1. Mặt bậc hai
2. Công thức Taylor
    - Đạo hàm riêng cấp cao và ký hiệu
    - Vi phân toàn phần cấp cao và ký hiệu
    - Công thức Taylor
3. Cực trị
    - Điều kiện đủ của cực trị địa phương
    - GTLN-GTNN trên tập đóng bị chặn
    - Phương pháp nhân tử Lagrange

Định nghĩa

Một **mặt bậc hai (quadric surface)** *là tập hợp các bộ ba $(x; y; z)$ thỏa mãn một phương trình bậc hai theo ba biến x, y, z.*

- Phương trình bậc hai tổng quát theo ba biến x, y, z có dạng

  $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

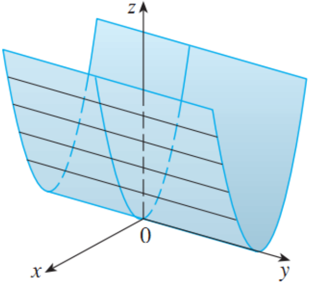
  trong đó $A, B, C, \dots, J$ là các hằng số.
- Bằng cách sử dụng các phép tịnh tiến và phép quay, ta có thể đưa phương trình bậc hai về một trong hai dạng chính tắc sau:

  $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0, \text{ hoặc } Ax^2 + By^2 + Iz = 0.$$

Định nghĩa

Một **mặt trụ (cylinder)** *là một mặt chứa tất cả các đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước và đi qua một đường cong phẳng cho trước.*

Chẳng hạn, đồ thị của hàm số hai biến $z = x^2$ là một **mặt trụ parabolic (parabolic cylinder)**.

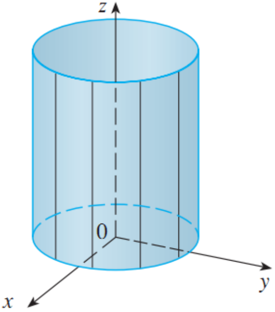


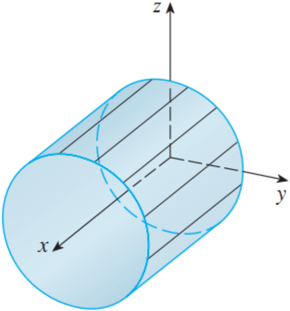
Ví dụ

Hãy xác định và vẽ các mặt sau đây:

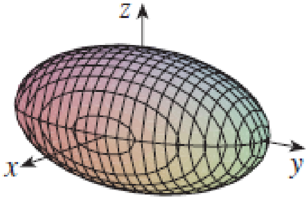
(a) $x^2 + y^2 = 1$;

(b) $y^2 + z^2 = 1$.



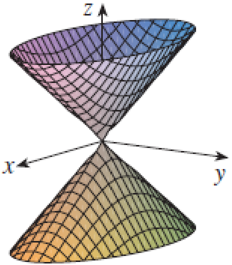


Mặt Ellipsoid



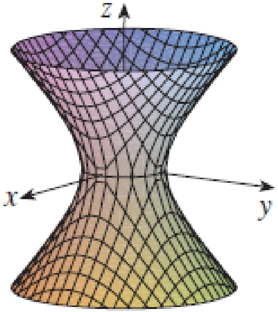
- Phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.
- Mọi vết đều là các đường elip.
- Nếu $a = b = c$, thì mặt ellipsoid là một mặt cầu.

Mặt nón



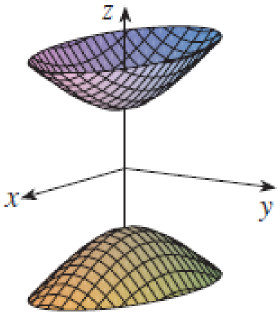
- Phương trình $\dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$.
- Các vết ngang là các đường elip.
- Các vết dọc trong các mặt phẳng $x = k$ và $y = k$ là các đường hyperbol nếu $k \neq 0$, nhưng là cặp đường thẳng nếu $k = 0$.

