ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
Bộ môn Toán Ứng dụng

BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 2

Nguyễn Thị Cẩm Vân

Email: ntcvantud@gmail.com

Tp. Hồ Chí Minh - 2021

CHƯƠNG 4:

TÍCH PHÂN KÉP

1. Tích phân kép.
2. Tính tích phân kép.
3. Phép đổi biến.
    1. Tọa độ cực.
    2. Tích phân kép trong hệ tọa độ cực.

Định nghĩa tích phân kép

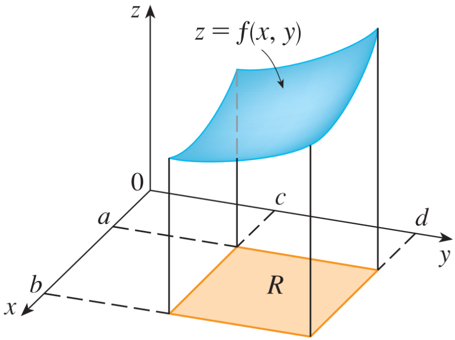
Bài toán thể tích và tích phân kép

- Xét hàm hai biến $f(x, y) \geq 0$ được xác định trên một miền chữ nhật đóng

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

- S là khối nằm trên R và nằm dưới dồ thị của f.

Thể tích của S là bao nhiêu?



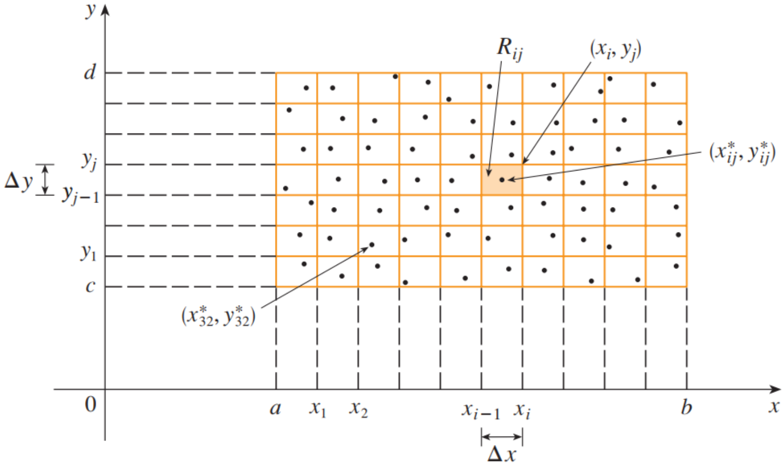
- Đầu tiên, ta chia R thành các hình chữ nhật con: chia đoạn $[a, b]$ thành m đoạn và $[c, d]$ thành n đoạn có độ rộng bằng nhau, lần lượt là

$$\Delta x = \frac{b-a}{m} \quad \text{và} \quad \Delta y = \frac{d-c}{n}$$

Các hình chữ nhật con

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

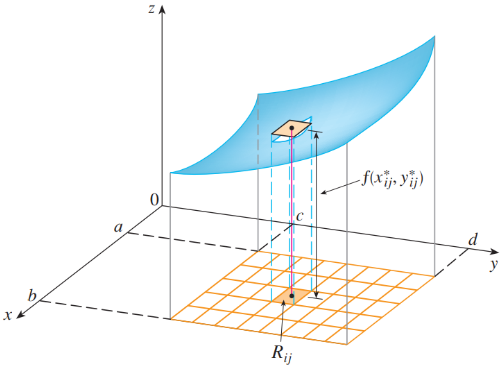
với diện tích bằng nhau là $\Delta A = \Delta x \Delta y$



y
R_{ij}
(x_i, y_j)
d
y_j
(x_{ij}^*, y_{ij}^*)
Δy
y_{j-1}
y_1
c
(x_{32}^*, y_{32}^*)
0
a
x_1
x_2
x_{i-1}
x_i
b
x
Δx

