

BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 2

CHƯƠNG 2-BÀI 1. TÍCH PHÂN BỘI

TS. NGUYỄN ĐÌNH DƯƠNG
BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG - KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG

Email: duongnd@hcmut.edu.vn

Ngày 15/02/2021

Chương 2: Tích phân bội

2.1 Tích phân bội 2

2.2 Đổi biến trong tích phân bội 2

2.3 Tích phân bội 3

2.4 Đổi biến trong tích phân bội 3



Nội dung

Tích phân bội 2 trong tọa độ cực

Ứng dụng tích phân bội 2

2.1 Thể tích vật thể

2.2 Tính khối lượng bản phẳng

Nội dung

Tích phân bội 2 trong tọa độ cực

Ứng dụng tích phân bội 2

2.1 Thể tích vật thể

2.2 Tính khối lượng bản phẳng

Chuẩn đầu ra

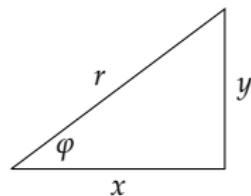
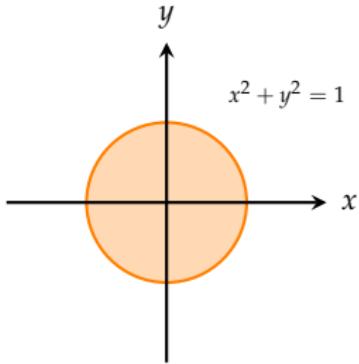
- Nhắc lại Hệ tọa độ cực
- Tính được tích phân bội 2 trong hệ tọa độ cực trên miền chữ nhật
- Tính được tích phân bội 2 trong hệ tọa độ cực trên miền tổng quát
- Tính được thể tích vật thể sử dụng tích phân bội 2 trong hệ tọa độ cực



1. Tích phân bội 2 trong tọa độ cực

	Giải tích I	Giải tích II
Tổng Riemann	$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$	$\sum_{i,j=1}^n f(x_i^*, y_j^*) \Delta A$
Tích phân Riemann	$\int_a^b f(x) dx$	$\iint_D f(x, y) dA$
Cách tính	$F(b) - F(a)$	Tích phân lặp
Ý nghĩa hình học	Diện tích nằm dưới đường cong	Thể tích dưới mặt cong

Hệ tọa độ cực

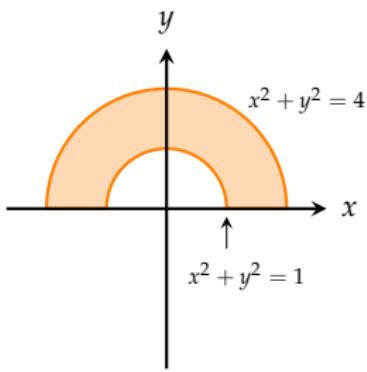


Ta có

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

và

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}.$$

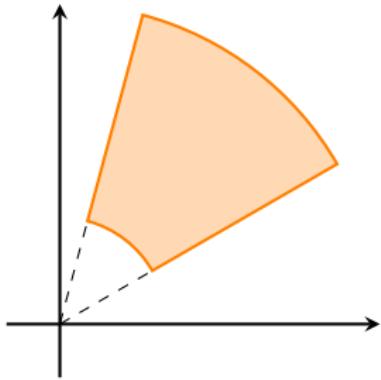


Miền tô màu hình bên được mô tả như thế nào trong tọa độ cực?

Hình chữ nhật trong tọa độ cực

Hình chữ nhật trong tọa độ cực là miền

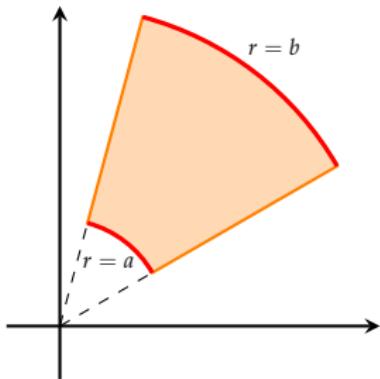
$$R = \{(r, \varphi) : a \leq r \leq b, \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta\}.$$



Hình chữ nhật trong tọa độ cực

Hình chữ nhật trong tọa độ cực là miền

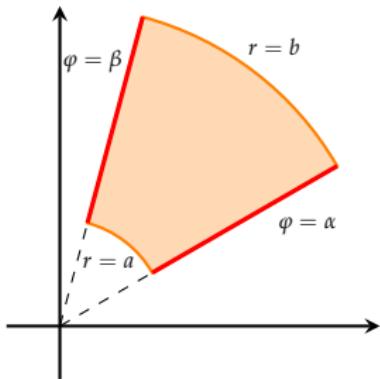
$$R = \{(r, \varphi) : a \leq r \leq b, \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta\}.$$



