ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
Bộ môn Toán Ứng dụng

BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 2

Nguyễn Thị Cẩm Vân

Email: ntcvantud@gmail.com

Tp. Hồ Chí Minh - 2021

CHƯƠNG 5:

TÍCH PHÂN BỘI BA

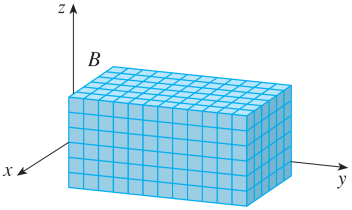
1. Định nghĩa tích phân bội ba.
2. Tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ Descartes.
3. Phép đổi biến.
   1. Đổi biến tọa độ trụ.
   2. Đổi biến tọa độ cầu.
   3. Phép đổi biến tổng quát.
4. Ứng dụng của tích phân bội ba.

Định nghĩa

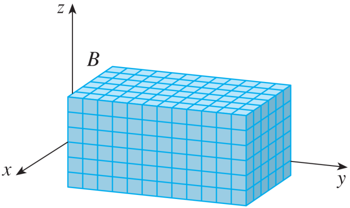
Bài toán khối lượng vật thể

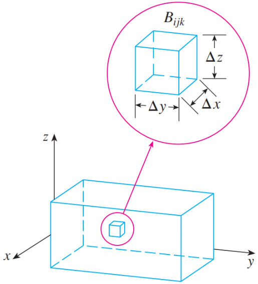
- Xét vật thể B trong không gian có khối lượng phân bố không đồng đều theo thể tích của nó.
- Phân bố khối lượng của B trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ được mô tả bởi hàm mật độ $f(x, y, z)$ (hay còn gọi là khối lượng riêng (kg/m^3)).
- Hãy tính khối lượng M của vật thể, biết vật thể B là hình hộp chữ nhật:

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$$



- Chia B thành các hình hộp nhỏ.
- Chia khoảng $[a, b]$ thành l đoạn nhỏ $[x_{i-1}, x_i]$ có chiều rộng Δx.
- Chia khoảng $[c, d]$ thành m đoạn nhỏ $[y_{j-1}, y_j]$ có chiều rộng Δy.
- Chia khoảng $[r, s]$ thành n đoạn nhỏ $[z_{k-1}, z_k]$ có chiều rộng Δz.
- Mỗi hộp con có thể tích $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$.





- Tương tự tích phân kép, ta cũng tìm được một tổng Riemann:

$$m \approx \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V \tag{1}$$

trong đó $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ là một điểm mẫu được chọn trong B.

Ta có định nghĩa tích phân bội ba:

Định nghĩa 1.1

Tích phân bội ba của hàm số $f(x, y, z)$ trên một hình hộp B là

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta V$$

nếu giới hạn này tồn tại, và khi đó $f(x, y, z)$ được gọi là hàm khả tích trên B.

Tích phân bội ba cũng có các tính chất cần thiết tương tự như tích phân kép. Với tích phân bội ba $f(x, y, z) = 1$, khi đó

$$\iiint\limits_B 1\, dV = V(B) \tag{2}$$

Tính tích phân bội ba

Định lý 2.1: Định lý Fubini cho Tích phân bội ba

Cho $f(x, y, z)$ là hàm liên tục trên hình hộp chữ nhật $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, thì

$$\iiint\limits_B f(x, y, z) dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\; dx\; dy\; dz \qquad (3)$$

- Ngoài cách lấy tích phân lặp như trên, ta thể đổi thứ tự tính tích phân theo các biến nhưng vẫn thu được cùng một đáp án.
- Có $3! = 6$ cách lấy tích phân theo thứ tự các biến.

Câu 1.

Tính tích phân bội ba $\iiint\limits_B xyz^2 dV$ với B là hình hộp chữ nhật được cho bởi:

$$B = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$$

Tích phân bội ba trên miền khối E tổng quát

Tương tự tích phân kép, xét miền khối E nằm trong hình hộp chữ nhất B

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_B F(x,y,z)\,dV \tag{4}$$

trong đó F được xác định bởi:

$$F(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & ,(x,y,z) \in \mathrm{B} \\ 0 & ,(x,y,z) \in E \backslash B \end{cases}$$

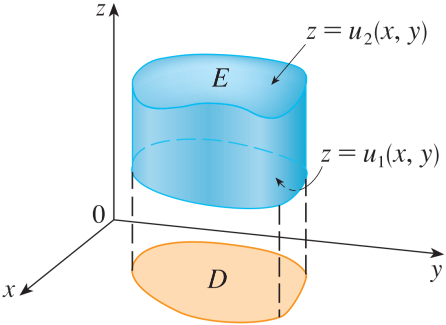
- Tích phân (4) tồn tại khi $f(x,y,z)$ liên tục và biên E trơn.
- Chúng ta lần lượt xét một số miền đơn giản sau:

Miền khối E loại I

Miền khối E loại I:

$$E = \{(x, y, z)|(x, y) \in D, u_1(x, y) \le z \le u_2(x, y)\} \tag{5}$$

trong đó D là hình chiếu của E xuống mặt phẳng Oxy.