Mặt Hyperboloid một tầng



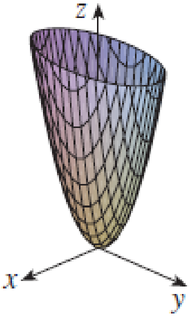
- Phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.
- Các vết ngang là các đường elip.
- Các vết dọc là các đường hyperbol.

Mặt Hyperboloid hai tầng



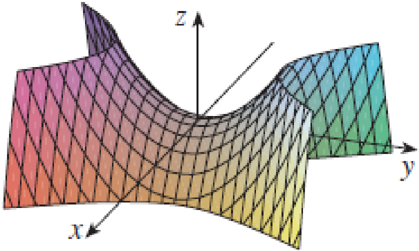
- Phương trình $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
- Các vết ngang trong mặt phẳng $z = k$ là các đường elip nếu $k > c$ hoặc $k < -c$.
- Các vết dọc là các đường hyperbol.

Mặt Paraboloid Elliptic



- Phương trình $\dfrac{z}{c} = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$.
- Các vết ngang là các đường elip.
- Các vết dọc là các đường parabol.

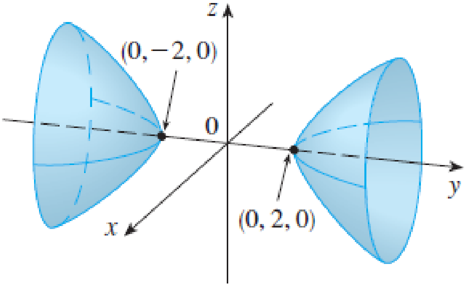
Mặt Paraboloid Hyperbolic



- Phương trình $\dfrac{z}{c} = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$.
- Các vết ngang là các đường hyperbol.
- Các vết dọc là các đường parabol.

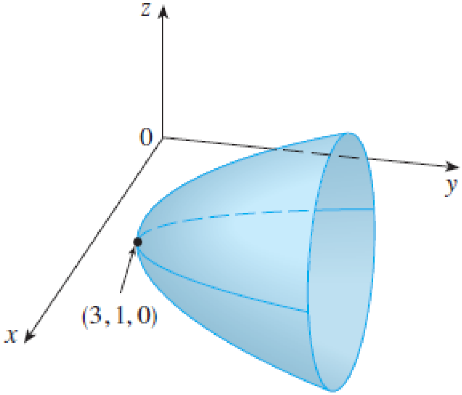
Ví dụ

Hãy xác định và vẽ mặt bậc hai $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$.



Ví dụ

Hãy phân loại mặt bậc hai $x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$.



- Nếu f là một hàm số theo hai biến x và y, thì các đạo hàm riêng của nó là f_x và f_y cũng là các hàm số theo hai biến x và y.
- Do đó, ta có thể xét đến các đạo hàm riêng của chúng $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$, $(f_y)_y$, được gọi là **các đạo hàm riêng cấp hai (second partial derivatives)** của f.

- Nếu $z = f(x;y)$, ta có các ký hiệu sau:

$$(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Ví dụ

Tìm các đạo hàm riêng cấp hai của

$$f(x;y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2.$$

Định lý (Clairaut's theorem)

Giả sử f xác định trên một đĩa D chứa điểm $(a; b)$. Nếu cả hai hàm số f_{xy} và f_{yx} đều liên tục trên D, thì

$$f_{xy}(a; b) = f_{yx}(a; b).$$

- Xét hàm số $z = f(x;y)$. Khi đó, vi phân toàn phần của z, nếu tồn tại, là
$$dz = f_x dx + f_y dy.$$
- Bản thân dz cũng là một hàm số theo x và y. Vi phân toàn phần của dz, nếu tồn tại, được gọi là **vi phân toàn phần cấp hai** của z, ký hiệu d^2z:
$$d^2z = d(dz) = d(f_x dx + f_y dy).$$
- Cứ tiếp tục như vậy, ta có các vi phân cấp cao hơn:
$$d^3z = d(d^2z),$$
$$\ldots\ldots$$
$$d^nz = d(d^{n-1}z).$$

