ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
Bộ môn Toán Ứng dụng

# BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 2

Nguyễn Thị Cẩm Vân

Email: ntcvantud@gmail.com

Tp. Hồ Chí Minh - 2021

CHƯƠNG 3:

# CỰC TRỊ
(tiếp theo)

1. Nhân tử Lagrange.
2. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất.

# Nhân tử Lagrange

# Cực trị có điều kiện

**Định nghĩa 1.1: Cực trị có điều kiện**

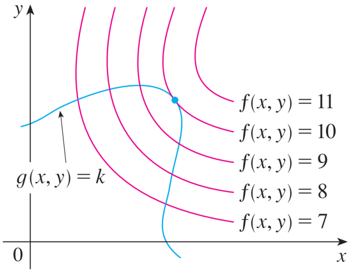
Hàm số $z = f(x, y)$ thỏa điều kiện $g(x, y) = 0$ đạt cực đại tại $M_0$ nếu tồn tại 1 lân cận $V$ của $M_0$ sao cho

$$f(M) \leq f(M_0), \quad M \in V \text{ và } g(M) = 0$$

Tương tự cho định nghĩa cực tiểu có điều kiện.

# Điều kiện cần của cực trị có điều kiện

Về mặt hình học, chúng ta cần tìm cực trị khi điểm $(x, y)$ được giới hạn nằm trên đường mức $g(x, y) = k$.




Từ hình trên, ta thấy rằng, cực trị xảy ra khi hai đường mức $g(x, y) = 0$ và $f(x, y) = c$ tiếp xúc nhau hay có pháp tuyến tại $(x_0, y_0)$ cùng phương với nhau:

$$\nabla f(x_0, y_0) = -\lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

Giả sử $f, g$ khả vi trong lân cận của $M_0(x_0, y_0)$ và

$$g_x'^2(M_0) + g_y'^2(M_0) \neq 0,$$

Nếu $f$ đạt cực trị tại $M_0$ với điều kiện $g = 0$ thì tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{cases} f_x'(M_0) + \lambda g_x'(M_0) = 0 \\ f_y'(M_0) + \lambda g_y'(M_0) = 0 \\ g(M_0) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

$\lambda$ được gọi là nhân tử Lagrange.

$$\begin{cases} f'_x(M_0) + \lambda g'_x(M_0) = 0 \\ f'_y(M_0) + \lambda g'_y(M_0) = 0 \\ g(M_0) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

1. $M_0$ thỏa hệ (*) gọi là điểm dừng trong bài toán cực trị có điều kiện, cũng gọi là điểm dừng của hàm Lagrange

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

2. $\mathrm{d}g(M_0) = 0$ ($dx$ và $dy$ liên kết với nhau theo hệ thức này)

# Điều kiện đủ của cực trị

Giả sử $f, \varphi$ có các đạo hàm riêng đến cấp 2 liên tục trong lân cận của $M_0(x_0, y_0)$ và $M_0$ là điểm dừng của $L(x, y)$,

$$d^2L(M_0) = L''_{xx}(M_0)dx^2 + 2L''_{xy}(M_0)dxdy + L''_{yy}(M_0)dy^2$$

1. Nếu $d^2L(M_0)$ xác định dương thì $f$ đạt cực tiểu có điều kiện tại $M_0$.
2. Nếu $d^2L(M_0)$ xác định âm thì $f$ đạt cực đại có điều kiện tại $M_0$.

# Phương pháp tìm cực trị có điều kiện

Loại 1: điều kiện bậc nhất theo $x, y$ ( tìm trên đường thẳng)

$$g(x, y) = ax + by + c = 0$$

đưa về cực trị hàm 1 biến khi thay $y$ theo $x$ trong $f$.

Câu 1.

Tìm cực trị có điều kiện của $f(x, y) = x + 5y - 2xy - x^2 - 2y^2$ với điều kiện $2x + y = 4$

Loại 2: (Tổng quát)

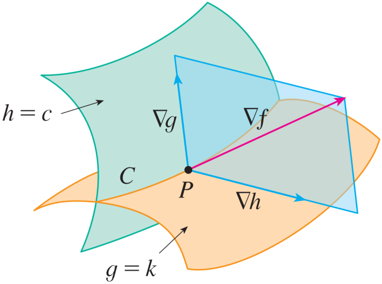
1. Tìm điểm dừng của $L(x,y)$ : $\begin{cases} L'_x(M_0) = 0 \\ L'_y(M_0) = 0 \\ \varphi(M_0) = 0 \end{cases}$
2. Xét dấu $d^2L$ tại $M_0$ có kèm điều kiện $d\varphi(M_0) = 0$
   - ▷ Xác định dương: cực tiểu
   - ▷ Xác định âm: cực đại

