1. Tích phân kép
   - Bài toán dẫn đến tích phân kép
   - Định nghĩa tích phân kép
   - Định lý Fubini
2. Phép đổi biến số trong tích phân kép
   - Phép đổi biến tổng quát
   - Phép đổi biến tọa độ cực

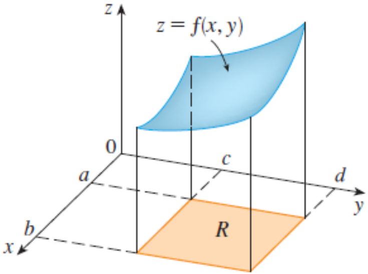
Bài toán thể tích

- Xét hàm số hai biến f không âm trên miền chữ nhật

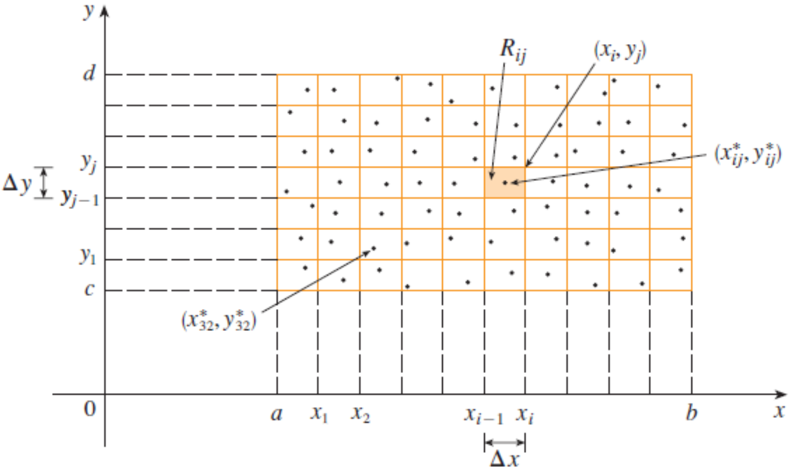
$$R = [a;b] \times [c;d] = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 | a \le x \le b, c \le y \le d\}.$$

- Ta cần tính thể tích của khối S nằm trên R và nằm dưới đồ thị của f

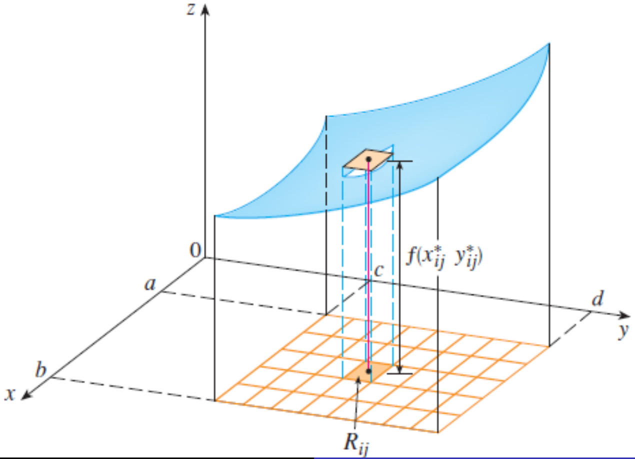
$$S = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \le z \le f(x;y), (x;y) \in R\}.$$



Ta chia R thành nhiều miền chữ nhật con R_{ij}, mỗi miền con đều có diện tích là $\Delta x \Delta y$.



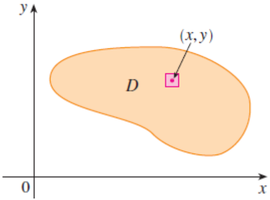
$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{i=j}^{n} f(x_{ij}^*; y_{ij}^*)\Delta x \Delta y$$

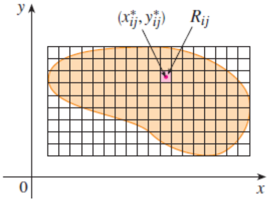


Bài toán khối lượng

- Xét một bản phẳng chiếm một miền D trong mặt phẳng xy và **khối lượng riêng (density)** của nó tại điểm $(x; y)$ thuộc D được cho bởi $\rho(x; y)$, trong đó ρ là một hàm liên tục trên D.
- Để tìm khối lượng của bản phẳng này, ta chia miền chữ nhật R (chứa D) thành các miền chữ nhật con R_{ij} có cùng kích thước $\Delta x, \Delta y$ và xem $\rho(x; y)$ bằng 0 ngoài miền D. Khi đó

$$m \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{i=j}^{n} \rho(x_{ij}^{*}; y_{ij}^{*}) \Delta x \Delta y.$$





Định nghĩa

Tích phân kép (double intergral) *của hàm số f trên miền chữ nhật R là*

$$\iint\limits_R f(x;y)dxdy = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*;y_{ij}^*)\Delta x\Delta y,$$

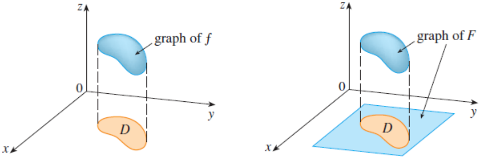
nếu giới hạn ở vế phải tồn tại.

