BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 2

CHƯƠNG 1-BÀI 2. ĐẠO HÀM RIÊNG

TS. NGUYỄN ĐÌNH DƯƠNG
BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG - KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG

Email: duongnd@hcmut.edu.vn

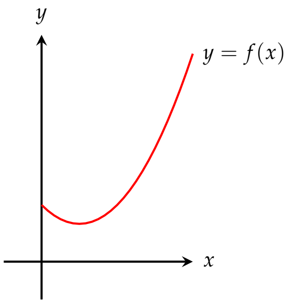
Ngày 15/02/2021

Nội dung

Nội dung

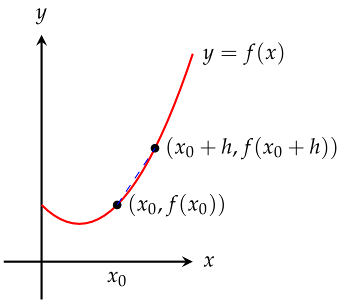
1. Đạo hàm riêng (đhr)

1. 1. Khái niệm



1. Đạo hàm riêng (đhr)

1. 1. Khái niệm

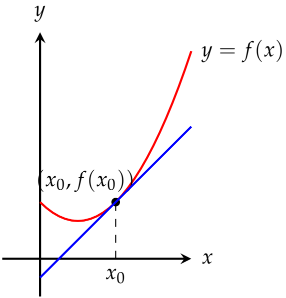


Đạo hàm của f tại x_0 là giới hạn (nếu tồn tại)

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

1. Đạo hàm riêng (đhr)

1. 1. Khái niệm



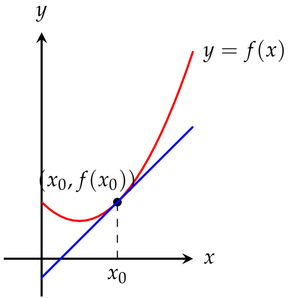
Đạo hàm của f tại x_0 là giới hạn (nếu tồn tại)

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

$f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị f tại điểm $(x_0, f(x_0))$.

1. Đạo hàm riêng (đhr)

1. 1. Khái niệm



Đạo hàm của f tại x_0 là giới hạn (nếu tồn tại)

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

$f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị f tại điểm $(x_0, f(x_0))$.

$f'(x_0)$ cũng là tốc độ biến thiên tức thời của $y = f(x)$ tại $x = x_0$

1. Đạo hàm riêng (đhr)

Hàm hai biến $z = f(x, y)$ có 2 trường hợp:

- Tốc độ biến thiên của $z = f(x, y)$ theo biến x khi y cố định
- Tốc độ biến thiên của $z = f(x, y)$ theo biến y khi x cố định

Trường hợp đầu chính là *đạo hàm riêng của f theo biến x*, kí hiệu bởi $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ hay f'_x

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

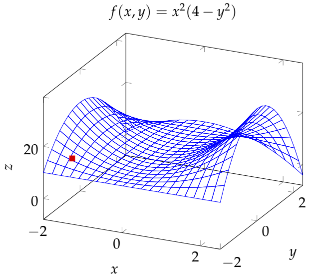
trường hợp sau được gọi là *đạo hàm riêng của f theo biến y*, kí hiệu là $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ hay f'_y

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

1. Đạo hàm riêng (đhr)

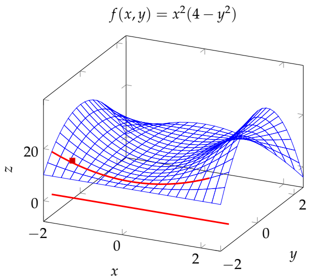
1. 2. Ý nghĩa hình học

Cho hàm số $f(x,y)\ldots$



1. Đạo hàm riêng (đhr)