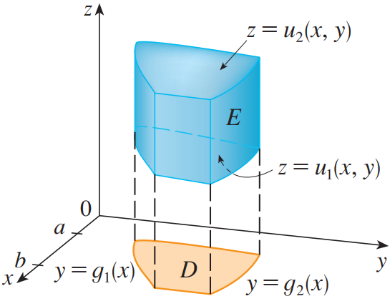
Với E là miền loại I, khi đó

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV = \iint\limits_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dA \tag{6}$$

Dựa vào loại của miền D ta có 2 trường hợp đặc biệt sau:

D là miền phẳng loại I:

$$E = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

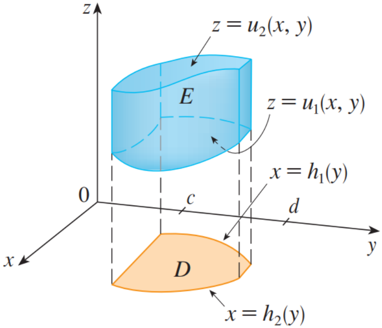


Khi đó, (6) trở thành:

$$\iiint\limits_E f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

D là miền phẳng loại II:

$$E = \{(x, y, z) | c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

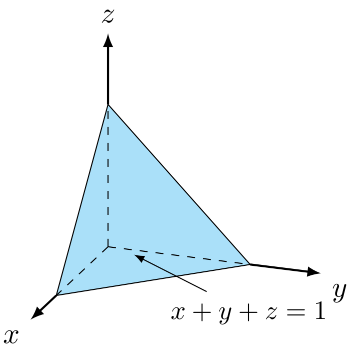


Khi đó, (6) trở thành:

$$\iiint\limits_E f(x, y, z)\, dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$$

Câu 2.

Tính $\iiint_E z\, dV$, với E là tứ diện giới hạn bởi bốn mặt phẳng $x = 0, y = 0, z = 0$ và $x + y + z = 1$

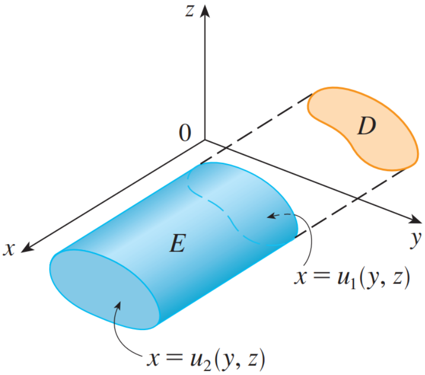


Miền khối E loại II

Miền khối E được gọi là miền loại II nếu có dạng:

$$E = \{(x, y, z) | (y, z) \in D, u_1(y, z) \le x \le u_2(y, z)\}$$

trong đó D là hình chiếu của E xuống mặt phẳng Oyz

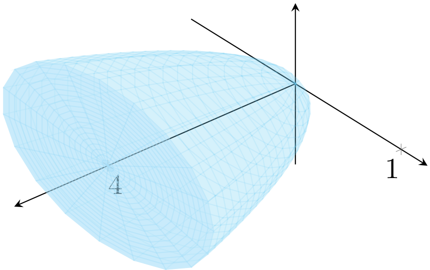


- Khi đó:

$$\boxed{\iiint\limits_E = f(x,y,z)dV = \iint\limits_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x,y,z)\ dx \right] dA \qquad (7)}$$

Câu 3.

