**ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH**
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
Bộ môn Toán Ứng dụng

# BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 2

Nguyễn Thị Cẩm Vân

Email: ntcvantud@gmail.com

TP. Hồ Chí Minh - 2021

# CHƯƠNG 5:

# TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

1. Tham số hóa đường cong.
2. Tích phân đường loại một.
3. Tích phân đường loại hai.
    1. Định nghĩa và Tính tích phân đường loại 2.
    2. Định lý Green.
    3. Tích phân không phụ thuộc đường đi.

# Tham số hóa đường cong

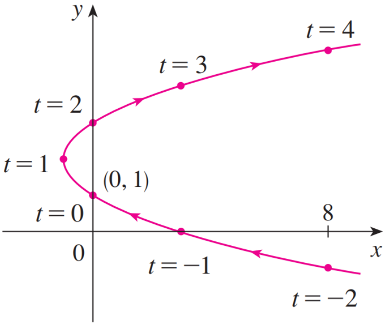
## Tham số hóa đường cong phẳng

Tham số hóa đường cong là việc biểu diễn tọa độ các điểm trên đường cong theo một tham số duy nhất.

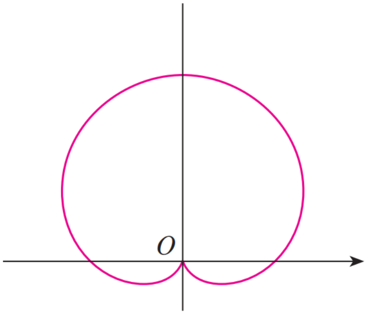
Các dạng tham số hóa thường gặp trong đường cong phẳng:

1. Theo tọa độ Descartes: tham số là $x$ hoặc $y$.
2. Theo tham số tổng quát $t$.
3. Theo tọa độ cực: tham số là $r$ hoặc $\theta$ hoặc $\varphi$

# Ví dụ về các dạng tham số hóa đường cong phẳng




(a) $\begin{cases} x &= t^2 - 2t \\ y &= t + 1 \end{cases}$




(b) $r = 1 + \sin\theta$

# Phương pháp tham số hóa một đường cong phẳng

$(C)$ viết dạng tham số tổng quát:

$$x = x(t), y = y(t)$$

Ví dụ

- Đoạn thẳng nối $A(a_1, a_2)$ và $B(b_1, b_2)$

$$\begin{cases} x = a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y = b_2 + t(b_2 - a_2) \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

- Đường cong

$$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = t, \\ y = f(t) \end{cases}$$

- Đường tròn:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + R\cos t \\ y = b + R\sin t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$$

- Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$$

Tham số hóa theo tọa độ cực $(C)$: $r = r(\varphi)$

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$

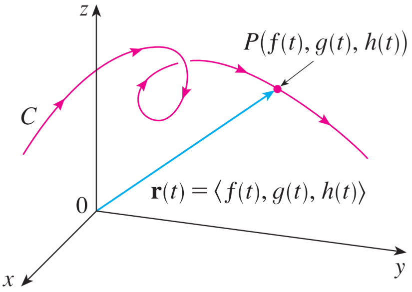
Ví dụ: Đường tròn

$$x^2 + y^2 = 2y$$
$$\Leftrightarrow r = 2\sin\varphi$$

Tham số:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi = 2\sin^2\varphi \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

# Đường cong trong không gian




Giả sử rằng $f, g, h$ là những hàm liên tục giá trị thực (continuous real-valued functions) trên khoảng $I$, khi đó tập $C$ gồm những điểm $(x, y, z)$ trong không gian với:

$$\begin{cases} x &= f(t) \\ y &= g(t) \\ z &= h(t) \end{cases}$$

$t$ biến thiên trên $I$, được gọi là đường cong trong không gian (space curve).

Vector vị trí của điểm $P(x, y, z)$ thuộc $C$: $\mathbf{r}(t) = f(t)\ \mathbf{i} + g(t)\ \mathbf{j} + h(t)\ \mathbf{k}$

## Tham số hóa đường cong trong không gian

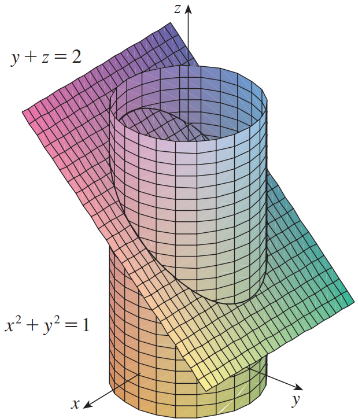
B1. Chiếu đường cong lên mặt phẳng thích hợp.

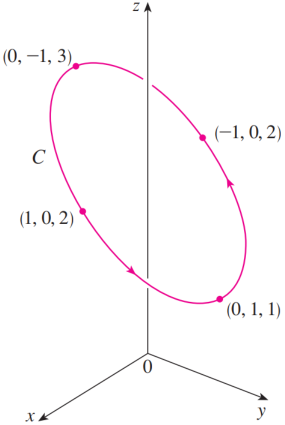
B2. Tham số hóa cho đường cong hình chiếu (trong mặt phẳng).

