- Ta đã mô tả một **đường cong** trong không gian bởi một hàm vectơ $\mathbf{r}(t)$ theo một tham số t:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

- Tương tự, ta cũng có thể mô tả một **mặt cong** bởi một hàm vectơ $\mathbf{r}(u;v)$ theo hai tham số u và v:

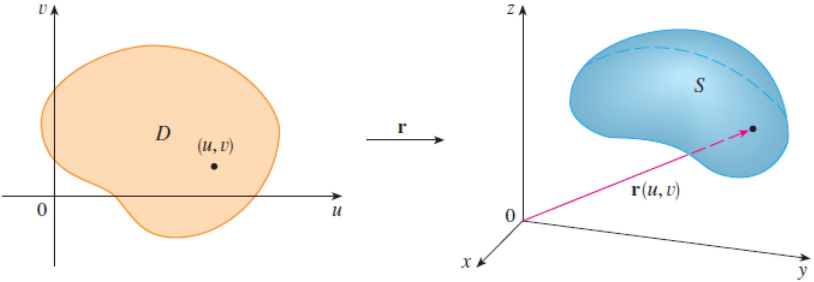
$$\mathbf{r}(u;v) = x(u;v)\mathbf{i} + y(u;v)\mathbf{j} + z(u;v)\mathbf{k}.$$

Định nghĩa

Ta gọi tập hợp S gồm các điểm $(x; y; z)$ thỏa mãn

$$x = x(u; v), \quad y = y(u; v), \quad z = z(u; v), \quad (u; v) \in D,$$

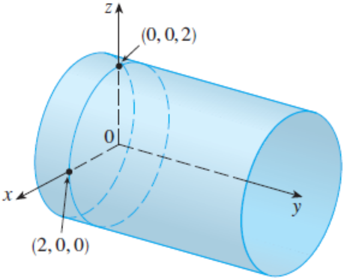
là một **mặt cong tham số hóa (parametric surface)**.



Ví dụ

Hãy xác định và vẽ mặt cong có phương trình vectơ

$$\mathbf{r}(u; v) = 2\cos u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + 2\sin u\mathbf{k}.$$



Ví dụ

Hãy tìm phương trình tham số của:

(a) *mặt cong* $z = x^2 + 2x - y^2 + 2$.

(b) *mặt trụ* $x^2 + y^2 = 1$.

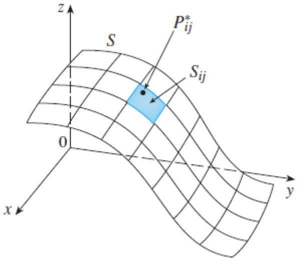
(c) *mặt cầu* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Định nghĩa

Cho $f(x; y; z)$ là một hàm số xác định trên mặt cong S. **Tích phân mặt loại 1 của f trên mặt cong S** *là*

$$\iint\limits_S f(x;y;z)dS = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(P_{ij}^*)\Delta S_{ij},$$

nếu giới hạn này tồn tại.



Tính chất

Nếu S là một mặt cong trơn từng khúc, tức là S là hợp của hữu hạn các mặt trơn $S_1, \dots, S_n$ mà chúng chỉ giao nhau ở biên, thì ta có

$$\iint_S f(x;y;z)dS = \iint_{S_1} f(x;y;z)dS + \cdots + \iint_{S_n} f(x;y;z)dS.$$

Nếu mặt cong S được cho bởi phương trình tham số

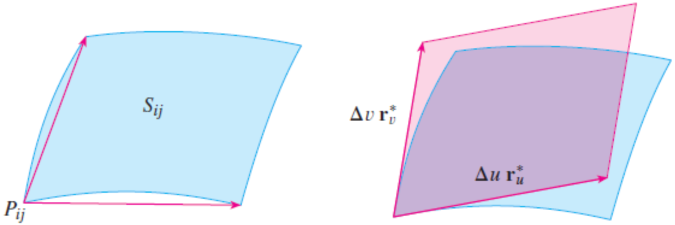
$$\mathbf{r}(u;v) = x(u;v)\mathbf{i} + y(u;v)\mathbf{j} + z(u;v)\mathbf{k}, \quad (u;v) \in D,$$

thì

$$dS = |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|dudv,$$

do đó, tích phân mặt loại 1 được tính như sau:

$$\iint_S f(x;y;z)dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u;v))|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|dudv.$$



