

Bài Tập -Ứng Dụng Của Tích Phân Kép

Bài 1 Điện tích được phân bố trên hình chữ nhật với $0 \leq x \leq 5$, $2 \leq y \leq 5$ sao cho mật độ điện tích tại (x, y) là $\sigma(x, y) = 2x + 4y$ được đo bằng cu - lông/mét vuông. Tìm tổng điện tích trên hình chữ nhật.

Bài 2 Điện tích được phân bố trên một đĩa tròn $x^2 + y^2 \leq 1$ sao cho mật độ điện tích tại (x, y) là $\sigma(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ được đo bằng cu - lông/mét vuông. Tìm tổng điện tích trên hình đĩa.

Bài 3 Tìm khối lượng và khối tâm của phiến mỏng có diện tích D và có hàm mật độ ρ cho trước.

1. $D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 4\}; \rho(x, y) = ky^2$.
2. $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}; \rho(x, y) = 1 + x^2 + y^2$.
3. D là miền tam giác có các đỉnh là $(0, 0), (2, 1), (0, 3); \rho(x, y) = x + y$.
4. D là miền tam giác bị giới hạn bởi các đường thẳng $y = x; 2x + y = 6; \rho(x, y) = x^2$.
5. D bị giới hạn bởi $y = 1 - x^2; y = 0; \rho(x, y) = ky$.
6. D bị giới hạn bởi $y = x^2; y = x + 2; \rho(x, y) = ky$.
7. $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sin(\frac{\pi x}{L}), 0 \leq x \leq L\}; \rho(x, y) = y$.
8. D bị giới hạn bởi các parabol $y = x^2; x = y^2; \rho(x, y) = \sqrt{x}$.

Bài 4 Một phiến mỏng chiếm một phần diện tích chiếc đĩa tròn có dạng $x^2 + y^2 \leq 1$ trong góc phần tư thứ nhất. Hãy tìm khối tâm của phiến mỏng nếu mật độ tại điểm bất kỳ trên phiến mỏng tỷ lệ với khoảng cách của nó với trục x .

Bài 5 Đường giới hạn của một phiến mỏng bao gồm hai hình bán nguyệt là $y = \sqrt{1 - x^2}$ và $y = \sqrt{4 - x^2}$ cùng với một vài đoạn của trục x nối chúng với nhau. Tìm khối tâm của phiến mỏng nếu mật độ tại điểm bất kỳ trên phiến mỏng tỷ lệ với khoảng cách từ nó đến gốc tọa độ.

Bài 6 Bài 7 Đường giới hạn của một phiến mỏng bao gồm hai hình bán nguyệt là $y = \sqrt{1 - x^2}$ và $y = \sqrt{4 - x^2}$ cùng với một vài đoạn của trục x nối chúng với nhau. Tìm khối tâm của phiến mỏng nếu mật độ tại điểm bất kỳ trên phiến mỏng tỷ lệ nghịch với khoảng cách từ nó đến gốc tọa độ.

Bài 8 Tìm khối tâm của một phiến mỏng có dạng hình tam giác vuông cân với bằng nhau có độ dài bằng a nếu mật độ tại điểm bất kỳ trên phiến mỏng tỷ lệ với bình phương khoảng cách từ nó đến đỉnh đối diện với cạnh huyền.

Bài 9 Một phiến mỏng chiếm một phần diện tích bên trong đường tròn $x^2 + y^2 = 2y$ nhưng bên ngoài đường tròn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm khối tâm của phiến mỏng nếu mật độ tại điểm bất kỳ trên phiến mỏng tỷ lệ nghịch với khoảng cách từ nó đến gốc tọa độ.

Bài 10 Tìm các mô men quán tính I_x, I_y, I_0 cho phiên mỏng D bị giới hạn bởi $y = 1 - x^2; y = 0; \rho(x, y) = ky$.

