

BÀI TẬP TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

1 Tham số hóa các đường cong trong không gian sau đây.

1. Giao tuyến của mặt phẳng $z = 2y$ và paraboloid $z = x^2 + y^2$.

$$x = \cos t, y = 1 + \sin t, z = 2 \sin t, t \in [0, 2\pi]$$

2. Giao tuyến của trụ $z = x^2$ và trụ $x^2 + y^2 = 1$.

$$x = \cos t, y = \sin t, z = \cos^2 t, t \in [0, 2\pi]$$

3. Giao tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và mặt phẳng $y = x$.

$$x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, z = \sin t, t \in [0, 2\pi]$$

4. Giao tuyến của mặt cầu $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ và trụ $x^2 + y^2 = 2x$.

$$x = 1 + \cos t, y = \sin t, z = 2 \sin \frac{t}{2}, t \in [0, 2\pi]$$

5. Giao tuyến của paraboloid $z = 2x^2 + y^2$ và mặt phẳng $x + y = 1$, lấy trong miền $x \geq 0, y \geq 0$.

$$x = t, y = 1 - t, z = 3t^2 - 2t + 1, 0 \leq t \leq 1$$

6. Giao tuyến của trụ $x = \frac{y^2}{2}$ và mặt phẳng $z + 2x = 1$, lấy vùng $z \geq 0$.

$$y = t, x = \frac{t^2}{2}, z = 1 - t^2, t \in [-1, 1]$$

7. Giao tuyến của trụ $x = \frac{y^2}{2}$ và mặt phẳng $x - z = 1$, lấy vùng $z \leq 0$.

$$y = t, x = \frac{t^2}{2}, z = \frac{t^2}{2} - 1, t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

2 Tính các tích phân đường loại một sau đây

1. $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} dl$, trong đó C là một phần tư đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ từ $(0, 0)$ đến $(1, -1)$.
ĐS : $4 - 2\sqrt{2}$

2. $\int_C x dl$, trong đó C là cung parabol $y = 1 - x^2$ từ $(0, 1)$ đến $(-1, 0)$. ĐS : $\frac{1 - 5\sqrt{5}}{12}$

3. $I = \int_C \frac{x - 2y}{\sqrt{1 + 4x^2}} dl$ trong đó C là cung parabol $y = 1 - x^2$ từ $A(1, 0)$ đến $B(-2, -3)$. DS : $-\frac{3}{2}$

4. $I = \int_C x^2 dl$, trong đó C là đường cong $y = \ln x, 1 \leq x \leq e$. DS : $\frac{1}{3} \left[(e^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \right]$

5. $\int_C z dl$, trong đó C là giao tuyến của nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và trụ $y = \sqrt{2x}$, đi từ điểm từ $(0, 0, 0)$ đến $(2, 2, 2\sqrt{2})$. DS : 5.8139

6. $\int_C (zy - 2x) dl$ trong đó C là giao tuyến của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và mặt phẳng $y = x$ lấy phần nằm dưới mặt phẳng $z = 3$. DS : 0

3 Tính độ dài các đường cong sau

1. C là cung parabol $y = 2 - \frac{x^2}{2}$, $-1 \leq x \leq 2$. DS : 4.1057
2. C là cung cycloid $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$. DS : $4\sqrt{2}$