Nếu mặt cong S được cho bởi hàm số $z = z(x;y)$, thì

$$dS = \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}dxdy,$$

do đó tích phân mặt loại 1 được tính như sau:

$$\iint\limits_{S} f(x;y;z)dS = \iint\limits_{D_{xy}} f(x;y;z(x;y))\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}dxdy,$$

trong đó D_{xy} là hình chiếu của mặt cong S trên mặt phẳng Oxy.

Nếu mặt cong S được cho bởi hàm số $y = y(x;z)$, thì

$$dS = \sqrt{(y'_x)^2 + (y'_z)^2 + 1},$$

do đó, tích phân mặt loại 1 được tính như sau:

$$\iint\limits_S f(x;y;z)dS = \iint\limits_{D_{xz}} f(x;y(x,z);z)\sqrt{(y'_x)^2 + (y'_z)^2 + 1}dxdz,$$

trong đó D_{xz} là hình chiếu của mặt cong S trên mặt phẳng Oxz.

Nếu mặt cong S được cho bởi hàm số $x = x(y; z)$, thì

$$dS = \sqrt{(x'_y)^2 + (x'_z)^2 + 1}dydz,$$

do đó, ta tính tích phân mặt loại 1 như sau:

$$\iint\limits_S f(x; y; z)dS = \iint\limits_{D_{yz}} f(x(y; z); y; z)\sqrt{(x'_y)^2 + (x'_z)^2 + 1}dydz,$$

trong đó D_{yz} là hình chiếu của mặt cong S trên mặt phẳng Oyz.

Ví dụ

Hãy tính tích phân mặt loại 1

$$\iint\limits_S x^2 dS,$$

trong đó S là mặt cầu đơn vị $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

ĐS: $4\pi/3$

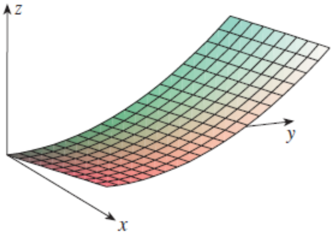
Ví dụ

Hãy tính tích phân mặt loại 1

$$\iint\limits_S y dS,$$

trong đó S *là mặt cong* $z = x + y^2$, *với* $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.

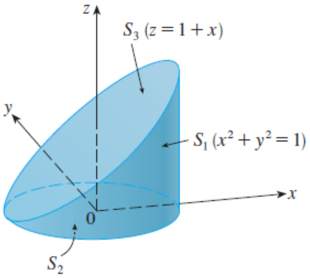
ĐS: $13\sqrt{2}/3$



Ví dụ

Hãy tính tích phân mặt $\iint\limits_S z dS$, *trong đó* S *bao gồm mặt xung quanh* S_1 *là mặt trụ* $x^2 + y^2 = 1$, *mặt đáy* S_2 *là đĩa tròn* $x^2 + y^2 \leq 1$ *nằm trên mặt phẳng* $z = 0$, *và mặt trên* S_3 *là phần mặt phẳng* $z = 1 + x$ *nằm trên* S_2.

ĐS: $3\pi/2 + \pi\sqrt{2}$



Ứng dụng tính khối lượng tấm cong mỏng

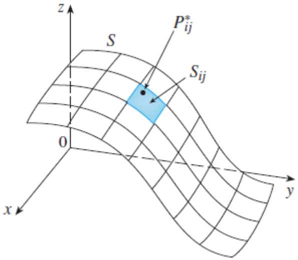
- Giả sử một tấm cong mỏng có hình dạng là một mặt cong S.
- Giả sử khối lượng riêng tại điểm $(x; y; z)$ thuộc S là $\rho(x; y; z)$.
- Khối lượng của tấm cong mỏng được tính bằng tích phân mặt loại 1:

$$m = \iint_S \rho(x; y; z) dS.$$

Ứng dụng tính diện tích mặt cong

Diện tích A của mặt cong S được tính bởi tích phân mặt loại 1:

$$A = \iint_S 1 dS.$$



Ta thấy sự tương tự giữa công thức tính **tích phân mặt loại 1**

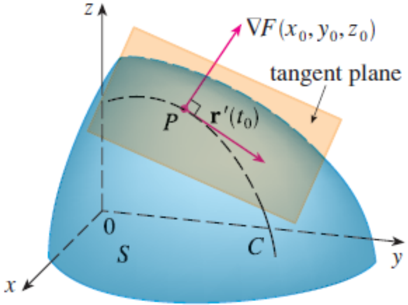
$$\iint\limits_S f(x;y;z)dS = \iint\limits_D f(\mathbf{r}(u;v))|[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v]|dudv$$

với công thức tính **tích phân đường loại 1**

$$\int\limits_C f(x;y;z)dl = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|dt.$$

Pháp vectơ của mặt mức

- Xét S là mặt cong trơn có phương trình $F(x;y;z)=k$, đó cũng là mặt mức của hàm số ba biến $F(x;y;z)$.
- Pháp vectơ của mặt cong S tại điểm $P(x_0;y_0;z_0)$ là các vectơ khác không tỉ lệ với **vectơ gradient** $\nabla F(x_0;y_0;z_0)$.



Ví dụ

Tìm pháp vectơ của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *tại:*

(a) *điểm* $(0; 0; 1)$.

(b) *điểm* $(1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})$.

(c) *điểm* $(x_0; y_0; z_0)$ *thuộc mặt cầu.*

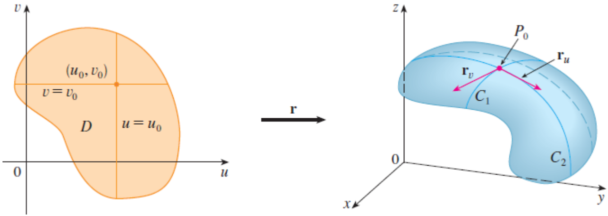
Pháp vectơ của mặt cong tham số

- Xét mặt cong trơn S có phương trình vectơ

$$\mathbf{r}(u; v) = x(u; v)\mathbf{i} + y(u; v)\mathbf{j} + z(u; v)\mathbf{k}.$$

- Pháp vectơ của S tại điểm $P_0 = \mathbf{r}(u_0; v_0)$ là các vectơ khác không tỉ lệ với **vectơ tích có hướng** $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$, trong đó

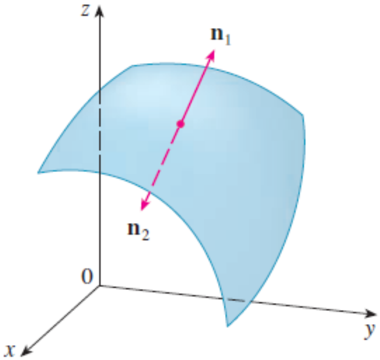
$$\mathbf{r}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}; \frac{\partial y}{\partial u}; \frac{\partial z}{\partial u}\right), \quad \mathbf{r}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}; \frac{\partial y}{\partial v}; \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$ được tính tại $(u_0; v_0)$.



Ví dụ

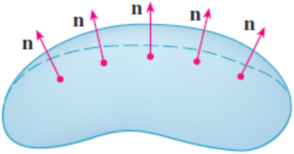
Tìm pháp vectơ của mặt cong $z = x^2 + y^2 + 1$ *tại điểm* $(1; 2; 6)$.

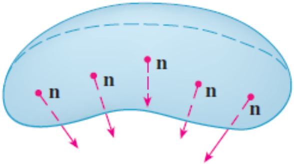
- Cho S là một mặt cong có tiếp diện tại mọi điểm $(x; y; z)$ thuộc S.
- Khi đó, tại mỗi điểm $(x; y; z)$ thuộc S, ta luôn có 2 pháp vectơ đơn vị $\mathbf{n}_1$ và $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$.



