

BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 2

CHƯƠNG 2-BÀI 3. TÍCH PHÂN BỘI 3

TS. NGUYỄN ĐÌNH DƯƠNG
BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG - KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG

Email: duongnd@hcmut.edu.vn

Ngày 15/02/2021

Chương 2: Tích phân bội

2.1 Tích phân bội 2

2.2 Đổi biến trong tích phân bội 2

2.3 Tích phân bội 3

2.4 Đổi biến trong tích phân bội 3

Nội dung

Tích phân bội 3

Tích phân bội 3 đưa về tích phân lặp

Tích phân bội 3 trong tọa độ Descartes

Chuẩn đầu ra

- Mô tả được định nghĩa tích phân bội 3 qua giới hạn của tổng Riemann
- Tính được tích phân bội 3 qua tích phân lặp
- Tính được tích phân bội 3 trên miền tổng quát

Nội dung

Tích phân bội 3

Tích phân bội 3 đưa về tích phân lặp

Tích phân bội 3 trong tọa độ Descartes

Tổng Riemann

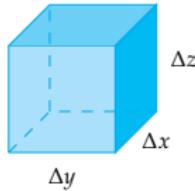
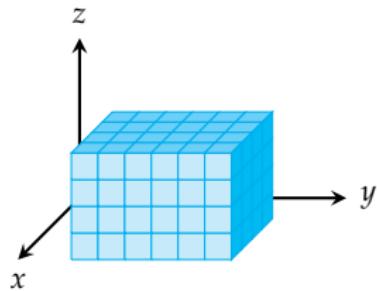
Cho hình hộp chữ nhật

$$\Omega = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$$

và hàm $f(x, y, z)$. Ta chia hình hộp đã cho thành các khối có kích thước là $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ và thể tích

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$$

Tích phân bội 3 của f trên V là giới hạn của tổng Riemann



$$\sum_{i,j,k} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V$$

và kí hiệu bởi

$$\iiint_V f(x, y, z) dV$$

Nội dung

Tích phân bội 3

Tích phân bội 3 đưa về tích phân lặp

Tích phân bội 3 trong tọa độ Descartes

Tích phân bội 3 đưa về tích phân lặp

Nếu $\Omega = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ thì

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz$$

Tính $\iiint_{\Omega} (xy + z^2) dV$ với

$$\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 3\}$$

Nội dung

Tích phân bội 3

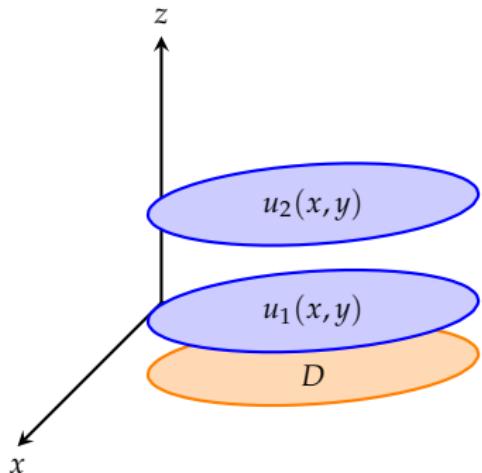
Tích phân bội 3 đưa về tích phân lặp

Tích phân bội 3 trong tọa độ Descartes

Loại I

Cho

$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}.$$



$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV =$$

$$\iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dS$$

Tính $\iiint_{\Omega} y dV$ với V là vật thể xác định trên

$$D = \{0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x\}$$

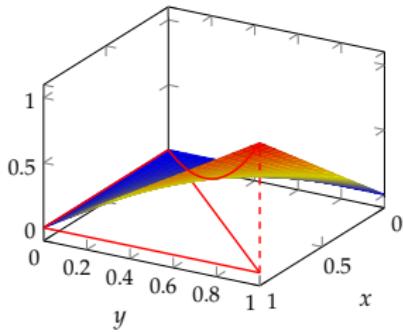
trong đó (x, y) :

$$x - y \leq z \leq x + y$$

Loại I

Cho

$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}.$$



$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV =$$

$$\iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dS$$

Tính $\iiint_{\Omega} y dV$ với V là miền

$$D = \{0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}$$

trong đó (x, y) :

$$0 \leq z \leq xy$$

Luyện tập

- ① Tính $\int_0^1 \int_y^{2y} \int_0^{x+y} 6xy \, dz \, dx \, dy$
- ② Tính $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \frac{z}{y+1} \, dx \, dz \, dy$
- ③ Tính $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2-x^2-y^2} xye^z \, dz \, dy \, dx$
- ④ Tính $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{1-z^2} \frac{z}{y+1} \, dx \, dz \, dy$
- ⑤ Tính $\int_1^2 \int_0^{2z} \int_0^{\ln x} xe^{-y} \, dy \, dx \, dz$

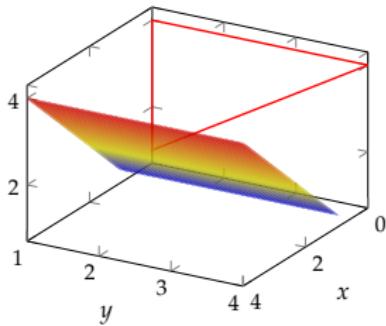
Loại II

Nếu

$$\Omega = \{(x, y, z) : (y, z) \in D, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$$

thì

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dS$$



Tính $\iiint_{\Omega} \frac{z}{x^2 + z^2} dV$ với

$$\Omega = \{(x, y, z) : 1 \leq y \leq 4, y \leq z \leq 4, 0 \leq x \leq z\}.$$

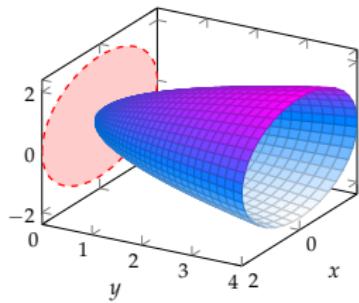
Loại III

Nếu

$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, z) \in D, u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}$$

thì

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, z)}^{u_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right] dS$$



Tính $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + z^2} dV$ với Ω là miền giới hạn
bởi paraboloid $y = x^2 + z^2$ và mặt phẳng $y = 4$

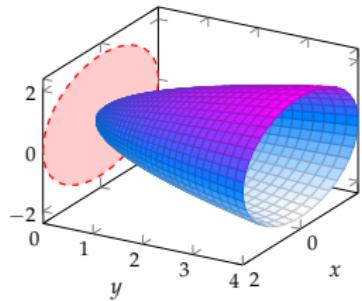
Loại III

Nếu

$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, z) \in D, u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}$$

thì

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, z)}^{u_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right] dS$$



Tính $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + z^2} dV$ với Ω là miền giới hạn bởi paraboloid $y = x^2 + z^2$ và mặt phẳng $y = 4$

Gợi ý: Sử dụng tọa độ cực khi tính tích phân kép!

Tổng kết

Có 3 cách tích phân bội 3 trên miền V bằng cách đưa về tích phân bội 2:

Loại I: Ω xác định trên $D \subset (Oxy)$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iint_D \left(\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dS$$

Loại II: Ω xác định trên $D \subset (Oyz)$

$$\iint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iint_D \left(\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x, y, z) dx \right) dS$$

Loại III: Ω xác định trên $D \subset (Oxz)$

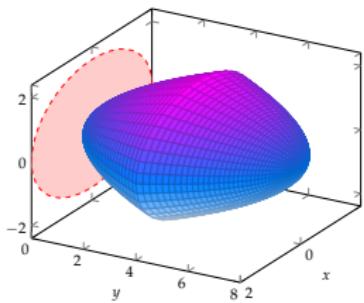
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iint_D \left(\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x, y, z) dy \right) dS$$

Tính chất

- Tích phân bội 3 có các tính chất giống như tích phân bội 2
- Thể tích vật thể tính qua tích phân bội 3 $V(\Omega) = \iiint_{\Omega} 1 \, dV$
- Giá trị trung bình của $f(x, y, z)$ trên Ω với thể tích $V(\Omega)$ là

$$f_{av} = \frac{1}{V(\Omega)} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dV$$

Tìm thể tích vật thể giới hạn bởi các paraboloids



$$y = x^2 + z^2$$

và

$$y = 8 - x^2 - z^2$$

Đây là tích phân Loại III .

- Các mặt này giao nhau ở đâu?
- Hình chiếu của nó lên Oxz là gì?

TRAO ĐỔI