Tính $\iiint_E x \, dV$ với $E = \{(x, y, z) | (y, z) \in D, 4y^2 + 4z^2 \leq x \leq 4\}$

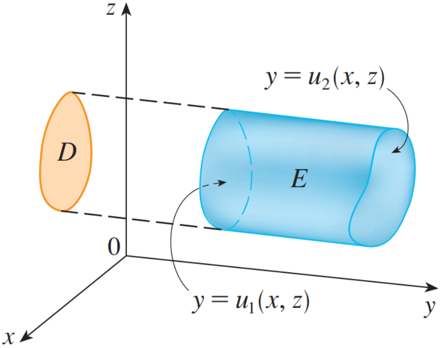


Miền khối E loại III

Miền khối E loại III có dạng:

$$E = \{(x, y, z) | (x, z) \in D, u_1(x, z) \leq x \leq u_2(x, z)\}$$

trong đó D là hình chiếu của E xuống mặt phẳng Oxz

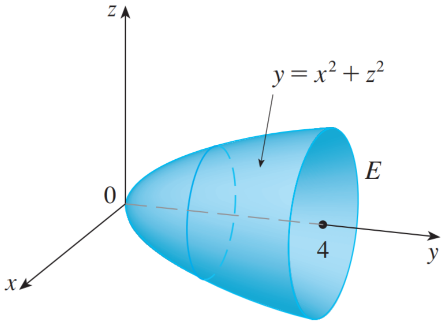


- Khi đó

$$\boxed{\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV = \iint\limits_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy\right] dA \qquad (8)}$$

Câu 4.

Tính tích phân bội ba $\iiint_E \sqrt{x^2+z^2}\,dV$, với E được giới hạn bởi $y = x^2 + z^2$ và $y = 4$

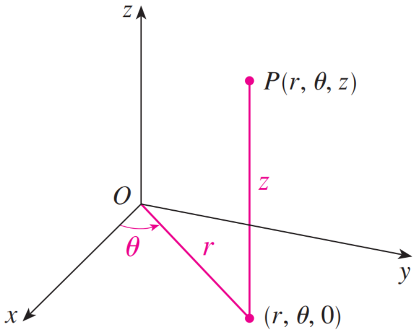


Đổi biến

Đổi biến tọa độ trụ

Tọa độ trụ

- Một điểm P trong không gian có tọa độ (r, θ, z), trong đó r va θ là các tọa độ cực của hình chiếu của P lên mặt phẳng Oxy, z là khoảng cách từ mặt phẳng Oxy đến P.



Tương tự tọa độ cực, ta có các công thức chuyển đổi tọa độ của một điểm trong hai hệ tọa độ:

- Để chuyển từ hệ tọa độ trụ sang hệ tọa độ Descartes, ta có:

$$\boxed{x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z \qquad (9)}$$

Tương tự tọa độ cực, ta có các công thức chuyển đổi tọa độ của một điểm trong hai hệ tọa độ:

- Để chuyển từ hệ tọa độ trụ sang hệ tọa độ Descartes, ta có:

$$\boxed{x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z} \tag{9}$$

- Ngược lại, để chuyển từ hệ tọa độ Descartes sang hệ tọa độ trụ, ta có:

$$\boxed{r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad z = z} \tag{10}$$

Tương tự tọa độ cực, ta có các công thức chuyển đổi tọa độ của một điểm trong hai hệ tọa độ:

- Để chuyển từ hệ tọa độ trụ sang hệ tọa độ Descartes, ta có:

$$\boxed{x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z \qquad (9)}$$

- Ngược lại, để chuyển từ hệ tọa độ Descartes sang hệ tọa độ trụ, ta có:

$$\boxed{r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad z = z \qquad (10)}$$

Ví dụ: Xác định vị trí của điểm $(2, 2\pi/3, 1)$ trong hệ tọa độ Descartes.

Tương tự tọa độ cực, ta có các công thức chuyển đổi tọa độ của một điểm trong hai hệ tọa độ:

- Để chuyển từ hệ tọa độ trụ sang hệ tọa độ Descartes, ta có:

$$\boxed{x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z \qquad (9)}$$

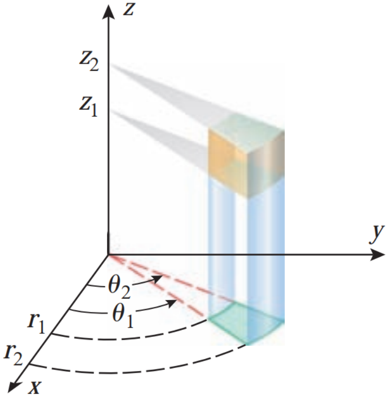
- Ngược lại, để chuyển từ hệ tọa độ Descartes sang hệ tọa độ trụ, ta có:

$$\boxed{r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad z = z \qquad (10)}$$

Ví dụ: Xác định vị trí của điểm $(2, 2\pi/3, 1)$ trong hệ tọa độ Descartes.

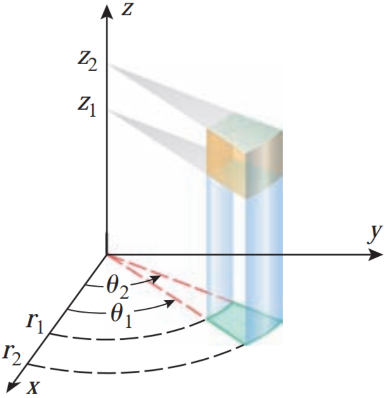
$$\begin{aligned}
x &= r\cos\theta = 2\cos(2\pi/3) = -1\\
y &= r\sin\theta = 2\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}\\
z &= 1
\end{aligned}$$

Tích phân bội ba trong hệ tọa độ trụ



Giả sử ta cần tính khối lượng của vật thể chiếm một miền E trong không gian với E là miền khối loại I, có hình chiếu D lên mặt phẳng Oxy được diễn tả dễ dạng bằng tọa cực.

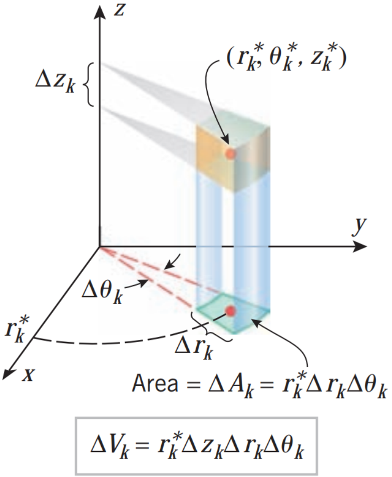
Tích phân bội ba trong hệ tọa độ trụ



Giả sử ta cần tính khối lượng của vật thể chiếm một miền E trong không gian với E là miền khối loại I, có hình chiếu D lên mặt phẳng Oxy được diễn tả dễ dạng bằng tọa cực.

- Chia E thành các trụ nhỏ bằng cách:
- Chia r thành k đoạn nhỏ $[r_{k-1}, r_k]$ với độ rộng Δr.
- Chia θ thành k góc nhỏ hơn $[\theta_{k-1}, \theta_k]$ có độ rộng $\Delta\theta$.
- Chia z thành các k nhỏ $[z_{k-1}, z_k]$ có độ rộng Δz.

- Chọn một điểm mẫu (r^*, θ^*, z^*).
- Thể tích một mảnh trụ nhỏ là: $\Delta V = r^* \Delta r \Delta \theta \Delta z$



Khi đó ta có tổng Riemann:

$$\sum_{k=1}^{n} f(r^*, \theta^*, z^*)\ \Delta V = \sum_{k=1}^{n} f(r^*, \theta^*, z^*)\ r^* \Delta r \Delta \theta \Delta z \tag{11}$$

Ta thấy rằng tổng (11) chính là tổng Riemann cho tích phân

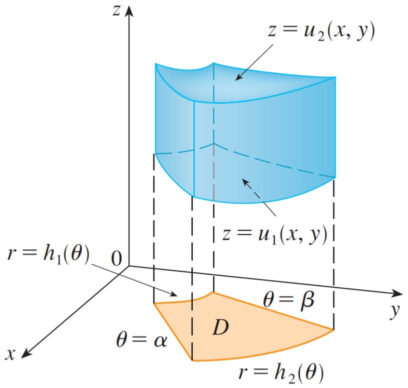
$$\iiint_E f(r,\theta,z)\,dV = \iiint_{\substack{\text{appropriate}\\ \text{limits}}} f(r,\theta,z) r\,dr\,d\theta\,dz$$

Với miền có dạng:

$$E = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

với D được cho bởi tọa độ cực

$$D = \{(r, \theta) | \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

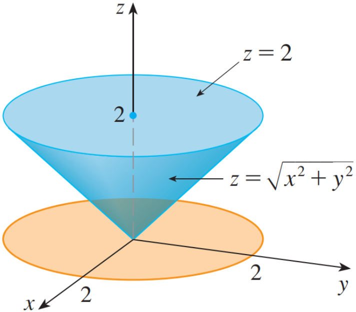


- Khi đó, ta có:

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\ dV = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \int\limits_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int\limits_{u_1(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{u_2(r\cos\theta, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\ dz dr d\theta \tag{12}$$

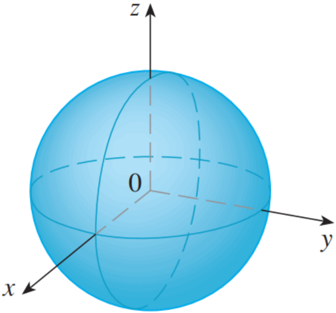
Câu 5.

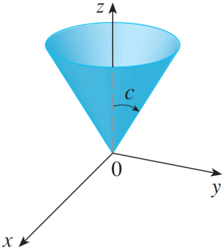
Tính $\iiint_E (x^2 + y^2)\, dz\, dy\, dx$ với E là miền được mô tả bằng tọa độ trụ như sau: $E = \{(r, \theta, z) | 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le 2, r \le z \le 2\}$

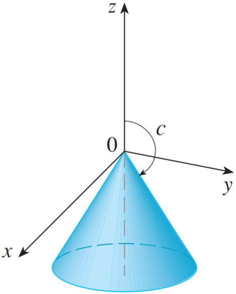


Đổi biến tọa độ cầu

Nếu như tọa độ trụ dùng để tính toán các tích phân bội ba trên các miền được giới hạn bởi hình trụ thì hệ tọa độ cầu dùng để tính toán trên các miền được giới hạn bởi mặt cầu hoặc mặt nón.



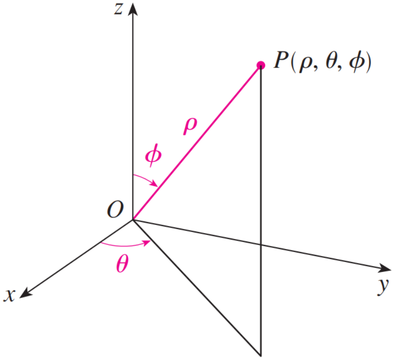




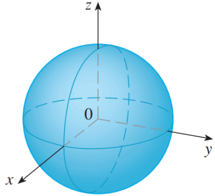
Hệ tọa độ cầu

- Tọa độ cầu (ρ, θ, ϕ) của một điểm P trong không gian được minh họa như hình.
- ρ là khoảng cách từ gốc tọa độ đến điểm P.
- θ là góc tương tự như trong hệ tọa độ trụ (góc của tọa độ cực của hình chiếu của P lên Oxy).
- ϕ là góc giữa tia Oz (theo chiều dương) và đoạn thẳng OP.

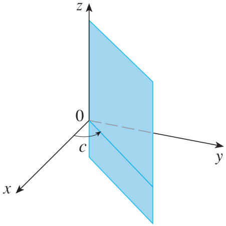
$$\boxed{\rho \geq 0 \qquad 0 \leq \phi \leq \pi}$$



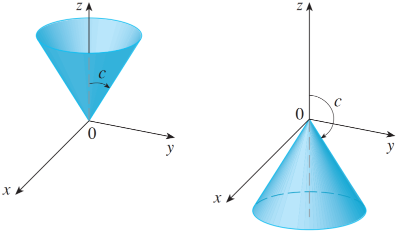
- Hệ tọa độ cầu đặc biệt hữu ích với bài toán có sự đối xứng quanh một điểm và gốc tọa độ được đặt tại điểm đó.



(a) $\rho = c$



(b) $\theta = c$



$0 < c < \pi/2$ $\pi/2 < c < \pi$

(c) $\phi = c$

- Giống như các hệ tọa độ khác, ta cũng có các công thức để chuyển đổi từ hệ tọa độ Descartes sang hệ tọa độ cầu và ngược lại.

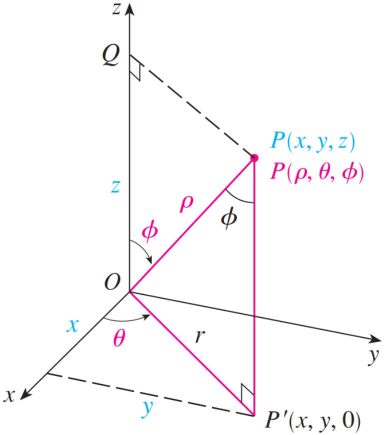
- Từ tam giác OPQ và OPP', ta có:

$$z = \rho\cos\phi \quad r = \rho\sin\phi$$

- Mặt khác

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases}$$

- Do đó ta có:



$$x = \rho\cos\theta\sin\phi \quad y = \rho\sin\theta\sin\phi \quad z = \rho\cos\phi \tag{13}$$

- Dùng công thức khoảng cách, ta có

$$\boxed{\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (14)}$$

Công thức này được dùng để chuyển từ tọa độ Descartes sang tọa độ cực.

