

## 1 Đạo hàm riêng và vi phân cấp một

Tính các đạo hàm riêng và vi phân cấp một tại các điểm được chỉ ra:

1.  $-dx - 8dy$ .
2.  $\pi^3 - \pi^3 dy$ .
3.  $e^3 dy$ .
4.  $dx$ .
5.  $\frac{xdx + (y + \sqrt{x^2 + y^2}) dy}{\sqrt{x^2 + y^2} (y + \sqrt{x^2 + y^2})}$ .

Tính đạo hàm riêng và vi phân cấp một của hàm ba biến.

1.  $0, \ln 3 - \frac{2}{3}$ .
2.  $\frac{x^2 + 2y^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ .
3.  $\frac{y}{y^2 + (x + z)^2}, -\frac{x + z}{y^2 + (x + z)^2}, \frac{y}{y^2 + (x + z)^2}$ .
4.  $yz(xy)^{z-1}$ .
5.  $-\frac{2}{25}dx - \frac{4}{25}dy + \frac{1}{5}dz$ .

Tìm miền xác định của

1.  $R^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .
2.  $\{(x, y) : x - 2y > 0\}$ .
3.  $R^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .
4.  $R^2$ .
5.  $R^2$ .

Với hàm số  $f$  cho trước, tính giá trị biểu thức  $A(x, y)$  theo  $x, y$  hoặc  $A(x, y, z)$  theo  $x, y, z$ .

1.  $\frac{x^3}{y}$
2.  $0$
3.  $-x$
4.  $\frac{3}{x + y + z}$

Trong các bài dưới đây, tìm hàm  $f(x, y)$  khả vi thỏa mãn điều kiện đã cho

1.  $\frac{x^3}{3} - xy + \frac{y^3}{3}$ .

2.  $3xy^2 + x^2y + x^2 + 3y + C$ .
3.  $e^x + e^y + xy - \cos x - \cos y$ .
4.  $\frac{x^2}{2} + e^{\frac{x}{y}}$ .

Tính số gia và vi phân của các hàm số dưới đây tại các điểm được chỉ ra

1.  $2dx + dy, 2\Delta x + \Delta y + \Delta x^2 + \Delta x^2\Delta y + 2\Delta x\Delta y$ .
2.  $df(1, 1) = -0,19, \Delta f(1, 1) = -0,1819$ .
3.  $df(2, 1) = 0.3, \Delta f(2, 1) = 0,33$ .

Các bài toán ứng dụng.

1.  $-\frac{7}{2}$ .
2.  $\pi - 1$ .
3.  $8, 2m^3$ .
4. Giảm  $1,57cm$ .
5. Tăng  $617,5cm^3$ .

## 2 Đạo hàm và vi phân cấp cao

Tính các đạo hàm cấp hai theo yêu cầu tại các điểm được chỉ ra.

1.  $-\frac{1}{2}, -2$ .
2. 0.
3.  $-\frac{2x + y \sinh \frac{2x}{y}}{2y^3 \cosh^2 \frac{x}{y}}, \frac{x^2 + xy \sinh \frac{2x}{y}}{y^4 \cosh^2 \frac{x}{y}}$ .
4.  $1, -\frac{1}{2}$ .
5.  $x^2yz(yz)^{x-2}$ .

Tính vi phân cấp hai của các hàm số sau tại các điểm được chỉ ra

1.  $30dx^2 + 68dxdy - 4dy^2$ .
2.  $-2dx^2 - 4dxdy - 4dy^2$ .
3.  $8dx^2 - 8dxdy + 2dy^2$ .

Tìm đạo hàm cấp cao tại các điểm được chỉ ra.

1. 0.
2.  $x^9(2x^3y + 2x^2y + 11x + 10)e^{x^2y}$ .
3.  $9e^{-1}$ .
4.  $-2^53^510!$ .

5.  $-32 \sin 1$ .
6.  $(x^2 - 2xy + 8x + y^2 - 8y + 4) e^{x+y}$
7.  $0, -\frac{1}{2}$ .
8. 1.

### 3 Đạo hàm và vi phân hàm hợp

1. 0, 0.
2.  $2yzt + \frac{xz}{t} + xy(1 + \tan^2 t)$  (hoặc ra hết theo  $t$ ).
3.  $\left( \frac{16}{\pi} - \frac{16}{\pi^2} + 4 \right) dt$ .
4.  $\simeq 0,042 kPa/s$ .
5.  $\frac{2x+2}{\cos^2(x^2+2x)}$ .
6. Cho  $z = f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ .  
 a/  $f'_x(0, 1) = 1, f'_y(0, 1) = 0$ .  
 b/  $dz(0) = dx$ .  
 c/  $dz(t) = \frac{2y - 3xt^2}{x^2 + y^2} dt$ .
7. 40.
8.  $\frac{2u - 2v}{\sqrt{1 - (x - y)^2}}, \frac{2v - 2u}{\sqrt{1 - (x - y)^2}}$ .
9. 6, 39.
10. 9, 3.
- 11.
- 12.
- 13.
- 14.
15.  $12t^2 + 18t$ .
16. 22, -15.
- 17.
18.  $r = x, s = xy, t = xyz \Rightarrow du(x, y, z) = (f'_r + yf'_s + yzf'_t)dx + (xf'_s + xzf'_t)dy + xyf'_tdz$ .
- 19.
- 20.
- 21.

