Ta biết rằng tiếp diện của đồ thị hàm số $f(x;y)$ tại điểm $(a;b;f(a;b))$ có phương trình là

$$z = f(a;b) + f_x(a;b)(x-a) + f_y(a;b)(y-b).$$

Định nghĩa

Ta gọi xấp xỉ

$$f(x;y) \approx f(a;b) + f_x(a;b)(x-a) + f_y(a;b)(y-b)$$

là **xấp xỉ tuyến tính (linear approximation)** *của* $f(x;y)$ *tại* $(a;b)$.

Xét hàm số hai biến $z = f(x; y)$. Giả sử x thay đổi từ a đến $a + \Delta x$ và y thay đổi từ b đến $b + \Delta y$. Khi đó, **số gia (increment)** tương ứng của z là

$$\Delta z = f(a + \Delta x; b + \Delta y) - f(a; b).$$

Định nghĩa

Cho hàm số $z = f(x; y)$. Ta nói f **khả vi (differential)** *tại $(a; b)$ nếu Δz có thể biểu diễn dưới dạng*

$$\Delta z = f_x(a; b)\Delta x + f_y(a; b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

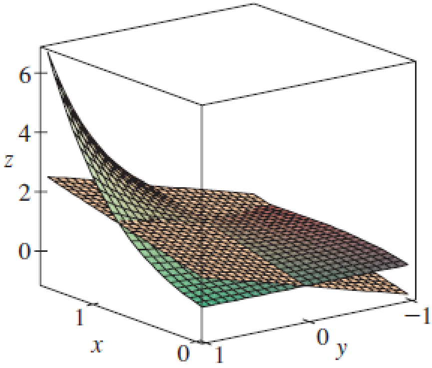
trong đó $\varepsilon_1 \to 0$ và $\varepsilon_2 \to 0$ khi $(\Delta x; \Delta y) \to (0; 0)$.

Định lý

Nếu các đạo hàm riêng f_x và f_y tồn tại gần $(a; b)$ và liên tục tại $(a; b)$, thì f khả vi tại $(a; b)$.

Ví dụ

Chứng minh rằng $f(x;y) = xe^{xy}$ khả vi tại $(1;0)$ và tìm tuyến tính hóa của nó tại đó. Sau đó, hãy tính xấp xỉ giá trị $f(1.1;-0.1)$.



Định nghĩa

Cho $z = f(x; y)$ là hàm số khả vi. **Vi phân toàn phần (total differential)** *dz được định bởi*

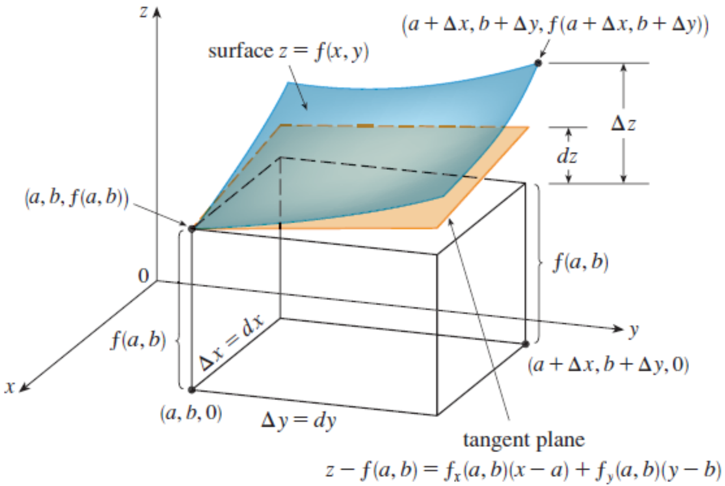
$$dz = f_x(x; y)dx + f_y(x; y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

- Nếu lấy $x = a$, $y = b$, $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, thì

$$dz = f_x(a; b)\Delta x + f_y(a; b)\Delta y.$$

- Khi đó,

$$\Delta z \approx dz.$$



$$\Delta z \approx dz$$

Ví dụ

Cho hàm số $z = f(x; y) = x^2 + 3xy - y^2$.

(a) *Hãy tìm vi phân toàn phần* dz.

(b) *Nếu* x *thay đổi từ* 2 *đến* 2.05 *và* y *thay đổi từ* 3 *đến* 2.96, *hãy so sánh các giá trị của* Δz *và* dz.

Ví dụ

Một hình hộp chữ nhật có kích thước các cạnh là $a = 2m$, $b = 3m$, $c = 6m$. *Hãy tính gần đúng độ dài đường chéo hình hộp nếu* a *tăng* $2cm$, b *tăng* $1cm$ *và* c *giảm* $3cm$.

Ví dụ

Một hình nón có bán kính đáy r và chiều cao h lần lượt là

$$r = 10 \pm 0.1,$$
$$h = 25 \pm 0.1,$$

với đơn vị là cm. Hãy sử dụng các vi phân để ước lượng sai số khi tính thể tích của khối nón.