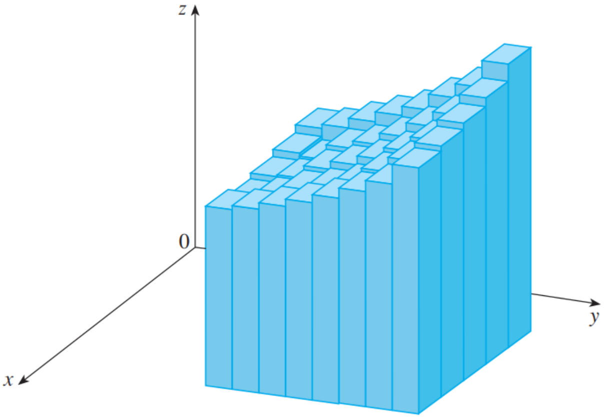
- Chọn một điểm mẫu (x_{ij}^*, y_{ij}^*) trong mỗi R_{ij}, xấp xỉ một phần của S nằm trên mỗi R_{ij} bằng một hình hộp chữ nhật nhỏ với chiều cao $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$.
- Thể tích của hộp

$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$$



- Tiếp tục với các hình chữ nhật con khác và tính tổng thể tích của các hộp chữ nhật. Khi đó

$$V_S \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$



- Phép xấp xỉ sẽ càng chính xác nếu m, n càng lớn. Nghĩa là

$$V = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A \tag{1}$$

Điều này dẫn đến khái niệm tích phân kép:

Định nghĩa 1.1: Tích phân kép

Tích phân kép của f lấy trên hình chữ nhật R là

$$\iint\limits_R f(x,y)dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A \tag{2}$$

nếu giới hạn này tồn tại.

Hàm khả tích

- Đường cong $(C): y = y(x)$ trơn tại $M(x_0, y_0) \in (C)$ nếu $y'(x)$ liên tục tại x_0.
- (C) trơn từng khúc nếu (C) được chia thành hữu hạn các đoạn trơn.

Nếu $f(x, y)$ liên tục trên miền D đóng, bị chặn và có biên trơn từng khúc thì f khả tích trên D.

Từ (1) và (2) ta có:

Nếu $f(x,y) \geq 0$ thì thể tích V của hình khối nằm trên hình chữ nhật R và nằm dưới bề mặt $z = f(x,y)$ là

$$V = \iint\limits_R f(x,y)dA$$

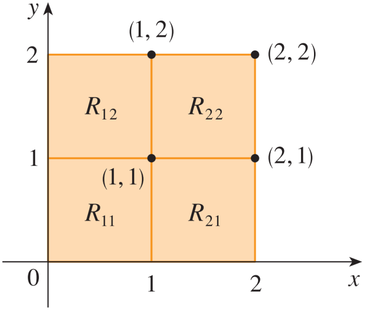
Tổng ở (2)

$$\lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$$

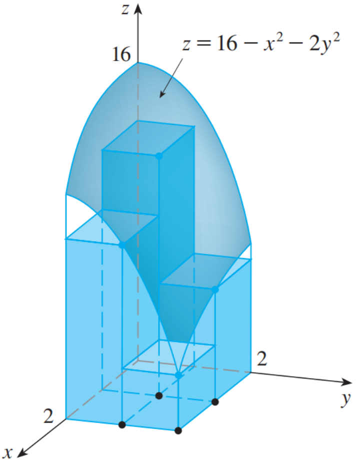
được gọi là một Tổng Riemann kép.

Câu 1.

Ước tính thể tích của khối nằm trên hình vuông $R = [0,2] \times [0,2]$ và nằm dưới paraboloid elliptic $z = 16 - x^2 - 2y^2$. Chia R thành 4 hình vuông bằng nhau và chọn điểm mẫu là điểm nằm ở góc phía trên bên phải của mỗi hình vuông R_{ij}.

