

## BÀI TẬP TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

### 1 Tham số hóa các đường cong trong không gian sau đây.

1. Giao tuyến của mặt phẳng  $z = 2y$  và paraboloid  $z = x^2 + y^2$ .  
 $x = \cos t, y = 1 + \sin t, z = 2 \sin t, t \in [0, 2\pi]$
2. Giao tuyến của trụ  $z = x^2$  và trụ  $x^2 + y^2 = 1$ .  
 $x = \cos t, y = \sin t, z = \cos^2 t, t \in [0, 2\pi]$
3. Giao tuyến của mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  và mặt phẳng  $y = x$ .  
 $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, z = \sin t, t \in [0, 2\pi]$
4. Giao tuyến của mặt cầu  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  và trụ  $x^2 + y^2 = 2x$ .  
 $x = 1 + \cos t, y = \sin t, z = 2 \sin \frac{t}{2}, t \in [0, 2\pi]$
5. Giao tuyến của paraboloid  $z = 2x^2 + y^2$  và mặt phẳng  $x + y = 1$ , lấy trong miền  $x \geq 0, y \geq 0$ .  
 $x = t, y = 1 - t, z = 3t^2 - 2t + 1, 0 \leq t \leq 1$
6. Giao tuyến của trụ  $x = \frac{y^2}{2}$  và mặt phẳng  $z + 2x = 1$ , lấy vùng  $z \geq 0$ .  
 $y = t, x = \frac{t^2}{2}, z = 1 - t^2, t \in [-1, 1]$
7. Giao tuyến của trụ  $x = \frac{y^2}{2}$  và mặt phẳng  $x - z = 1$ , lấy vùng  $z \leq 0$ .  
 $y = t, x = \frac{t^2}{2}, z = \frac{t^2}{2} - 1, t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

### 2 Tính các tích phân đường loại một sau đây

1.  $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} dl$ , trong đó  $C$  là một phần tư đường tròn  $x^2 + y^2 = 2x$  từ  $(0, 0)$  đến  $(1, -1)$ .  
ĐS :  $4 - 2\sqrt{2}$
2.  $\int_C x dl$ , trong đó  $C$  là cung parabol  $y = 1 - x^2$  từ  $(0, 1)$  đến  $(-1, 0)$ . ĐS :  $\frac{1 - 5\sqrt{5}}{12}$
3.  $I = \int_C \frac{x - 2y}{\sqrt{1 + 4x^2}} dl$  trong đó  $C$  là cung parabol  $y = 1 - x^2$  từ  $A(1, 0)$  đến  $B(-2, -3)$ . ĐS :  $-\frac{3}{2}$
4.  $I = \int_C x^2 dl$ , trong đó  $C$  là đường cong  $y = \ln x, 1 \leq x \leq e$ . ĐS :  $\frac{1}{3} \left[ (e^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \right]$
5.  $\int_C z dl$ , trong đó  $C$  là giao tuyến của nón  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  và trụ  $y = \sqrt{2x}$ , đi từ điểm từ  $(0, 0, 0)$  đến  $(2, 2, 2\sqrt{2})$ . ĐS : 5.8139
6.  $\int_C (zy - 2x) dl$  trong đó  $C$  là giao tuyến của mặt nón  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  và mặt phẳng  $y = x$  lấy phần nằm dưới mặt phẳng  $z = 3$ . ĐS : 0

### 3 Tính độ dài các đường cong sau

1.  $C$  là cung parabol  $y = 2 - \frac{x^2}{2}$ ,  $-1 \leq x \leq 2$ . DS : 4.1057
2.  $C$  là cung cycloid  $x = 2(t - \sin t)$ ,  $y = 2(1 - \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ . DS :  $4\sqrt{2}$