- Giả sử d^2z tồn tại và f_{xy}, f_{yx} liên tục. Ta có:

$$\begin{aligned} d^2z = d(dz) &= d(f_x\Delta x + f_y\Delta y) \\ &= (f_x\Delta x + f_y\Delta y)_x\Delta x + (f_x\Delta x + f_y\Delta y)_y\Delta y \\ &= f_{xx}\Delta x^2 + 2f_{xy}\Delta x\Delta y + f_{yy}\Delta y^2. \end{aligned}$$

- Ký hiệu "tượng trưng":

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f.$$

- Tiếp tục tính toán như vậy, ta được công thức **lũy thừa tượng trưng**:

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f.$$

Công thức Taylor

Giả sử hàm số $f(x; y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp n liên tục trong một đĩa tâm $(a; b)$ nào đó. Nếu điểm $(a + \Delta x; b + \Delta y)$ cũng nằm trong đĩa này, thì ta có

$$f(a + \Delta x; b + \Delta y) = f(a; b) + \frac{1}{1!} df(a; b) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(a; b) + R_n,$$

trong đó

$$R_n = o(\rho^n), \text{ khi } \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0.$$

Khai triển Taylor tại điểm $(a; b) = (0; 0)$ được gọi là **khai triển Maclaurin**.

Ví dụ

Hãy viết khai triển Maclaurin đến cấp 2 của hàm

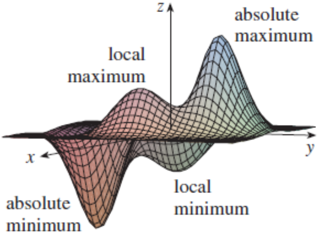
$$f(x;y) = e^{x+2xy+y^2}.$$

Định nghĩa

Cho hàm số hai biến f. Ta nói f đạt **cực đại địa phương (local maximum)** *tại điểm $(a; b)$ nếu*

$$f(x; y) \leq f(a; b), \;\; \textit{khi } (x; y) \textit{ gần } (a; b).$$

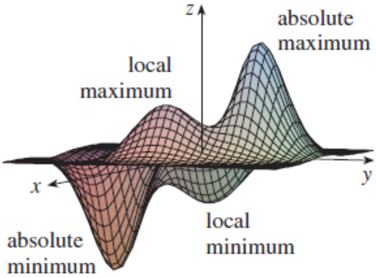
[Điều này có nghĩa là $f(x; y) \leq f(a; b)$ với mọi $(x; y)$ thuộc một đĩa nào đó có tâm là $(a; b)$.]



Định nghĩa

Cho hàm số hai biến f. Ta nói f đạt **giá trị lớn nhất (absolute maximum)** *tại* $(a; b)$ *nếu*

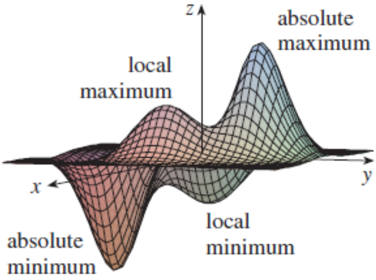
$$f(x; y) \leq f(a; b), \text{ với mọi } (x; y) \text{ thuộc miền xác định của } f.$$



Định nghĩa

Cho hàm số hai biến f. Ta nói f đạt **cực tiểu địa phương (local minimum)** *tại $(a;b)$ nếu*

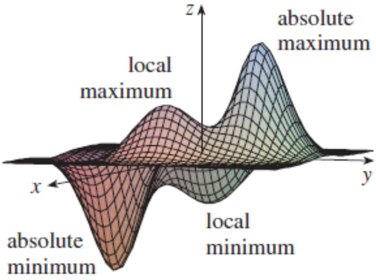
$$f(x;y) \geq f(a;b), \ \textit{khi } (x;y) \textit{ gần } (a;b).$$



Định nghĩa

Cho hàm số hai biến f. Ta nói f đạt **giá trị nhỏ nhất (absolute minimum)** *tại $(a; b)$ nếu*