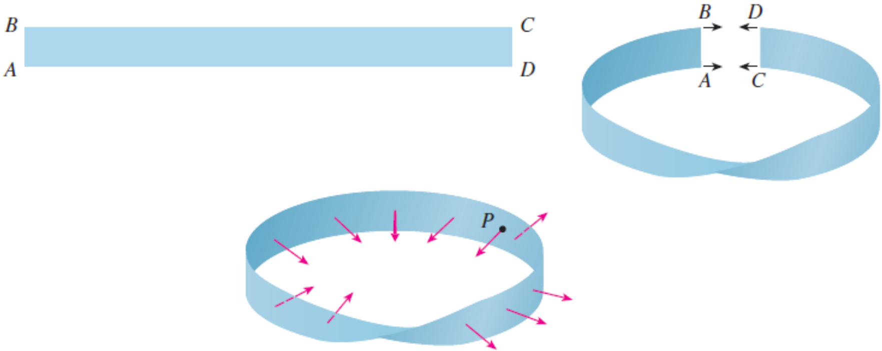
Định nghĩa

Nếu ta có thể chọn được tại mỗi điểm $(x; y; z)$ thuộc S một pháp vectơ đơn vị **n** *sao cho* **n** *biến thiên một cách* **liên tục** *trên S, thì S được gọi là* **mặt định hướng được (oriented surface)** *và* **hướng** *của mặt S được xác định bởi hướng của* **n**.





- Dải Mobius sau đây là một ví dụ về mặt "không định hướng được".

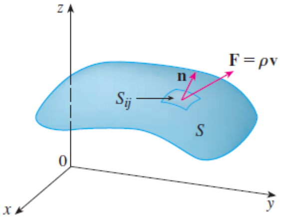


Bài toán tính thông lượng

- Giả sử ta cần tính thông lượng Φ của chất lỏng có mật độ $\rho(x;y;z)$ và có trường vận tốc $\mathbf{v}(x;y;z)$ chảy qua một mặt định hướng S.
- Thông lượng Φ được xấp xỉ bởi

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(P_{ij}^*) \cdot \mathbf{n}(P_{ij}^*) \Delta S_{ij},$$

trong đó $\mathbf{F} = \rho \mathbf{v}$, và P_{ij}^* là một điểm mẫu thuộc mảnh con S_{ij}.



Định nghĩa

Cho **F** *là một trường vectơ liên tục trên mặt định hướng S với pháp vectơ đơn vị* **n**. **Tích phân mặt loại 2** *của* **F** *trên S là*

$$\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}(P_{ij}^*)\cdot\mathbf{n}(P_{ij}^*)\Delta S_{ij},$$

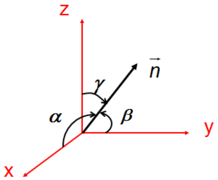
nếu giới hạn này tồn tại.

Vì $\mathbf{n} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$, và $(P; Q; R)$ là ba hàm thành phần của trường $\mathbf{F}$, nên tích phân mặt $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$ còn được viết là

$$\iint\limits_S \Big[P(x;y;z)\cos\alpha + Q(x;y;z)\cos\beta + R(x;y;z)\cos\gamma\Big]dS,$$

hoặc

$$\iint\limits_S P(x;y;z)dydz + Q(x;y;z)dzdx + R(x;y;z)dxdy.$$



Cách 1: Sử dụng phương trình tham số của mặt cong S.

- Tính pháp vectơ đơn vị $\mathbf{n}$ của mặt S:

$$\mathbf{n} = \pm \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|},$$

trong đó, dựa vào **phía** của S, ta chọn dấu $(+)$ hoặc dấu $(-)$.

