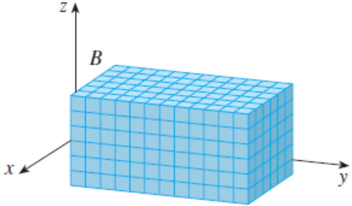
1. Tích phân bội ba
   - Định nghĩa
   - Định lý Fubini
   - Ứng dụng
2. Phép đổi biến số trong tích phân bội ba
   - Phép đổi biến số tổng quát
   - Phép đổi biến tọa độ trụ
   - Phép đổi biến tọa độ cầu

Định nghĩa

Tích phân bội ba (triple integral) *của f trên khối hộp chữ nhật B là*

$$\iiint\limits_B f(x;y;z)dxdydz = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*;y_{ijk}^*;z_{ijk}^*)\Delta x\Delta y\Delta z,$$

nếu giới hạn ở vế phải tồn tại, trong đó mỗi $(x_{ijk}^*;y_{ijk}^*;z_{ijk}^*)$ là một điểm mẫu tùy ý thuộc khối con B_{ijk}.



Định nghĩa

Cho f là một hàm số xác định trên một khối bị chặn E. Tích phân bội ba của f trên E được định nghĩa là

$$\iiint\limits_E f(x;y;z)dxdydz = \iiint\limits_B F(x;y;z)dxdydz,$$

với điều kiện tích phân ở vế phải tồn tại, trong đó B là một khối hộp chữ nhật chứa E, và F là một hàm xác định trên B như sau

$$F(x;y;z) = \begin{cases} f(x;y;z), & \text{nếu } (x;y;z) \in E, \\ 0, & \text{nếu } (x;y;z) \in B \setminus E. \end{cases}$$

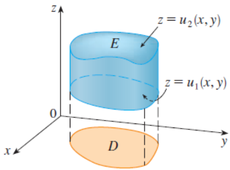
Định lý

Nếu f liên tục trên khối bị chặn

$$E = \Big\{(x;y;z) \big| (x;y) \in D, u_1(x;y) \le z \le u_2(x;y)\Big\},$$

thì

$$\iiint\limits_E f(x;y;z)dxdydz = \iint\limits_D \Big[\int_{u_1(x;y)}^{u_2(x;y)} f(x;y;z)dz\Big] dxdy.$$



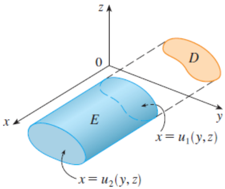
Định lý

Nếu f liên tục trên khối bị chặn

$$E = \left\{(x;y;z) | (y;z) \in D, u_1(y;z) \le x \le u_2(y;z)\right\},$$

thì

$$\iiint\limits_E f(x;y;z)dxdydz = \iint\limits_D \left[\int_{u_1(y;z)}^{u_2(y;z)} f(x;y;z)dx\right] dydz.$$



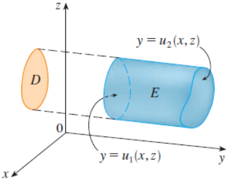
Định lý

Nếu f liên tục trên khối bị chặn

$$E = \left\{(x;y;z) | (x;z) \in D, u_1(x;z) \leq y \leq u_2(x;z)\right\},$$

thì

$$\iiint\limits_E f(x;y;z)dxdydz = \iint\limits_D \left[\int_{u_1(x;z)}^{u_2(x;z)} f(x;y;z)dy\right]dxdz.$$

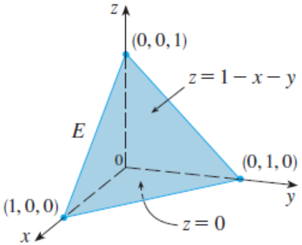


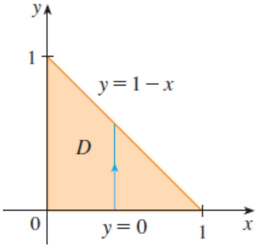
Ví dụ

Tính tích phân bội ba

$$\iiint\limits_E z\,dx\,dy\,dz,$$

trong đó E *là khối tứ diện được giới hạn bởi bốn mặt phẳng* $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, *và* $x + y + z = 1$.





Ứng dụng tính thể tích của vật thể

Nếu ta tích phân hàm hằng $f(x;y;z) = 1$ trên khối bị chặn E, thì ta thu được thể tích của khối E, tức là

$$V(E) = \iiint\limits_E 1dxdydz.$$

Ứng dụng tính khối lượng của vật thể

- Xét một vật thể chiếm một khối E trong không gian xyz và **khối lượng riêng (density)** của nó tại điểm $(x; y; z)$ thuộc E được cho bởi $\rho(x; y; z)$, trong đó ρ là một hàm liên tục trên E.
- Khi đó, **khối lượng (mass)** của vật thể này là

$$m = \iiint_E \rho(x; y; y) dxdydz.$$

Xét **phép biến đổi (transformation)** T từ không gian (u, v, w) sang không gian (x, y, z) định bởi các phương trình:

$$x = x(u; v; w), \quad y = y(u; v; w), \quad z = z(u; v; w).$$

Jacobi của phép biến đổi T là

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

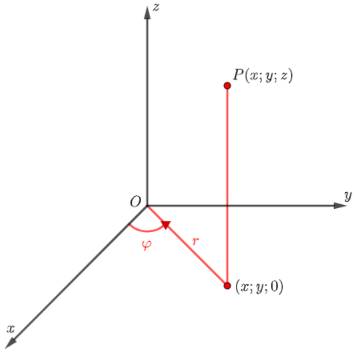
Với các giả thiết tương tự như trong công thức đổi biến cho tích phân kép, ta có công thức đổi biến tổng quát cho tích phân bội ba

$$\iiint\limits_{B} f(x;y;z)dxdydz$$

$$= \iiint\limits_{E} f\Big(x(u;v;w);y(u;v;w);z(u;v;w)\Big)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw.$$

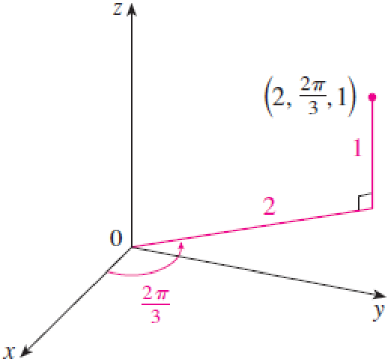
Tọa độ trụ (cylindrical coordinates) $(r; \varphi; z)$ của điểm P liên hệ với tọa độ hộp chữ nhật $(x; y; z)$ của điểm đó bởi các công thức sau:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$



Ví dụ

Hãy vẽ điểm có tọa độ trụ là $(2; 2\pi/3; 1)$ và tìm tọa độ hộp chữ nhật của nó.



- Xét **phép đổi biến tọa độ trụ**:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

- Jacobi của phép đổi biến tọa độ trụ là

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

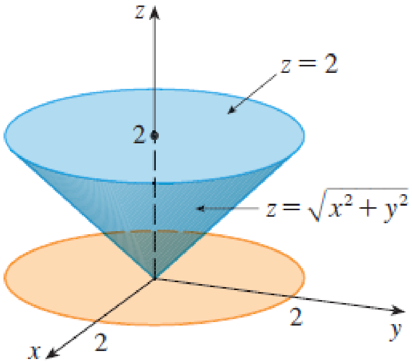
- Công thức đổi biến tọa độ trụ cho tích phân bội ba:

$$\iiint\limits_B f(x;y;z)dxdydz$$

$$= \iiint\limits_E f(r\cos\varphi; r\sin\varphi; z)rdrd\varphi dz$$

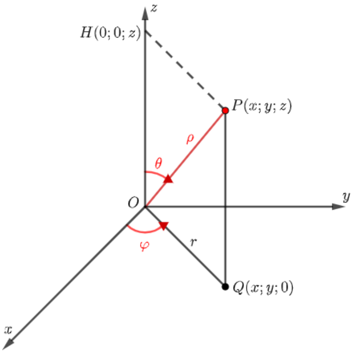
Ví dụ

Tính tích phân lặp $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\,dzdydx.$



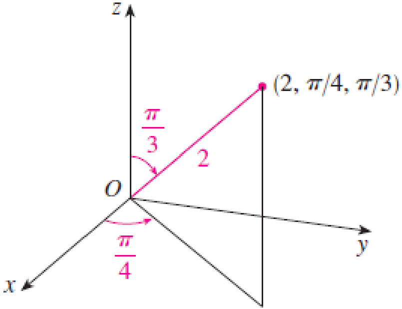
Tọa độ cầu (spherical coordinates) $(\rho; \varphi; \theta)$ của điểm P được liên hệ với tọa độ hộp chữ nhật $(x; y; z)$ của điểm đó bởi các công thức sau:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$
$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \rho \cos\theta.$$



Ví dụ

Hãy vẽ điểm có tọa độ cầu là $(2; \pi/4; \pi/3)$ và tìm tọa độ hộp chữ nhật của nó.



- Xét **phép đổi biến tọa độ cầu**:

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \rho\cos\theta.$$

- Jacobi của phép đổi biến tọa độ cầu là

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} = -\rho^2\sin\theta.$$

- Công thức đổi biến tọa độ cầu cho tích phân bội ba:

$$\iiint\limits_E f(x;y;z)dxdydz$$

$$= \iiint\limits_E f(\rho\sin\theta\cos\varphi; \rho\sin\theta\sin\varphi; \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Ví dụ

Tính tích phân bội ba

$$\iiint\limits_B e^{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\,dxdydz,$$

trong đó B là khối cầu đơn vị:

$$B = \left\{(x;y;z) | x^2+y^2+z^2 \le 1\right\}.$$

Ví dụ

Tính thể tích của khối nằm trên mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *và nằm dưới mặt cầu* $x^2 + y^2 + z^2 = z$.