

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

BÀI 1. HÀM SỐ

① Ý nghĩa của $f(x_0, y_0)$ trong bài toán thực tế

- a) Đề bổ sung thêm giá dọn dẹp theo ngày, $T(n, x) = 2,5n + 20nx$ (ngàn đồng).
 b) $T(5, 8) = 812.5$ (ngàn đồng).

Ý nghĩa: Khi thuê chỗ bán hàng Tết 5 ngày với số mét thuê là 5m thì giá thuê chỗ này là 812.5 ngàn đồng.

② Miền xác định của hàm số

Câu 1. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \neq 0\}$

Câu 2.

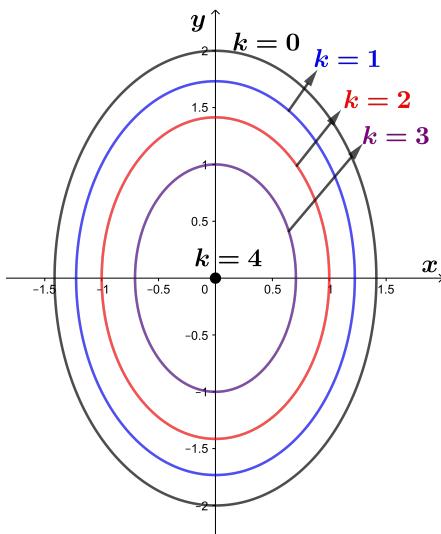
a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 100, 0 \leq y \leq 200\}$

b) $p(50, 100) = 200; p(0, 0) = 182.5$. Ý nghĩa: Giá trị đất ở trung tâm cao hơn.

③ Đường mức, contour map: vẽ đường mức, ý nghĩa đường mức, đọc contour map

Câu 1. a) tăng; b) giảm

Câu 2. Thê k lần lượt từ $0 \rightarrow 5$ rồi vẽ các elip, lưu ý, $k = 5$ phương trình vô nghiệm.



- ④ a) Ellipsoid; b) Hyperboloid 1 tầng;
 c) Parabol Hyperbolic; d) Mặt trụ parabol.

BÀI 2. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP 1

- ① $f'_x(1, 0) = 1, f'_y(1, 0) = 0; f'_x(0, 0) = 1, f'_y(0, 0) = 1$.

② $H'_x < 0; \quad H'_t > 0.$

③ a) $f'_x = \frac{2x}{x^2+2yz} + e^{y-z}, \quad f'_y = \frac{2z}{x^2+2yz} + xe^{y-z}.$

b) $f'_x = \frac{y^2}{(y^2-3xy)^2} - \frac{y}{x^2+y^2}; \quad f'_y = \frac{3x^2-2xy}{(y^2-3xy)^2} + \frac{x}{x^2+y^2}.$

④ $z'_y = -2y - 4 \Rightarrow z'_y(0.5, -2.5) = 1.$

⑤ a) $T'_x = 3x^2 + 1 \Rightarrow T'_x(1, 2) = 4. \quad T'_y = 4y \Rightarrow T'_y(1, 2) = 8.$

b) Lợi nhuận hàng tháng P sửa lại tính bằng triệu đồng.

$P'_x(4000, 150) = 29; \quad P'_y(4000, 150) = -475.$

Ý nghĩa: Khi giá trị hàng tồn kho là 4000 triệu và diện tích sàn 150 m^2 thì

☞ Khi hàng tồn kho tăng 1 triệu thì lợi nhuận tăng 29 triệu.

☞ Khi diện tích sàn tăng 1 m^2 thì lợi nhuận giảm 475 triệu.

ĐẠO HÀM CẤP CAO

① $f''_{xx}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 3\pi - \frac{\pi^2}{4}; \quad f''_{xy}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad f''_{yy}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 2 - \frac{\pi^3}{8}.$

② $f'''_{xyz}(1, 2, -2) = 2.$

VI PHÂN HÀM NHIỀU BIÊN

① $\mathrm{d}f(1, -1) = 2 \mathrm{d}y; \quad \mathrm{d}^2f(1, -1) = \mathrm{d}x^2 + 4 \mathrm{d}x \mathrm{d}y + \mathrm{d}y^2.$

② $\mathrm{d}f(1, 2) = -0.7.$

③ $BSA = \frac{\sqrt{HW}}{60} \Rightarrow dB SA(167, 62) = 0.0078.$

Lưu ý: Trong bài này đơn vị của chiều cao và ΔH là cm.

