Bài tập- Tích Phân kép

Bài 1 Tính các tích phân lặp

1. $\displaystyle\int_0^4\int_0^{\sqrt{y}} xy^2dxdy.$

2. $\displaystyle\int_0^1\int_{2x}^{2} (x-y)dydx.$

3. $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{x} (1+2y)dydx.$

4. $\displaystyle\int_0^2\int_{y}^{2y} xydxdy.$

5. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{s^2} \cos(s^3)dtds.$

6. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{e^v} \sqrt{1+e^v}dwdv.$

Bài 2 Tính các tích phân hai lớp

1. $\displaystyle\iint_D y^2dA;$ $\quad D = \{(x,y)|-1\le y\le 1,\ -y-2\le x\le y\}.$

2. $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x^5+1}dA;$ $\quad D = \{(x,y)|0\le x\le 1,\ 0\le y\le x^2\}.$

3. $\displaystyle\iint_D xdA;$ $\quad D = \{(x,y)|0\le x\le \pi,\ 0\le y\le \sin x\}.$

4. $\displaystyle\iint_D x^3dA;$ $\quad D = \{(x,y)|1\le x\le e,\ 0\le y\le \ln x\}.$

Bài 3 Vẽ hình minh họa một miền

a. Loại I nhưng không phải loại II.

b. Loại II nhưng không phải loại I.

Bài 4 Vẽ hình minh họa một miền

a. Vừa loại I và loại II.

b. Không phải loại I và cũng không phải loại II.

Bài 5 Biểu diễn D như là một miền loại I và loại II. Sau đó tính tích phân hai lớp theo hai cách.

1. $\displaystyle\iint_D xdA;$ $\quad D$ bị giới hạn bởi các đường thẳng $y = x, y = 0, x = 1.$

2. $\displaystyle\iint_D xydA;$ $\quad D$ bị giới hạn bởi các đường cong $y = x^2, y = 3x.$

Bài 6 Xây dựng các tích phân lập theo cả hai trình tự lấy tích phân. Sau đó tính tích phân hai lớp bằng cách sử dụng trình tự lấy tích phân dễ hơn, và giải thích tại sau trình tự đó dễ hơn.

1. $\displaystyle\iint_D y dA$; D bị giới hạn bởi $y = x - 2, x = y^2$.

2. $\displaystyle\iint_D y^2 e^{xy} dA$; D bị giới hạn bởi $y = x, y = x^3, x \geq 0$.

Bài 7 Tính các tích phân hai lớp.

1. $\displaystyle\iint_D x \cos y dA$; D bị giới hạn bởi $y = 0, y = x^2, x = 1$.

2. $\displaystyle\iint_D (x^2 + 2y) dA$; D bị giới hạn bởi $y = x, y = x^3, x \geq 0$.

3. $\displaystyle\iint_D y^2 dA$; D là miền tam giác có các đỉnh $(0, 1), (1, 2), (4, 1)$.

4. $\displaystyle\iint_D xy^2 dA$; D bị giới hạn bởi $x = 0, x = \sqrt{1 - y^2}$.

5. $\displaystyle\iint_D (2x-y) dA$; D bị giới hạn bởi đường cong có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng2.

6. $\displaystyle\iint_D 2xy dA$; D là miền tam giác có các đỉnh $(0, 0), (1, 2), (0, 3)$.

Bài 8 Tính thể tích của hình khối được cho.

1. Nằm dưới mặt phẳng $x - 2y + z = 1$ và nằm trên miền bị giới hạn bởi $x + y = 1$ và $x^2 + y = 1$.
2. Nằm dưới mặt $z = 1 + x^2y^2$ và nằm trên miền được bao bởi $x = y^2$ và $x = 4$.
3. Nằm dưới mặt $z = xy$ và nằm trên tam giác có các đỉnh lần lượt là $(1, 1), (4, 1)$ và $(1, 2)$.
4. Bị giới hạn bởi paraboloid$z = x^2 + 3y^2$ và các mặt phẳng $x = 0, y = 1, y = x$ và $z = 0$.
5. Bị giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $3x + 2y + z = 6$.
6. Bị giới hạn bởi các mặt phẳng $z = x, y = x, x + y = 2$ và $z = 0$.
7. Bị giới hạn bởi mặt trụ $z = x^2, y = x^2$ và các mặt phẳng $z = 0, y = 4$.
8. Bị giới hạn bởi trụ $y^2 + z^2 = 4$ và các mặt phẳng $x = 2y, x = 0, z = 0$ ở góc phần tám (cung 45^o) thứ nhất.

