với hàm số f cho trước, tính giá trị biểu thức $A(x, y)$ theo x, y hoặc $A(x, y, z)$ theo x, y, z .

1. $f(x, y) = \frac{x^2}{2y} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, $A(x, y) = x^2 f'_x(x, y) + y^2 f'_y(x, y)$. DS : $\frac{x^3}{y}$
2. $f(x, y) = xy + x^2 \ln\left(\frac{y}{x}\right)$, $A(x, y) = xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) - 2f(x, y)$. DS : 0
3. $f(x, y) = 4e^{-2y} + (2x + 4y - 3)e^{-y} - x - 1$, $A(x, y) = (f'_x)^2 + f'_y + z$. DS : $-x$
4. $f(x, y, z) = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, $A(x, y, z) = f'_x + f'_y + f'_z$. DS : $\frac{3}{x+y+z}$

Trong các bài dưới đây, tìm hàm $f(x, y)$ khả vi thỏa mãn điều kiện đã cho

1. $f'_x(x, y) = x^2 - y, f'_y(x, y) = y^2 - x.$
2. $f'_x(x, y) = 3y^2 + 2xy + 2x, f'_y(x, y) = 6xy + x^2 + 3.$
3. $df(x, y) = (e^x + y + \sin x) dx + (e^y + x + \sin y) dy.$
4. $df(x, y) = \left(x + e^{\frac{x}{y}} \right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y} \right) dy.$

Tính số gia và vi phân của các hàm số dưới đây tại các điểm được chỉ ra

1. $f(x, y) = x^2y, (x_0, y_0) = (1, 1).$
2. $f(x, y) = x^2y, (x_0, y_0) = (1, 1), \Delta x = -0.1, \Delta y = 0.01.$
3. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ nếu x thay đổi từ 2 đến 2.1 và y thay đổi từ 1 đến 1.2.

Các bài toán ứng dụng.

1. Tìm hệ số góc tiếp tuyến của giao tuyến giữa mặt cong $S : z = x^2y + 2yx^y$ và mặt phẳng $y = -1$ tại điểm có hoành độ $x = 2$.
2. Tìm hệ số góc tiếp tuyến của giao tuyến giữa mặt cong $S : z = \sin xy + 2x^2 - y$ và mặt phẳng $x = \pi$ tại điểm có tung độ $y = 1$.
3. Một chiếc thùng hình trụ có kích thước bên trong là: bán kính $R = 2.5m$, chiều cao $H = 4m$, độ dày thành và đáy là $1dm$. Hãy tính gần đúng thể tích vật tư sử dụng cho việc chế tạo thùng.
4. Một hình hộp chữ nhật có kích thước các cạnh là: $a = 2m, b = 3m, c = 6m$. Hãy tính gần đúng độ dài đường chéo hình hộp nếu a tăng $2cm$, b tăng $1cm$ và c giảm $3cm$.
5. Trong nón cụt có bán kính đáy dưới $R = 20cm$, bán kính đáy trên $r = 10cm$, chiều cao $h = 30cm$. Tính xấp xỉ sự thay đổi thể tích nếu R tăng thêm $2mm$, r tăng thêm $3mm$ và h giảm đi $1mm$.

2 Đạo hàm và vi phân cấp cao

Tính các đạo hàm cấp hai theo yêu cầu tại các điểm được chỉ ra.

1. $f''_{xx}(1, 0), f''_{xy}(-1, 1)$ với $f(x, y) = \arctan(x + 2y^2).$
2. $f''_{yy}(2, 0)$ với $f(x, y) = \sin(\pi x + x^2y).$
3. $f''_{xy}(x, y), f''_{yy}(x, y)$ với $f(x, y) = \ln \left[\cosh \left(\frac{x}{y} \right) \right].$
4. $f''_{xz}(0, 1, -1), f''_{zz}(1, 0, 0)$ với $f(x, y, z) = xyz - \arctan(x^2 + z).$
5. $f''_{yz}(x, y, z)$ với $f(x, y, z) = (yz)^x.$