Bài 11 Tìm các mô men quán tính I_x, I_y, I_0 cho phiên mỏng có dạng hình tam giác vuông cân với bằng nhau có độ dài bằng a nếu mật độ tại điểm bất kỳ trên phiên mỏng tỷ lệ với bình phương khoảng cách từ nó đến đỉnh đối diện với cạnh huyền.

Bài 12 Xét một cánh quạt hình vuông có chiều dài là 2 và đỉnh dưới bên trái đặt tại gốc tọa độ. Nếu mật độ của cánh quạt là $\rho(x, y) = 1 + 0.1x$, thì việc xoay cánh quạt quanh trục nào sẽ khó khăn hơn: Trục x hay trục y ?

Bài 13 Một phiên mỏng có khối lượng riêng không đổi là $\rho(x, y) = \rho$ chiếm một diện tích cho trước. Tìm các mô men quán tính I_x, I_y và các bán kính hồi chuyển $\bar{\bar{x}}$ và $\bar{\bar{y}}$

1. Hình chữ nhật với $0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq h$.
2. Tam giác với các đỉnh $(0, 0), (b, 0)$ và $(0, h)$.
3. Một phần hình đĩa $x^2 + y^2 \leq a^2$ trong góc phần tư thứ nhất.
4. Miền nằm dưới đường cong $y = \sin x$ từ $x = 0$ đến $x = \pi$.

Bài 14 Sử dụng một hệ thống đại số máy tính để tìm khối lượng, khối tâm các mô men quán tính của phiên mỏng chiếm một diện tích D và có hàm mật độ cho trước.

1. D bị giới hạn bởi vòng lặp phải của bông hoa bốn cánh $r = \cos \theta; \rho(x, y) = x^2 + y^2$.
2. $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq xe^{-x}, 0 \leq x \leq 2\}; \rho(x, y) = x^2y^2$.

Bài 15 Hàm phân phối mật độ xác suất chung của một cặp biến ngẫu nhiên X và Y là

$$f(x, y) = \begin{cases} Cx(1 + y) & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

- a) Tìm giá trị của hằng số C .
- b) Tìm $P(X \leq 1, Y \leq 1)$.
- c) Tìm $P(X + Y \leq 1)$.

Bài 16 a) Lập luận chứng minh

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

là một hàm phân phối mật độ xác suất chung.

b) Nếu X và Y là các biến ngẫu nhiên có hàm phân phối mật độ xác suất chung là hàm số f ở câu (a), hãy tìm

i) $P(X \geq \frac{1}{2})$

ii) $P(X \geq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2})$

c) Tìm các giá trị kỳ vọng của X và Y .

Bài 17 Giả sử X và Y là các biến ngẫu nhiên có hàm phân phối mật độ xác suất chung

$$f(x, y) = \begin{cases} 0.1e^{-(0.5x+0.2y)} & \text{nếu } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

là một hàm phân phối mật độ xác suất chung.

a) Lập luận chứng minh f thật sự là một hàm phân phối mật độ xác suất chung.

b) Tìm các xác suất sau đây.

i) $P(Y \geq 1)$

ii) $P(X \leq 2, Y \leq 4)$

c) Tìm các giá trị kỳ vọng của X và Y .

Bài 18 a) Một chùm đèn có hai bóng đèn với tuổi thọ trung bình của mỗi bóng đèn là 1000 giờ sử dụng. Giả sử chúng ta có thể mô phỏng xác suất hư hỏng của các bóng đèn này bằng một hàm mật độ dạng mũ có giá trị trung bình $\mu = 1000$, hãy tìm xác suất để cả hai bóng đèn của chùm đèn đều hư hỏng trong vòng 1000 giờ.

b) Một đèn khác chỉ có một bóng cùng loại như ở câu (a). Nếu bóng đèn bị cháy và được thay bằng một bóng khác cùng loại, hãy tìm xác suất để cả hai bóng bị hỏng trong vòng tổng cộng 1000 giờ sử dụng.