9. Bị giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = r^2$ và $y^2 + z^2 = r^2$.

Bài 9 Sử dụng máy tính/máy tính vẽ đồ thị để tính toán hoành độ của các giao điểm giữa đường cong $y = x^4$ và $y = 3x - x^2$. Nếu D là miền được giới hạn bởi các đường cong này, hãy ước lượng tích phân $\iint\limits_D xdA$.

Bài 10 Tìm thể tích xấp xỉ của hình khối nằm trong góc phần tám thứ nhất, được giới hạn bởi các mặt phẳng $y = x, z = 0, z = x$ và hình trụ $y = \cos x$. (Sử dụng thiết bị vẽ đồ thị để ước tính các giao điểm .)

Bài 11 Tìm thể tích của hình khối bằng cách trừ hai thể tích với nhau

a. Hình khối bị giới hạn bởi các mặt trụ parabolic $y = 1 - x^2, y = x^2 - 1$ và các mặt phẳng $x + y + z = 2, 2x + 2y - z + 10 = 0$.

b. Hình khối bị giới hạn bởi mặt trụ parabolic $y = x^2$ và các mặt phẳng $z = 3y, z = 2 + y$.

Bài 12 Phác họa hình khối có thể tích được cho bởi tích phân lập như sau

1. $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} (1 - x - y)dydx.$

2. $\int\limits_0^1 \int\limits_1^{1-x^2} (1 - x)dydx.$

Bài 13 Sử dụng một hệ thống đại số máy tính để tìm thể tích chính xác của hình khối.

1. Nằm dưới mặt $z = x^3y^4 + xy^2$ và nằm trên miền bị giới hạn bởi các đường cong $y = x^3 - x$ và $y = x^2 + x$ với $x \geq 0$.

2. Nằm giữa các paraboloid $z = 2x^2 + y^2$ và $z = 8 - x^2 - 2y^2$ và nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

3. Bị giới hạn bởi $z = 1 - x^2 - y^2$ và $z = 0$.

4. Bị giới hạn bởi $z = x^2 + y^2$ và $z = 2y$.

Bài 14 Phác họa miền lấy tích phân và thay đổi trật tự lấy tích phân.

1. $\int\limits_0^1 \int\limits_0^y f(x, y)dxdy.$

2. $\int\limits_0^2 \int\limits_{x^2}^4 f(x, y)dydx.$

3. $\int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\cos x} f(x, y)dydx.$

4. $\int\limits_{-2}^2 \int\limits_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)dxdy.$

5. $\int\limits_1^2 \int\limits_0^{\ln x} f(x, y)dydx.$

6. $\int\limits_0^1 \int\limits_{\arctan x}^{\pi/4} f(x, y)dydx.$

Bài 15 Tính các tích phân sau bằng cáchđổi trật tự lấy tích phân.

1. $\displaystyle\int\limits_0^1 \int\limits_{3y}^3 e^{x^2} dxdy.$

2. $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{\pi}} \int\limits_{y}^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2) dydx.$

3. $\displaystyle\int\limits_0^4 \int\limits_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3+1} dydx.$

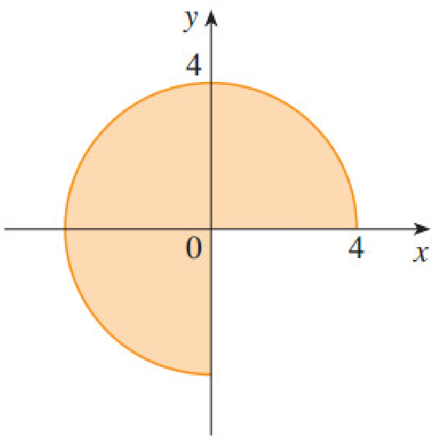
4. $\displaystyle\int\limits_0^1 \int\limits_{x}^1 e^{\frac{x}{y}} dxdy.$