Tính vi phân cấp hai của các hàm số sau tại các điểm được chỉ ra

1. $f(x, y) = x^3 + x^2y - 2x^2y^2 + 3xy^2 - 1, (x_0, y_0) = (2, -3).$
2. $f(x, y) = \ln(x^2 + 2xy), (x_0, y_0) = (1, 0).$
3. $f(x, y) = \tan^2(2x - y), (x_0, y_0) = (0, 0).$

Tìm đạo hàm cấp cao tại các điểm được chỉ ra.

1. $f_{xy^3}^{(4)}\left(0, \frac{\pi}{2}\right), f(x, y) = x \cos(x + 2y).$
2. $f_{xy^5}^{(6)}(x, y), f(x, y) = (x + 1)e^{x^2 y}.$
3. $f_{x^2 y^5}^{(6)}(1, -1), f(x, y) = x e^{x^2 y}.$
4. $f_{x^5 y^5}^{(10)}(-1, -1), f(x, y) = \frac{1}{2x - 3y}.$
5. $f_{x^5 y^5}^{(10)}(-1, -1), f(x, y) = \sin(2x - y).$
6. $f_{x^8 y^4}^{(12)}(x, y), f(x, y) = (x - y^2) e^{x+y}$
7. $f''_{xz}(0, 1, -1), f''_{zz}(0, 1, -1)$ với $f(x, y, z) = yz - \arctan(x^2 + z).$
8. $f''_{yz}(1, 1, 2)$ với $f(x, y, z) = (xy)^z.$

3 Đạo hàm và vi phân hàm hợp

1. Cho $z = f(u, v) = u^2v - uv^2$, trong đó $u = \sin(x-y), v = \sin(x.y)$. Tính $z'_x(\pi, \frac{\pi}{2}), z'_y(0, \pi)$.
2. Cho $u = f(x, y, z) = xyz$, với $x = t^2 + 1, y = \ln t, z = \tan t$. Tính $u'(t)$.
3. Cho $u = f(x, y, z) = \frac{yz}{x} + 2y$, với $x = \arctan t, y = t^2 + 1, z = e^{t-1}$. Tính $du(1)$.
4. Với 1mol khí lý tưởng, phương trình trạng thái cho bởi $PV = 8.31T$, trong đó $P(kPascal), V(Lit), T(Kenwin)$. Tại thời điểm nhiệt độ đạt được 300^0K và thể tích khí đạt $100lit$, vận tốc tăng nhiệt là $0.1K/s$ và vận tốc tăng thể tích là $0.2L/s$, tính tốc độ thay đổi của áp suất P .
5. Cho $z = f(x) = \tanh(x^2 + 2x)$. Nếu $x = u + v - e^{2u}$, tính $z'_v(u, v)$.
6. Cho $z = f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$.
 - Tính $f'_x(0, 1), f'_y(0, 1)$.
 - Nếu $y = \ln(x^2 + e)$, tính $dz(0)$.
 - Nếu $x = 2t - 1, y = t^3 + 2$, tính $dz(t)$.
7. Cho $z = f(x, y)$, với f là hàm khả vi và $x = x(t), y = y(t)$. Biết rằng $x(3) = 12, y(3) = -4, x'(3) = 1, y'(3) = 6, f'_x(12, -4) = -2, f'_y(12, -4) = 7$. Tính $z'(3)$.
8. Cho $z = f(x, y) = \arcsin(x - y)$, với $x = u^2 + v^2, y = 1 - 2uv$. Tính z'_u, z'_v .
9. Cho $g(s, t) = f(x(s, t), y(s, t))$. Biết