Hình chữ nhật trong tọa độ cực

Hình chữ nhật trong tọa độ cực là miền

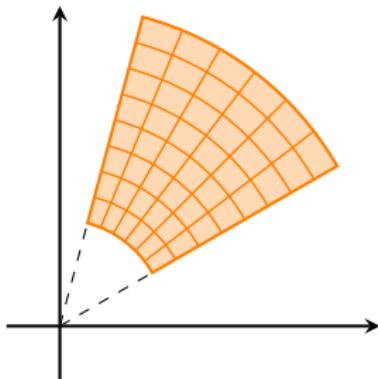
$$R = \{(r, \varphi) : a \leq r \leq b, \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta\}.$$



Hình chữ nhật trong tọa độ cực

Hình chữ nhật trong tọa độ cực là miền

$$R = \{(r, \varphi) : a \leq r \leq b, \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta\}.$$

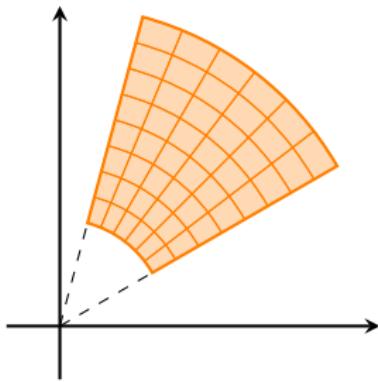


Tương tự, hình chữ nhật trong tọa độ cực được chia thành *các hình chữ nhật con*

Hình chữ nhật trong tọa độ cực

Hình chữ nhật trong tọa độ cực là miền

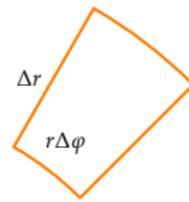
$$R = \{(r, \varphi) : a \leq r \leq b, \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta\}.$$



Tương tự, hình chữ nhật trong tọa độ cực được chia thành *các hình chữ nhật con*

Mỗi hình chữ nhật nhỏ có diện tích

$$\Delta A \simeq r \Delta r \Delta \varphi$$



Tích phân bộ 2 trong tọa độ cực

Tích phân $\iint_R f(x, y) dA$ là giới hạn của tổng Riemann:

$$\sum_{i,j=1}^n f(r_i^* \cos \varphi_j^*, r_i^* \sin \varphi_j^*) \mathbf{r}_j \Delta r \Delta \varphi$$

Hình chữ nhật R_{ij} cho bởi

$$R_{ij} = \{(r, \varphi) : r_{i-1} \leq r \leq r_i, \varphi_{j-1} \leq \varphi \leq \varphi_j\}$$

$$r_i = a + i\Delta r, \quad \varphi_j = \alpha + j\Delta\varphi$$

trong đó

$$\Delta r = \frac{b-a}{n}, \quad \Delta\varphi = \frac{\beta-\alpha}{n}$$

Lấy giới hạn trên sẽ dẫn tới tích phân lặp

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \mathbf{r} dr d\varphi$$



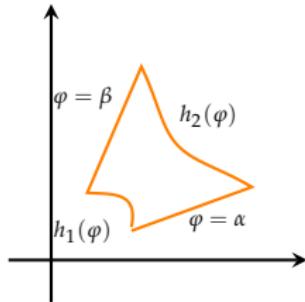
Tích phân bội 2 trong tọa độ cực

Tích phân bội 2 trong tọa độ cực Tích phân của hàm liên tục $f(x, y)$ trên miền hình chữ nhật trong tọa độ cực R cho bởi $a \leq r \leq b, \alpha \leq \varphi \leq \beta$, là

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

- ① Tính $\iint_D (2x - y) dA$ với D là miền giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 4$, các đường $x = 0$ và $y = x$ trong góc phần tư thứ nhất.
- ② Tính $\iint_D e^{-x^2-y^2} dA$ với D là miền giới hạn bởi nửa phải đường tròn $x = \sqrt{4 - y^2}$ và trục Oy .

Tích phân bội 2 trong tọa độ cực



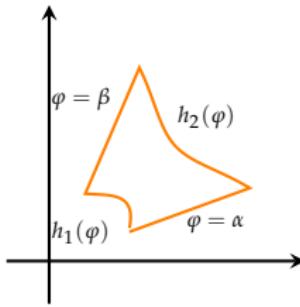
Nếu f liên tục trên miền tọa độ cực cho bởi

$$D = \{(r, \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, h_1(\varphi) \leq r \leq h_2(\varphi)\}$$

thì

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dA &= \\ \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\varphi)}^{h_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \color{red}{r} dr d\varphi & \end{aligned}$$

Tích phân bộ 2 trong tọa độ cực

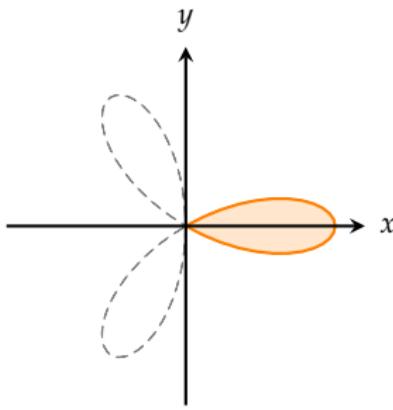


Nếu f liên tục trên miền tọa độ cực cho bởi

$$D = \{(r, \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, h_1(\varphi) \leq r \leq h_2(\varphi)\}$$

thì

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\varphi)}^{h_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$