Định lý (The Chain Rule Case I)

Giả sử $z = f(x; y)$ *là một hàm số khả vi theo hai biến* x *và* y, *trong đó* $x = g(t)$ *và* $y = h(t)$ *là các hàm số khả vi theo biến* t. *Khi đó,* z *là một hàm số khả vi theo biến* t *và*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Ví dụ

Một con rệp di chuyển với phương trình chuyển động

$$x = \sqrt{1+t}, \quad y = 2 + \frac{1}{3}t,$$

trong đó x, y *được tính theo cm và thời gian* t *được tính bằng giây. Nhiệt độ tạo ra trên đường đi của con rệp là hàm* $T(x;y)$ *với đơn vị là* ^oC. *Biết rằng* $T_x(2;3) = 4$ *và* $T_y(2;3) = 3$. *Nhiệt độ tăng như thế nào sau 3 giây trên đường mà con rệp di chuyển?*

Ví dụ

Một nhà sản xuất đã mô hình hóa hàm sản lượng Cobb-Douglas bởi

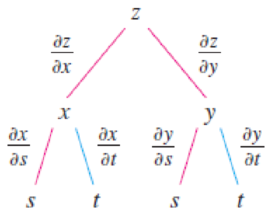
$$P(L;K) = 1,47 \cdot L^{0.65} \cdot K^{0,35},$$

trong đó L là số giờ lao động (đơn vị nghìn giờ) và K là số vốn đầu tư (đơn vị triệu USD). Giả sử khi $L = 30$, $K = 8$, *số giờ lao động giảm với tốc độ* 2000 *giờ/năm và số vốn đầu tư tăng với tốc độ* 500000 *USD/năm. Tìm tốc độ biến thiên của sản lượng.*

Định lý (The Chain Rule Case II)

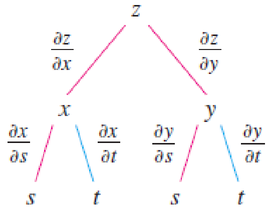
Giả sử $z = f(x; y)$ là một hàm số khả vi theo hai biến x và y, trong đó $x = g(s; t)$ và $y = h(s; t)$ là các hàm số khả vi theo hai biến s và t. Khi đó,

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$



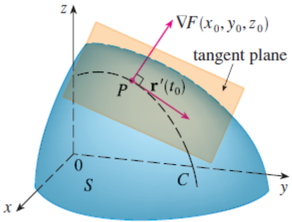
Ví dụ

Cho $z = e^x \sin y$*, trong đó* $x = st^2$ *và* $y = s^2t$*. Hãy tìm* $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ *và* $\dfrac{\partial z}{\partial t}$.



- Giả sử S là mặt cong có phương trình $F(x; y; z) = k$, đó cũng là mặt mức của hàm số ba biến $F(x; y; z)$.
- Gọi $P(x_0; y_0; z_0)$ là một điểm cố định trên S. Lấy C là một đường cong tùy ý trên mặt cong S sao cho C đi qua P.
- Giả sử đường cong C được mô tả bởi hàm vectơ liên tục $\mathbf{r}(t) = \Big(x(t); y(t); z(t)\Big)$, với $\mathbf{r}(t_0) = (x_0; y_0; z_0)$.
- Vì C nằm trên S nên mọi điểm $\Big(x(t); y(t); z(t)\Big)$ phải thuộc S, do đó

$$F(x(t); y(t); z(t)) = k.$$

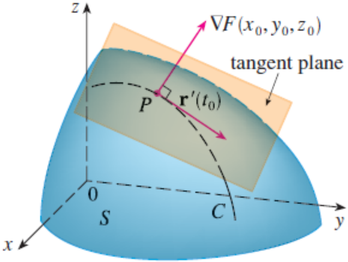


- Nếu F khả vi theo x, y, z và x, y, z khả vi theo t, thì theo quy tắc dây xích, ta có

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0.$$

- Thay $t = t_0$, ta thu được

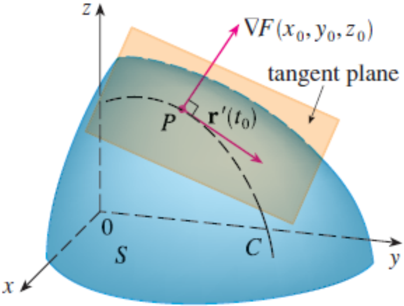
$$\nabla F(x_0; y_0; z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0.$$



Định nghĩa

Nếu $\nabla F(x_0; y_0; z_0) \neq \mathbf{0}$, thì ta gọi mặt phẳng đi qua điểm $P(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\nabla F(x_0; y_0; z_0)$ là **tiếp diện của mặt mức** $F(x; y; z) = k$ **tại điểm** $P(x_0; y_0; z_0)$ **(tangent plane to the level surface)**. *Tiếp diện này có phương trình là*

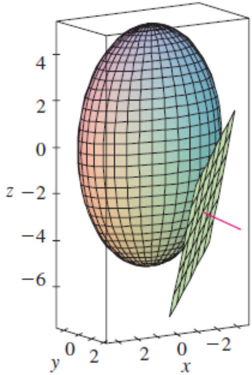
$$F_x(x_0; y_0; z_0)(x - x_0) + F_y(x_0; y_0; z_0)(y - y_0) + F_z(x_0; y_0; z_0)(z - z_0) = 0.$$



Ví dụ

Hãy tìm phương trình tiếp diện tại điểm $(-2; 1; -3)$ *của mặt ellipsoid*

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3.$$



- Giả sử phương trình $F(x;y) = 0$ xác định y như là một hàm ẩn khả vi theo biến x, tức là $y = y(x)$.
- Nếu F khả vi, thì theo quy tắc dây xích, ta được

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

- Nếu có thêm giả thiết $F_y \neq 0$ thì ta thu được

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Ví dụ

Hãy tìm y' nếu $x^3 + y^3 = 6xy$.

- Giả sử phương trình $F(x;y;z) = 0$ xác định z như là một hàm ẩn khả vi theo hai biến x và y, tức là $z = z(x;y)$.
- Nếu F khả vi, thì theo quy tắc dây xích, ta được

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dy} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dy} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

- Nếu có thêm giả thiết $F_z \neq 0$ thì ta thu được

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Ví dụ

Hãy tìm $\frac{\partial z}{\partial x}$ *và* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *nếu* $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.