BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 2

CHƯƠNG 1-BÀI 4. ĐẠO HÀM HÀM HỢP, HÀM ẨN

TS. NGUYỄN ĐÌNH DƯƠNG
BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG - KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG

Email: duongnd@hcmut.edu.vn

Ngày 15/02/2021

Nội dung

Chuẩn đầu ra

- Nhắc lại quy tắc đạo hàm hàm hợp của hàm 1 biến
- Tính được đạo hàm $f(x,y)$ trên đường cong $(x(t),y(t))$
- Tính được đạo hàm của $f(x,y)$ theo $x(s,t),y(s,t)$
- Sử dụng được quy tắc dạng cây khi tính đạo hàm hàm hợp
- Tính được đạo hàm hàm ẩn 1 biến, 2 biến

Quy tắc đạo hàm hàm hợp của hàm 1 biến

Quy tắc Nếu $y = f(u)$ và $u = u(x)$ thì

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$*$ **Chú ý:** bước cuối ta cần thay u theo công thức của biến x !!!

1. Cho $y = u^3$ và $u = \cos x$, tìm dy/dx
2. Tìm đạo hàm của $g(x) = (x^2 + 1)^{3/2}$

Nội dung

1. Đạo hàm hàm hợp

1. 1. Trường hợp $z = f(x(t), y(t))$

Quy tắc Nếu $z = f(x, y)$, $x = g(t)$ và $y = h(t)$ thì

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

1. Cho $z = \sin x \cos y$, $x = \sqrt{t}$ và $y = 1/t$. Tìm dz/dt.
2. Cho $z = \sqrt{1 + xy}$, $x = \tan t$ và $y = \arctan t$. Tìm dz/dt.

Quy tắc Nếu

$$z = f(x,y), x = g(s,t), y = h(s,t)$$

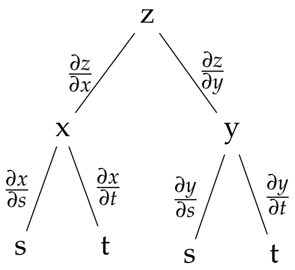
thì

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},$$

1. Tìm $\frac{\partial z}{\partial s}$ và $\frac{\partial z}{\partial t}$ biết $z = \tan^{-1}(x^2 + y^2), x = s\ln t, y = te^t$.
2. Tìm $\frac{\partial z}{\partial s}$ và $\frac{\partial z}{\partial t}$ biết $z = \sqrt{x}e^{xy}, x = 1 + st, y = s^2 - t^2$

Nội dung

2. Quy tắc đạo hàm dạng cây



Nếu

$$z = f(x, y)$$

và

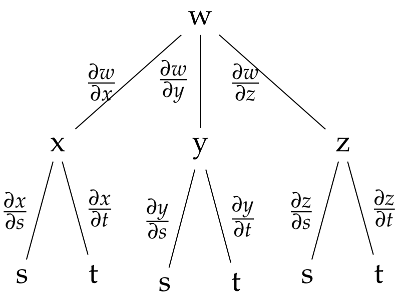
$$x = g(s, t), \quad y = h(s, t)$$

thì:

- $\frac{\partial z}{\partial s}$ tính bằng cách cộng tất cả các nhánh cây từ z tới s
- $\frac{\partial z}{\partial t}$ tính bằng cách cộng tất cả các nhánh cây từ z tới t

2. Quy tắc đạo hàm dạng cây

Tương tự, có thể sử dụng sơ đồ dạng cây để tính $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ và $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ nếu $w = w(x, y, z)$, còn x, y, z là hàm của s và t



2. Quy tắc đạo hàm dạng cây

Ví dụ 2.1

1. Tìm $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ biết $w = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$ và $z = \tan t$
2. Tìm $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ biết $w = xy + yz + xz$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = r\theta$.
3. Giả sử $g(u,v) = f(e^u + \sin v, e^u + \cos v)$. Sử dụng bảng dưới tìm $g'_u(0,0)$ và $g'_v(0,0)$.

	f	g	f'_x	f'_y
$(0,0)$	3	6	4	8
$(1,2)$	6	3	2	5

Nội dung

3. Đạo hàm hàm ẩn

Cho $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định bởi phương trình $F(x, y) = 0$. Khi đó

$$dF = 0 = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy,$$

từ đó giải ra được

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}.}$$

3. Đạo hàm hàm ẩn

Nếu $F(x,y) = 0$ là có đồ thị là đường cong (C), $P(x_0, y_0) \in (C)$ thì phương trình tiếp tuyến với (C) tại P là

$$\boxed{F'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + F'_y(x_0,y_0)(y-y_0) = 0}$$

3. Đạo hàm hàm ẩn

Nếu $F(x, y) = 0$ là có đồ thị là đường cong (C), $P(x_0, y_0) \in (C)$ thì phương trình tiếp tuyến với (C) tại P là

$$\boxed{F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0}$$

Pháp tuyến với (C) tại P là đường thẳng vuông góc với tiếp tuyến có phương trình

$$\boxed{\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0)}}$$

3. Đạo hàm hàm ẩn

Tương tự, hàm ẩn $z = f(x, y)$ xác định bởi phương trình $G(x, y, z) = 0$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{G'_x}{G'_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{G'_y}{G'_z}$$

Khi đó phương trình mặt phẳng tiếp diện với mặt cong (S) xác định bởi $G(x, y, z) = 0$ tại $P(x_0, y_0, z_0)$ là

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Pháp tuyến với (S) tại P là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng tiếp diện có pt:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$$

3. Đạo hàm hàm ẩn

Ví dụ 3.1

1. Tìm $\dfrac{dy}{dx}$ biết $\cos(xy) = 1 + \sin y$
2. Tìm $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ và $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ biết $x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$
3. Tìm $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ và $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ biết $e^z = xyz$

Nội dung

TRAO ĐỔI