Câu 6.

Điểm $\left(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ được cho dưới dạng tọa độ cầu. Tìm các tọa độ Descartes của nó.

- Dùng công thức khoảng cách, ta có

$$\boxed{\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (14)}$$

Công thức này được dùng để chuyển từ tọa độ Descartes sang tọa độ cực.

Câu 6.

Điểm $\left(2, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ được cho dưới dạng tọa độ cầu. Tìm các tọa độ Descartes của nó.

Đáp án: $x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $y = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $z = 1$.

- Dùng công thức khoảng cách, ta có

$$\boxed{\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (14)}$$

Công thức này được dùng để chuyển từ tọa độ Descartes sang tọa độ cực.

Câu 6.

Điểm $\left(2, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ được cho dưới dạng tọa độ cầu. Tìm các tọa độ Descartes của nó.

Đáp án: $x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $y = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $z = 1$.

Câu 7.

Điểm $(0, 2\sqrt{3}, -2)$ được cho dưới dạng tọa độ Descartes. Tìm các tọa độ cầu cho điểm này.

Giải:

- Từ công thức (14) ta có:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0 + 12 + 4} = 4$$

- Từ (13) ta được:

$$\cos\phi = \frac{z}{p} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \qquad\qquad \phi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho\sin\phi} = 0 \qquad\qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

(Lưu ý: $y \geq 0$ nên $\theta \neq \frac{3\pi}{2}$)

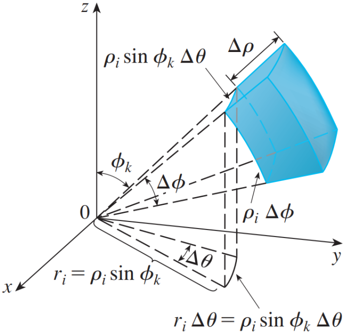
Tính tích phân bội ba với tọa độ cầu

- Xét một nêm cầu:

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) | a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$

trong đó $a \geq 0, \beta - \alpha \leq 2\pi$ và $d - c \leq \pi$.

- Tiến hành chia E thành các nêm cầu nhỏ E_{ijk} bằng các mặt cầu cách đều nhau $\rho = \rho_i$, các nửa mặt phẳng $\theta = \theta_j$, các nửa mặt nón $\phi = \phi_k$.
- Ta thấy rằng E_{ijk} xấp xỉ một hình hộp chữ nhật có kích thước $\Delta\rho, \rho_i\Delta\phi, \rho_i \sin\phi_k\Delta\theta$.
- Một xấp cho cho thể tich của E_{ijk}:



$$\Delta V_{ijk} = (\Delta\rho)(\rho_i\Delta\phi)(\rho_i \sin\phi_k\Delta\theta) = \rho_i^2 \sin\phi_k\Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi$$

- Chọn một điểm mẫu $(\widetilde{\rho}_i, \widetilde{\theta}_j, \widetilde{\phi}_k)$ thuộc E_{ijk} tương ứng với điểm $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})$ trong hệ tọa độ Descartes.
- Thể tích E_{ijk} được biểu diễn chính xác bởi

$$\Delta V_{ijk} = \widetilde{\rho}_i^{\,2} \sin \widetilde{\phi}_k \Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi$$

- Khi đó

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\, dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\Delta V$$

$$= \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(\widetilde{\rho}_i \sin \widetilde{\phi}_k \cos \widetilde{\theta}_j, \widetilde{\rho}_i \sin \widetilde{\phi}_k \sin \widetilde{\theta}_j, \widetilde{\rho}_i \cos \widetilde{\phi}_k)\Delta V_{ijk}$$

Vậy ta có công thức lấy tích phân bội ba trong hệ tọa độ cầu như sau:

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV$$

$$= \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\ d\rho\ d\theta\ d\phi$$

trong đó E là một nêm cầu được cho bởi

$$E = \{(\rho,\theta,\phi)|a \le \rho \le b, \alpha \le \theta \le \beta, c \le \phi \le d\}$$

Công thức này có thể mở rộng cho miền tổng quát hơn:

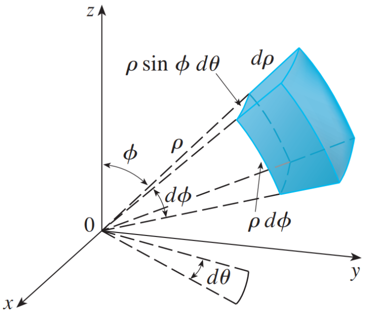
$$E = \{(\rho,\theta,\phi)|\alpha \le \theta \le \beta, c \le \phi \le d, g_1(\theta,\phi) \le \rho \le g_2(\theta,\phi)\}$$

bằng cách thay cận của ρ cho phù hợp.

Từ công thức trên, ta có phương pháp chuyển tích phân bội ba trong hệ tọa độ Descartes sang hệ tọa độ cầu bằng cách đặt

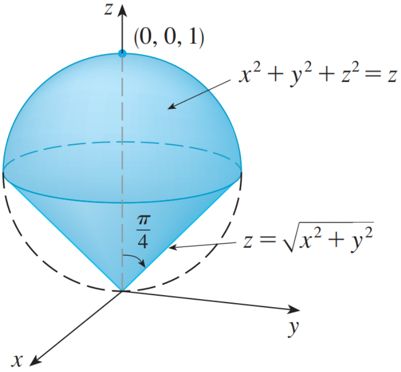
$$\begin{cases} x &= \rho\cos\theta\sin\phi \\ y &= \rho\sin\theta\sin\phi \\ z &= \rho\cos\phi \end{cases}$$

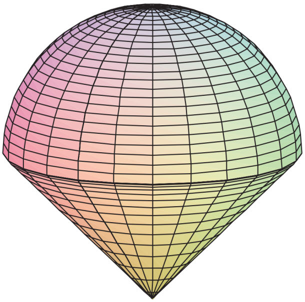
sử dụng các giới hạn lấy tích phân phù hợp và thay dV bằng $\rho^2\sin\phi\ d\rho\ d\theta\ d\phi$.



Câu 8.

Tính thể tích của hình khối nằm trên mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và nằm dưới mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = z$





Đổi biến tổng quát

- Tương tự tích phân kép, ta cũng có phép đổi biến cho tích phân bội ba.
- Gọi T là phép biến đổi ánh xạ miền S từ không gian uvw lên miền R trong không gian xyz:

$$\begin{cases} x &= g(u,v,w) \\ y &= h(u,v,w) \\ z &= k(u,v,w) \end{cases}$$

- Định thức Jacobi của phép biến đổi T:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Ta có công thức đổi biến trong tích phân bội ba:

$$\boxed{\iiint\limits_R f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_S f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw \qquad (15)}$$

Phép đổi biến mở rộng cho mặt cầu tâm không trùng gốc tọa độ

- Mặt cầu có dạng:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

- Đặt

$$\begin{cases} x-a &= \rho\cos\theta\sin\phi \\ y-b &= \rho\sin\theta\sin\phi \\ z-c &= \rho\cos\phi \end{cases}$$

- Định thức Jacobi:

$$J=\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta & x'_\phi \\ y'_\rho & y'_\theta & y'_\phi \\ z'_\rho & z'_\theta & z'_\phi \end{vmatrix} = -\rho^2\sin\phi$$

- Khi đó

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV$$

$$= \iiint\limits_E f(a+\rho\cos\theta\sin\phi, b+\rho\sin\theta\sin\phi, c+\rho\cos\phi)|J|\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

$$= \iiint\limits_E f(a+\rho\cos\theta\sin\phi, b+\rho\sin\theta\sin\phi, c+\rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\,d\rho d\theta d\phi$$

Phép đổi biến cho Ellipsoid

- Mặt cầu có dạng:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- Đặt

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} & = \rho \cos\theta \sin\phi \\ \dfrac{y}{b} & = \rho \sin\theta \sin\phi \\ \dfrac{z}{c} & = \rho \cos\phi \end{cases}$$

- Định thức Jacobi:

$$J = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta & x'_\phi \\ y'_\rho & y'_\theta & y'_\phi \\ z'_\rho & z'_\theta & z'_\phi \end{vmatrix} = -abc\rho^2 \sin\phi$$

- Khi đó

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV$$
$$= \iiint\limits_E f(a\rho\cos\theta\sin\phi, b\rho\sin\theta\sin\phi, c\rho\cos\phi)|J|\;d\rho\;d\theta\;d\phi$$
$$= \iiint\limits_E f(a\rho\cos\theta\sin\phi, b\rho\sin\theta\sin\phi, c\rho\cos\phi)abc\rho^2\sin\phi\;d\rho d\theta d\phi$$