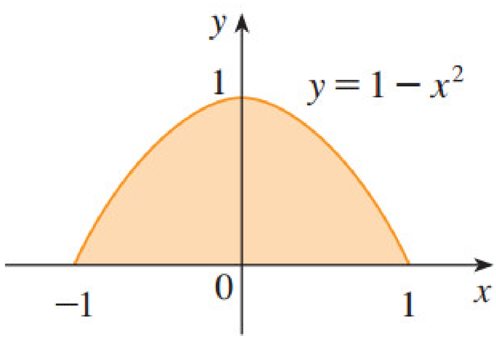
5. $\displaystyle\int\limits_0^1 \int\limits_{\arcsin y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1+\cos^2 x} dxdy.$

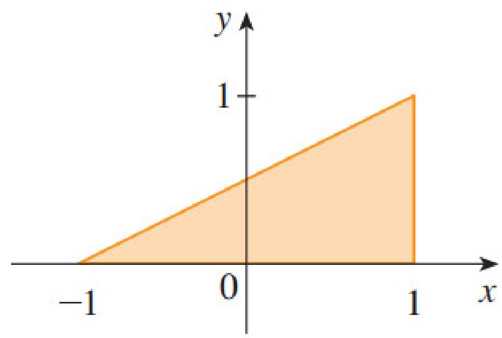
6. $\displaystyle\int\limits_0^8 \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} dxdy.$

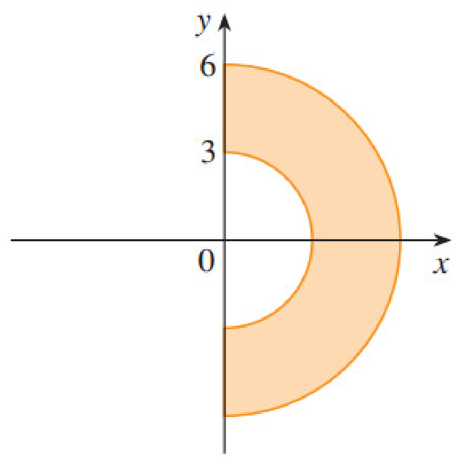
Bài tập - Tích Phân Kép Trong Hệ Tọa Độ Cực

Bài 1 Cho một miền R như hình vẽ. Xác định xem nên sử dụng các tọa độ cực hay các tọa độ Descartes vuông góc và viết $\iint\limits_R f(x,y)dA$ dưới dạng một tích phân lặp, trong đó f là một hàm liên tục tùy ý trên R.

1. 

2. 

3. 

4. 

Bài 2 Phát họa miền có diện tích được cho bởi tích phân sau đây và tính tích phân đó.

1. $\displaystyle\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4}\int\limits_{1}^{2} r dr d\theta$

2. $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\int\limits_{0}^{2\sin\theta} r dr d\theta$

Bài 3 Tính tích phân bằng cách chuyển đổi sang tọa độ cực.

1. $\iint\limits_D x^2 y dA$, trong đó D là phần nửa trên của chiếc đĩa có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng 5.

2. $\iint\limits_R (2x-y)dA$, trong đó R là miền nằm trong góc phần tư thứ nhất được giới hạn bởi đường tròn $x^2+y^2=4$ và các đường thẳng $x=0$ và $y=x$.

3. $\displaystyle\iint_R \sin(x^2+y^2)dA$, trong đó R là miền nằm trong góc phần tư thứ nhất giữa các đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng 1 và 3.

4. $\displaystyle\iint_R \frac{y^2}{x^2+y^2}dA$, trong đó R là miền nằm giữa các đường tròn $x^2+y^2=a^2$ và $x^2+y^2=b^2$ với $0<a<b$.

5. $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}dA$, trong đó D là miền giới hạn bởihình bán nguyệt $x=\sqrt{4-y^2}$ và trục y.

6. $\displaystyle\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}dA$, trong đó D là chiếc đĩa có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng 2.

7. $\displaystyle\iint_R \arctan(\frac{y}{x})dA$, trong đó $R=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 4,\ 0\le y\le x\}$.

8. $\displaystyle\iint_D xdA$, trong đó D là miền thuộc góc phần tư thứ nhất nằm giũa các đường tròn $x^2+y^2=4$ và $x^2+y^2=2x$.

