

BÀI TẬP ĐẠO HÀM HÀM NHIỀU BIẾN

1 Đạo hàm riêng và vi phân cấp một

Tính các đạo hàm riêng và vi phân cấp một tại các điểm được chỉ ra:

1. $-dx - 8dy.$
2. $\pi^3 - \pi^3 dy.$
3. $e^3 dy.$
4. $dx.$
5. $\frac{xdx + \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right) dy}{\sqrt{x^2 + y^2} \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)}.$

Tính đạo hàm riêng và vi phân cấp một của hàm ba biến.

1. $0, \ln 3 - \frac{2}{3}.$
2. $\frac{x^2 + 2y^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$
3. $\frac{y}{y^2 + (x+z)^2}, -\frac{x+z}{y^2 + (x+z)^2}, \frac{y}{y^2 + (x+z)^2}.$
4. $yz(xy)^{z-1}.$
5. $-\frac{2}{25}dx - \frac{4}{25}dy + \frac{1}{5}dz.$

Tìm miền xác định của

1. $R^2 \setminus \{(0, 0)\}.$
2. $\{(x, y) : x - 2y > 0\}.$
3. $R^2 \setminus \{(0, 0)\}.$
4. R^2
5. $R^2.$

Với hàm số f cho trước, tính giá trị biểu thức $A(x, y)$ theo x, y hoặc $A(x, y, z)$ theo x, y, z .

1. $\frac{x^3}{y}$
2. 0
3. $-x$
4. $\frac{3}{x+y+z}$

Trong các bài dưới đây, tìm hàm $f(x, y)$ khả vi thỏa mãn điều kiện đã cho

1. $\frac{x^3}{3} - xy + \frac{y^3}{3}.$

2. $3xy^2 + x^2y + x^2 + 3y + C.$

3. $e^x + e^y + xy - \cos x - \cos y.$

4. $\frac{x^2}{2} + e^{\frac{x}{y}}.$

Tính số gia và vi phân của các hàm số dưới đây tại các điểm được chỉ ra

1. $2dx + dy, 2\Delta x + \Delta y + \Delta x^2 + \Delta x^2 \Delta y + 2\Delta x \Delta y.$

2. $df(1, 1) = -0,19, \Delta f(1, 1) = -0,1819.$

3. $df(2, 1) = 0,3, \Delta f(2, 1) = 0,33.$

Các bài toán ứng dụng.

1. $-\frac{7}{2}.$

2. $\pi - 1.$

3. $8, 2m^3.$

4. Giảm $1,57cm.$

5. Tăng $617,5cm^3.$

2 Đạo hàm và vi phân cấp cao

Tính các đạo hàm cấp hai theo yêu cầu tại các điểm được chỉ ra.

1. $-\frac{1}{2}, -2.$

2. 0.

3. $-\frac{2x + y \sinh \frac{2x}{y}}{2y^3 \cosh^2 \frac{x}{y}}, \frac{x^2 + xy \sinh \frac{2x}{y}}{y^4 \cosh^2 \frac{x}{y}}.$

4. $1, -\frac{1}{2}.$

5. $x^2yz(yz)^{x-2}.$

Tính vi phân cấp hai của các hàm số sau tại các điểm được chỉ ra

1. $30dx^2 + 68dxdy - 4dy^2.$

2. $-2dx^2 - 4dxdy - 4dy^2.$

3. $8dx^2 - 8dxdy + 2dy^2.$

Tìm đạo hàm cấp cao tại các điểm được chỉ ra.

1. 0.

2. $x^9 (2x^3y + 2x^2y + 11x + 10) e^{x^2y}.$

3. $9e^{-1}.$

4. $-2^5 3^5 10!.$

5. $-32 \sin 1.$
6. $(x^2 - 2xy + 8x + y^2 - 8y + 4) e^{x+y}$
7. $0, -\frac{1}{2}.$
8. 1.

3 Đạo hàm và vi phân hàm hợp

1. 0, 0.
2. $2yzt + \frac{xz}{t} + xy(1 + \tan^2 t)$ (hoặc ra hết theo t).
3. $\left(\frac{16}{\pi} - \frac{16}{\pi^2} + 4\right) dt.$
4. $\simeq 0,042 kPa/s.$
5. $\frac{2x+2}{\cos^2(x^2+2x)}.$
6. Cho $z = f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$.
 a/ $f'_x(0, 1) = 1, f'_y(0, 1) = 0.$
 b/ $dz(0) = dx.$
 c/ $dz(t) = \frac{2y - 3xt^2}{x^2 + y^2} dt.$
7. 40.
8. $\frac{2u - 2v}{\sqrt{1 - (x - y)^2}}, \frac{2v - 2u}{\sqrt{1 - (x - y)^2}}.$
9. 6, 39.
10. 9, 3.
- 11.
- 12.
- 13.
- 14.
15. $12t^2 + 18t.$
16. 22, -15.
- 17.
18. $r = x, s = xy, t = xyz \Rightarrow du(x, y, z) = (f'_r + yf'_s + yzf'_t)dx + (xf'_s + xzf'_t)dy + xyf'_tdz.$
- 19.
- 20.
- 21.