**Câu 2.**

Tìm cực trị có điều kiện của

1. $f(x,y) = xy^2$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$
2. $f(x,y) = xy$ với điều kiện $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$

# Hai điều kiện ràng buộc




Với hai điều kiện ràng buộc: $g(x, y, z) = 0$ và $h(x, y, z) = 0$.
Khi đó để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x, y, z)$, ta tìm các điểm dừng Lagrange từ hệ:

$$\begin{cases} \nabla f + \lambda \nabla g + \mu \nabla h = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

# Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên biên

**Phương pháp nhân tử Lagrange** Để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $f(x, y, z)$ phụ thuộc vào điều kiện ràng buộc $g(x, y, z) = 0$ [giả sử các cực trị này tồn tại và $\nabla g \neq 0$ trên mặt $g(x, y, z) = 0$]:

(a) Tìm các giá trị $x, y, z$ và $\lambda$ sao cho

$$\nabla f(x, y, z) + \lambda \nabla g(x, y, z) = 0$$

và

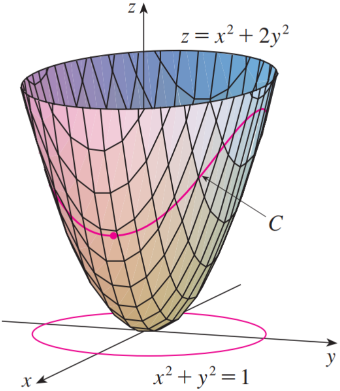
$$g(x, y, z) = 0$$

(b) Tính $f$ tại mọi điểm $(x, y, z)$ tìm được ở bước (a). Giá trị lớn nhất trong số các giá trị này là giá trị lớn nhất của $f$, giá trị nhỏ nhất trong số các giá trị này là giá trị nhỏ nhất của $f$

Tương tự với bài toán hai ràng buộc.

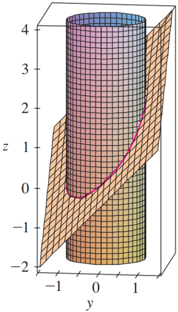
## Câu 3.

Tìm các giá trị cực biên của hàm số $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.



## Câu 4.

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ trên đường cong giao của hai mặt phẳng $x - y + z = 1$ và hình trụ $x^2 + y^2 = 1$.



# Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất

**Định nghĩa 2.1: Tập compact**

Tập compact là tập đóng (lấy tất cả các biên) và bị chặn (có thể được bao bởi 1 hình tròn)

**Định lý 2.1**

$f$ liên tục trên tập compact $D$ thì $f$ đạt min, max trên $D$.

# Tìm giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất

1. Tìm điểm dừng của $f$ trên miền mở của D (phần bỏ biên).
2. Tìm các điểm đặc biệt trên biên của $D$
   ▷ Điểm dừng của hàm Lagrange (tổng quát).
   ▷ Nếu biên là đoạn thẳng, chuyển $f$ về hàm 1 biến, tìm các điểm có khả năng đạt $\min, \max$ của hàm 1 biến này.
3. So sánh giá trị của $f$ tại các điểm trên $\min, \max$

## Câu 5.

Tìm GTLN - GTNN của

1. $z = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$ trên miền $D$ giới hạn bởi $y = 0, x = 0, x + y = 9$.
2. $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 3x - 1$ trên miền $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

# Bài tập về nhà

**Câu 6.**

Cho $f(x,y) = x^2 - xy + y$. Tìm GTLN $M$, GTNN $m$ của $f$ trên miền $|x| \leq 2, |y| \leq 3$.

**Câu 7.**

Tìm GTLN $M$, GTNN $m$ của hàm $f(x,y) = x + 3y$ trên miền $D : x + y \leq 6, y \leq 2, x + 4y \geq 4$.

**Câu 8.**

Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ thỏa điều kiện $y - x = \dfrac{\pi}{4}$.

**Câu 9.**

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $z = x^2 + xy - 1$ trong tam giác $ABC$ với $A(1, 1), B(2, 2), C(3, 1)$.

## Câu 10.

Tìm điểm $(x, y)$ mà tại đó hàm số đạt cực đại, cực tiểu và điểm yên ngựa trên bản đồ mức sau: