

BÀI TẬP TÍCH PHÂN BỘI

1 Hãy cho biết các tích phân sau dùng để tính thể tích của vật thể nào, hãy vẽ vật thể đó trong không gian 3 chiều.

1. $\int_0^2 dx \int_0^1 2xdy$.
2. $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2dy$.
3. $\iint_D (1+x^2+y^2)dxdy$, trong đó D là hình tròn $x^2+y^2 \leq 1$.
4. $\iint_D 4dxdy$, trong đó D là tam giác OAB , $O(0,0)$, $A(0,2)$, $B(1,1)$.
5. $\iint_D (x^2+1)dxdy$, trong đó D là hình chữ nhật $-1 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 4$.

2 Tính tích phân lặp sau đây và vẽ hình miền lấy tích phân.

1. $\int_{-1}^2 dx \int_{-2}^2 (e^{x+y} - 2x) dy$. DS : $e^{-3} + e + e^4$
2. $\int_{-1}^2 dx \int_{-2}^2 (xy^2 - 2x) dy$. DS : -4
3. $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} (x-1+y) dy$. DS : $\frac{28}{15}$
4. $\int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x-y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x-y) dy$. DS : $-\frac{2}{3}$
5. $\int_{-3}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy dy + \int_{-1}^5 dx \int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy dy$ DS : 36
6. $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{2-x^2} dy$. DS : $\frac{8}{3}$
7. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\cos x} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy$. DS : $\pi - 2$

3 Tính các tích phân kép sau

1. $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dxdy$, D giới hạn bởi $y = \frac{1}{x}, y = x, x = 2$. DS : $\frac{9}{4}$
2. $\iint_D \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{y}}$, với $D : xy = 1, x = y, x = 9y, x \geq 0$. DS : 1
3. $\iint_D y dxdy$, G giới hạn bởi $y \leq x^2 + 2x, y \geq \frac{x^2}{2}, y \leq 1 + \frac{x}{2}$. DS : $\frac{4}{3}$
4. $\iint_D dxdy$, $D : y = 3, y = x^2 - 2x, 0 \leq x \leq 3$. DS : 9
5. $\iint_D y^2 e^{xy} dxdy$, $D : 0 \leq y \leq 4, 0 \leq x \leq y$. DS : $\frac{e^{16} - 17}{2}$

6. $\iint_D \frac{y}{x^5 + 1} dx dy$, $D : y = 0, y = x^2, 0 \leq x \leq 1$. ĐS : $\frac{\ln 2}{10}$
7. $\iint_D \frac{x^3 y^2}{y^5 + 1} dx dy$, $D : y = 1, y = x^2, x \geq 0$. ĐS : $\frac{\ln 2}{20}$
8. $\iint_D x \sqrt{y^2 - x^2} dx dy$, $D : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1$. ĐS : $\frac{1}{12}$
9. $\iint_D (x + \sqrt{y}) dx dy$ với $D : y \leq -x^2 + 2x + 3, y \leq x^2 + 2x + 1, y \geq 0$. ĐS : $2\pi + \frac{53}{4}$
10. $\iint_D y dx dy$, với $D : y = x\sqrt{x+2}, y = x^2$. ĐS : $\frac{22}{15}$

