BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 2

CHƯƠNG 2-BÀI 1. TÍCH PHÂN BỘI

TS. NGUYỄN ĐÌNH DƯƠNG
BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG - KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG

Email: duongnd@hcmut.edu.vn

Ngày 15/02/2021

Chương 2: Tích phân bội

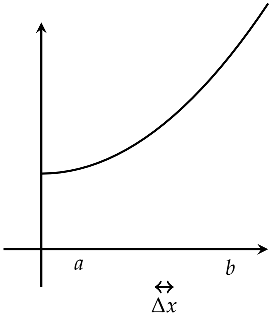
Nội dung

Chuẩn đầu ra

- Mô tả được ý tưởng tính thể tích nằm dưới mặt cong nhờ tích phân bội 2 hay giới hạn của tổng Riemann kép
- Tính được tích phân bội 2 trên miền hình chữ nhật qua *tích phân lặp*
- Tính được *giá trị trung bình* của hàm 2 biến trên miền hình chữ nhật

Nội dung

GT I: Diện tích miền phẳng nằm dưới đường cong



Tổng Riemann với $n = 8$ cho $\int_a^b f(x)\,dx$

Diện tích miền phẳng nằm dưới đồ thị $y = f(x)$ và $x = a$, $x = b$ được tính xấp xỉ bởi *tổng Riemann*

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

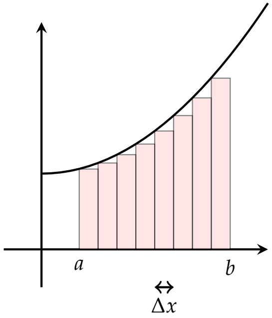
trong đó

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$x_i = a + i\Delta x$$

$$x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$$

GT I: Diện tích miền phẳng nằm dưới đường cong



Tổng Riemann với $n = 8$ cho $\int_a^b f(x)\,dx$

Diện tích miền phẳng nằm dưới đồ thị $y = f(x)$ và $x = a$, $x = b$ được tính xấp xỉ bởi *tổng Riemann*

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

trong đó

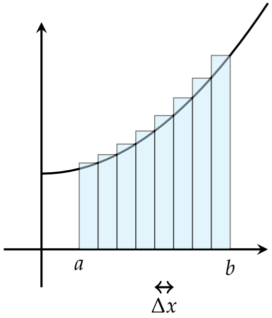
$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$x_i = a + i\Delta x$$

$$x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$$

$x_i^* = x_{i-1}$ (đầu mút trái)

GT I: Diện tích miền phẳng nằm dưới đường cong



Tổng Riemann với $n = 8$ cho $\int_a^b f(x)\,dx$

Diện tích miền phẳng nằm dưới đồ thị $y = f(x)$ và $x = a$, $x = b$ được tính xấp xỉ bởi *tổng Riemann*

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

trong đó

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$x_i = a + i\Delta x$$

$$x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$$

$x_i^* = x_{i-1}$ (đầu mút trái)

$x_i^* = x_i$ (đầu mút phải)

GT I: Diện tích miền phẳng nằm dưới đường cong

Diện tích miền phẳng nằm dưới đồ thị $y = f(x)$ và $x = a$, $x = b$ được tính xấp xỉ bởi *tổng Riemann*

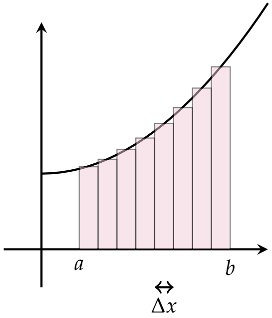
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

trong đó

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$x_i = a + i\Delta x$$

$$x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$$

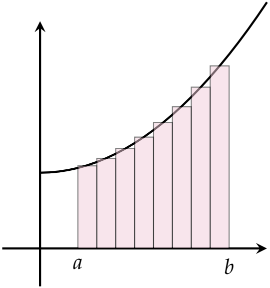


Tổng Riemann với $n = 8$ cho $\int_a^b f(x)\,dx$

$x_i^* = x_{i-1}$ (đầu mút trái)

$x_i^* = x_i$ (đầu mút phải)

GT I: Diện tích miền phẳng nằm dưới đường cong



Diện tích miền phẳng nằm dưới đồ thị của $f(x)$ giữa $x = a$ và $x = b$ là

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

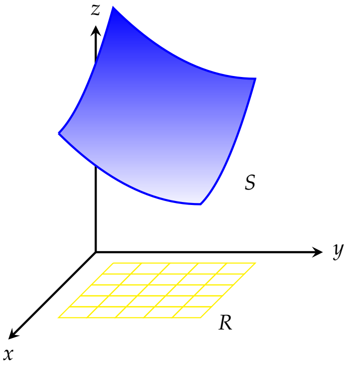
Định lí cơ bản của Giải tích khẳng định rằng, nếu f liên tục trên $[a, b]$ thì

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

với F là một nguyên hàm của f.

Ý tưởng trên được mở rộng để tính *diện tích thực* nằm dưới đồ thị của hàm có dấu không đổi và *giá trị* của f trên $[a, b]$

Giải tích II: Thể tích dưới mặt cong



Bài toán Tìm thể tích vật thể hình hộp có mặt đáy là hình chữ nhật

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

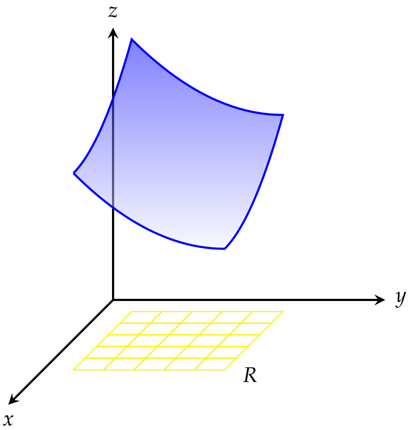
trong mặt phẳng (Oxy) và mặt trên là mặt cong

$$S = \{(x, y, z) : (x, y) \in R,\ z = f(x, y)\}$$

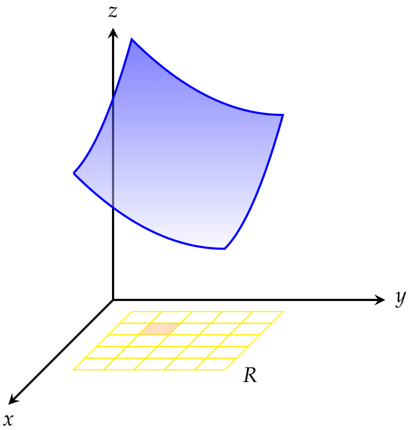
trong đó f là hàm liên tục.

1. Chia hình chữ nhật R thành 'lưới' $n \times n$ hình chữ nhật con $R_{i,j}$
2. Với mỗi hình chữ nhật $R_{i,j}$, dựng các hình hộp con có chiều cao là $f(x_i^*, y_j^*)$
3. Cộng thể tích của n^2 hình hộp con

Thể tích dưới mặt cong

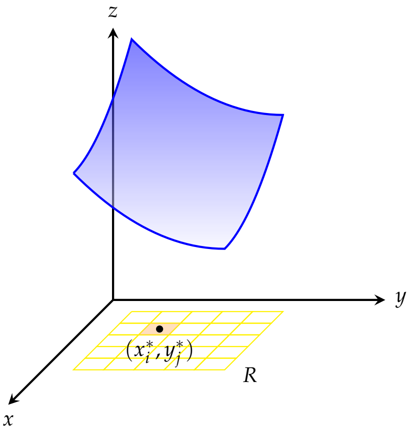


Thể tích dưới mặt cong



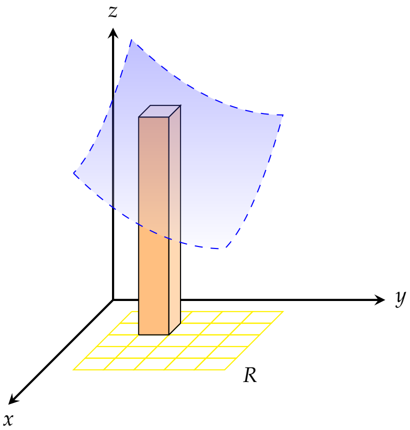
- Gọi diện tích mỗi hình chữ nhật $R_{i,j}$ là ΔS

Thể tích dưới mặt cong



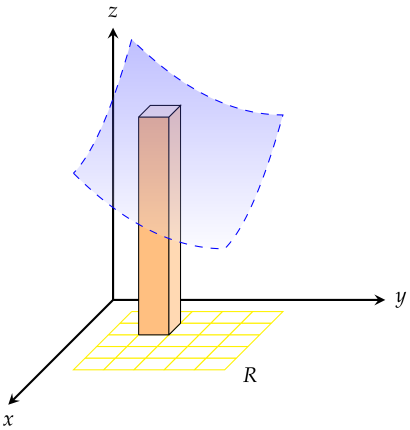
- Gọi diện tích mỗi hình chữ nhật $R_{i,j}$ là ΔS
- Lấy điểm (x_i^*, y_j^*) bất kì nằm trong $R_{i,j}$

Thể tích dưới mặt cong



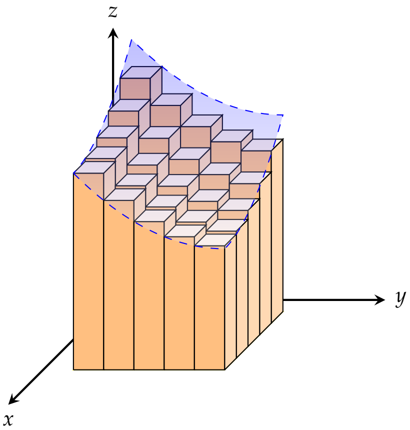
- Gọi diện tích mỗi hình chữ nhật $R_{i,j}$ là ΔS
- Lấy điểm (x_i^*, y_j^*) bất kì nằm trong $R_{i,j}$
- Dựng hình hộp con có chiều cao $f(x_i^*, y_j^*)$, đáy là $R_{i,j}$

Thể tích dưới mặt cong



- Gọi diện tích mỗi hình chữ nhật $R_{i,j}$ là ΔS
- Lấy điểm (x_i^*, y_j^*) bất kì nằm trong $R_{i,j}$
- Dựng hình hộp con có chiều cao $f(x_i^*, y_j^*)$, đáy là $R_{i,j}$
- Khi đó, thể tích hình hộp con đó xấp xỉ $V_{ij} = f(x_i^*, y_j^*)\,\Delta S$

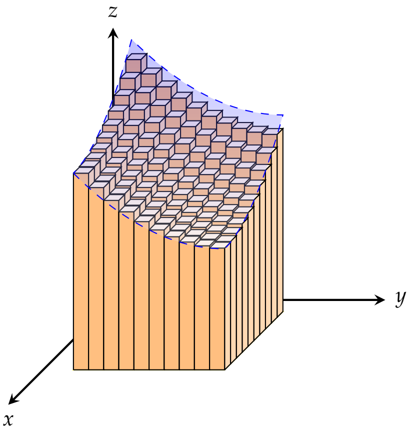
Thể tích dưới mặt cong



- Gọi diện tích mỗi hình chữ nhật $R_{i,j}$ là ΔS
- Lấy điểm (x_i^*, y_j^*) bất kì nằm trong $R_{i,j}$
- Dựng hình hộp con có chiều cao $f(x_i^*, y_j^*)$, đáy là $R_{i,j}$
- Khi đó, thể tích hình hộp con đó xấp xỉ $V_{ij} = f(x_i^*, y_j^*)\,\Delta S$
- Thể tích hình hộp ban đầu xấp xỉ

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\,\Delta S$$

Thể tích dưới mặt cong



- Gọi diện tích mỗi hình chữ nhật $R_{i,j}$ là ΔS
- Lấy điểm (x_i^*, y_j^*) bất kì nằm trong $R_{i,j}$
- Dựng hình hộp con có chiều cao $f(x_i^*, y_j^*)$, đáy là $R_{i,j}$
- Khi đó, thể tích hình hộp con đó xấp xỉ $V_{ij} = f(x_i^*, y_j^*)\,\Delta S$
- Thể tích hình hộp ban đầu xấp xỉ

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\,\Delta S$$

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\,\Delta S$$

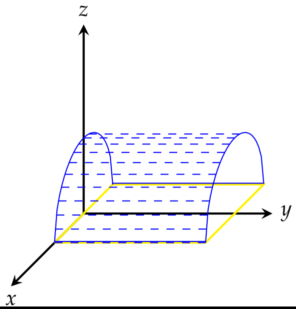
Thể tích tính bởi tích phân

Nếu $R = [a, b] \times [c, d]$ và

$$S = \{(x, y, z) : z = f(x, y),\ (x, y) \in R\}$$

thì thể tích hình hộp có đáy dưới R và mặt trên S là

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i,j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\, \Delta S = \iint_R f(x, y)\, dS$$



Tìm $\iint_R f(x, y)\, dS$ với

$$R = [-1, 1] \times [0, 2]$$

và

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2}$$

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA

Nội dung

Tích phân lặp

Trong giải tích hàm 1 biến, ta cần tìm nguyên hàm rồi tính tích phân xác định thông qua nguyên hàm (công thức Newton-Leibnitz)

Trong giải tích hàm 2 biến, trước tiên ta cần học cách tính *tích phân lặp* rồi tính tích phân bội 2 trên hình chữ nhật nhờ tích phân lặp.

Giả sử R là hình chữ nhật $[a,b] \times [c,d]$ và f liên tục trên R. Khi đó

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\, dy$$

là hàm số của x. Ví dụ, cho $f(x,y) = x^2y$ và $R = [1,2] \times [3,4]$

$$\int_3^4 (x^2y)\, dy = \left.\frac{x^2y^2}{2}\right|_3^4 = \frac{7}{2}x^2$$

Tiếp theo, tính $\int_a^b A(x)\, dx$. Chẳng hạn

$$\int_1^2 \frac{7}{2}x^2\, dx = \left.\frac{7}{6}x^3\right|_{x=1}^{x=2} = \frac{49}{6}$$

Tích phân lặp

h Nếu $f(x,y)$ là hàm liên tục trong hình chữ nhật $R = [a,b] \times [c,d]$ thì **tích phân lặp** của f là

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

---

1. Tính $\int_1^4 \int_0^2 \left(6x^2y - 2x\right)\, dy\,dx$
2. Tính $\int_1^3 \int_1^5 \dfrac{\ln y}{xy}\, dy\,dx$
3. Tính $\int_0^1 \int_1^2 \left(x + e^{-y}\right)\, dx\,dy$

Định lí Fubini

Định lí Nếu f liên tục trong hình chữ nhật

$$R = \{(x,y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$$

thì

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy.$$

Tính các tích phân bội sau:

1. $\displaystyle\iint_R \frac{xy^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}S,\ R = [0,1] \times [-3,3]$
2. $\displaystyle\iint_R \frac{1}{1+x+y}\,\mathrm{d}S,\ R = [1,3] \times [1,2]$

Thể tích tính bởi tích phân lặp

1. Tìm thể tích hình hộp có mặt trên là mặt phẳng

$$4x + 6y - 12z + 15 = 0$$

và đáy là hình chữ nhật $[-1, 2] \times [-1, 1]$

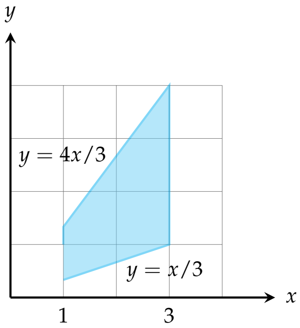
2. Tìm thể tích hình hộp có mặt trên là paraboloid elliptic

$$x^2/4 + y^2/9 + z = 1$$

và đáy là hình chữ nhật $[-1, 1] \times [-2, 2]$

Nội dung

Tích phân bội 2 trên miền tổng quát



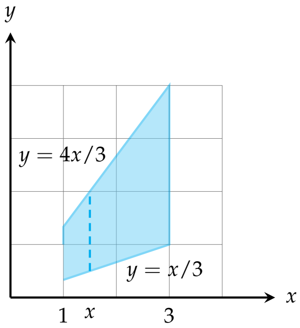
Tìm

$$\iint_D (x + 3y)\,\mathrm{d}S$$

với

$$D = \{1 \leq x \leq 3,\ \ x/3 \leq y \leq 4x/3\}$$

Tích phân bội 2 trên miền tổng quát



Tìm

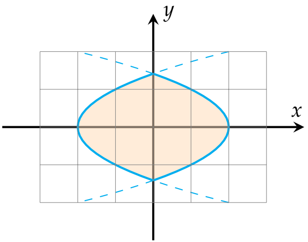
$$\iint_D (x+3y)\,\mathrm{d}S$$

với

$$D = \{1 \le x \le 3,\ \ x/3 \le y \le 4x/3\}$$

$$\iint_D (x+3y)\,\mathrm{d}S = \int_1^3 \left(\int_{x/3}^{4x/3} (x+3y)\,dy \right)\,dx$$

Tích phân bội 2 trên miền tổng quát



Tính

$$\iint_D 1 \, \mathrm{d}S$$

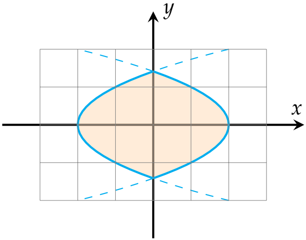
với D là miền giới hạn bởi các đường

$$x = 2 - y^2$$

và

$$x = -2 + y^2.$$

Tích phân bội 2 trên miền tổng quát



Tính

$$\iint_D 1\,\mathrm{d}S$$

với D là miền giới hạn bởi các đường

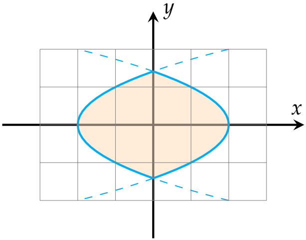
$$x = 2 - y^2$$

và

$$x = -2 + y^2.$$

$$D = \{-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2},\ -2 + y^2 \leq x \leq 2 + y^2\}$$

Tích phân bội 2 trên miền tổng quát



Tính

$$\iint_D 1 \, dS$$

với D là miền giới hạn bởi các đường

$$x = 2 - y^2$$

và

$$x = -2 + y^2.$$

$$D = \{-\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2}, \ -2 + y^2 \le x \le 2 + y^2\}$$

$$\iint_D 1 \, dS = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{-2+y^2}^{2-y^2} 1 \, dx \right) dy$$

Nội dung

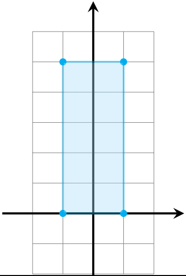
Giá trị trung bình

Giá trị trung bình của $y = f(x)$ trên $[a, b]$ là

$$f_{\text{av}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

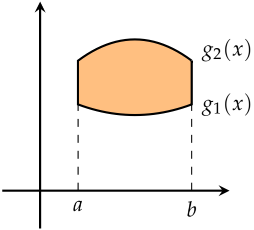
Giá trị trung bình của $z = f(x, y)$ trên hình chữ nhật R với diện tích $A(R)$ là

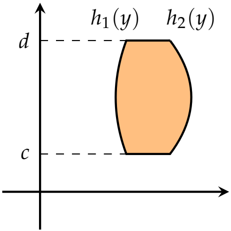
$$f_{\text{av}} = \frac{1}{A(R)}\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}S$$



Tính giá trị trung bình của $f(x, y) = x^2y$ trên hình chữ nhật có các đỉnh là $(-1, 0)$, $(-1, 5)$, $(1, 5)$ và $(1, 0)$.