Ứng dụng

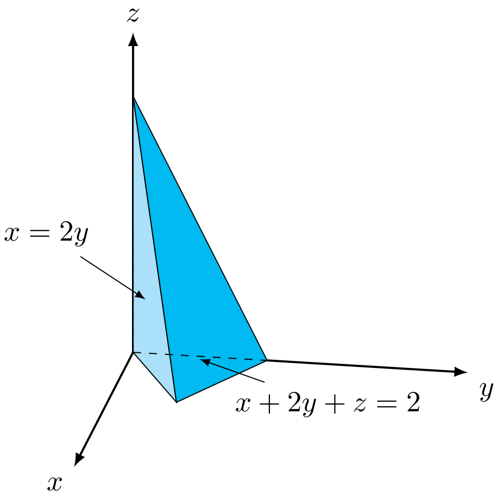
Thể tích vật thể

- Khi $f(x, y, z) = 1$ với mọi điểm thuộc E khi đó:

$$\boxed{V(E) = \iiint\limits_E dV \qquad (16)}$$

Câu 9.

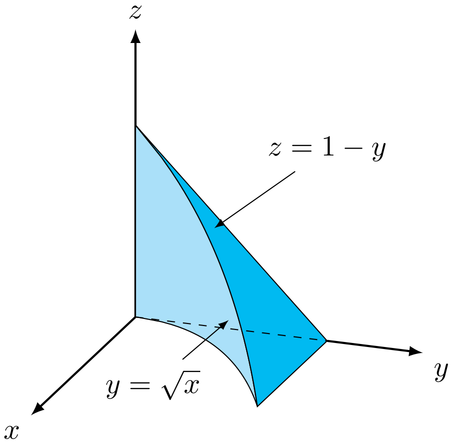
Tìm thể tích của tứ diện T bị giới hạn bởi các mặt phẳng $x + 2y + z = 2, x = 2y, x = 0$ và $z = 0$.


z
$x = 2y$
y
$x + 2y + z = 2$
x

Bài tập về nhà

Câu 10.

Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi $y = \sqrt{x}, z = 1 - y, z = 0, x = 0.$



Khối lượng của vật thể trong không gian ba chiều

- Xét một vật thể E trong không gian ba chiều có hàm mật độ khối lượng $\rho(x, y, z)$.
- Khối lượng của E là

$$\boxed{m = \iiint\limits_E \rho(x, y, z)\, dV \qquad (17)}$$

Câu 11.

Tìm khối lượng của vật thể T ở Câu (9) với hàm mật độ khối lượng $\rho(x, y, z) = x$.

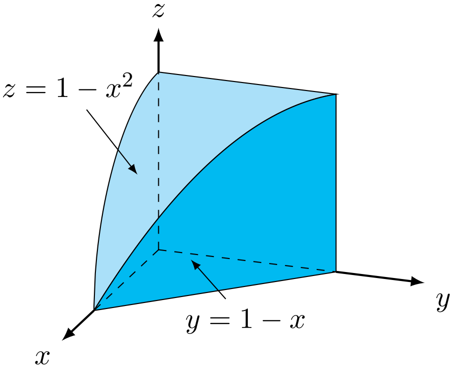
Tương tự, với hàm $f(x, y, z)$ là hàm mật độ điện tích $\sigma(x, y, z)$, khi đó tổng điện tích trên E là:

$$Q = \iiint\limits_E \sigma(x, y, z)\ dV \tag{18}$$

Bài tập về nhà

Câu 12.

Cho vật thể E được giới hạn bởi $z = 1 - x^2, y = 1 - x, z = 0, y = 0$ và $x = 0$ có hàm mật độ thể tích $\rho(x, y, z) = k$ (k không đổi). Tìm khối lượng của E theo k.



Định lý giá trị trung bình cho tích phân bội ba

Giá trị trung bình của hàm số f theo ba biến trên vật rắn T được xác định là

$$f_{av} = \frac{1}{V(T)} \iiint_T f(x, y, z) dV \tag{19}$$

với $V(T)$ là thể tích của vật rắn T.

Câu 13.

Một căn phòng hình hộp chữ nhật có thể được mô tả bởi

$$B = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 20, 0 \leq y \leq 40, 0 \leq z \leq 9\}$$

Nếu nhiệt độ (theo $^\circ F$) tại điểm (x, y, z) trong phòng được cho bởi

$$f(x, y, z) = 60 + 0.2x + 0.1y + 0.2z$$

thì nhiệt độ tuyệt đối trong phòng là bao nhiêu?