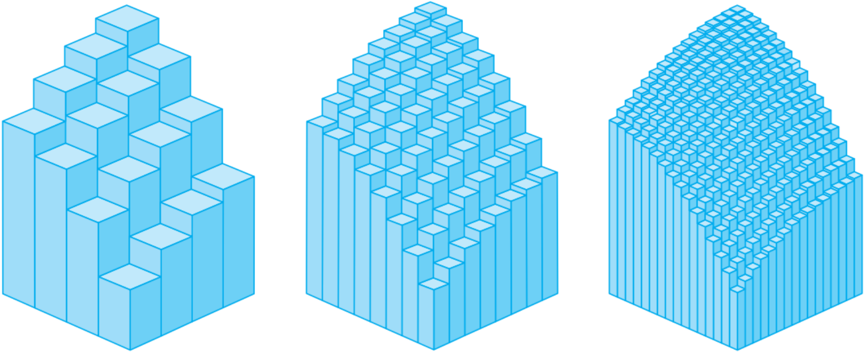


y
x
0
1
2
1
2
(1, 2)
(2, 2)
(2, 1)
(1, 1)
R_{11}
R_{12}
R_{21}
R_{22}



z
16
$z = 16 - x^2 - 2y^2$
2
2
x
y

Ở ví dụ trên, nếu tăng số lượng các hình vuông lên thì thể tích của khối tính được càng chính xác.



(a) $m = n = 4$, $V \approx 41.5$ (b) $m = n = 8$, $V \approx 44.875$ (c) $m = n = 16$, $V \approx 46.46875$

Giá trị trung bình

D là miền liên thông nếu 2 điểm tùy ý trong D có thể nối nhau bởi một đường cong liên tục trong D.

Cho f liên tục trên tập đóng, bị chặn, liên thông D. Khi đó tồn tại $M_0(x_0, y_0) \in D$ sao cho

$$f(M_0) = \frac{1}{S(D)} \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

$\frac{1}{S(D)} \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ gọi là giá trị trung bình của f trên D.

Các tính chất của tích phân kép

$$\iint\limits_D [f(x,y)+g(x,y)]dA = \iint\limits_D f(x,y)dA + \iint\limits_D g(x,y)dA \tag{3}$$

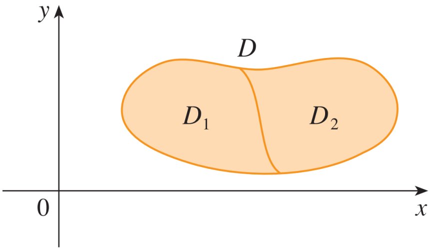
$$\iint\limits_D cf(x,y)dA = c\iint\limits_D f(x,y)dA \quad \text{trong đó } c \text{ là hằng số.} \tag{4}$$

Hai tính chất trên được gọi là tính tuyến tính của tích phân.
Nếu $f(x,y) \geq g(x,y)$ với mọi (x,y) trong D thì

$$\iint\limits_D f(x,y)dA \geq \iint\limits_D g(x,y)dA \tag{5}$$

$D = D_1 \cup D_2$, D_1 và D_2 không dẫm lên nhau

$$\iint\limits_{D_1 \cup D_2} f dx dy = \iint\limits_{D_1} f dx dy + \iint\limits_{D_2} f dx dy \tag{6}$$



Khi $f(x, y) = 1$, ta có:

$$\iint\limits_{D} dA = S_D \tag{7}$$

Tính tích phân kép

Tích phân lặp

- Giả sử f là một hàm hai biến thực, khả tích trên hình chữ nhật $D = [a, b] \times [c, d]$
- Tích phân lặp:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\ dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx \tag{8}$$

nghĩa là đầu tiên ta thấy tích phân theo biến y từ c đến d, sau đó lấy tích phân theo x từ a đến b.

- Ngược lại, ta cũng có

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\ dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy \tag{9}$$

Định lý Fubini

Định lý 2.1: Định lý Fubini

Nếu f liên tục trên hình chữ nhật

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

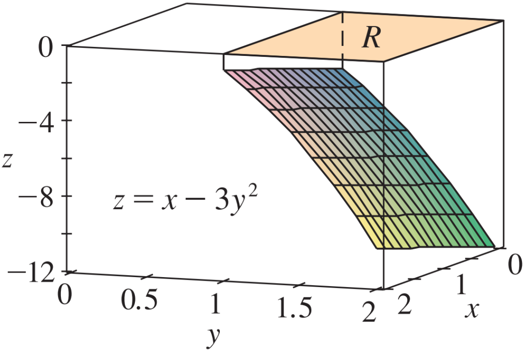
, thì

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx\, dy \qquad (10)$$

Tổng quát hơn, điều này đúng nếu chúng ta giả sử f bị chặn trên D, f chỉ bị gián đoạn tại một số hữu hạn các đường cong trơn, và các tích phân tồn tại.