$$\begin{aligned} x(-1, 2) &= 2, x'_s(-1, 2) = 0, x'_t(-1, 2) = -3, \\ y(-1, 2) &= 3, y'_s(-1, 2) = 1, y'_t(-1, 2) = 5, \\ f'_x(2, 3) &= -3, f'_y(2, 3) = 6. \end{aligned}$$
 Tính $g'_s(-1, 2), g'_t(-1, 2)$.
10. Cho $f(x, y)$ là hàm khả vi theo hai biến x, y và $z(u, v) = f(e^u + \sin v, e^u + \cos v)$. Biết $f'_x(1, 2) = 3, f'_y(1, 2) = 6$, tính $z'_u(0, 0), z'_v(0, 0)$.
11. Cho $z = f(x, y)$, với $x = s + t, y = s - t$. Chứng minh rằng $(f'_x)^2 - (f'_y)^2 = z'_s z'_t$.
12. Cho $z = f(x, y)$, với $x = e^s \cos t, y = e^s \sin t..$
Chứng minh rằng $(f'_x)^2 + (f'_y)^2 = e^{-2s} [(z'_s)^2 + (z'_t)^2]$.

13. Cho $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$, Chứng minh rằng $\frac{1}{x}z'_x + \frac{1}{y}z'_y = \frac{z}{y^2}$.
14. Cho $u = f(x - y, y - z, z - x)$. Chứng minh rằng $u'_x + u'_y + u'_z = 0$.
15. Cho $z = x^2 + xy$ với $x = t^2, y = 3t$. Tính $z''(t)$.
16. Cho $z = x^2y - 2\ln \frac{x}{y}$, với $x = u^2 - v^2, y = uv$. Tính $z''_{uu}(1, 1), z''_{uv}(1, 1)$.
17. Chứng minh rằng hàm số $u = xf(x + y) + yg(x + y)$, với f, g khả vi, thỏa mãn phương trình :
 $u''_{xx} - 2u''_{xy} + u''_{yy} = 0$.
18. Cho $u = f(x, xy, xyz)$, với f là hàm khả vi. Tìm $du(x, y, z)$.
19. Cho f, g là các hàm khả vi và $z = xf\left(\frac{x}{y}\right) + yg\left(\frac{x}{y}\right)$, chứng minh $xz'_x + yz'_y = z$.
20. Cho f là hàm khả vi và $z = xf\left(\frac{x}{y^2}\right)$, chứng minh $2xz'_x + yz'_y = 2z$.
21. Cho f, g là hàm khả vi và $z = f(x + y) + g(x - y)$, chứng minh $z''_{xx} - z''_{yy} = 0$.

4 Đạo hàm và vi phân của hàm ẩn

1. Hàm ẩn $y = y(x)$ xác định từ phương trình $x + y = e^{x-y}$. Tính $y'(x), y''(x)$.
2. Cho hàm ẩn $y = y(x)$ thỏa phương trình $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$ và $y(1) = 1$. Tìm $dy(1), d^2y(1)$.
3. Cho hàm ẩn $z = z(x, y)$ thỏa phương trình : $xz - e^{\frac{z}{y}} + x^3 + y^3 = 0$. Tìm z'_x, z'_y .
4. Tìm $z'_x(1, -2), z'_y(1, -2)$ nếu $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0, z(1, -2) = 2$.
5. Tính z''_{xy} nếu $z = z(x, y)$ thỏa phương trình $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$.
6. Với f là hàm hai biến khả vi, cho hàm ẩn $z = z(x, y)$ thỏa $f(yz, e^{xz}) = 0$, tìm z'_x, z'_y .
7. Cho $z = z(x, y)$ xác định từ hệ

$$\begin{cases} x \cos \alpha + y \sin \alpha + \ln z = f(\alpha), \\ -x \sin \alpha + y \cos \alpha = f'(\alpha) \end{cases}$$
,
trong đó $f = f(\alpha), \alpha = \alpha(x, y)$ là các hàm khả vi. Chứng minh rằng:
 $(z'_x)^2 + (z'_y)^2 = z^2$.
8. Cho hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định từ hệ

$$\begin{cases} x = u + \ln v, \\ y = v - \ln u, \\ z = 2u + v \end{cases}$$
.
Tìm z'_x, z'_y tại $u = 1, v = 1$.
9. Cho $z = z(x, y)$ thỏa $ze^z = xe^x + ye^y$ và $u = \frac{x+z}{y+z}$. Tính u'_x, u'_y .