Cho f là một hàm số xác định trên một miền phẳng bị chặn D. Tích phân kép của f trên D được định nghĩa là

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \iint\limits_R F(x;y)dxdy,$$

trong đó R là một miền chữ nhật chứa D, và F là một hàm xác định trên R như sau

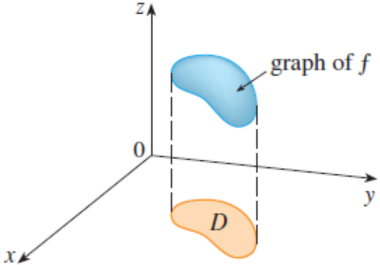
$$F(x;y) = \begin{cases} f(x;y), & \text{nếu } (x;y) \in D, \\ 0, & \text{nếu } (x;y) \in R \setminus D. \end{cases}$$



Ứng dụng tính thể tích vật thể

Nếu f là hàm không âm trên miền D, thì thể tích V của khối nằm giữa D và mặt cong $z = f(x; y)$ là

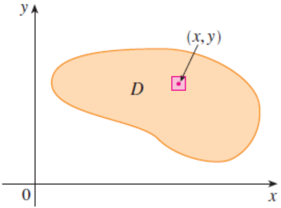
$$V = \iint_D f(x; y)dxdy.$$



Ứng dụng tính khối lượng của bản phẳng

- Xét một bản phẳng chiếm một miền D trong mặt phẳng xy và **khối lượng riêng (density)** của nó tại điểm $(x; y)$ thuộc D được cho bởi $\rho(x; y)$, trong đó ρ là một hàm liên tục trên D.
- Khi đó, **khối lượng (mass)** của bản phẳng này là

$$m = \iint_D \rho(x; y)dxdy.$$

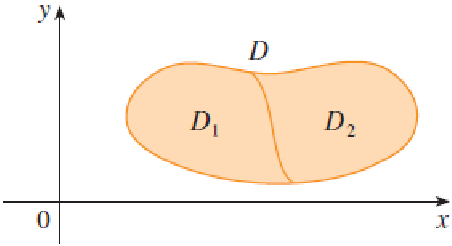


Tính chất

- $$\iint\limits_D [f(x;y)+g(x;y)]dxdy = \iint\limits_D f(x;y)dxdy + \iint\limits_D g(x;y)dxdy.$$
- $\iint\limits_D cf(x;y)dxdy = c\iint\limits_D f(x;y)dxdy$, với c là hằng số.
- Nếu $f(x;y) \geq g(x;y)$ với mọi $(x;y) \in D$, thì
$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy \geq \iint\limits_D g(x;y)dxdy.$$

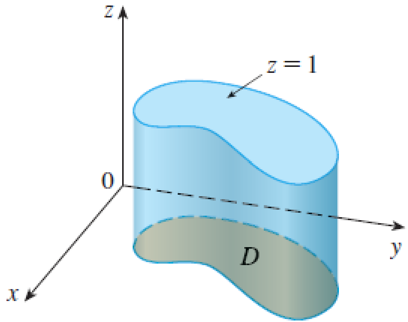
- Nếu $D = D_1 \cup D_2$, trong đó D_1 và D_2 không chồng lấn lên nhau trừ biên của chúng, thì

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x;y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x;y)dxdy.$$



- Nếu ta tích phân hàm hằng $f(x; y) = 1$ trên miền bị chặn D, thì ta thu được diện tích của D, tức là

$$\iint_D 1dxdy = A(D).$$



Định lý giá trị trung bình

Định lý

Nếu $f(x;y)$ liên tục trên miền đóng và bị chặn D, thì tồn tại điểm $(x^*;y^*) \in D$ sao cho

$$f(x^*;y^*) = \frac{1}{A(D)} \cdot \iint\limits_D f(x;y)dxdy,$$

trong đó $A(D)$ là diện tích của miền D.