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN HÀM HỢP

① a) $\mathrm{d}z(1, 0) = (-3 \ln^2 2 - 4 \ln 2 + 7) \mathrm{d}u + (-3 \ln^2 2 + 2 \ln 2 + 2) \mathrm{d}v.$

b) $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2(e-2).$

c) $\frac{\partial y}{\partial u}(2, 0) = \frac{20}{677}; \quad \frac{\partial y}{\partial v}(2, 0) = \frac{10}{677}(\ln 2 - 5).$

d) $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}(\sqrt{3}) = -\frac{3}{16} - \frac{\pi\sqrt{3}}{48}.$

② $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}(3) = 2.$ Sau 3 giây, nhiệt độ sẽ tăng với tốc độ $2^\circ/\text{s}.$

ĐẠO HÀM VI PHÂN HÀM ẨN

① $\frac{dy}{dx}(1) = 0.$

② $z'_x = -1; \quad z'_y = -\frac{1}{2}; \quad dz = -dx - \frac{1}{2} dy.$

ĐẠO HÀM THEO HƯỚNG

① $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(M) = -\frac{1}{5}.$

② $\nabla f(0, -1, 2) = (-6, 1, 1); \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(M) = -\frac{13}{3}.$ Lưu ý: Điểm $M(\mathbf{0}, -1, 2)$

③ $\vec{a} = \pm \frac{1}{\sqrt{13}}(2, 3).$

④ a) $\vec{a} = \pm \frac{1}{\sqrt{13}}(2, 3).$

b) $\nabla f(2, 3) = \left(-\frac{3}{25}, \frac{2}{25}\right).$

Hướng tăng nhanh nhất của f tại điểm $(2, 3)$ khi vector cùng hướng ∇f .

⑤ $\nabla f(-20, 5) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

a) Hướng tây $\Rightarrow \vec{a} = (-1, 0), \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(-20, 5) = -\frac{4}{5} \Rightarrow$ đi xuống.

b) Hướng đông bắc $\Rightarrow \vec{b} = (1, 1), \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{b}}(-20, 5) = \frac{\sqrt{2}}{5} \Rightarrow$ đi lên.

c) Cùng hướng với $\nabla f(-20, 5) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right).$

TIẾP DIỆN, VECTOR PHÁP TUYẾN (PHÁP VECTOR) CỦA MẶT CONG

- ① a) $-2x + y - z = 0;$
 b) $-9x + 5y - 3z + 10 = 0;$
 c) i) $-3x - 4y + 12z - 13 = 0;$ ii) $x - 2z + 1 = 0.$

- ② a) $\nabla f(0, 2, 2) = (-2, 1, -1);$
 b) $\nabla f(1, 1, 2) = (-9, 5, -3);$
 c) i) $\nabla f(5, 2, 3) = (-3, -4, 12);$ ii) $\nabla f(1, 0, 1) = (-2, 0, 4).$

CỰC TRỊ - GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

① a) $A(0,0)$ không là cực trị; $B\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$ là điểm cực đại.

b) Điểm dừng $A\left(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}\right)$.

☞ Khi $ab > 0$ thì $A\left(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}\right)$ là điểm cực tiểu.

☞ Khi $ab < 0$ thì $A\left(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}\right)$ là điểm cực đại.

c) $A(-1,0)$ là điểm cực đại.

d) $A(1, \sqrt{6})$ và $B(1, -\sqrt{6})$ là điểm cực tiểu.

Ứng dụng

Câu 1. Kích thước hố $(x,y,z) = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{5000}}, \sqrt[3]{\frac{1}{5000}}, 0.0005\sqrt[3]{5000^2}\right)$.

Câu 2. Siêu thị nên tính giá bông cải xanh là 60 ngàn đồng và bông cải trắng là 40 ngàn đồng thì doanh thu hàng tuần tối đa.

Khi đó, họ sẽ bán được 320 kg bông cải xanh và 280 kg bông cải trắng.

Doanh thu tối đa là 30400 ngàn đồng.

② Hàm Lagrange $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$.

Điểm dừng $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $C\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $D\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

③ Giá trị lớn nhất là $\frac{1}{2}$ tại $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Giá trị nhỏ nhất là $-\frac{1}{2}$ tại $C\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $D\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.