B3. Tham số hóa cho biến còn lại.

## Câu 1.

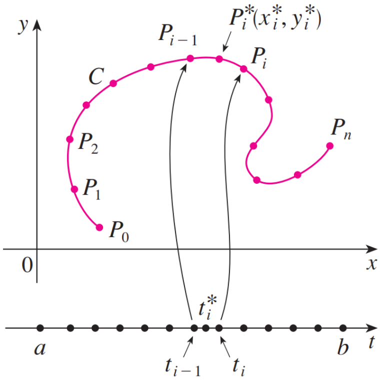
Tìm vector vị trí cho các điểm thuộc giao tuyến giữa hình trụ $x^2 + y^2 = 1$ và mặt phẳng $y + z = 2$



# Tích phân đường loại một

# Định nghĩa




Với đường cong $C$:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad a \leq t \leq b$$

trơn ( $\mathbf{r}'$ liên tục và $\mathbf{r}' \neq 0$).
Chia đoạn $[a, b]$ thành $n$ đoạn nhỏ $[t_{i-1}, t_i]$ có độ rộng bằng nhau, khi đó đường cong $C$ ứng với mỗi đoạn $[t_{i-1}, t_i]$ đã chia ta được một cung nhỏ có độ dài $\Delta\ell_1, \Delta\ell_2, \ldots$.
Chọn điểm bất kỳ $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ tương ứng $t = t_i^*$.

Giả sử miền xác định của $f(x, y)$ chứa $C$, khi đó tổng:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta\ell_i$$

giống như một tổng Riemann.

**Định nghĩa 2.1**

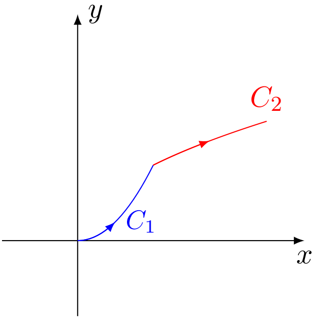
Nếu $f$ được xác định trên đường cong trơn $C$ được cho bởi phương trình tham số trên, thì **tích phân đường của $f$ dọc theo $C$** là

$$\int_C f(x, y)\, d\ell = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta\ell_i$$

nếu giới hạn này tồn tại.

# Tính chất của tích phân đường 1

1. Tích phân đường loại 1 không phụ thuộc chiều đường đi
2. $L = \int_{AB} 1 d\ell$ = độ dài cung $AB$
3. Tính chất tuyến tính của tích phân đường:
   $$\int_C cf d\ell = c\int_C f d\ell; \quad \int_C (f+g) d\ell = \int_C f d\ell + \int_C g d\ell$$
4. $$C = C_1 \cup C_2$$
   $$\Rightarrow \int_C f d\ell = \int_{C_1} f d\ell + \int_{C_2} f d\ell$$



# Tính tích phân đường loại 1

- Tổng quát:
  - Tham số hóa đường cong:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad a \le t \le b$$

    với $t$ là tham số.
  - Tìm $d\ell = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$
  - Tính

$$\boxed{1} \qquad \int_C f(x,y)\, d\ell = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

**Câu 2.**

Tính $\int_C (x-y)\,d\ell$, $C$ là đường tròn có phương trình $x^2+y^2=2x$.

- Trường hợp đường cong được cho bởi: $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$.
  - $x$ là tham số, phương trình tham số: $\begin{cases} x &= x \\ y &= f(x) \end{cases}, \quad a \leq x \leq b$
  - $d\ell = \sqrt{1^2 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$
  - Tích phân trở thành:

$$\boxed{2} \qquad \int_C f(x, y)\, d\ell = \int_a^b f(x, f(x))\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

**Câu 3.**

Tính $\int_C (x^2 - 3xy)\, d\ell$, $C$ là đường parabola có phương trình $y = x^2$ từ điểm $(0, 0)$ đến $(2, 4)$.

- Trường hợp đường cong được cho bởi: $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$.
  - $y$ là tham số, phương trình tham số: $\begin{cases} x &= g(y) \\ y &= y \end{cases}, \quad c \leq y \leq d$
  - $d\ell = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2 + 1^2}\, dy = \sqrt{(g'(y))^2 + 1}\, dy$
  - Tích phân trở thành:

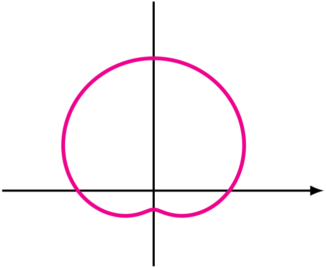
$$\boxed{3} \qquad \int_C f(x,y)\, d\ell = \int_c^d f(g(y),y)\sqrt{(g'(y))^2 + 1}\, dy$$

- Trường hợp $C$ được cho bởi hàm trong tọa độ cực $r = r(\varphi)$
  - $\varphi$ là tham số, phương tham số: $\begin{cases} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{cases}, \quad \alpha \le \varphi \le \beta$
  - $$\begin{aligned} d\ell &= \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi \\ &= \sqrt{(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)^2 + (r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)^2}\, d\varphi \\ &= \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi \end{aligned}$$
  - Tích phân trở thành:

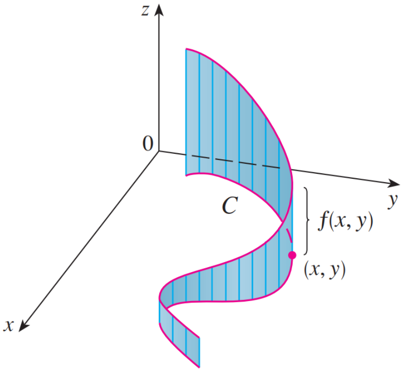
$$\boxed{4} \qquad \int_C f(x,y)d\ell = \int_\alpha^\beta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi$$

**Câu 4.**

Tính độ dài đường cong được cho bởi hàm trong tọa độ cực:
$r = 4 + 3\sin\varphi$



# Ý nghĩa hình học của tích phân đường




Với hàm $f(x,y) \geq 0$, khi đó $\int_C f(x,y)\,d\ell$ chính là diện tích của "hàng rào" mà chân là đường cong $C$ trên mặt $Oxy$ và chiều cao hàng rào tại mỗi điểm $(x,y)$ là $f(x,y)$.

# Tích phân đường loại 1 trong không gian

- Tương tự tích phân đường trong mặt phẳng, tích phân đường loại 1 dọc theo đường cong $C$ trong không gian có các tính chất như tích phân đường loại 1 trong mặt phẳng.
- Để tính tích phân đường trong không gian, ta cũng thực hiện như cách tính tích phân đường loại một trong mặt phẳng đã nêu, với

$$d\ell = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

# Tích phân đường loại hai

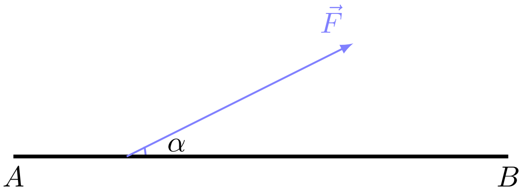
# Định nghĩa và Tính tích phân đường loại 2

# Bài toán

- Trong vật lý, để xác định công thực hiện được khi di chuyển chất điểm đi được một đoạn đường từ $A$ đến $B$:

5
$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{AB}| = F\ AB\ \cos\alpha$$

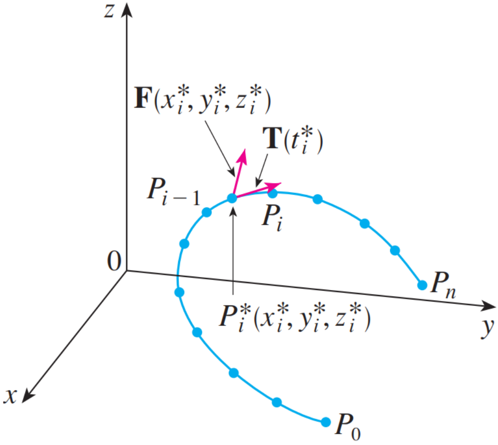
trong đó $F$ không đổi và $AB$ là đoạn thẳng như hình dưới.

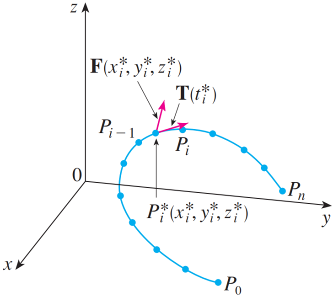


- Vậy đối với lực $F$ thay đổi trong không gian và đoạn đường từ $A$ đến $B$ là một đường cong bất kỳ thì công của lực này được xác định như thế nào?

- Vậy đối với lực $F$ thay đổi trong không gian và đoạn đường từ $A$ đến $B$ là một đường cong bất kỳ thì công của lực này được xác định như thế nào?
- Khi đó ta có bài toán về tích phân đường trong trường vector.

- Giả sử, ta có một trường lực $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ liên tục trong $\mathbb{R}^3$ trong đó $P, Q, R$ là các lực thành phần theo 3 phương $x, y, z$.
- Để tính công của trường lực khi di chuyển một chất điểm dọc theo một được cong $C$:






- Chia nhỏ $C$ thành các đoạn $P_{i-1}P_i$ với độ dài $\Delta s_i$ (như cách chia trong tích phân đường loại 1 ).
- Chọn $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ trên cung thứ $i$ tương ứng với tham số $t_i^*$.
- Với $\Delta s_i$ đủ nhỏ, khi đó chất điểm di chuyển từ $P_{i-1}$ đến $P_i$ theo hướng của vector tiếp tuyến đơn vị $\mathbf{T}(t_i^*)$ tại $P^*$. Khi đó công thực hiện bởi $\mathbf{F}$ để chất điểm di chuyển từ $P_{i-1}$ đến $P_i$ xấp xỉ

$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta s_i \mathbf{T}(t_i^*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)]\, \Delta s_i$$

Khi đó, tổng công được thực hiện bởi trường lực $\mathbf{F}$ dọc theo $C$ được xác định bởi tổng:

$$\sum_{i=1}^{n} [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)]\, \Delta s_i \qquad \boxed{6}$$