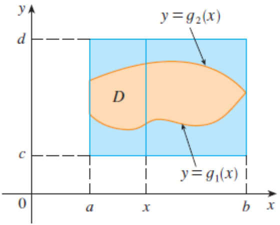
Định lý

Nếu f liên tục trên miền phẳng

$$D = \left\{(x;y)|a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\right\},$$

thì

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x;y)dy \right) dx.$$



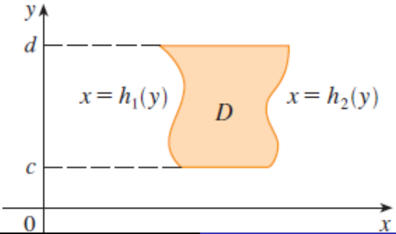
Định lý

Nếu f liên tục trên miền phẳng

$$D = \left\{(x;y) | c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y)\right\},$$

thì

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x;y)dx\right) dy.$$

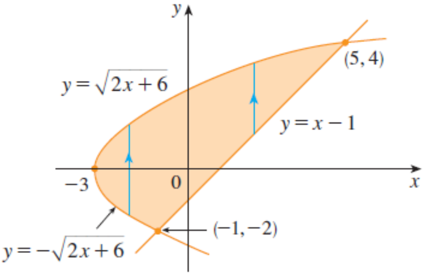


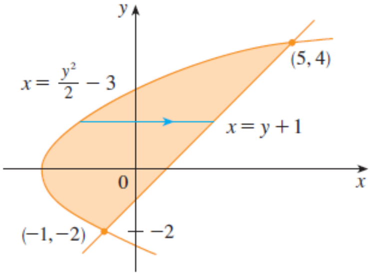
Ví dụ

Tính tích phân kép

$$\iint\limits_D xydxdy,$$

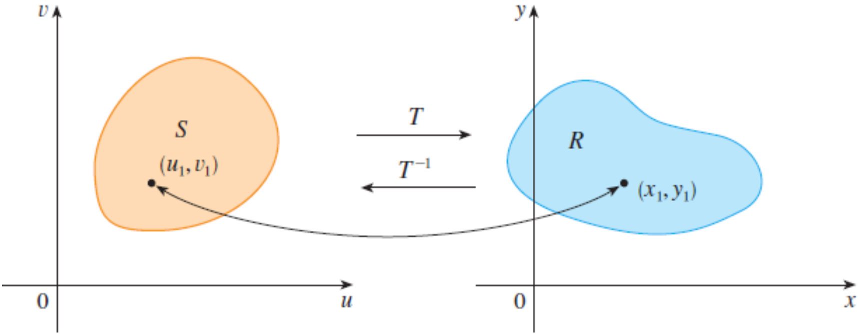
trong đó D là miền phẳng được giới hạn bởi đường thẳng $y = x - 1$ và parabol $y^2 = 2x + 6$.

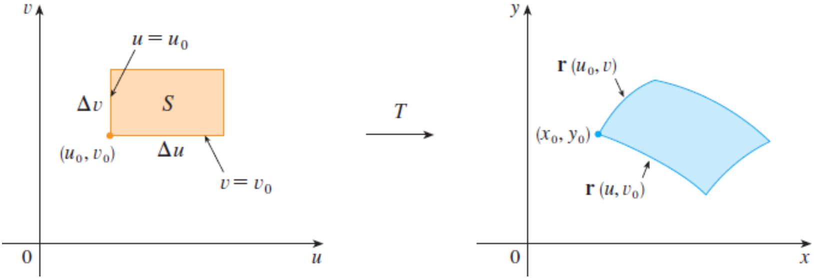




Phép đổi biến số trong tích phân kép là một **phép biến đổi (transformation)** T từ mặt phẳng (u, v) sang mặt phẳng (x, y):

$$x = x(u; v), \quad y = y(u; v).$$





$$\mathbf{r}(u; v) = x(u; v)\mathbf{i} + y(u; v)\mathbf{j}$$

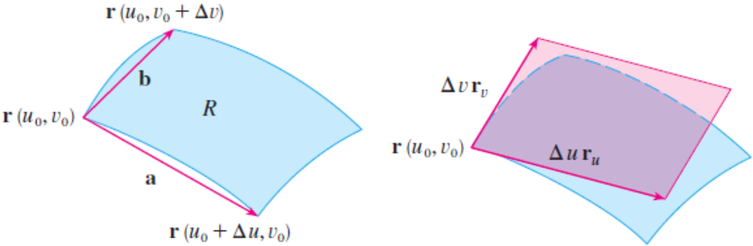
- Xét một miền chữ nhật nhỏ S trong mặt phẳng (u, v).
- Ảnh của S là một miền "hình bình hành cong" R trong mặt phẳng (x, y).

