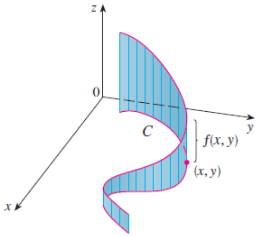
Bài toán tính diện tích dải băng

- Xét một dải băng có đáy là cung C và chiều cao ứng với điểm $(x; y)$ là $f(x; y)$.
- Diện tích A của dải băng được xấp xỉ bởi

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*; y_i^*) \cdot \Delta l_i,$$

trong đó $\Delta l_i = P_{i-1}P_i$ và $P_i^*(x_i^*; y_i^*)$ là điểm tùy ý thuộc cung $P_{i-1}P_i$.



Định nghĩa

Cho C là một đường cong phẳng trơn và $f(x;y)$ là một hàm số xác định trên C. **Tích phân đường loại 1 của f dọc theo C** *là*

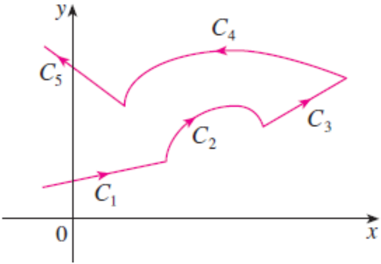
$$\int\limits_C f(x;y)dl = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*;y_i^*)\cdot\Delta l_i,$$

nếu giới hạn này tồn tại.

Tính chất

Nếu C là một **đường cong trơn từng khúc (piecewise-smooth curve)**, tức là C là hợp của hữu hạn những đường cong trơn $C_1, \ldots, C_n$, thì

$$\int_C f(x;y)dl = \int_{C_1} f(x;y)dl + \cdots + \int_{C_n} f(x;y)dl.$$



Nếu đường cong C là đồ thị của hàm số

$$y = y(x), \quad a \leq x \leq b,$$

thì

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx,$$

do đó, tích phân đường loại 1 được tính như sau:

$$\int_C f(x; y)dl = \int_a^b f(x; y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx.$$

Nếu đường cong C được tham số bởi

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad a \le t \le b,$$

thì

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt,$$

do đó, tích phân đường loại 1 được tính như sau:

$$\int_C f(x;y)dl = \int_a^b f(x(t);y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

Viết ngắn gọn là

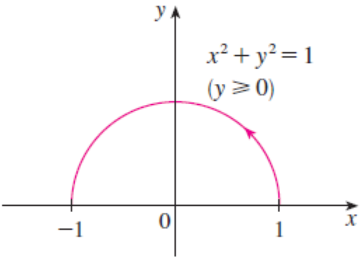
$$\int_C f(x;y)dl = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|dt.$$

Ví dụ

Hãy tính tích phân đường loại 1

$$\int\limits_C (2 + x^2 y) dl,$$

trong đó C là nửa trên của đường tròn đơn vị $x^2 + y^2 = 1$.

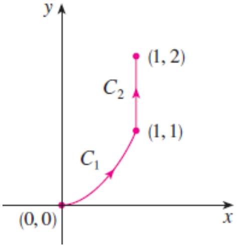


Ví dụ

Hãy tính tích phân đường loại 1

$$\int_C 2x dl,$$

trong đó C *gồm cung* C_1 *của parabol* $y = x^2$ *từ* $(0; 0)$ *đến* $(1; 1)$ *và đoạn thẳng đứng* C_2 *từ* $(1; 1)$ *đến* $(1; 2)$.



Tích phân đường loại 1 trong không gian

- Cho C là một đường cong trơn trong không gian định bởi

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad a \leq t \leq b,$$

  và $f(x; y; z)$ là một hàm số xác định trên C. Tích phân đường loại 1 của f dọc theo C cũng được định nghĩa tương tự như trường hợp C phẳng.