## 4 Đạo hàm và vi phân của hàm ẩn

1.  $y'(x) = \frac{e^{x-y} - 1}{1 + e^{x-y}}, y''(x) = \frac{4}{(e^{x-y} + 1)^3}.$
2.  $0, -\frac{1}{3}dx^2.$
3.  $y \frac{3x^2 + z}{e^{\frac{z}{y}} - xy}, \frac{ze^{\frac{z}{y}} + 3y^4}{y(e^{\frac{z}{y}} - xy)}.$
4.  $1, \frac{1}{2}.$
5.  $\frac{2y(x-2)}{de(z+1)^3}$
6.  $u = yz, v = e^{xz}, z'_x = -\frac{ze^{xz}f'_v}{yf'_u + xe^{xz}f'_v}, z'_y = -\frac{zf'_u}{yf'_u + xe^{xz}f'_v}.$
- 7.
8.  $\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}.$  HD: xét hệ  $\begin{cases} 2 = z'_u = z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u, \\ 1 = z'_v = z'_x \cdot x'_v + z'_y \cdot y'_v \end{cases}$ . Thay  $(u, v) = (1, 1)$  và giải hệ.
9.  $\frac{1}{y+z} - \frac{(x-y)(x+1)e^{x-z}}{(z+1)(y+z)^2}, -\frac{x+z}{(y+z)^2} - \frac{(x-y)(y+1)e^{y-z}}{(z+1)(y+z)^2}.$

## 5 Đạo hàm theo hướng và vector gradient

1.  $(0, \tanh^2 2 - 1, 1 - \tanh^2 2).$
2.  $(-\pi^3, \pi^3).$
3.  $\frac{-x^2 + 2xy}{\sqrt{2}}.$
4. Là hướng của  $\nabla f(1, 2) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right).$
5. Theo hướng  $\vec{a} = (3, 4)$  àm số tăng nhanh hơn hướng  $\vec{b} = (-3, 4).$
6.  $7, \frac{31}{7}.$
7. a/  $xy = z^2.$  b/  $x = y = 0$
8. Cho  $g = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$  với  $f$  là hàm khả vi, tìm  $\nabla g(x, y, z).$
9. a/  $(x-1) + (y-1) + \sqrt{2}(z-\sqrt{2}) = 0$  tại điểm  $x-1 = y-1 = \frac{z-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$   
b/  $\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \left(y - \frac{\pi}{2}\right) - 2\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0, x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - y = 1 - 2z$   
c/  $z = \frac{1}{e} - e^{(-1)(x-1)}, x = 1 - t; y = \pi; z = \frac{1}{e} + t$   
d/  $4(x-2) + 14(y-1) - 10(z-3) = 0, \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{14} = \frac{z-3}{-1}$

## 6 Cực trị hàm nhiều biến

### 6.1 Cực trị tự do

Tìm cực trị các hàm số sau:

1.  $f_{CT} = f(0, 3) = -9$ .
2.  $f_{CT} = f(0, -2/3) = -4/3$ , không đạt cực trị tại  $(2, -2/3)$ .
3.  $f_{CT} = f(5, 2) = 30$ .
4.  $f_{CT} = f(1, 3) = 10 - 18 \ln 3$
5.  $f_{CT} = f(0, 0) = 0$ , không đạt cực trị tại các điểm dừng  $(-10/3, 0), (1, \sqrt{13}), (1, -\sqrt{13})$ .
6.  $f(x, y) = xy^2(1 - x - y), (x > 0, y > 0)$ .
7.  $f_{CT} = f(2, -3, 1) = -14$ .
8.  $f_{CT} = f\left(\frac{\sqrt[4]{4}}{2}, \sqrt{2}, \sqrt[4]{8}\right) = 2\sqrt[4]{4}, f_{CD} = f\left(-\frac{\sqrt[4]{4}}{2}, \sqrt{2}, -\sqrt[4]{8}\right) = -2\sqrt[4]{4}$ .

### 6.2 Cực trị có điều kiện

Tìm cực trị của các hàm số dưới đây với điều kiện tương ứng.

1.  $f$  đạt cực tiểu tại  $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-3}{2}\right), f_{CT} = -\frac{19}{4}$ .
2.  $f$  đạt cực đại tại  $\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ , đạt cực tiểu tại  $\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$
3.  $f_{CD} = f\left(\pm\frac{3}{2}, \pm 4\right) = \frac{425}{2}, f_{CT} = f(\pm 2, \mp 3) = -50$ .
4.  $f_{CT} = f(0, 0) = 0, f_{CD} = f(2, 4) = 20$ .
5.  $f_{CT} = f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}, f_{CD} = f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2} - 4}{\sqrt{2}}$

## 7 Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Trong các bài dưới đây, tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên miền được chỉ ra.

1.  $f(x, y) = xy, x^2 + y^2 \leq 1$ .
2.  $f(x, y) = 3x^2 + 5y^2 - 2, x^2 + y^3 \leq 4$ .
3.  $f(x, y) = 3x^2 + 5y^2 - 2, 2x^2 + 3y^2 \leq 25$ .
4.  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2, |x| + |y| \leq 1$