Câu 2.

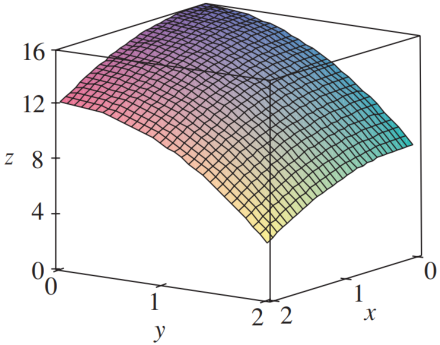
Tính tích phân hai lớp $\iint_D (x - 3y^2)\, dA$, trong đó
$D = \{(x, y) | 0 \le x \le 2, 1 \le y \le 2\}$



Bài tập về nhà

Câu 3.

Tính thể tích của hình khối S bị giới hạn bởi paraboloid elliptic $x^2 + 2y^2 + z = 16$, các mặt phẳng $x = 2, y = 2$ và các mặt phẳng tọa độ ba chiều.



Nếu $f(x,y)$ có dạng $g(x)h(y)$. Khi đó tích phân kép của f trên

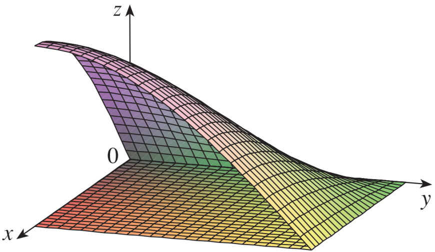
$$D = [a,b] \times [c,d]$$

là:

$$\boxed{\iint\limits_D g(x)h(y)\ dA = \int\limits_a^b g(x)\ dx \int\limits_c^d h(y)\ dy \qquad (11)}$$

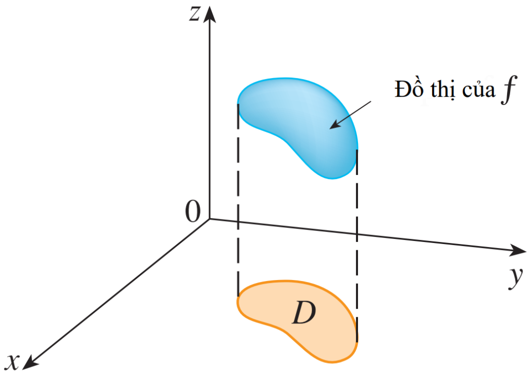
Câu 4.

Nếu $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$, tính $\displaystyle\iint_R \sin x \cos y \; dA$.



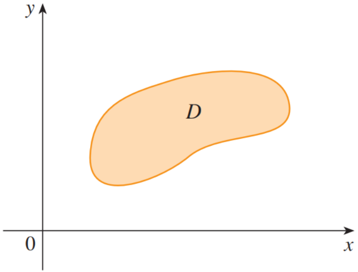
Tích phân kép trên miền tổng quát

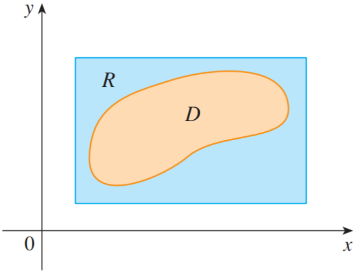
Ở bài toán thể tích ở đầu chương, ta đã tìm cách để tính thể tích của một vật thể nằm dưới hàm f và nằm trên miền chữ nhật R. Vậy có thể tính được thể tích khi miền R không phải là hình chữ nhật hay không?