- Công thức tính:

$$\int_C f(x; y; z) dl$$
$$= \int_a^b f(x(t); y(t); z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Ứng dụng tính khối lượng sợi dây

- Giả sử một sợi dây có hình dạng là một cung C.
- Giả sử khối lượng riêng tại điểm $(x; y; z)$ thuộc C là $\rho(x; y; z)$.
- Khối lượng của sợi dây được tính bởi tích phân đường loại 1:

$$m = \int_C \rho(x; y; z) dl.$$

Ứng dụng tính chiều dài sợi dây

Chiều dài L của sợi dây C được tính bởi tích phân đường loại 1:

$$L = \int\limits_C 1dl.$$

Bài toán tính công của một trường lực

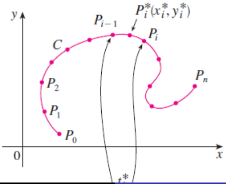
- Xét bài toán tính công W được thực hiện bởi một trường lực phẳng $\mathbf{F}(x; y)$ khi di chuyển một chất điểm dọc theo chiều của **đường đi (path)** phẳng trơn C có phương trình tham số:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad a \leq t \leq b.$$

- Khi đó, ta xấp xỉ công W bởi

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(x_i^*; y_i^*) \cdot \Delta\mathbf{r}_i,$$

trong đó $\Delta\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1}) = \overrightarrow{P_{i-1}P_i}$.



Định nghĩa

Tích phân đường loại 2 của trường vectơ $\mathbf{F}(x; y)$ dọc theo chiều của đường đi C *là*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(x_i^*; y_i^*) \cdot \Delta\mathbf{r}_i,$$

nếu giới hạn này tồn tại.

- Ta có
$$d\mathbf{r} = (dx; dy).$$
- Do đó, nếu P, Q lần lượt là hai hàm thành phần của trường $\mathbf{F}$, tức là
$$\mathbf{F}(x; y) = \Big(P(x; y); Q(x; y)\Big),$$
thì tích phân đường loại 2
$$\int\limits_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$
còn được ký hiệu là
$$\int\limits_C P(x; y)dx + Q(x; y)dy.$$

Nếu C có phương trình tham số:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad a \le t \le b,$$

thì tích phân đường loại 2 được tính bởi công thức

$$\int_C P(x;y)dx + Q(x;y)dy$$
$$= \int_a^b \Big[P(x(t);y(t))x'(t) + Q(x(t);y(t))y'(t)\Big]dt.$$

Viết ngắn gọn là

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)dt.$$

Nếu C là đồ thị của hàm số

$$y = y(x), \quad a \leq x \leq b,$$

thì tích phân đường loại 2 được tính bởi công thức

$$\int_C P(x;y)dx + Q(x;y)dy$$

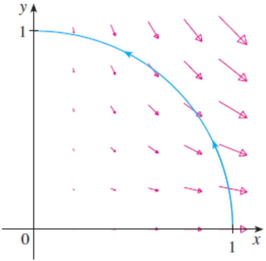
$$= \int_a^b \Big[P(x;y(x)) + Q(x;y(x))y'(x)\Big]dx.$$

Ví dụ

Hãy tính công được thực hiện bởi trường lực $\mathbf{F}(x;y) = x^2\mathbf{i} - xy\mathbf{j}$, *khi di chuyển một chất điểm dọc theo cung góc tư đường tròn*

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le \pi/2,$$

từ điểm $(1;0)$ *đến điểm* $(0;1)$.

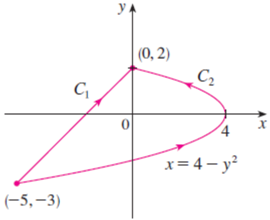


Ví dụ

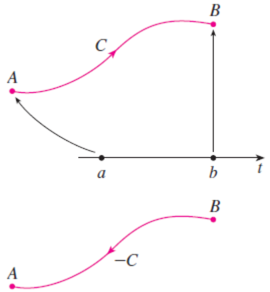
Hãy tính tích phân đường $\int_C y^2 dx + x dy$*, trong mỗi trường hợp sau:*

(a) *C là đoạn thẳng C_1 từ điểm $(-5; -3)$ đến điểm $(0; 2)$.*

(b) *C là một cung C_2 của parabol $x = 4 - y^2$ từ điểm $(-5; -3)$ đến điểm $(0; 2)$.*



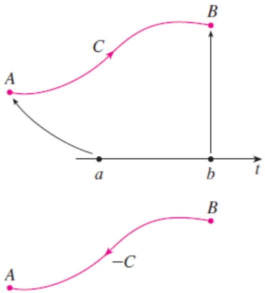
- Hàm vectơ $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, $a \leq t \leq b$ xác định một **đường đi** C có chiều ứng với chiều tăng của t, tức là đi từ điểm $\mathbf{r}(a)$ đến điểm $\mathbf{r}(b)$.
- Ta ký hiệu $-C$ là đường cong trùng với C nhưng ngược chiều với C, tức là đi từ $\mathbf{r}(b)$ đến $\mathbf{r}(a)$.