4 Tính các tích phân sau trong tọa độ cực hoặc tọa độ cực mở rộng.

1. $\iint_D y \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, với $D : -1 \leq y \leq 0, -\sqrt{1 - y^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}$. ĐS : $-\frac{1}{2}$
2. $\iint_D x \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, với $D : x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq x$. ĐS : $\frac{64 - 43\sqrt{2}}{30}$
3. $\iint_D xy dx dy$, với $D : x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq -x$. ĐS : $\frac{1}{12}$
4. $\iint_D e^{x^2 + y^2} dx dy$, với $D : x^2 + y^2 \leq 1, y \leq x \leq -y$. ĐS : $\frac{\pi}{4}(e - 1)$
5. $\iint_D \ln(x^2 + y^2 + 1) dx dy$, với $D : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$. ĐS : $\pi e^4(e^5 - 1)$
6. $\iint_D dx dy$, với $D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq -2y$. ĐS : $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$
7. $\iint_D y dx dy$, với $D : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq -2y$. ĐS : $\frac{4 - \sqrt{2}}{3} - \frac{\pi}{2}$
8. $\iint_D |x - y| dx dy$, với $D : x^2 + y^2 \leq -2x$. ĐS : $\frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}$
9. $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| dx dy$, với $D : x^2 + y^2 \leq 4$. ĐS : 5π
10. $\iint_D |x^2 - y^2| dx dy$, với $D : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq y$. ĐS : $\frac{1}{2}$
11. $\iint_D (x + y) dx dy$, với $D : x^2 + y^2 \leq 2y, y \geq 1$. ĐS : $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}$
12. $\iint_D 2x dx dy$, với $D : x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 \leq 0, x + y \leq 2$. ĐS : $\pi + \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ĐS : 9π
13. $\iint_D \sqrt{9x^2 + 3y^2} dx dy$, với $D : \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} \leq 1, y \geq -x$. ĐS : 9π

5 Ứng dụng hình học của tích phân kép

5.1 Tính diện tích các miền phẳng dưới đây

1. $D : x^2 + y^2 \leq 1, |x| + |y| \geq 1$. ĐS : $\pi - 2$
2. $D : 2y \leq x^2 + y^2 \leq 4y, y \geq -x$. ĐS : $\frac{9\pi}{4} + \frac{3}{2}$
3. $D : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} \leq 1, \frac{x}{5} + \frac{y}{3} \geq 1$. ĐS : $\frac{15\pi}{4} - \frac{15}{2}$
4. $D : x^2 + y^2 \leq 2x, x + y \leq 2$. ĐS : $\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}$

5.2 Tính thể tích các vật thể dưới đây

1. $\Omega : z = x^2 + 2x - y, z = 0, y = x + 2, x \geq 0$. ĐS : $\frac{17}{20}$
2. $\Omega : z = x^2 + y^2, z = 0, x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 2$. ĐS : $\frac{3\pi}{2}$
3. $\Omega : z = x^2 + 1, z = 2x, y = x, y = 2x, x = 1$. ĐS : $\frac{1}{12}$
4. $\Omega : z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}, z = x^2 + y^2, 0 \leq \sqrt{3}x \leq y$. ĐS : $\frac{8\sqrt{2} - 7}{72}\pi$.
5. $\Omega : z = 4 - x^2 - y^2, z = 2, x \geq y^2$. ĐS : $\frac{\pi}{2} + \frac{52}{105}$
6. $\Omega : y^2 + z^2 = 2y, z = 2x, z = 3x$. ĐS : $\frac{2}{9}$
7. $\Omega : z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 2 - x^2 - y^2, x \geq 0, y \leq 0$. ĐS : $\frac{5\pi}{24}$

5.3 Tính diện tích các mặt cong sau

1. Phần mặt nón $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}$, phần nằm dưới paraboloid $z = 4 - x^2 - y^2$. ĐS : $3\sqrt{2}\pi$
2. Phần mặt phẳng $x + y + z = 1$, bị cắt bởi trụ $y^2 = x$ và mặt phẳng $x = 1$. ĐS : $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.
3. Phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm trong trụ $z^2 = 2y$. ĐS : $\sqrt{2}\pi$
4. Phần mặt cầu $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ nằm giữa 2 mặt phẳng $x = z, x = \sqrt{3}z$. ĐS : $\frac{\pi}{6}$.

6 Tính các tích phân lặp sau đây và vẽ miền tính tích phân

1. $\int_0^1 dy \int_y^{y+1} dx \int_0^{x^2+1} y dz$. ĐS : $\frac{5}{4}$
2. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} dy \int_0^4 xy dz$. ĐS : $\frac{2}{3}$
3. $\int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z dz$. ĐS : 2π
4. $\int_0^1 dy \int_0^{1-y^2} dz \int_0^2 dx$. ĐS : $\frac{4}{3}$

$$5. \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z dz. \text{ DS : } -\frac{7\pi}{4}$$

7 Tính các tích phân bội ba sau đây

$$1. \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz, \Omega : 2x + z = 2, z = (x-1)^2 + y^2. \text{ DS : } \frac{\pi}{12}$$

$$2. \iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, \Omega : z = 1, z = 2, x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4. \text{ DS : } 7\pi$$

$$3. \iiint_{\Omega} y \cos(x+z) dx dy dz, \Omega : y = \sqrt{x}, y = 0, z = 0, z+x = \frac{\pi}{2}. \text{ DS : } \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$$

$$4. \iiint_{\Omega} (x+y) dx dy dz, \Omega : x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2-x^2-y^2}, y \geq x. \text{ DS : } 0$$

$$5. \iiint_{\Omega} x dx dy dz, \Omega : 0 \leq z \leq 2-x^2-y^2, x^2+y^2 \geq 1, x \geq 0, y \geq 0. \text{ DS : } \frac{7}{15}$$

$$6. \iiint_{\Omega} (x+z) dx dy dz, \Omega : x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}. \text{ DS : } \frac{\pi}{12}$$

$$7. \iiint_{\Omega} (2+xy+x) dx dy dz, \Omega : z = 4-y^2, z = 0, x = 0, x = 3. \text{ DS : } 112$$

8 Theo yêu cầu mỗi bài, đổi các tích phân sau sang tọa độ trụ hoặc tọa độ cầu.

$$1. I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, \Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{3(x^2 + y^2)} : \text{tọa độ cầu. DS : } \\ z = \rho \cos \theta, I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_0^1 \rho^3 \sin^2 \theta d\rho$$

$$2. I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, \Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq -\sqrt{3(x^2 + y^2)}, y \leq x \leq -y. \text{ Tọa } \\ \text{độ cầu. DS : } z = \rho \cos \theta, I = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{5\pi}{6}} d\theta \int_0^1 \rho^3 \sin^2 \theta d\rho$$

$$3. I = \iiint_{\Omega} dx dy dz, \Omega : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = x, z = \sqrt{3}x, x \geq 0 : \text{tọa độ cầu. DS : } \\ y = \rho \cos \theta, z = \rho \sin \theta \cos \varphi, x = \rho \sin \theta \sin \varphi, I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 \sin \theta d\rho$$

$$4. I = \iiint_{\Omega} (x+y^2) dx dy dz, \Omega : x^2 + z^2 \leq 1, x \geq y^2, z \geq 0 : \text{tọa độ trụ. DS : } I = \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r dr \int_{-\sqrt{r \sin \varphi}}^{\sqrt{r \sin \varphi}} (r \sin \varphi + y^2) dy$$

$$5. I = \iiint_{\Omega} (x+y) dx dy dz, \Omega : z = x^2 + y^2, z+2x = 0 : \text{tọa độ trụ. DS : } I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_0^{-2 \cos \varphi} r dr \int_{r^2}^{-2r \cos \varphi} r \\ \sin \varphi dz$$

$$6. I = \iiint_{\Omega} xy dx dy dz, \Omega : y = \sqrt{x^2 + z^2}, y = 2, x \leq z \leq -\sqrt{3}x : \text{tọa độ trụ. DS : } \\ I = \int_{-\frac{2\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_0^2 r dr \int_r^2 yr \sin \varphi dy$$

9 Dùng tích phân bội ba tính thể tích các vật thể sau:

1. $\Omega : z = 0, y + z = 4, x^2 + y^2 = 4$. ĐS : 16π

2. $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. ĐS : $\frac{5\pi}{12}$

3. $\Omega : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$. ĐS : $\frac{7\pi(2 - \sqrt{2})}{3}$

4. $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 1$. ĐS : $4\pi\sqrt{3}$