4 Tính các tích phân đường loại hai theo cách tham số hóa đường cong

1. $I = \int_C (x+y)dx + (x-y)dy$, trong đó C là cung parabol $y = 2x^2 + x - 1$, đi từ $A(1, 2)$ đến $B(-3, 14)$. DS : -136
2. $I = \int_{(0,-2)}^{(1,-1)} (x^2 + y^2)dx + ydy$, theo một phần tư đường tròn $x^2 + y^2 = -2y$. DS : $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}$
3. $I = \int_C xydx - (x^2 + y^2 - 2x)dy$, trong đó C là nửa trên của đường tròn $(x-1)^2 + y^2 = 4$, lấy ngược chiều kim đồng hồ. DS : -2π
4. $I = \int_C x^2dx + xdy$, trong đó C là cung ellipse $3x^2 + y^2 = 9$, đi từ điểm $(\sqrt{3}, 0)$ đến giao điểm đầu tiên với đường $y = \sqrt{3}x$, lấy theo chiều KDH. DS : $\frac{-\sqrt{3}}{8}(9\pi + 2\sqrt{2} + 2)$
5. $I = \int_C (2x^2 + y)dx - xdy$, trong đó C là biên của miền D , giới hạn bởi $y = x^2 - 2x$, $y = x$, lấy theo chiều kim đồng hồ. DS : $\frac{9}{2}$
6. $I = \int_C x^2zdx + 2zdy - (x+y)dz$, C là giao tuyến của 2mặt phẳng $z = 3$, $x + y = 1$ đi từ $A(1, 0, 3)$ đến $B(-1, 2, 3)$. DS : -10
7. $\int_C \arctan \frac{z}{x} dy$, trong đó C là giao tuyến của paraboloid $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$ và mặt phẳng $y = x$, lấy phần $z \leq 3$, đi ngược chiều KDH nhìn từ Ox^+ . DS : 0
8. $I = \int_C (x+y)dx + zdz$, trong đó C là giao tuyến của trụ $x^2 + y^2 = 2x$ và mặt phẳng $z = x$, lấy ngược chiều KDH nhìn điêm $(1, 0, 0)$. DS : 2π

5 Tính tích phân sử dụng công thức Green hoặc định lý về tích phân không phụ thuộc đường đi

1. $\oint_C (3x - 2y)dx + (2x^2 - 9y)dy$, với C là biên của miền $D : y = x^2 - 2x$, $y = x$, lấy ngược chiều KDH. DS : 36
2. $\oint_C 3x^2(1 + \ln y)dx - \left(2xy - \frac{x^3}{y}\right)dy$, trong đó C là đường tròn $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$, lấy ngược chiều kim đồng hồ. DS : $-\frac{\pi}{2}$
3. $\oint_C 3x^2(1 + \ln y)dx - \left(2xy - \frac{x^3}{y}\right)dy$, trong đó C là đường $y = e^x$, $x : -1 \rightarrow 1$. DS : $-\frac{e^2 + 3e^{-2}}{2} - \frac{2}{3}$

4. $\oint \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right) dx + (x^2 + y^2) dy$, trong đó C là biên định hướng âm của miền D :
 $x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0$. ĐS : $\frac{3\pi}{4}$
5. $\int_C xdy - y(1+xy)dy$, trong đó C là nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 2y$, đi từ điểm $(2, 0)$ đến điểm $(0, 0)$ theo chiều kim đồng hồ.
6. $\int_C \left(2xy + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + \left(1 - \frac{x}{y}\right) e^{\frac{x}{y}} dy$, với C là cung parabol $y = 4 - x^2$ đi từ điểm $(-1, 3)$ đến điểm $(1, 3)$. ĐS : $3 - 3e^{\frac{1}{2}}$
7. $\int_C \left(2x + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + \left(1 - \frac{x}{y}\right) e^{\frac{x}{y}} dy$, với C là cung parabol $y = 4 - x^2$ đi từ điểm $(-1, 3)$ đến điểm $(0, 4)$. ĐS : $1 - e^{-\frac{1}{3}}$
8. $\int_C \frac{x}{x^2 + y^2} dy - \frac{y}{x^2 + y^2} dx$, trong đó C là cung $y = \cos x, x : -\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$. DS : $-\pi$
9. $\oint_C e^x \cos y dx + (-2xy - e^x \sin y) dy$, với C là biên của tam giác $ABC, O(-2, 0), B(1, -1), C(1, 1)$, lấy ngược chiều kim đồng hồ. DS : 0.

6 Điều kiện để tích phân không phụ thuộc đường đi

1. Tìm các số tự nhiên m, n để tích phân sau không phụ thuộc đường đi:

$$I = \int_C x^m y^{n+1} (3 - 2xy^2) dx + x^{m+1} y^n (4 - 3xy^2) dy.$$

ĐS : $m = 2, n = 3$

2. Tìm hàm số $h = h(x^2 + y^2)$ để tích phân sau không phụ thuộc đường đi:

$$I = \int_C (x - y) h dx + (x + y) h dy.$$

ĐS : $h = \frac{C}{x^2 + y^2}$