- Ta có

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \text{ (tích phân đường loại 2)},$$

$$\int_{-C} f(x;y)dl = \int_{C} f(x;y)dl \text{ (tích phân đường loại 1)}.$$



Nếu C là một đường cong trong không gian có phương trình tham số

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b,$$

và trường vectơ $\mathbf{F}$ gồm 3 thành phần P, Q, R xác định trên C

$$\mathbf{F}(x;y;z) = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k},$$

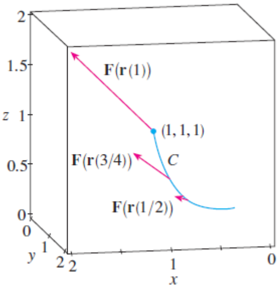
thì với định nghĩa tương tự, ta có tích phân đường loại 2

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz.$$

Ví dụ

Hãy tính tích phân đường $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, *trong đó* $\mathbf{F} = (xy; yz; zx)$, *và* C *là đường đi có phương trình tham số*

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

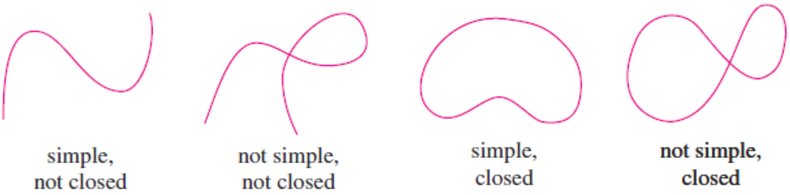


Định nghĩa

Đường cong

$$\mathbf{r}(t), \quad a \le t \le b,$$

được gọi là **đơn (simple)** *nếu nó không tự cắt nhau ở giữa hai đầu mút, tức là, nếu* $a < t_1 < t_2 < b$ *thì* $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$.

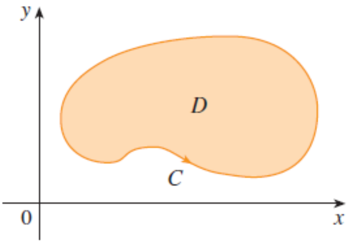


Định nghĩa

Đường cong $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, *được gọi là* **kín (closed)** *nếu điểm đầu và điểm cuối của nó trùng nhau, tức là*

$$\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b).$$

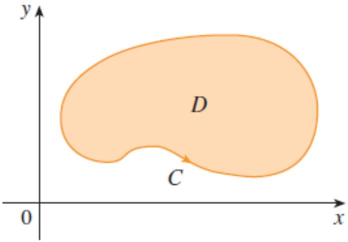
- Cho đường cong đơn kín C và gọi D là miền phẳng được giới hạn bởi C.
- Ta quy ước **chiều dương (positive orientation)** của đường cong đơn kín C là chiều mà nếu ta đi theo chiều đó thì ta sẽ thấy miền D luôn nằm bên **tay trái**.



Định lý (Green's theorem)

Cho C là đường cong đơn kín trơn từng khúc định hướng dương và D là miền phẳng giới hạn bởi C. Nếu P và Q có các đạo hàm riêng liên tục trên một miền mở chứa D, thì

$$\oint\limits_C Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$



So sánh với định lý cơ bản của Giải tích hàm một biến

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a),$$

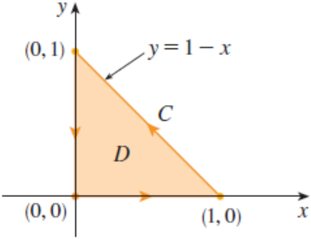
ta có sự tương tự cho định lý Green:

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint\limits_{\partial D} Pdx + Qdy,$$

trong đó ∂D là ký hiệu **đường biên** của D.