Bài 4 Sử dụng một tích phân hai lớp để tìm diện tích của miền.

1. Một vòng cánh hoa $r=\cos 3\theta$.
2. Miền được giới hạn bởi cả hai hình tim $r=1+\cos\theta$ và $r=1-\cos\theta$.
3. Miền nằm bên trong đường tròn $(x-1)^2+y^2=1$ và nằm bên ngoài đường tròn $x^2+y^2=1$.
4. Miền nằm bên trong hình tim $r=1+\cos\theta$ và nằm bên ngoài đường tròn $r=3\cos\theta$.

Bài 5 Sử dụng các hệ tọa độ cực để tìm thể tích của hình khối cho trước.

1. Nằm dưới hình nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$ và nằm trên hình đĩa $x^2+y^2\le 4$.
2. Nằm dưới paraboloid $z=18-2x^2-2y^2$ và nằm trên mặt phẳng xy.
3. Bị gới hạn bởi hyperboloid $-x^2-y^2+z^2=1$ và mặt phẳng $z=2$.
4. Nằm bên tron hình cầu $x^2+y^2+z^2=16$ và bên ngoài hình trụ $x^2+y^2=4$
5. Một hình cầu có bán kính bằng a.
6. Bị giới hạn bởi paraboloid $z=1+2x^2+2y^2$ và mặt phẳng $z=7$ trong góc phần tám thứ nhất.
7. Nằm trên hình nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$ và nằm dưới hình cầu $x^2+y^2+z^2=1$.
8. Bị giới hạn bởi paraboloid $z=3x^2+3y^2$ và $z=4-x^2-y^2$.

9. Nằm trong cả hình trụ $x^2 + y^2 = 4$ và hình ellipsoid (hình trái xoan) $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$.

Bài 6 a) Người ta sử dụng một mũi khoan hình trụ có bán kính r_1 để khoan một cái lỗ xuyên tâm một hình cầu có bán kính r_2. Tìm thể tích của hình khối có dạng chiếc nhẫn còn lại.

b) Biểu diễn thể tích tìm được ở câu (a) theo chiều cao h của chiếc nhẫn. Chú ý rằng thể tích chỉ phụ thuộc vào h, không phụ thuộc r_1 hay r_2.

Bài 7 Tính tích phân lặp bằng cách chuyển sang tọa độ cực

1. $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \sin(x^2 + y^2)dydx.$

2. $\displaystyle\int_{0}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{0} x^2 ydxdy.$

3. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{y}^{\sqrt{2-y^2}} (x + y)dxdy.$

4. $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{(x^2 + y^2)}dydx.$

Bài 8 Biểu diễn tích phân hai lớp dưới dạng một tích phân đơn theo r. Sau đó sử dụng máy tính của bạn để tính tích phân chính xác đến 4 chữ số thập phân.

1. $\displaystyle\iint_D e^{(x^2+y^2)^2} dA$, trong đó D là chiếc đĩa có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng 1.

2. $\displaystyle\iint_D xy\sqrt{1 + x^2 + y^2} dA$, trong đó D là phần đĩa $x^2 + y^2 \leq 1$ nằm trên góc phần tư thứ nhất.

Bài 9 Một hồ bơi hình tròn có đường kính 40 ft. Độ sâu của nó không đổi từ bờ đông sang tây, và tăng tuyến tính từ 2 ft ở bờ nam sang 7 ft ở bờ bắc. Tìm thể tích nước trong hồ bơi.

Bài 10 Một thiết bị tưới tiêu phun nước theo dạng hình tròn có bán kính là 100 ft. Lượng nước mà máy cung cấp có độ sâu e^{-r} ft/giờ, tại vị trí cách máy phun nước một khoảng cách là r ft.

a. Nếu $0 < R <\leq 100$, tìm tổng lượng nước cung cấp mỗi giời cho khu vực bên trong đường tròn có bán kính R và tâm tại nhà máy phun nước.

b. Xác định một biểu thức cho lượng nước trung bình được cung cấp vào mỗi giờ, tính trên mỗi foot vuông cho khu vực nằm bên trong đường tròn có bán kính R.

Bài 11 Tìm giá trị trung bình của hàm số $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ trên miền hình vành khuyên $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$, trong đó $0 < a < b$.