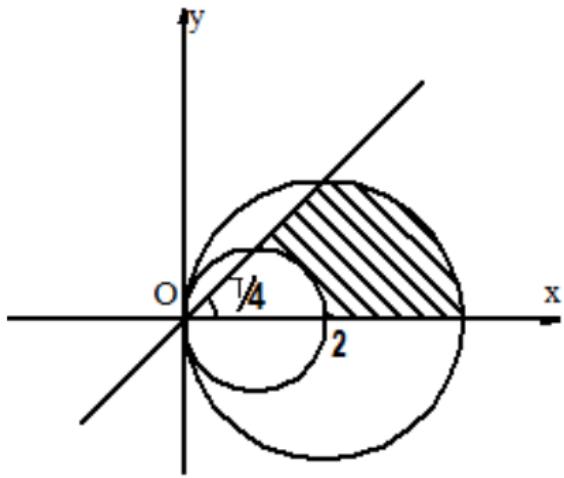
Tìm diện tích miền tô màu trong hình hoa hồng 3 cánh

$$r = \cos 3\varphi$$

1. Tích phân bộ 2 trong tọa độ cực

Ví dụ 1.1

Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi các đường $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$ và $y = 0$.



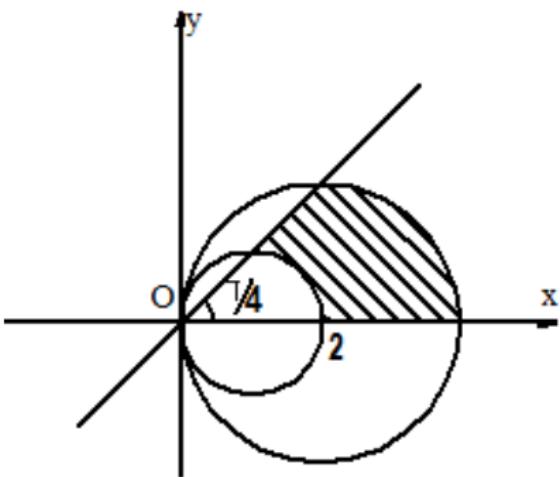
1. Tích phân bộ 2 trong tọa độ cực

Ví dụ 1.1

Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi các đường $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$ và $y = 0$.

Giải

$$\begin{aligned} S &= \iint_D 1 \cdot dS \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} r dr \right) d\varphi \\ &= 6 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \varphi d\varphi \\ &= \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2} \end{aligned}$$





Nội dung

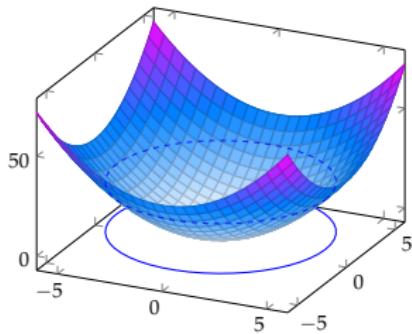
Tích phân bội 2 trong tọa độ cực

Ứng dụng tích phân bội 2

2.1 Thể tích vật thể

2.2 Tính khối lượng bản phẳng

Thể tích vật thể



Tìm thể tích vật thể hình trụ nằm dưới paraboloid

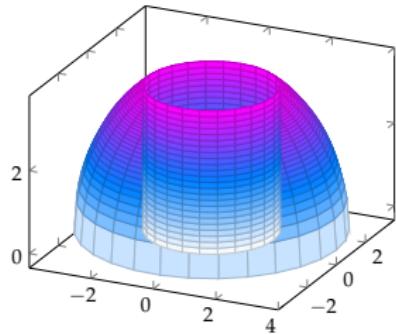
$$z = x^2 + y^2$$

và có mặt đáy là hình tròn

$$x^2 + y^2 \leq 25$$

- ① Mô tả hình tròn đáy trong tọa độ cực
- ② Chuyển hàm $f(x, y)$ sang tọa độ cực

Thể tích vật thể



Tìm thể tích vật thể nằm trong mặt cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

và nằm ngoài mặt trụ

$$x^2 + y^2 = 4$$



2. Ứng dụng tích phân bội 2 2. 2. Tính khối lượng bản phẳng

Khối lượng bản phẳng

Giả sử bản phẳng $D \subset (Oxy)$ có khối lượng riêng tại mỗi điểm (x, y) là $\rho(x, y)$. Khi đó khối lượng của D tính bởi

$$m = \iint_D \rho(x, y) dS.$$

Ví dụ 2.1

Tìm khối lượng của một bản phẳng D giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 1$, $x = 1$ biết rằng khối lượng riêng tại mỗi điểm là $\rho(x, y) = \frac{1}{y}$.



TRAO ĐỔI