Tích phân trên miền tổng quát





Xét tích phân $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}S$ với R là một trong các miền sau:

Loại I: R giới hạn bởi đồ thị của 2 hàm liên tục theo x

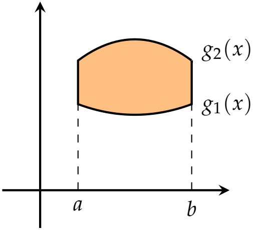
$$D = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

Loại II: R giới hạn bởi đồ thị của 2 hàm liên tục theo y

$$D = \{(x,y) : c \leq y \leq d,\, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

Nội dung

Tích phân bội 2 trên miền Loại I

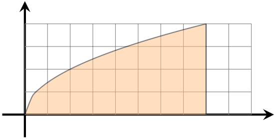


$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}S$ với

$$D = \{(x,y) : a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

tính bởi công thức

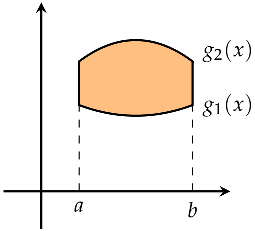
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$



Ví dụ: Tính $\iint_D \frac{y}{x^2+1}\,\mathrm{d}S$ với

$$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 4, 0 \le y \le \sqrt{x}\}$$

Tích phân bội 2 trên miền Loại I

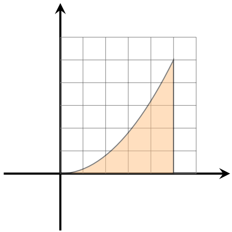


$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}S$ với

$$D = \{(x,y) : a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

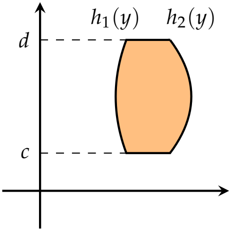
tính bởi công thức

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$



Ví dụ: Tính $\iint_R x\cos y\,\mathrm{d}S$ với D là miền giới hạn bởi các đường $y = 0, y = x^2$ và $x = 1$

Tích phân bội 2 trên miền Loại II

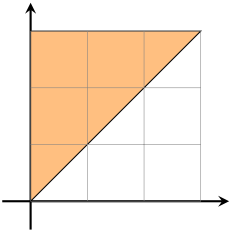


$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}S$ với

$$D = \{(x,y) : c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

tính bởi công thức

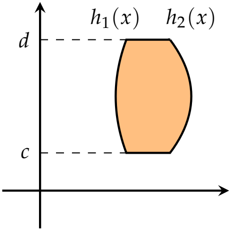
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$



Ví dụ: Tính $\iint_D e^{-y^2}\,\mathrm{d}S$ với

$$D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 3,\ 0 \leq x \leq y\}$$

Tích phân bội 2 trên miền Loại II

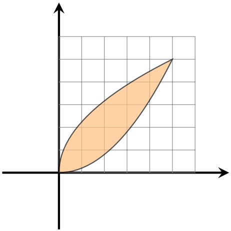


Tích phân $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}S$ với

$$D = \{(x,y) : c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

được tính bởi

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$



Ví dụ: Tìm thể tích vật thể hình trụ có mặt trên là $3x + 3y - z = 0$, mặt đáy là miền giới hạn bởi các parabol $y = x^2$ và $x = y^2$

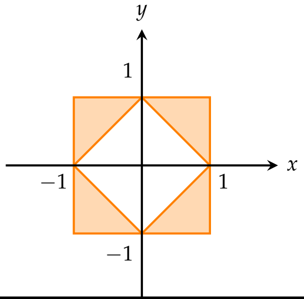
Nội dung

Tính chất của tích phân bội 2

1. (tuyến tính) $\iint_D [f(x,y) + g(x,y)]\,\mathrm{d}S = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}S + \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}S$
2. (tuyến tính) $\iint_D cf(x,y)\,\mathrm{d}S = c\iint f(x,y)\,\mathrm{d}S$
3. (thứ tự) Nếu $f(x,y) \geq g(x,y)$ với $(x,y) \in D$ thì
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}S \geq \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}S$$
4. $\iint_D 1\,\mathrm{d}S = A(D)$ trong đó $A(D)$ là diện tích miền D

Tính chất của tích phân bội 2

5. (cộng tính) Nếu $D = D_1 \cup D_2$ thì
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}S + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}S$$
6. (thứ tự) Nếu $m \leq f(x,y) \leq M$ thì
$$mA(D) \leq \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}S \leq MA(D)$$



Biểu diễn $\iint_D xy\,\mathrm{d}S$ qua tổng 2 tích phân Loại I và Loại II, trong đó D cho bởi hình vẽ bên h

TRAO ĐỔI