Bài 12 Gọi D là chiếc đĩa có tâm là gốc tọa độ và bán kính a. Tính khoảng cách trung bình từ các điểm thuộc D đến gốc tọa độ.

Bài 13 Sử dụng các tọa độ cực để kết hợp tổng

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xydydx + \int_{1}^{\sqrt{2}} \int_{0}^{x} xydydx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xydydx$$

Bài Tập -Ứng Dụng Của Tích Phân Kép

Bài 1 Điện tích được phân bố trên hình chữ nhật với $0 \le x \le 5,\ 2 \le y \le 5$ sao cho mật độ điện tích tại (x, y) là $\sigma(x, y) = 2x + 4y$ được đo bằng cu - lông/mét vuông. Tìm tổng điện tích trên hình chữ nhật.

Bài 2 Điện tích được phân bổ trên một đĩa tròn $x^2 + y^2 \le 1$ sao cho mật độ điện tích tại (x, y) là $\sigma(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ được đo bằng cu - lông/mét vuông. Tìm tổng điện tích trên hình đĩa.

Bài 3 Tìm khối lượng và khối tâm của phiến mỏng có điện tích D và có hàm mật độ ρ cho trước.

1. $D = \{(x, y)|1 \le x \le 3,\ 1 \le y \le 4\};\ \rho(x, y) = ky^2$.
2. $D = \{(x, y)|0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\};\ \rho(x, y) = 1 + x^2 + y^2$.
3. D là miền tam giác có các đỉnh là $(0, 0), (2, 1), (0, 3); \rho(x, y) = x + y$.
4. D là miền tam giác bị giới hạn bởi các đường thẳng $y = x; 2x + y = 6; \rho(x, y) = x^2$.
5. D bị giới hạn bởi $y = 1 - x^2; y = 0; \rho(x, y) = ky$.
6. D bị giới hạn bởi $y = x^2; y = x + 2; \rho(x, y) = ky$.
7. $D = \{(x, y)|0 \le y \le \sin(\dfrac{\pi x}{L}),\ 0 \le x \le L\};\ \rho(x, y) = y$.
8. D bị giới hạn bởi các parabol $y = x^2; x = y^2; \rho(x, y) = \sqrt{x}$.

Bài 4 Một phiến mỏng chiếm một phần diện tích chiếc đĩa tròn có dạng $x^2 + y^2 \le 1$ trong góc phần tư thứ nhất. Hãy tìm khối tâm của phiến mõng nếu mật độ tại điểm bất kỳ trên phiến mỏng tỷ lệ với khoảng cách của nó với trục x.

Bài 5 Đường giới hạn của một phiến mỏng bao gồm hai hình bán nguyệt là $y = \sqrt{1 - x^2}$ và $y = \sqrt{4 - x^2}$ cùng với một vài đoạn của trục x nối chúng với nhau. Tìm khối tâm của phiến mỏng nếu mật độ tại điểm bất kỳ trên phiến mỏng tỷ lệ với khoảng cách từ nó đến gốc tọa độ.

Bài 6 **Bài 7** Đường giới hạn của một phiến mỏng bao gồm hai hình bán nguyệt là $y = \sqrt{1 - x^2}$ và $y = \sqrt{4 - x^2}$ cùng với một vài đoạn của trục x nối chúng với nhau. Tìm khối tâm của phiến mỏng nếu mật độ tại điểm bất kỳ trên phiến mỏng tỷ lệ nghịch với khoảng cách từ nó đến gốc tọa độ.

Bài 8 Tìm khối tâm của một phiến mỏng có dạng hình tam giác vuông cân với bằng nhau có độ dài bằng a nếu mật độ tại điểm bất kỳ trên phiến mỏng tỷ lệ với bình phương khoảng cách từ nó đến đỉnh đối diện với cạnh huyền.

Bài 9 Một phiến mỏng chiếm một phần diện tích bên trong đường tròn $x^2 + y^2 = 2y$ nhưng bên ngoài đường tròn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm khối tâm của phiến mỏng nếu mật độ tại điểm bất kỳ trên phiến mỏng tỷ lệ nghịch với khoảng cách từ nó đến gốc tọa độ.