4 Đạo hàm và vi phân của hàm ẩn

1. $y'(x) = \frac{e^{x-y} - 1}{1 + e^{x-y}}, y''(x) = \frac{4}{(e^{x-y} + 1)^3}$.
2. $0, -\frac{1}{3}dx^2$.
3. $y \frac{3x^2 + z}{e^y - xy}, \frac{ze^{\frac{z}{y}} + 3y^4}{y \left(e^{\frac{z}{y}} - xy\right)}$.
4. $1, \frac{1}{2}$.
5. $\frac{2y(x-2)}{de(z+1)^3}$
6. $u = yz, v = e^{xz}, z'_x = -\frac{ze^{xz}f'_v}{yf'_u + xe^{xz}f'_v}, z'_y = -\frac{zf'_u}{yf'_u + xe^{xz}f'_v}$.
- 7.

8. $\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$. HD: xét hệ $\begin{cases} 2 = z'_u = z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u, \\ 1 = z'_v = z'_x \cdot x'_v + z'_y \cdot y'_v \end{cases}$. Thay $(u, v) = (1, 1)$ và giải hệ.

$$9. \frac{1}{y+z} - \frac{(x-y)(x+1)e^{x-z}}{(z+1)(y+z)^2}, -\frac{x+z}{(y+z)^2} - \frac{(x-y)(y+1)e^{y-z}}{(z+1)(y+z)^2}.$$

5 Đạo hàm theo hướng và vector gradient

1. $(0, \tanh^2 2 - 1, 1 - \tanh^2 2)$.
2. $(-\pi^3, \pi^3)$.
3. $\frac{-x^2 + 2xy}{\sqrt{2}}$.
4. Là hướng của $\nabla f(1, 2) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$.
5. Theo hướng $\vec{a} = (3, 4)$ àm số tăng nhanh hơn hướng $\vec{b} = (-3, 4)$.
6. $7, \frac{31}{7}$.
7. a/ $xy = z^2$. b/ $x = y = 0$
8. Cho $g = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ với f là hàm khả vi, tìm $\nabla g(x, y, z)$.
9. a/ $(x-1) + (y-1) + \sqrt{2}(z-\sqrt{2}) = 0$ tại điểm $x-1 = y-1 = \frac{z-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$
 b/ $\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \left(y - \frac{\pi}{2}\right) - 2\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0, x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - y = 1 - 2z$
 c/ $z = \frac{1}{e} - e^{(\cdot-1)}(x-1), x = 1-t; y = \pi; z = \frac{1}{e} + t$
 d/ $4(x-2) + 14(y-1) - 10(z-3) = 0, \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{14} = \frac{z-3}{-1}$

6 Cực trị hàm nhiều biến

6.1 Cực trị tự do

Tìm cực trị các hàm số sau:

1. $f_{CT} = f(0, 3) = -9.$
2. $f_{CT} = f(0, -2/3) = -4/3$, không đạt cực trị tại $(2, -2/3).$
3. $f_{CT} = f(5, 2) = 30.$
4. $f_{CT} = f(1, 3) = 10 - 18 \ln 3$
5. $f_{CT} = f(0, 0) = 0$, không đạt cực trị tại các điểm dừng $(-10/3, 0), (1, \sqrt{13}), (1, -\sqrt{13}).$
6. $f(x, y) = xy^2(1 - x - y), (x > 0, y > 0).$
7. $f_{CT} = f(2, -3, 1) = -14.$
8. $f_{CT} = f\left(\frac{\sqrt[4]{4}}{2}, \sqrt{2}, \sqrt[4]{8}\right) = 2\sqrt[4]{4}, f_{CD} = f\left(-\frac{\sqrt[4]{4}}{2}, \sqrt{2}, -\sqrt[4]{8}\right) = -2\sqrt[4]{4}.$

6.2 Cực trị có điều kiện

Tìm cực trị của các hàm số dưới đây với điều kiện tương ứng.

1. f đạt cực tiểu tại $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-3}{2}\right), f_{CT} = -\frac{19}{4}.$
2. f đạt cực đại tại $\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$, đạt cực tiểu tại $\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$
3. $f_{CD} = f\left(\pm\frac{3}{2}, \pm 4\right) = \frac{425}{2}, f_{CT} = f(\pm 2, \mp 3) = -50.$
4. $f_{CT} = f(0, 0) = 0, f_{CD} = f(2, 4) = 20.$
5. $f_{CT} = f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}, f_{CD} = f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}-4}{\sqrt{2}}$

7 Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Trong các bài dưới đây, tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên miền được chỉ ra.

1. $f(x, y) = xy, x^2 + y^2 \leq 1.$
2. $f(x, y) = 3x^2 + 5y^2 - 2, x^2 + y^3 \leq 4.$
3. $f(x, y) = 3x^2 + 5y^2 - 2, 2x^2 + 3y^2 \leq 25.$
4. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2, |x| + |y| \leq 1$