- Ta thấy rằng, các giá trị xấp xỉ tốt hơn khi $n$ càng lớn. Khi đó ta có **công** sinh ra bởi trường lực $\mathbf{F}$:

$$W = \int_C \mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{T}(x,y,z)\,ds = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds \tag{7}$$

- Giả sử $C$ được cho bởi vector vị trí $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$ với vector tiếp tuyến $\mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$, sử dụng phương trình **??** ta được:

$$W = \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\right]|\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt \tag{8}$$

Tích phân trên thường được viết dưới dạng $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$

Ta có định nghĩa về tích phân đường loại hai (hay **tích phân đường trên trường vector**):

**Định nghĩa 3.1**

Cho $\mathbf{F}$ là trường vector liên tục và xác định trên đường cong trơn $C$ được cho bởi hàm vector $\mathbf{r}(t), a \leq t \leq b$. Khi đó tích phân đường của $F$ dọc theo $C$ là

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

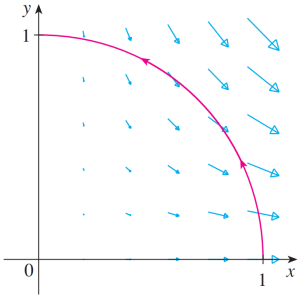
Tương tự như trường lực $\mathbf{F}$ và đường cong $C$ trong không gian 3 chiều, ta cũng có trường lực $\mathbf{F}$ và đường cong $C$ trong không gian 2 chiều.

## Câu 5.

Tìm công sinh ra bởi trường lực $\mathbf{F}(x,y) = x^2\ \mathbf{i} - xy\ \mathbf{j}$ khi di chuyển một hạt dọc theo một phần tư đường tròn $\mathbf{r}(t) = \cos t\ \mathbf{i} + \sin t\ \mathbf{j}, 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$.

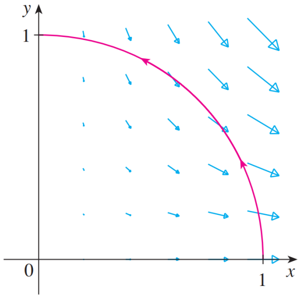
## Câu 5.

Tìm công sinh ra bởi trường lực $\mathbf{F}(x,y) = x^2\ \mathbf{i} - xy\ \mathbf{j}$ khi di chuyển một hạt dọc theo một phần tư đường tròn $\mathbf{r}(t) = \cos t\ \mathbf{i} + \sin t\ \mathbf{j}, 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$.



## Câu 5.

Tìm công sinh ra bởi trường lực $\mathbf{F}(x, y) = x^2\ \mathbf{i} - xy\ \mathbf{j}$ khi di chuyển một hạt dọc theo một phần tư đường tròn $\mathbf{r}(t) = \cos t\ \mathbf{i} + \sin t\ \mathbf{j}, 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$.




GIẢI: Vì $x = \cos t$ và $y = \sin t$, ta có:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t\ \mathbf{i} - \cos t \sin t\ \mathbf{j}$$

và

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t\ \mathbf{i} + \cos t\ \mathbf{j}$$

Vậy công sinh ra:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\ dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} (-2\cos^2 t \sin t)\ dt = -\frac{2}{3}$$

# Tính chất của tích phân đường loại 2

- Nếu tích phân đường loại một không thay đổi khi ta đảo chiều của đường cong, thì ở tích phân đường loại hai ta có:

9
$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

- Trường hợp $C = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$, tương tự tích phân đường loại 1 ta cũng có:

10
$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

# Tính tích phân đường loại 2

- Giả sử $\mathbf{F}$ trong $\mathbb{R}^2$ được viết dưới dạng $\mathbf{F} = P\ \mathbf{i} + Q\ \mathbf{j}$ ta có:

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\ dt\\ &= \int_a^b (P\ \mathbf{i} + Q\ \mathbf{j})\cdot(x'(t)\ \mathbf{i} + y'(t)\ \mathbf{j})\ dt\\ &= \int_a^b [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)]\ dt\end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có thể tính tích phân đường trong không gian như trên. Đối với trường hợp tích phân đường trong $\mathbb{R}^2$, $C$ còn có thể được cho dưới dạng $y = f(x)$ hoặc $x = f(y)$, khi đó xem $x$ hoặc $y$ là biến tham số rồi tính như trên.

Tích phân đường loại 2 còn được viết dưới dạng $\int_C P\ dx + Q\ dy$ trong $\mathbb{R}^2$ và $\int_C P\ dx + Q\ dy + R\ dz$ trong $\mathbb{R}^3$.

Các công thức tính tích phân kép cho từng dạng tham số cụ thể (Khi tham số hóa đường cong, lưu ý về chiều đường đi):

1. $(C)$ dạng tham số: $x = x(t),\ y = y(t)$, $t_1$: điểm đầu, $t_2$: điểm cuối.

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\right] dt$$

2. $(C)$ viết dạng: $y = y(x)$, $x = a$: điểm đầu, $x = b$: điểm cuối.