1. 2. Ý nghĩa hình học



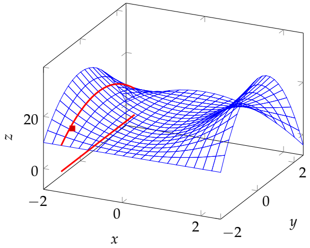
Cho hàm số $f(x,y)\dots$

Để tìm $f'_x(x_0,y_0)$ ta cố định $y = y_0$ và cho x biến thiên:

$$f'_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

1. Đạo hàm riêng (đhr)

1. 2. Ý nghĩa hình học



Cho hàm số $f(x,y)\ldots$

Để tìm $f'_x(x_0,y_0)$ ta cố định $y = y_0$ và cho x biến thiên:

$$f'_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

Để tìm $f'_y(x_0,y_0)$ ta cố định $x = x_0$ và cho y biến thiên:

$$f'_y(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}$$

1. Đạo hàm riêng (đhr)

Quy tắc tính đạo hàm riêng của $z = f(x,y)$

1. Để tìm f'_x, xem $y = \text{const}$ và tính đạo hàm $f(x,y)$ theo biến x
2. Để tìm f'_y, xem $x = \text{const}$ và tính đạo hàm $f(x,y)$ theo biến y

Tìm các đạo hàm riêng của:

1. $f(x,y) = x^4 + 5xy^3$
2. $f(x,t) = t^2 e^{-x}$
3. $g(u,v) = (u^2 + v^2)^3$
4. $f(x,y) = \sin(xy)$
5. $f(Virus, Corona) = (Virus)^5 + (Corona)^3$

1. Đạo hàm riêng (đhr)

1. 3. Đạo hàm riêng cấp cao

Các đhr cấp cao được tính bằng việc tính đhr nhiều lần.

Ví dụ 1.1

Tìm các đạo hàm riêng cấp 2 của $f(x,y) = x^2y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x(x,y) = 2xy^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y(x,y) = 2x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =$$

Một số kí hiệu: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy} = (f'_x)'_y, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx} = \left(f'_y\right)'_x$

Định lý 1.1 (Clairaut)

Giả sử f xác định trên miền mở $\mathscr{D}$ chứa điểm (x_0, y_0). Nếu các hàm f''_{xy} and f''_{yx} liên tục trên $\mathscr{D}$ thì

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

Kiểm tra Định lí Clairaut với hàm $f(x, y) = x^3y^2 - \sin(xy)$

1. Đạo hàm riêng (đhr)

1. 4. Quy tắc đạo hàm hàm ẩn

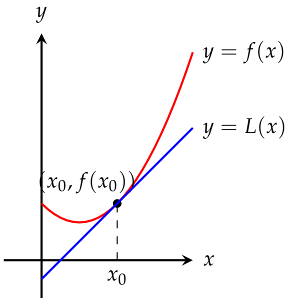
- Cho hàm ẩn $y = y(x)$ xác định bởi phương trình
$$F(x;y) = 0$$
Nếu F khả vi thì ta có
$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}$$
- Tương tự, nếu hàm ẩn $z = f(x;y)$ xác định bởi phương trình $F(x;y;z) = 0$ thì
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Ví dụ 1.2

1. Tìm $\partial z/\partial x$ và $\partial z/\partial y$ nếu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
2. Tìm $\partial z/\partial x$ và $\partial z/\partial y$ nếu $e^z = xyz$

Nội dung

2. Mặt phẳng tiếp diện và xấp xỉ tuyến tính



Đạo hàm $f'(x_0)$ chính là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm $y = f(x)$ tại $(x_0, f(x_0))$.