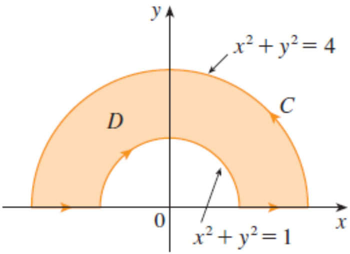
Ví dụ

Hãy tính tích phân đường $\oint\limits_C x^4 dx + xydy$, *trong đó* C *là chu vi tam giác có đỉnh là* $(0;0)$, $(1;0)$, *và* $(0;1)$, *theo chiều dương.*



Ví dụ

Hãy tính tích phân đường $\oint\limits_C y^2dx + 3xydy$, *trong đó* C *là đường biên của miền* D *thuộc nửa trên mặt phẳng* xy *nằm giữa hai đường tròn* $x^2 + y^2 = 1$ *và* $x^2 + y^2 = 9$, *theo chiều dương.*



Ví dụ

Hãy tính tích phân đường $\oint\limits_C (3y - e^{\sin x})dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1})dy,$

trong đó C *là đường tròn* $x^2 + y^2 = 9$, *theo chiều dương.*

Ứng dụng tính diện tích hình phẳng

Hệ quả

Cho C là đường cong đơn kín trơn từng khúc và D là miền phẳng giới hạn bởi C. Khi đó, diện tích của miền phẳng D là

$$A(D) = \oint_C xdy = -\oint_C ydx = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx.$$

Ví dụ

Hãy tính diện tích của miền được giới hạn bởi đường elip

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Định nghĩa

Cho $\mathbf{F}$ *là một trường vectơ liên tục trên miền D. Ta nói tích phân đường* $\int\limits_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ *là* **không phụ thuộc đường đi (independent of path)** *nếu ta luôn có*

$$\int\limits_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int\limits_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},$$

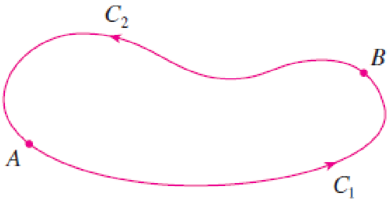
với mọi C_1 *và* C_2 *là hai đường đi bất kỳ trong D có cùng điểm đầu và điểm cuối.*

Định lý

Tích phân $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ *là không phụ thuộc đường đi trong* D *khi và chỉ khi*

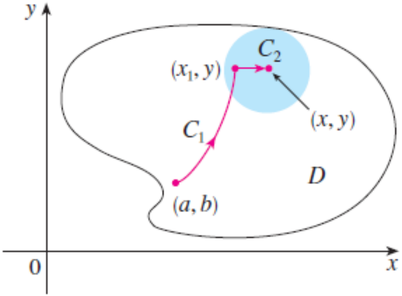
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \text{ với mọi đường cong kín } C \text{ trong } D$$

.



Định nghĩa

- *Ta nói miền D là* **mở (open)** *nếu với mọi điểm P trong D, luôn tồn tại một đĩa tâm P nằm trọn trong D.*
- *Ta nói miền D là* **liên thông (connected)** *nếu hai điểm bất kỳ trong D đều có thể nối với nhau bằng một đường đi trong D.*



Định nghĩa

Một miền phẳng D được gọi là **miền đơn liên (simply-connected region)** *nếu D liên thông và mọi đường cong đơn kín trong D đều chỉ bao bọc các điểm thuộc D.*

simply-connected region

regions that are not simply-connected

Định lý

Giả sử $\mathbf{F}(x;y) = P(x;y)\mathbf{i} + Q(x;y)\mathbf{j}$ *là một trường vectơ khả vi liên tục trên miền mở đơn liên* D*. Khi đó, 3 mệnh đề sau đây tương đương:*

(a) *Tích phân* $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ *là không phụ thuộc đường đi trong* D*.*

(b) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *trên* D*.*

(c) *Tồn tại hàm số* $f(x;y)$ *trên* D *sao cho*

$$df = Pdx + Qdy \text{ trên } D.$$

Ví dụ

Tính tích phân đường $I = \int_C ydx + xdy$ *theo đường cong* C *với điểm đầu là* $O(0,0)$ *và điểm cuối là* $A(1,1)$ *trong từng trường hợp sau:*

1. C *là đoạn thẳng* OA.
2. C *là cung parabol* $y = x^2$.
3. C *là* $1/4$ *đường tròn tâm* $(0,1)$ *bán kính bằng* 1.