- Giả sử D được bao quanh bởi một miền chữ nhật R. Khi đó ta định nghĩa hàm F với tập xác định R như sau:

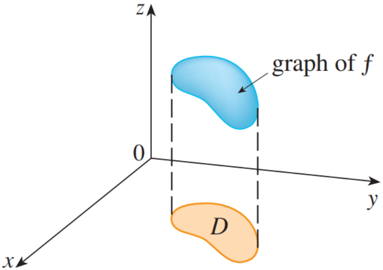
$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{nếu } (x,y) \text{ thuộc } D \\ 0 & \text{nếu } (x,y) \text{ thuộc } R \text{ nhưng không thuộc } D \end{cases}$$

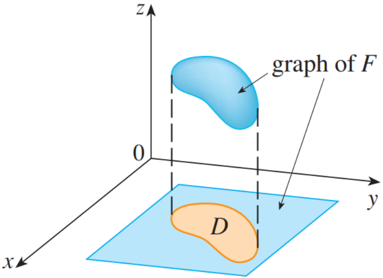




Nếu F khả tích trên R, khi đó

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA = \iint\limits_R F(x,y)\,dA \qquad (12)$$





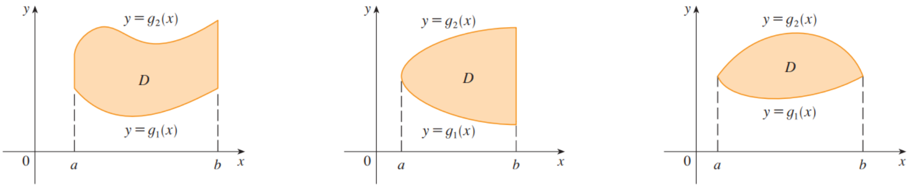
Miền phẳng loại I

Định nghĩa 2.1

Một miền phẳng D được gọi là thuộc loại I nếu nó nằm giữa hai đồ thị của hai hàm số liên tục theo x, tức là

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

trong đó g_1 và g_2 liên tục trên $[a, b]$.



Tính tích phân kép trên miền phẳng loại I

Định lý 2.2: Định lý Fubini cho miền loại I

Nếu f liên tục trên một miền loại I sao cho

$$D = \{(x, y)|a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

thì

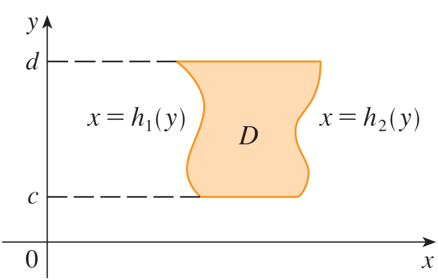
$$\iint\limits_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx \tag{13}$$

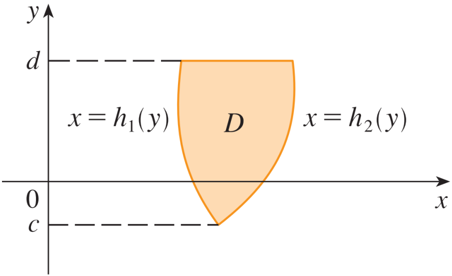
Miền phẳng loại II

Định nghĩa 2.2

Một miền phẳng D được gọi là thuộc loại II nếu nó nằm giữa hai đồ thị của hai hàm số liên tục theo y:

$$D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$





Tính tích phân kép trên miền phẳng loại II

Định lý 2.3: Định lý Fubini cho miền loại I

Nếu f liên tục trên một miền loại II sao cho

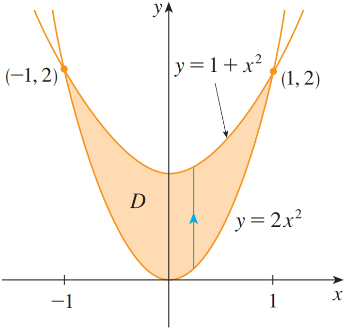
$$D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

thì

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy \tag{14}$$

Câu 5.

Tính $\displaystyle\iint_D (x+2y)\, dA$, trong đó D là miền được giới hạn bởi các parabol $y = 2x^2$ và $y = 1 + x^2$.