- Ta xấp xỉ miền R bởi một miền hình bình hành xác định bởi hai vectơ **a** và **b**

$$\mathbf{a} \approx \Delta u \mathbf{r}_u, \quad \mathbf{b} \approx \Delta v \mathbf{r}_v.$$

- Do đó, diện tích của R được xấp xỉ bởi

$$A(R) \approx |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| \approx |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| \cdot \Delta u \Delta v.$$



Tính tích có hướng $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$, ta được

$$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot \mathbf{k}$$

Định nghĩa

Jacobi *của phép biến đổi T được cho bởi các phương trình*

$$x = x(u; v), \quad y = (u; v),$$

là

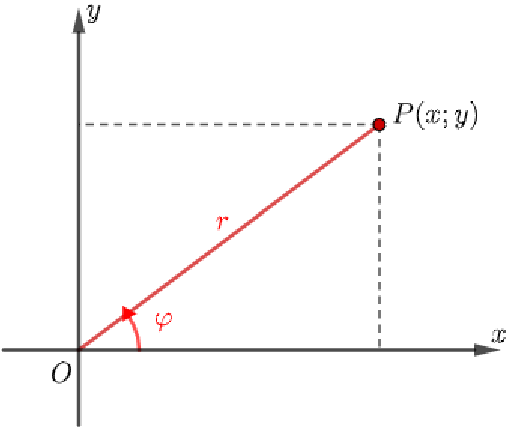
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

- Giả sử T là một phép biến đổi một-một thuộc lớp C^1 có Jacobian khác không và biến miền S trong mặt phẳng (u, v) thành miền R trong mặt phẳng (x, y).
- Giả sử $f(x; y)$ liên tục trên R.
- Ta có công thức đổi biến cho tích phân kép

$$\iint\limits_{R} f(x; y)dxdy = \iint\limits_{S} f\Big(x(u; v); y(u; v)\Big)\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|dudv.$$

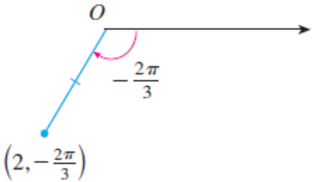
Tọa độ cực (polar coordinates) $(r; \varphi)$ của điểm P liên hệ với tọa độ chữ nhật $(x; y)$ của điểm đó bởi các công thức sau:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$



Ví dụ

Hãy vẽ điểm có tọa độ cực là $(2; -2\pi/3)$, và tìm tọa độ Descartes của nó.



$$x = 2\cos(-2\pi/3) = -1, \quad y = 2\sin(-2\pi/3) = -\sqrt{3}$$

- Xét **phép đổi biến tọa độ cực**:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

- Jacobi của phép đổi biến tọa độ cực là

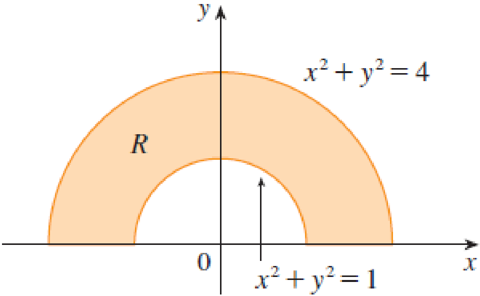
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

- Khi đó, theo công thức đổi biến tổng quát, ta thu được

$$\iint\limits_R f(x;y)dxdy = \iint\limits_S f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)rdrd\varphi.$$

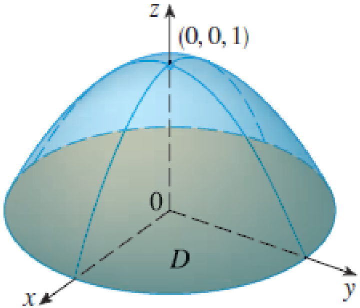
Ví dụ

Tính tích phân kép $\iint\limits_R (3x + 4y^2)dxdy$, *trong đó R là miền nằm trong nửa mặt phẳng trên và được giới hạn bởi các đường tròn* $x^2 + y^2 = 1$ *và* $x^2 + y^2 = 4$.



Ví dụ

Tính thể tích của vật thể được giới hạn bởi mặt phẳng $z = 0$ *và mặt paraboloid* $z = 1 - x^2 - y^2$.



Ví dụ

Tính thể tích của khối nằm dưới mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$, *nằm trên mặt phẳng* $z = 0$, *và nằm bên trong mặt trụ* $x^2 + y^2 = 2x$.