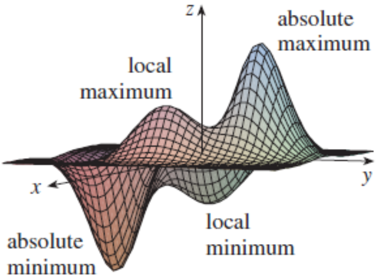
$$f(x; y) \geq f(a; b), \text{ với mọi } (x; y) \text{ thuộc miền xác định của } f.$$



Định lý

Cho hàm số hai biến f. Nếu f đạt cực trị địa phương tại $(a; b)$, và nếu các đạo hàm riêng cấp một của f tại $(a; b)$ tồn tại, thì

$$f_x(a; b) = 0, \quad f_y(a; b) = 0.$$



Định nghĩa

Cho hàm số hai biến f. Điểm $(a; b)$ được gọi là **điểm tới hạn (critical point)** *hay* **điểm dừng (stationary point)** *nếu*

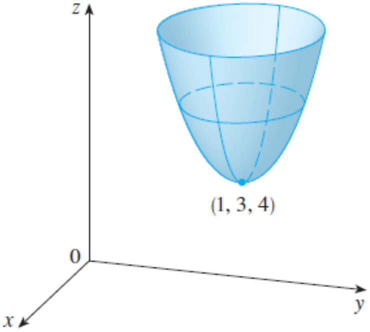
$$f_x(a; b) = 0, \quad f_y(a; b) = 0,$$

hoặc một trong các đạo hàm riêng này không tồn tại.

Ví dụ

Hãy tìm các điểm cực trị địa phương của hàm số

$$f(x;y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14.$$



Định lý

Cho hàm số hai biến f. Giả sử các đạo hàm riêng cấp hai của f liên tục trên một đĩa nào đó có tâm là $(a; b)$, và giả sử

$$f_x(a;b) = 0, \quad f_y(a;b) = 0.$$

Đặt

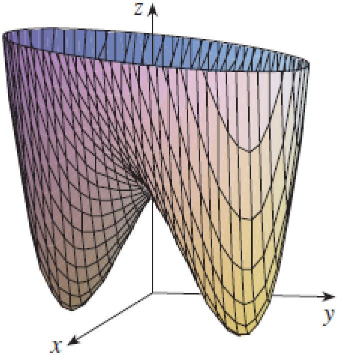
$$\Delta = [f_{xy}(a;b)]^2 - f_{xx}(a;b)f_{yy}(a;b).$$

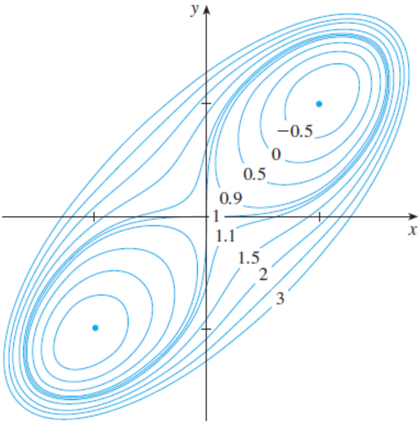
(a) *Nếu $\Delta < 0$ và $f_{xx}(a;b) > 0$, thì $(a;b)$ là điểm cực tiểu địa phương.*
(b) *Nếu $\Delta < 0$ và $f_{xx}(a;b) < 0$, thì $(a;b)$ là điểm cực đại địa phương.*
(c) *Nếu $\Delta > 0$, thì $(a;b)$ không phải là điểm cực trị địa phương, và $(a;b)$ được gọi là* **điểm yên ngựa (saddle point)**.

Ví dụ

Hãy tìm các điểm cực trị địa phương của hàm số

$$f(x;y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$





Định nghĩa

Một **tập đóng (closed set)** *trong* $\mathbb{R}^2$ *là một tập hợp mà mọi điểm biên của nó cũng thuộc nó. [Một điểm biên của tập D là điểm $(a; b)$ mà mọi đĩa có tâm là $(a; b)$ đều chứa những điểm thuộc D và những điểm không thuộc D.]*

Chẳng hạn, đĩa

$$D = \{(x; y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

là một tập đóng.