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$
$$= \int_a^b \left[P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)\right] dx$$

3. $(C)$ viết dạng: $x = x(y)$, $y = c$: điểm đầu, $y = d$: điểm cuối.

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$
$$= \int_c^d \left[P(x(y),y)x'(y) + Q(x(y),y)\right] dy$$

# Cách tính tích phân đường loại 2 trong không gian:

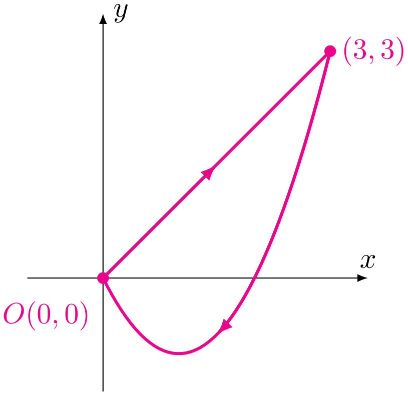
$$I = \int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

Cách tính: $(C)$ viết dạng: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_1$: điểm đầu, $t_2$: điểm cuối.

$$\begin{aligned}
&\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \\
= &\int_{t_1}^{t_2} \left[P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)\right. \\
&\left. + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\right] dt
\end{aligned}$$

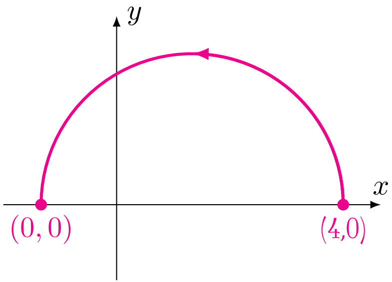
**Câu 6.**

$\int_C (2x^2+y)dx - xdy$ với $C$ là biên của miền $D: y = x^2 - 2x, y = x$, lấy theo chiều KĐH.



**Câu 7.**

$\int_C xy\,dx - (x^2 + y^2 - 2x)\,dy$ với $C$ là nửa trên của đường tròn $(x-1)^2 + y^2 = 4$, lấy ngược chiều KĐH.



# Tự luyện

**Câu 8.**

$$\int_C 2ydx + zdy + 3ydz$$

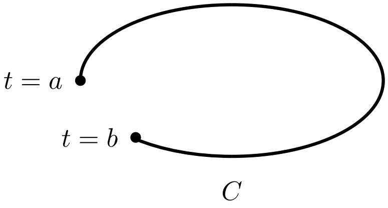
với $C$ là gt của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$ và mp $z = 3 - x$ lấy ngược chiều KĐH nhìn từ phía dương trục $Oz$ ( nhìn từ trên xuống)

# Định lý Green

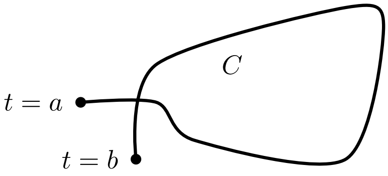
# Đường cong đơn - Đường cong đóng

## Định nghĩa 3.2: Đường cong đơn

Đường cong đơn là đường cong mà không tự cắt tại bất cứ điểm nào giữa các điểm đầu mút của nó.



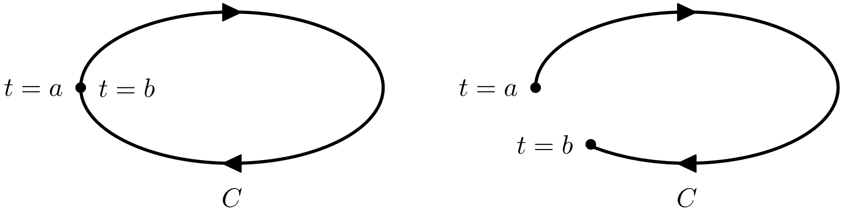

(a) Đường cong đơn



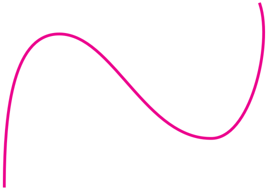

(b) Đường cong không đơn

## Định nghĩa 3.3: Đường cong đóng

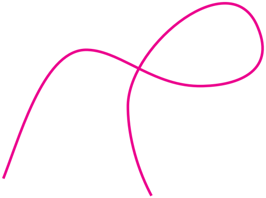
Đường cong đóng là đường cong mà điểm cuối trùng với điểm đầu của nó.