5 Đạo hàm theo hướng và vector gradient

1. Cho $f(x, y, z) = x + e^{xyz} + \tanh(z - y)$. Tìm $\nabla f(0, 1, -1)$.
2. Cho $f(x, y) = x^3 \sin(x + y - y^2)$. Tìm $\nabla f(\pi, 1)$.
3. Cho $f(x, y) = x^2y + \arctan(x + y)$ và vector $\vec{a} = (1, -1)$. Tìm $\frac{\partial f(M)}{\partial \vec{a}}$.
4. Cho $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$. Tìm hướng tăng nhanh nhất của f tại $M(1, 2)$.
5. Cho $f(x, y) = -3 + 2xy^2 + x^3 + y^3$ và $M(2, 1)$. So sánh tốc độ thay đổi của f tại M theo các hướng $\vec{a} = (3, 4)$, $\vec{b} = (-3, 4)$.
6. Cho $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$. Gọi vector $\vec{a} = \nabla f(0, 0, 0)$. Tìm $\frac{\partial f(1, -2, 2)}{\partial \vec{a}}, \frac{\partial f(0, 0, 0)}{\partial \vec{a}}$.
7. Tại những điểm nào của không gian thì vector $\nabla f(x, y, z)$ của $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$
 - a/ Vuông góc với trục Oz .
 - b/ Song song với trục Oz .
8. Cho $g = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ với f là hàm khả vi, tìm $\nabla g(x, y, z)$.
9. Tìm phương trình mặt tiếp diện và pháp tuyến của các mặt cong sau tại các điểm được chỉ ra.
 - a/ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ tại điểm $M(1, 1, \sqrt{2})$.
 - b/ $z = \sin x \cos y$ tại điểm $M\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$.
 - c/ $z = e^{x \cos y}$ tại điểm $M\left(1, \pi, \frac{1}{e}\right)$.
 - d/ $x(t+z)(xy-z)+8=0$ tại điểm $M(2, 1, 3)$

6 Khai triển Taylor

1. Tìm khai triển Maclaurin cấp 2 của $f(x, y) =$

7 Cực trị hàm nhiều biến

7.1 Cực trị tự do

Tìm cực trị các hàm số sau:

1. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.
2. $f(x, y) = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.
3. $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, (x > 0, y > 0)$.
4. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2 \ln x - 18 \ln y$.
5. $f(x, y) = x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.
6. $f(x, y) = xy^2(1 - x - y), (x > 0, y > 0)$.

$$7. f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z.$$

$$8. f(x, y, z) = x + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{2}{z}.$$

7.2 Cực trị có điều kiện

Tìm cực trị của các hàm số dưới đây với điều kiện tương ứng.

$$1. f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4, x + y + 3 = 0.$$

$$2. f(x, y) = \frac{x}{2} + \frac{y}{3}, x^2 + y^2 = 1.$$

$$3. f(x, y) = x^2 + 12xy + 2y^2, 4x^2 + y^2 = 25.$$

$$4. f(x, y) = x^2 + y^2, x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0.$$

$$5. f(x, y) = \frac{x - y}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}, x^2 + y^2 = 1.$$

8 Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Trong các bài dưới đây, tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên miền được chỉ ra.

$$1. f(x, y) = xy, x^2 + y^2 \leq 1.$$

$$2. f(x, y) = 3x^2 + 5y^2 - 2, x^2 + y^3 \leq 4.$$

$$3. f(x, y) = 3x^2 + 5y^2 - 2, 2x^2 + 3y^2 \leq 25.$$

$$4. f(x, y) = x^2 - xy + y^2, |x| + |y| \leq 1$$