(a) Closed sets (b) Sets that are not closed

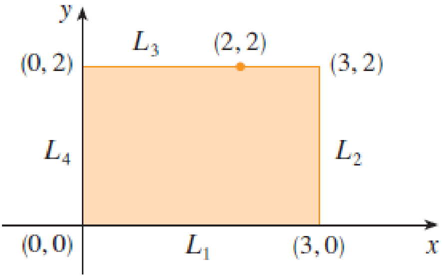
Định nghĩa

Một **tập bị chặn (bounded set)** *trong* $\mathbb{R}^2$ *là một tập hợp mà nó được chứa trong một đĩa nào đó.*

Chẳng hạn, hình chữ nhật

$$D = \{(x; y) | 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$$

là một tập bị chặn.



Định lý

Nếu f liên tục trên một tập đóng và bị chặn D của $\mathbb{R}^2$, thì f đạt được giá trị lớn nhất là $f(x_1; y_1)$ và giá trị nhỏ nhất là $f(x_2; y_2)$ tại những điểm $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ nào đó trong D.

Để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một hàm số liên tục f trên một tập đóng và bị chặn D, ta làm các bước sau:

1. Tìm các giá trị của f tại các điểm tới hạn của f trong D.
2. Tìm các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của f trên biên của D.
3. Giá trị lớn nhất trong các giá trị được tính từ bước 1 và 2 chính là giá trị lớn nhất của f trên D; giá trị nhỏ nhất trong các giá trị được tính từ bước 1 và 2 chính là giá trị nhỏ nhất của f trên D.

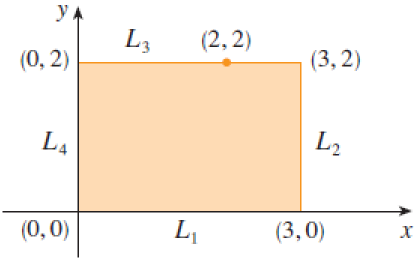
Ví dụ

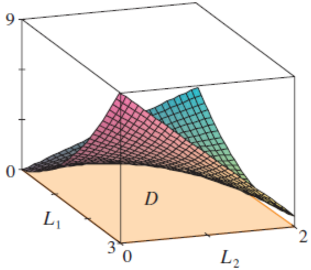
Hãy tìm giá trị giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x;y) = x^2 - 2xy + 2y$$

trên hình chữ nhật

$$D = \{(x;y) | 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}.$$

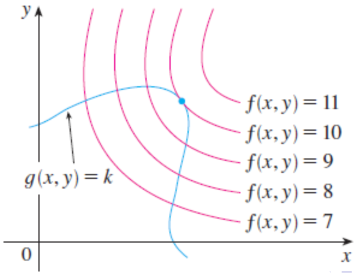




- Giả sử ta cần tìm GTLN của hàm $f(x;y)$ với ràng buộc $g(x;y)=k$.
- Về mặt hình học, GTLN cần tìm chính là giá trị c sao cho 2 đường mức $f(x;y)=c$ và $g(x;y)=k$ tiếp xúc nhau tại điểm $(x_0;y_0)$ nào đó, tức là

$$\nabla f(x_0;y_0)=\lambda\nabla g(x_0;y_0).$$

- Số λ được gọi là **nhân tử Lagrange (Lagrange multiplier)**.



Phương pháp nhân tử Lagrange

Để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x;y)$ với ràng buộc $g(x;y)=k$, ta làm các bước sau [giả sử GTLN, GTNN tồn tại và $\nabla g(x;y)\neq \mathbf{0}$ trên đường $g(x;y)=k$]:

(a) Tìm các giá trị x, y và λ thỏa hệ

$$\begin{cases}\nabla f(x;y)=\lambda\nabla g(x;y),\\ g(x;y)=k.\end{cases}$$

(b) Tính các giá trị của hàm f tại các điểm $(x;y)$ thu được từ bước (a). Giá trị lớn nhất trong các giá trị này là giá trị lớn nhất của f; giá trị nhỏ nhất trong các giá trị này là giá trị nhỏ nhất của f.

Ví dụ

Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x;y) = x^2 + 2y^2$ *trên đường tròn* $x^2 + y^2 = 1$.