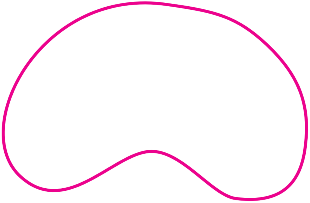

(a) Đường cong đóng (b) Đường cong không đóng



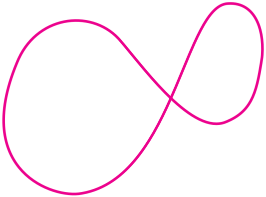
(a) Đường cong đơn, không đóng



(b) Đường cong không đơn, không đóng

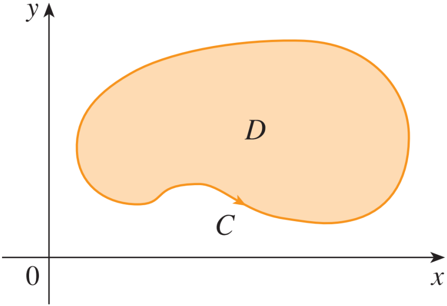


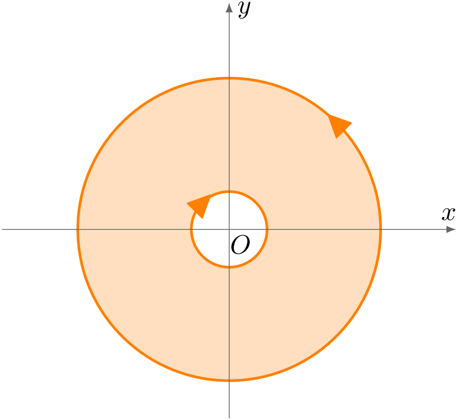
(c) Đường cong đơn, đóng



(d) Đường cong đóng, không đơn

- Giả sử $D$ là miền phẳng có biên là đường cong kín $C$ ($D$ bao gồm tất cả các điểm trong $C$ và trên $C$)
- Hướng dương của đường cong $C$ đơn, đóng là chiều mà khi đi dọc theo $C$ ta thấy miền $D$ nằm bên trái.



**Định lý 3.1**

Cho $C$ là đường cong đơn đóng, trơn từng khúc, định hướng dương trong mặt phẳng và cho $D$ là miền bị chặn bởi $C$. Nếu $P$ và $Q$ có đạo hàm riêng liên tục trên một miền mở chứa $D$, khi đó

$$\boxed{11} \qquad \int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Kí hiệu

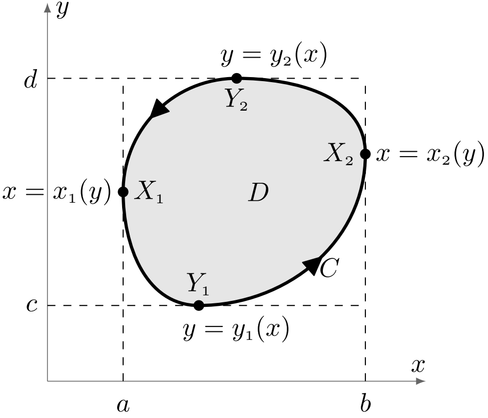
$$\oint_C Pdx + Qdy \quad \text{hay} \quad \oint_C Pdx + Qdy$$

thể hiện tích phân đường theo định hướng dương của đường cong kín $C$ (hay chu tuyến $C$).

Kí hiệu khác của đường cong biên định hướng dương của miền $D$ là $\partial D$, vậy Định lý Green có thể được viết thành

$$\iint\limits_{D} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dA = \int_{\partial D} P \, dx + Q \, dy$$

Chu tuyến $C$ có thể gồm nhiều đường cong giới hạn miền $D$:



**Câu 9.**

Tính $\oint_C (3y - e^{\sin x})\, dx + (7x + \sqrt{y^4+1})\, dy$, trong đó $C$ là đường tròn $x^2 + y^2 = 9$

- Ngoài việc làm cho việc tính toán tích phân đường trở nên đơn giản hơn, định lý Green còn được sử dụng để tính diện tích các miền mà khi sử dụng tích phân kép rất khó khăn.

- Ngoài việc làm cho việc tính toán tích phân đường trở nên đơn giản hơn, định lý Green còn được sử dụng để tính diện tích các miền mà khi sử dụng tích phân kép rất khó khăn.
- Ta có:

$$S_D = \iint 1 \; dA \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

- Ngoài việc làm cho việc tính toán tích phân đường trở nên đơn giản hơn, định lý Green còn được sử dụng để tính diện tích các miền mà khi sử dụng tích phân kép rất khó khăn.
- Ta có:

$$S_D = \iint 1 \, dA \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

- Ta có một số khả năng:

$$\begin{array}{cccc} P(x,y) & 0 & -y & -\frac{1}{2}y \\ Q(x,y) & x & 0 & \frac{1}{2}x \end{array}$$

- Ngoài việc làm cho việc tính toán tích phân đường trở nên đơn giản hơn, định lý Green còn được sử dụng để tính diện tích các miền mà khi sử dụng tích phân kép rất khó khăn.
- Ta có:

$$S_D = \iint 1\, dA \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

- Ta có một số khả năng:

$$\begin{array}{cccc} P(x,y) & 0 & -y & -\frac{1}{2}y \\ Q(x,y) & x & 0 & \frac{1}{2}x \end{array}$$

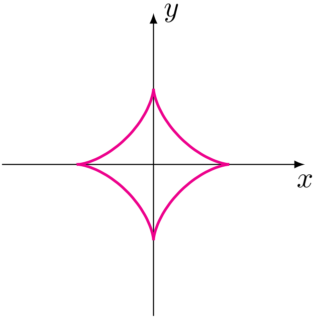
- Khi đó ta có các công thức tính diện tích miền $D$:

$\boxed{12}$

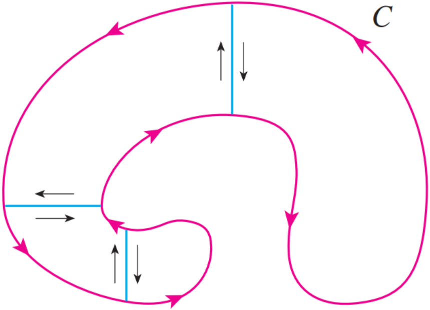
$$A = \oint_C x\, dy = -\oint_C y\, dx = \frac{1}{2}\oint_C x\, dy - y\, dx$$

**Câu 10.**

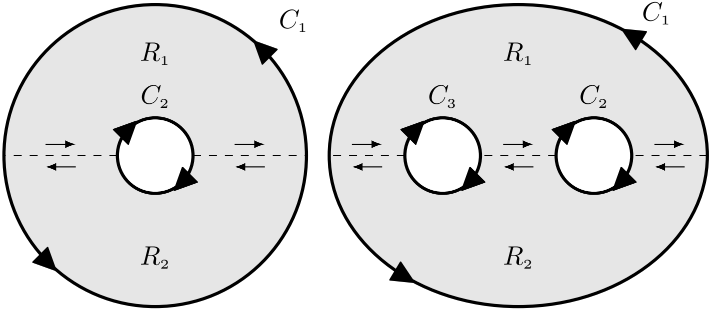
Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi chu tuyến $C$:
$x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$, với $0 \le t \le 2\pi$.



- Định lý Green không chỉ đúng trong trường hợp miền đơn, mà còn trong trường hợp $D$ là hợp hữu hạn các miền đơn (Các miền đơn là các miền tương tự với miền loại 1 và loại 2 trong tích phân kép).



- Do đó có thể áp dụng định lý Green cho các miền chứa lỗ hổng (bị thủng) hay không phải miền đơn liên.



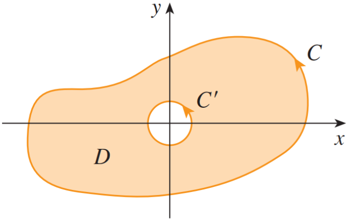

- Sử dụng định lý Green mở rộng có thể giúp chúng ta giải quyết các bài toán tích phân đường dọc theo chu tuyến $C$ và miền $D$ giới hạn bởi $C$ tồn tại điểm mà tại đó $P, Q$ không tồn tại đạo hàm riêng.

**Câu 11.**

Tính $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ với $\mathbf{F} = \dfrac{-y\ \mathbf{i} + x\ \mathbf{j}}{x^2 + y^2}$ và $C$ là chu tuyến bất kì bao quanh gốc tọa độ

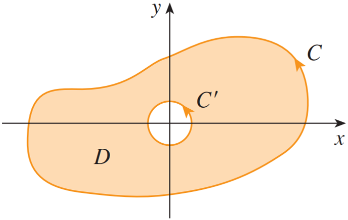
**Câu 11.**

Tính $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ với $\mathbf{F} = \dfrac{-y\ \mathbf{i} + x\ \mathbf{j}}{x^2+y^2}$ và $C$ là chu tuyến bất kì bao quanh gốc tọa độ



**Câu 11.**

Tính $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ với $\mathbf{F} = \dfrac{-y\ \mathbf{i} + x\ \mathbf{j}}{x^2+y^2}$ và $C$ là chu tuyến bất kì bao quanh gốc tọa độ




GIẢI: Vì $C$ bất kỳ nên khó có thể giải trực tiếp, xét một đường tròn $C'$ ngược chiều kim đồng hồ tâm $O$ và bán kính $a$ với $a$ đủ nhỏ để $C'$ nằm trong $C$.

$D$ bị chặn bởi $C$ và $C'$. Khi đó biên định hướng dương của $D$ là $C \cup (-C')$, dựa vào định lý Green mở rộng:

# Bài tập tự luyện

**Câu 12.**

Tính $\displaystyle\int_C \frac{(x+y)\ dx + (x-y)\ dy}{x^2+y^2}$ với $C$ là đường tròn $x^2+y^2=4$, lấy ngược chiều kim đồng hồ.

**Câu 13.**

Tính $\displaystyle\int_C (3x-2y)dx + (2x^2-9y)dy$ với $C$ là biên của miền $D: y = x^2 - 2x, y = x$, lấy ngược chiều KĐH.

# Bài tập tự luyện

**Câu 14.**

Tính $\int_C 3x^2(1+\ln y)dx - (2xy - \frac{x^3}{y})dy$ với $C$ là đường tròn $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$, lấy ngược chiều KĐH.

**Câu 15.**

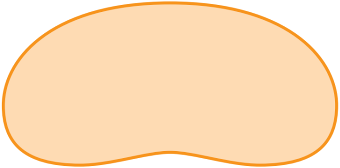
Tính $\int_C xdx - y(1+xy)dy$ với $C$ là nửa đường tròn $x^2+y^2 = 2y$, đi từ điểm (0,2) đến (0,0) theo chiều KĐH.