Đạo hàm $f'(x_0)$ được dùng để xây dựng xấp xỉ tuyến tính

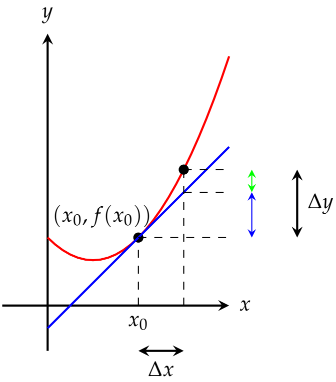
$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

của f trong lân cận x_0

Vi phân của $y = f(x)$ là

$$dy = f'(x)\,dx$$

2. Mặt phẳng tiếp diện và xấp xỉ tuyến tính



Nếu $y = f(x)$ thì *sự biến thiên* của y khi x thay đổi từ x_0 tới $x_0 + \Delta x$ là

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Nếu f khả vi tại x_0 thì

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \varepsilon \Delta x$$

trong đó

$$\varepsilon \to 0 \text{ khi } \Delta x \to 0$$

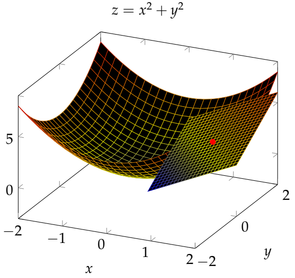
hay

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x + \varepsilon \Delta x$$

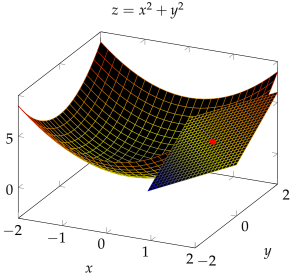
xấp xỉ tuyến tính *càng chính xác* khi $\Delta x \to 0$

2. Mặt phẳng tiếp diện và xấp xỉ tuyến tính 2. 4.

Các đạo hàm riêng $f'_x(x_0, y_0)$ và $f'_y(x_0, y_0)$ xác định *mặt phẳng tiếp diện* với đồ thị của f tại $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$



2. Mặt phẳng tiếp diện và xấp xỉ tuyến tính



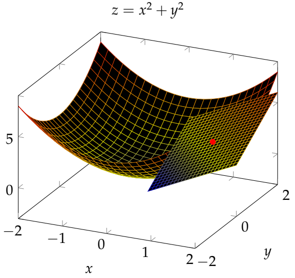
Các đạo hàm riêng $f'_x(x_0, y_0)$ và $f'_y(x_0, y_0)$ xác định *mặt phẳng tiếp diện* với đồ thị của f tại $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

Các đạo hàm riêng này cũng xác định một hàm tuyến tính

$$L(x,y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

xấp xỉ với f trong lân cận (x_0, y_0)

2. Mặt phẳng tiếp diện và xấp xỉ tuyến tính 2. 4.



Các đạo hàm riêng $f'_x(x_0, y_0)$ và $f'_y(x_0, y_0)$ xác định *mặt phẳng tiếp diện* với đồ thị của f tại $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

Các đạo hàm riêng này cũng xác định một hàm tuyến tính

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

xấp xỉ với f trong lân cận (x_0, y_0)

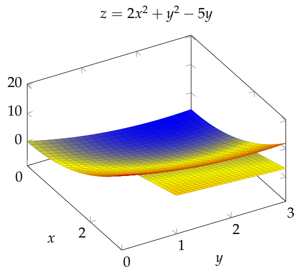
Vi phân của $z = f(x, y)$ là

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

2. Mặt phẳng tiếp diện và xấp xỉ tuyến tính 2. 4.

Nếu f có các đạo hàm riêng liên tục thì mặt phẳng tiếp diện với đồ thị $z = f(x,y)$ tại $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ là

$$\boxed{z - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0)}$$



1. Tìm phương trình mặt phẳng tiếp diện với mặt bậc hai

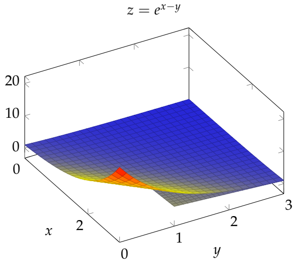
$$z = 2x^2 + y^2 - 5y$$

tại $(1, 2, -4)$.