Bài 10 Tìm các mô men quán tính I_x, I_y, I_0 cho phiến mỏng D bị giới hạn bởi $y = 1-x^2; y = 0; \rho(x,y) = ky$.

Bài 11 Tìm các mô men quán tính I_x, I_y, I_0 cho phiến mỏng có dạng hình tam giác vuông cân với bằng nhau có độ dài bằng a nếu mật độ tại điểm bất kỳ trên phiến mỏng tỷ lệ với bình phương khoảng cách từ nó đến đỉnh đối diện với cạnh huyền.

Bài 12 Xét một cánh quạt hình vuông có chiều dài là 2 và đỉnh dưới bên trái đặt tại gốc tọa độ. Nếu mật độ của cánh quạt là $\rho(x,y) = 1 + 0.1x$, thì việc xoay cánh quạt quanh trục nào sẽ khó khăn hơn: Trục x hay trục y?

Bài 13 Một phiến mỏng có khối lượng riêng không đổi là $\rho(x,y) = \rho$ chiếm một diện tích cho trước. Tìm các mô men quán tính I_x, I_y và các bán kính hồi chuyển $\overline{\overline{x}}$ và $\overline{\overline{y}}$

1. Hình chữ nhật với $0 \le x \le b, 0 \le y \le h$.

2. Tam giác với các đỉnh $(0,0), (b,0)$ và $(0,h)$.

3. Một phần hình đĩa $x^2 + y^2 \le a^2$ trong góc phần tư thứ nhất.

4. Miền nằm dưới đường cong $y = \sin x$ từ $x = 0$ đến $x = \pi$.

Bài 14 Sử dụng một hệ thống đại số máy tính để tìm khối lượng, khối tâm các mô men quán tính của phiến mỏng chiếm một diện tích D và có hàm mật độ cho trước.

1. D bị giới hạn bởi vòng lặp phải của bông hoa bốn cánh $r = \cos\theta;\ \rho(x,y) = x^2 + y^2$.

2. $D = \{(x,y)|0 \le y \le xe^{-x},\ 0 \le x \le 2\};\ \rho(x,y) = x^2y^2$.

Bài 15 Hàm phân phối mật độ xác suất chung của một cặp biến ngẫu nhiên X và Y là

$$f(x,y) = \begin{cases} Cx(1+y) & \text{nếu} 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

a) Tìm giá trị của hằng số C.

b) Tìm $P(X \le 1, Y \le 1)$.

c) Tìm $P(X + Y \le 1)$.

Bài 16 a) Lập luận chứng minh

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy & \text{nếu } 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

là một hàm phân phối mật độ xác suất chung.

b) Nếu X và Y là các biến ngẫu nhiên có hàm phân phối mật độ xác suất chung là hàm số f ở câu (a), hãy tìm
i)$P(X \geq \frac{1}{2})$ ii) $P(X \geq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2})$

c) Tìm các giá trị kỳ vọng của X và Y.

Bài 17 Giả sử X và Y là các biến ngẫu nhiên có hàm phân phối mật độ xác suất chung

$$f(x,y) = \begin{cases} 0.1e^{-(0.5x+0.2y)} & \text{nếu } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

là một hàm phân phối mật độ xác suất chung.

a) Lập luận chứng minh f thật sự là một hàm phân phối mật độ xác suất chung.

b) Tìm các xác suất sau đây.
i)$P(Y \geq 1)$ ii) $P(X \leq 2, Y \leq 4)$

c) Tìm các giá trị kỳ vọng của X và Y.

Bài 18 a) Một chùm đèn có hai bóng đèn với tuổi thọ trung bình của mỗi bóng đèn là 1000 giờ sử dụng. Giả sử chúng ta có thể mô phỏng xác suất hư hỏng của các bóng đèn này bằng một hàm mật độ dạng mũ có giá trị trung bình $\mu = 1000$, hãy tìm xác suất để cả hai bóng đèn của chùm đèn đều hư hỏng trong vòng 1000 giờ.

b) Một đèn khác chỉ có một bóng cùng loại như ở câu (a). Nếu bóng đèn bị cháy và được thay bằng một bóng khác cùng loại, hãy tìm xác suất để cả hai bóng bị hỏng trong vòng tổng cộng 1000 giờ sử dụng.