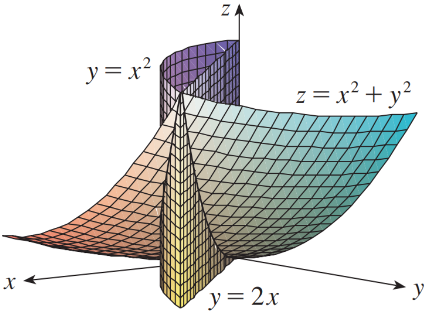
Câu 6.

Tính tích phân lặp $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)\, dy\, dx$

Bài tập về nhà

Câu 7.

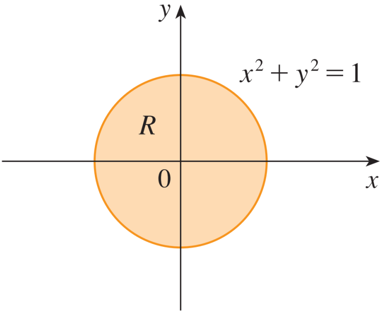
Tính thể tích của hình khối nằm dưới paraboloid $z = x^2 + y^2$ và nằm trên miền D trong mặt phẳng Oxy, được giới hạn bởi đường thẳng $y = 2x$ và parabol $y = x^2$.



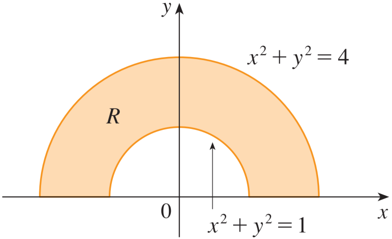
Đổi biến

Tọa độ cực

Giả sử ta muốn tính tích phân sau: $\displaystyle\iint\limits_R f(x,y)\,dA$, trong đó R là miền được biểu diễn như sau:

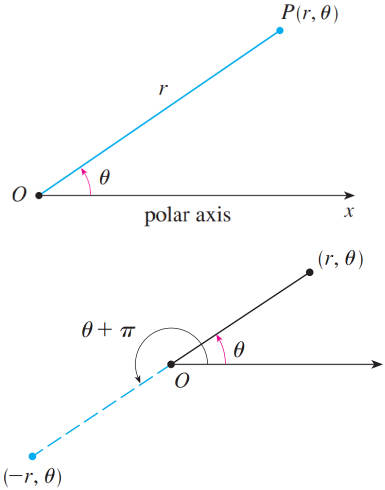


(a) $R = \{(r,\theta) | 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\}$

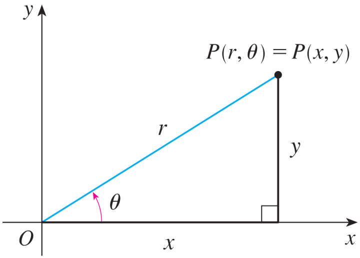


(b) $R = \{(r,\theta) | 1 \le r \le 2, 0 \le \theta \le \pi\}$

Việc tính các tích phân này trong hệ tọa độ Descartes khá phức tạp. Nhưng nếu sử dụng tọa độ cực thì việc này khá dễ dàng. Vậy tọa độ cực là gì?



- O được gọi là gốc. Tia Ox được gọi là trục cực (polar axis).
- Mỗi điểm P được biểu diễn bởi một cặp giá trị (r,θ). Trong đó $r = OP$, $\theta = (\widehat{OP, Ox})$



Chuyển từ hệ tọa độ cực sang Descartes:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

Do đó:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \tag{15}$$

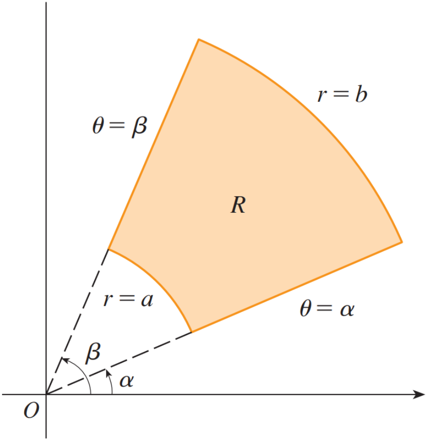
Các phương trình ở (15) dùng để tìm tọa độ của một điểm trong hệ tọa độ Descartes. Vậy khi biết (x, y), ta chuyển về tọa độ cực như sau:

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \tag{16}$$

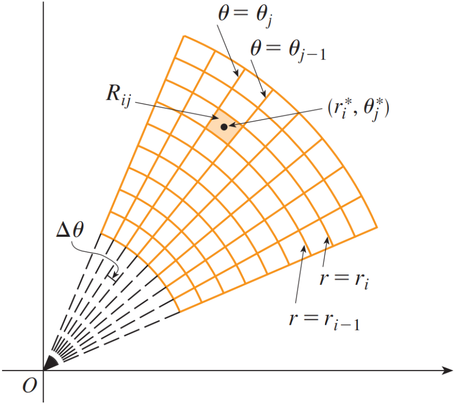
Tích phân kép trong hệ tọa độ cực

- Giả sử, ta có một miền hình chữ nhật trong tọa độ cực

$$R = \{(r, \theta) | a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta\}$$



- Chia đoạn $[a, b]$ thành m đoạn nhỏ $[r_{i-1}, r_i]$ với $\Delta r = \dfrac{b-a}{m}$, $[\alpha, \beta]$ thành n đoạn nhỏ $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ với $\Delta\theta = \dfrac{\beta-\alpha}{n}$, ta được các hình chữ nhật nhỏ hơn R_{ij}



- Tâm của hình chữ nhật con có tọa độ cực:

$$r_i^* = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1}) \qquad \theta_j^* = \frac{1}{2}(\theta_j + \theta_{j-1})$$

- Diện tích của một hình chữ nhật nhỏ R_{ij}:

$$\begin{aligned}\Delta A_i &= \frac{1}{2}r_i^2\Delta\theta - \frac{1}{2}r_{i-1}^2\Delta\theta = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\Delta\theta \\ &= \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\Delta\theta = r_i^*\Delta r\Delta\theta\end{aligned}$$

- Ta có tổng Riemann

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\sin\theta_j^*)\Delta A_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\sin\theta_j^*)r_i^*\Delta r\Delta\theta \tag{17}$$

- Tổng (17) chính là tổng Riemann cho tích phân

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\ dr\ d\theta$$

- Từ đó ta có

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)\ dA &= \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\sin\theta_j^*)\Delta A_i \\ &= \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\sin\theta_j^*)r_i^*\Delta r\Delta\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\ dr\ d\theta\end{aligned}$$

Chuyển sang hệ tọa độ cực đối với tích phân kép Nếu f liên tục trên một hình chữ nhật cực R được cho bởi $0 \leq a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta$, trong đó $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$ thì

$$\iint\limits_R f(x,y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr\, d\theta \tag{18}$$

Câu 8.

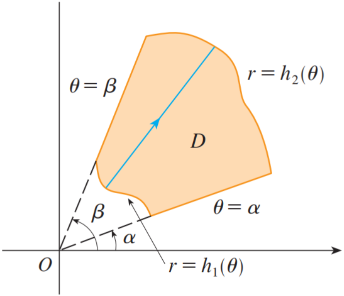
Tính $\iint_R (3x + 4y^2)\, dA$, trong đó R là miền nằm trong nửa mặt phẳng phía trên, được giới hạn bởi các đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ và $x^2 + y^2 = 4$.

Nếu f liên tục trên một miền cực có dạng

$$D = \{(r,\theta) | \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

thì

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr\,d\theta \tag{19}$$



Khi $f(x, y) = 1$, ta có

$$\iint_D 1\ dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} 1\ r\ dr\ d\theta = A(D)$$

là diện tích miền D

Câu 9.

Tính diện tích miền giới hạn bởi 1 cánh hoa của bông hoa 4 cánh.
Hint: Đường cong giới hạn một cánh hoa là $\cos 2\theta$