### 4 Tính các tích phân đường loại hai theo cách tham số hóa đường cong

1.  $I = \int_C (x+y)dx + (x-y)dy$ , trong đó  $C$  là cung parabol  $y = 2x^2 + x - 1$ , đi từ  $A(1, 2)$  đến  $B(-3, 14)$ . DS : -136
2.  $I = \int_{(0,-2)}^{(1,-1)} (x^2 + y^2)dx + ydy$ , theo một phần tư đường tròn  $x^2 + y^2 = -2y$ . DS :  $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}$
3.  $I = \int_C xydx - (x^2 + y^2 - 2x)dy$ , trong đó  $C$  là nửa trên của đường tròn  $(x-1)^2 + y^2 = 4$ , lấy ngược chiều kim đồng hồ. DS :  $-2\pi$
4.  $I = \int_C x^2dx + xdy$ , trong đó  $C$  là cung ellipse  $3x^2 + y^2 = 9$ , đi từ điểm  $(\sqrt{3}, 0)$  đến giao điểm đầu tiên với đường  $y = \sqrt{3}x$ , lấy theo chiều KĐH. DS :  $\frac{-\sqrt{3}}{8} (9\pi + 2\sqrt{2} + 2)$
5.  $I = \int_C (2x^2 + y)dx - xdy$ , trong đó  $C$  là biên của miền  $D$ , giới hạn bởi  $y = x^2 - 2x$ ,  $y = x$ , lấy theo chiều kim đồng hồ. DS :  $\frac{9}{2}$
6.  $I = \int_C x^2zdx + 2zdy - (x+y)dz$ ,  $C$  là giao tuyến của 2 mặt phẳng  $z = 3$ ,  $x + y = 1$  đi từ  $A(1, 0, 3)$  đến  $B(-1, 2, 3)$ . DS : -10
7.  $\int_C \arctan \frac{z}{x} dy$ , trong đó  $C$  là giao tuyến của paraboloid  $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$  và mặt phẳng  $y = x$ , lấy phần  $z \leq 3$ , đi ngược chiều KĐH nhìn từ  $Ox^+$ . DS : 0
8.  $I = \int_C (x+y)dx + zdz$ , trong đó  $C$  là giao tuyến của trụ  $x^2 + y^2 = 2x$  và mặt phẳng  $z = x$ , lấy ngược chiều KĐH nhìn điểm  $(1, 0, 0)$ . DS :  $2\pi$

### 5 Tính tích phân sử dụng công thức Green hoặc định lý về tích phân không phụ thuộc đường đi

1.  $\oint_C (3x - 2y)dx + (2x^2 - 9y)dy$ , với  $C$  là biên của miền  $D : y = x^2 - 2x$ ,  $y = x$ , lấy ngược chiều KĐH. DS : 36
2.  $\oint_C 3x^2(1 + \ln y)dx - \left(2xy - \frac{x^3}{y}\right)dy$ , trong đó  $C$  là đường tròn  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$ , lấy ngược chiều kim đồng hồ. DS :  $-\frac{\pi}{2}$
3.  $\oint_C 3x^2(1 + \ln y)dx - \left(2xy - \frac{x^3}{y}\right)dy$ , trong đó  $C$  là đường  $y = e^x$ ,  $x : -1 \rightarrow 1$ . DS :  $-\frac{e^2 + 3e^{-2}}{2} - \frac{2}{3}$

4.  $\oint \left( 2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \right) dx + (x^2 + y^2) dy$ , trong đó  $C$  là biên định hướng âm của miền  $D : x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0$ . DS :  $\frac{3\pi}{4}$
5.  $\int_C xdy - y(1 + xy)dy$ , trong đó  $C$  là nửa đường tròn  $x^2 + y^2 = 2y$ , đi từ điểm  $(2, 0)$  đến điểm  $(0, 0)$  theo chiều kim đồng hồ.
6.  $\int_C \left( 2xy + e^{\frac{x}{y}} \right) dx + \left( 1 - \frac{x}{y} \right) e^{\frac{x}{y}} dy$ , với  $C$  là cung parabol  $y = 4 - x^2$  đi từ điểm  $(-1, 3)$  đến điểm  $(1, 3)$ . DS :  $3 - 3e^{\frac{1}{2}}$
7.  $\int_C \left( 2x + e^{\frac{x}{y}} \right) dx + \left( 1 - \frac{x}{y} \right) e^{\frac{x}{y}} dy$ , với  $C$  là cung parabol  $y = 4 - x^2$  đi từ điểm  $(-1, 3)$  đến điểm  $(0, 4)$ . DS :  $1 - e^{-\frac{1}{3}}$
8.  $\int_C \frac{x}{x^2 + y^2} dy - \frac{y}{x^2 + y^2} dx$ , trong đó  $C$  là cung  $y = \cos x, x : -\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . DS :  $-\pi$
9.  $\oint_C e^x \cos y dx + (-2xy - e^x \sin y) dy$ , với  $C$  là biên của tam giác  $ABC, O(-2, 0), B(1, -1), C(1, 1)$ , lấy ngược chiều kim đồng hồ. DS :  $0$ .

## 6 Điều kiện để tích phân không phụ thuộc đường đi

1. Tìm các số tự nhiên  $m, n$  để tích phân sau không phụ thuộc đường đi:

$$I = \int_C x^m y^{n+1} (3 - 2xy^2) dx + x^{m+1} y^n (4 - 3xy^2) dy.$$

DS :  $m = 2, n = 3$

2. Tìm hàm số  $h = h(x^2 + y^2)$  để tích phân sau không phụ thuộc đường đi:

$$I = \int_C (x - y) h dx + (x + y) h dy.$$

DS :  $h = \frac{C}{x^2 + y^2}$