2. Mặt phẳng tiếp diện và xấp xỉ tuyến tính

Nếu f có các đạo hàm riêng liên tục thì mặt phẳng tiếp diện với đồ thị $z = f(x, y)$ tại $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ là

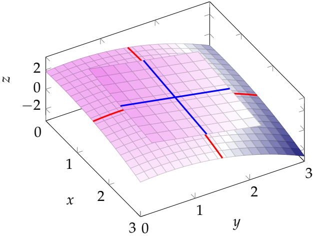
$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$



1. Tìm phương trình mặt phẳng tiếp diện với mặt bậc hai
$$z = 2x^2 + y^2 - 5y$$
tại $(1, 2, -4)$.

2. Tìm phương trình mặt phẳng tiếp diện với mặt
$$z = e^{x-y}$$
tại $(2, 2, 1)$.

2. Mặt phẳng tiếp diện và xấp xỉ tuyến tính 2. 4.



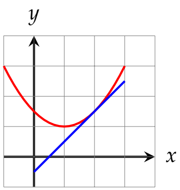
Mặt phẳng tiếp diện chứa các đường tiếp tuyến

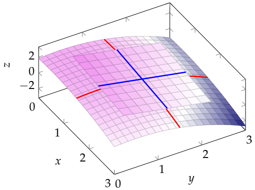
Các đường cong màu đỏ thể hiện $f(x_0, y)$ và $f(x, y_0)$

Các đường màu xanh biểu diễn các đường tiếp tuyến:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 \\ z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)t \end{cases}, \quad \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + t \\ z = f(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)t \end{cases}$$

2. Mặt phẳng tiếp diện và xấp xỉ tuyến tính





Đường thẳng tiếp tuyến chính là đồ thị của hàm tuyến tính

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

đồng thời là xấp xỉ của $f(x)$ trong lân cận $x = x_0$

Mặt phẳng tiếp diện chính là đồ thị của hàm tuyến tính

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

đồng thời là xấp xỉ của $f(x,y)$ trong lân cận $(x,y) = (x_0,y_0)$

2. Mặt phẳng tiếp diện và xấp xỉ tuyến tính

Xấp xỉ tuyến tính của $f(x, y)$ tại (x_0, y_0) là

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

1. Chứng minh rằng xấp xỉ tuyến tính của $f(x, y) = e^x \cos(xy)$ tại $(0, 0)$ là $L(x, y) = x + 1$
2. Biết $f(2, 5) = 6$, $f'_x(2, 5) = 1$ và $f'_y(2, 5) = -1$. Sử dụng xấp xỉ tuyến tính hãy ước lượng $f(2.2, 4.9)$

Nội dung

3. Vi phân

Nếu $z = f(x,y)$, sự *biến thiên* của z khi x biến thiên từ x_0 tới $x_0 + \Delta x$ và y biến thiên từ y_0 tới $y_0 + \Delta y$ là:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

f được gọi là *khả vi* tại (x_0, y_0) nếu

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

trong đó ε_1 và ε_2 tiến tới 0 khi $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Định lý 3.1

Nếu các đạo hàm riêng f'_x và f'_y của f tồn tại trong lân cận (x_0, y_0) và liên tục tại (x_0, y_0) thì f khả vi tại (x_0, y_0) và

$$dz = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y = f'_x(x_0, y_0)\, dx + f'_y(x_0, y_0)\, dy.$$

1. Hãy chỉ ra $f(x,y) = \sqrt{xy}$ khả vi tại $(1, 4)$ và tìm xấp xỉ tuyến tính của nó

3. Vi phân

Với hàm một biến f, vi phân của $y = f(x)$ là

$$dy = f'(x)\, dx$$

Với hàm hai biến f, vi phân của $z = f(x, y)$ là

$$dz = f'_x(x, y)\, dx + f'_y(x, y)\, dy = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy$$

---

1. Một đường tròn có bán kính bằng 10cm với sai số tối đa là 0.2cm. Diện tích tối đa của hình tròn đó là bao nhiêu?
2. Chiều dài và chiều rộng của một hình chữ nhật có số đo lần lượt là 30cm và 24cm, với sai số tối đa bằng 0.1cm. Sai số tối đa khi tính diện tích hình chữ nhật là bao nhiêu?

Nội dung

TRAO ĐỔI