# Tích phân không phụ thuộc đường đi

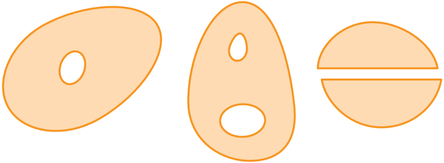
# Miền đơn liên

**Định nghĩa 3.4**

Miền đơn liên là miền mà mọi chu tuyến trong miền này có thể co về một điểm trong miền (không chứa lỗ thủng).



(a) Miền đơn liên



(b) Miền không đơn liên

# Định lý cơ bản của tích phân đường

**Định lý 3.2**

Cho $C$ là đường cong trơn được cho bởi hàm vector $\mathbf{r}(t), a \leq t \leq b$ và $f$ là hàm khả vi có vector gradient liên tục trên $C$. Khi đó

$$\boxed{13} \qquad \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

# Không phụ thuộc vào đường đi

Cho $D$ là miền mở đơn liên. $P$, $Q$ và các đạo hàm riêng liên tục trên $D$. Các điều sau tương đương:

1. $\displaystyle\int_A^B P\,dx + Q\,dy$ không phụ thuộc đường nối $A$, $B$;
2. $\displaystyle\int_C P\,dx + Q\,dy = 0$ với mọi chu tuyến trong $D$;
3. $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$;
4. Tồn tại hàm $f(x, y)$ thỏa mãn: $df = P\,dx + Q\,dy$ hay $\nabla f \cdot d\mathbf{r}$.

LƯU Ý: Với $\mathbf{F} = P\ \mathbf{i} + Q\ \mathbf{j}$ là trường vector liên tục trên miền đơn liên mở $D$. $P, Q$ có các đạo hàm riêng liên tục và $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ trên $D$, khi đó trường vector $\mathbf{F}$ được gọi là trường bảo toàn, và tồn tại hàm $f$ sao cho $\nabla f = \mathbf{F}$. Khi đó $f$ được gọi là hàm thế vị (potential function).

LƯU Ý: Với $\mathbf{F} = P\ \mathbf{i} + Q\ \mathbf{j}$ là trường vector liên tục trên miền đơn liên mở $D$. $P, Q$ có các đạo hàm riêng liên tục và $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ trên $D$, khi đó trường vector $\mathbf{F}$ được gọi là trường bảo toàn, và tồn tại hàm $f$ sao cho $\nabla f = \mathbf{F}$. Khi đó $f$ được gọi là hàm thế vị (potential function).

Chứng minh (3) $\Rightarrow$ (4): Giả sử $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, ta chứng minh tồn tại hàm $f(x, y)$ thỏa mãn: $df = P\ dx + Q\ dy$.

$$f'_x(x, y) = P(x, y), \quad f'_y(x, y) = Q(x, y).$$

Suy ra

$$f(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)dt + f(x_0, y)$$

$$f'_y(x, y) = \int_{x_0}^{x} P'_y(t, y)dt + f'(x_0, y)$$

$$Q(x, y) = \int_{x_0}^{x} Q'_x(t, y)dt + f'(x_0, y)$$

$$Q(x,y) = \int_{x_0}^{x} Q'_x(t,y)dt + f'(x_0,y)$$
$$Q(x,y) = Q(x,y) - Q(x_0,y) + f'(x_0,y)$$

Chọn $f'(x_0,y) = Q(x_0,y)$. Suy ra $f(x_0,y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt + f(x_0,y) \\ &= \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt \end{aligned}$$

## Áp dụng:

1. Thông thường ta sẽ kiểm tra điều kiện 3 và tính liên tục của các hàm.
2. Nếu kiểm tra được điều kiện 3, có 2 cách tính tích phân từ $A$ đến $B$:

$C_1$. Đổi đường lấy tích phân thông thường đi theo các đoạn thẳng song song với các trục tọa độ.

$C_2$. Với hàm $f$ trong điều kiện 4 (chỉ chọn cách này nếu đoán nhanh hàm $f$)

$$\int_A^B Pdx + Qdy = f(B) - f(A).$$

Đây chính là định lý cơ bản của tích phân đường.

Cách tìm $f$:

$C_1$. Tìm $f$ từ hệ:

$$f'_x = P, f'_y = Q$$

.

$C_2$. Chọn $(x_0, y_0)$ tùy ý trong $D$

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt$$

hay

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt$$

**Câu 16.**

Cho trường $\mathbf{F} = (3 + 2xy)\ \mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\ \mathbf{j}$ là trường bảo toàn. Tìm hàm thế vị $f$.

# Bài tập tự luyện

**Câu 17.**

1. Tính $\displaystyle\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{xdy - ydx}{x^2}$
2. Tìm các số tự nhiên $m, n$ để tích phân sau không phụ thuộc đường đi
$$I = \int_C x^m y^{n+1}(3 - 2xy^2)dx + x^{m+1}y^n(4 - 3xy^2)dy$$
3. Tìm hàm $h(y)$ thỏa $h(1) = 1$ sao cho tích phân
$$I = \int_A^B (2xy + 3)h(y)dy - y^2 h(y)dx$$
là tích phân không phụ thuộc đường đi. Sau đó tính tích phân với A(1,1), B(3,2)