- Tính dS:

$$dS = |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| du dv.$$

- Thay vào tích phân mặt, ta được:

$$\iint\limits_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint\limits_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u; v)) \cdot (\pm[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]) du dv.$$

Nếu mặt cong S được cho bởi hàm số $z = z(x; y)$, thì

$$\mathbf{n} = \pm \frac{(-z'_x; -z'_y; 1)}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}, \quad dS = \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}dxdy,$$

do đó, tích phân mặt loại 2 được tính như sau:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \pm \iint_{D_{xy}} \mathbf{F}(x; y; z(x; y)) \cdot (-z'_x; -z'_y; 1) dxdy,$$

trong đó D_{xy} là hình chiếu của mặt cong S trên mặt phẳng Oxy; lấy dấu $(+)$ nếu $\mathbf{n}$ tạo với tia Oz một góc nhọn; lấy dấu $(-)$ nếu $\mathbf{n}$ tạo với tia Oz một góc tù.

Nếu mặt cong S được cho bởi hàm số $y = y(x; z)$, thì

$$\mathbf{n} = \pm \frac{(-y'_x; 1; -y'_z)}{\sqrt{(y'_x)^2 + ('_z)^2 + 1}}, \quad dS = \sqrt{(y'_x)^2 + (y'_z)^2 + 1}dxdz,$$

do đó, tích phân mặt loại 2 được tính như sau:

$$\iint\limits_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \pm \iint\limits_{D_{xz}} \mathbf{F}(x; y(x; z); z) \cdot (-y'_x; 1; -y'_z) dxdz,$$

trong đó D_{xz} là hình chiếu của mặt cong S trên mặt phẳng Oxz; lấy dấu $(+)$ nếu $\mathbf{n}$ tạo với tia Oy một góc nhọn; lấy dấu $(-)$ nếu $\mathbf{n}$ tạo với tia Oy một góc tù.

Nếu mặt cong S được cho bởi hàm số $x = x(y;z)$, thì

$$\mathbf{n} = \pm\frac{(1;-x'_y;-x'_z)}{\sqrt{(x'_y)^2+(x'_z)^2+1}}, \quad dS = \sqrt{(x'_y)^2+(x'_z)^2+1}dydz,$$

do đó, tích phân mặt loại 2 được tính như sau:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \pm\iint_{D_{yz}} \mathbf{F}(x(y;z);y;z)\cdot(1;-x'_y;-x'_z)dydz,$$

trong đó D_{yz} là hình chiếu của mặt cong S trên mặt phẳng Oyz; lấy dấu $(+)$ nếu $\mathbf{n}$ tạo với tia Ox một góc nhọn; lấy dấu $(-)$ nếu $\mathbf{n}$ tạo với tia Ox một góc tù.

Cách 2: Tính từng thành phần trong tp mặt loại 2

$$\iint_S P(x;y;z)dydz + Q(x;y;z)dzdx + R(x;y;z)dxdy.$$

- Chẳng hạn, để tính $\iint_S R(x;y;z)dxdy$, đầu tiên ta viết pt mặt phẳng S dưới dạng $z = z(x;y)$.
- Sau đó, tìm hình chiếu D_{xy} của mặt S lên mặt phẳng xy.
- Khi đó,

$$\iint_S R(x;y;z)dxdy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x;y;z(x;y))dxdy,$$

trong đó, ta lấy dấu $(+)$ (t.ư. $(-)$) nếu $\mathbf{n}$ tạo với tia Oz một góc nhọn (t.ư. tù).

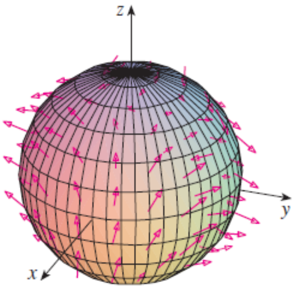
Ví dụ

Hãy tính thông lượng của trường vectơ

$$\mathbf{F}(x;y;z) = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$$

qua phía ngoài mặt cầu đơn vị $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

ĐS: $4\pi/3$



Ví dụ

Hãy tính tích phân mặt $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$, *trong đó*

$\mathbf{F}(x;y;z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ *và* S *là phía ngoài mặt biên của khối* E *giới hạn bởi mặt paraboloid* $z = 1 - x^2 - y^2$ *và mặt phẳng* $z = 0$.

ĐS: $\pi/2$