

Chương 2

TÍCH PHÂN BỘI

1 Tích phân kép

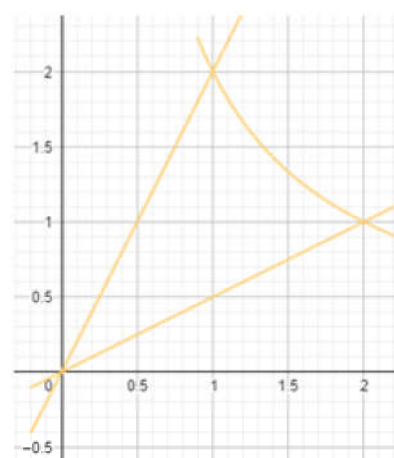
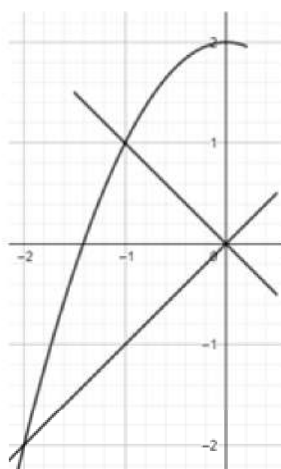
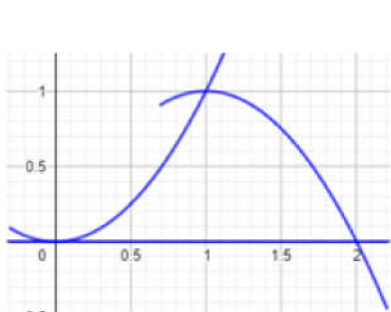
1.1 Tọa độ Descartes

1. **Nhận Dạng miền lấy tích phân D :** Xác định từng miền trong mặt phẳng Oxy ở hình vẽ dưới đây tương ứng với các biểu thức D_1, D_2, D_3 nào.

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2 - x^2, x + y \geq 0, x - y \geq 0\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2, y \leq 2x - x^2, y \geq 0\}$$

$$D_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \frac{2}{x}, \frac{x}{2} \leq y \leq 2x \right\}$$



2. Tính tích phân lặp và vẽ hình miền tính tích phân

$$I_3 = \int_{-2}^3 dx \int_{x^2-9}^{x-3} 2y dy$$

3. Tính tích phân kép với miền D cho trước:

$$I_1 = \iint_D (x - 2y^2) dx dy, D : x^2 + y^2 \leq 2x, x + y \geq 0, y \geq 0$$

$$I_2 = \iint_D xy dx dy, D : y = x^2 - 2x, y = x, y = 0$$

4. Mô tả bằng hình vẽ vật thể dạng trụ cong có thể tích được tính bằng tích phân bên

dưới (đáy dưới là miền D trong mặt phẳng Oxy, nắp trên là mặt cong $z = f(x, y)$,

$f(x, y)$ là hàm dưới dấu tích phân):

$$I_9 = \iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy, D : x^2 + y^2 \leq 4$$

5. Tính giá trị trung bình của $f(x, y)$ trên miền D .

$$f(x, y) = x \sin y, D \text{ giới hạn bởi các đường cong } y = 0, y = 1, y = x^2$$

6. Không làm các bài tập đổi thứ tự tích phân lặp

1.2 Đổi biến tọa độ cực

1. Viết cận các tích phân sau khi đổi biến $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$

$$\text{a/ } I_1 = \iint_D f(x, y) dx dy, D : x^2 + y^2 + 2x = 0, x + y = 0, x = 0$$

$$\text{b/ } I_2 = \iint_D f(x, y) dx dy, D : x^2 + y^2 + 2y \leq 0, x^2 + y^2 \leq 2$$

2. Tính tích phân sau

$$I_5 = \iint_D (y + 1) dx dy, D : x^2 + y^2 \leq 2x, x^2 + y^2 \leq 2y$$

3. Tính các tích phân sau bằng cách sử dụng **tọa độ cực mở rộng**

$$\text{a/ } I_7 = \iint_D (2x - y + 1) dx dy, D : x^2 + y^2 + 4y \leq 2x, 2x + y \leq 0$$

$$\text{b/ } I_8 = \iint_D (2x - y) dx dy, D : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1, 3x + 2y \leq 0, x \leq 0$$

1.3 Ứng dụng

1. Tính diện tích các miền phẳng dưới đây:

$$D1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq -2x, x + \sqrt{3}y \leq 0, y \geq 0\}$$

$$D2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^x, x + y = 1, y = 4\}$$

2. Tính thể tích vật thể V giới hạn bởi các mặt cong dưới đây:

$$V1 : z = 0, z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1$$

$$V2 : z \geq 0, z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \geq 1$$

3. Tính khối lượng mảnh phẳng D có hàm mật độ $\rho(x, y) = 4 - y$ tại mỗi điểm $(x, y) \in D$:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0, x + y = 2, y = 0\}, \text{ với } \rho(x, y) = 4 - y$$

2 Tích phân bội ba

2.1 Tọa độ Descartes

Tính các tích phân sau:

$$1. I_1 = \iiint_{\Omega} (2z - x) dx dy dz,$$

Ω giới hạn bởi các mặt $y = 4 - x^2, y = 2 + x^2, z = 2, z = -2x$.

$$2. I_2 = \iiint_{\Omega} (z\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz,$$

Ω giới hạn bởi các mặt $z = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$3. I_3 = \iiint_{\Omega} (x + 2y) dx dy dz, \Omega \text{ giới hạn bởi các mặt } z = x^2 + y^2, z = 2x.$$

2.2 Đổi biến

1. Tính các tích phân sau bằng cách đổi sang tọa độ trụ:

$$a/ I_3 = \iiint_{\Omega} (x + y + z) dx dy dz, \Omega \text{ giới hạn bởi các mặt } z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = x^2 + y^2$$

$$\text{b/ } I_4 = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz,$$

Ω giới hạn bởi các mặt cong $x^2 + z^2 = 1, x^2 + z^2 = 4, y = 1, y = -1$

2. Tính các tích phân sau bằng cách đổi sang tọa độ cầu thường: $x = \rho \sin \theta \cos \varphi, y = \rho \sin \theta \sin \varphi, z = \rho \cos \theta$.

$$\text{a. } I_1 = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz,$$

Ω giới hạn bởi các mặt cong $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \leq 0, z \geq 0$

$$\text{b. } I_2 = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz,$$

Ω giới hạn bởi $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0, y \geq x, y \geq -x\sqrt{3}\}$

$$\text{c. } I_3 = \iiint_{\Omega} (\sqrt{x^2 + y^2} + 2z) \, dx \, dy \, dz,$$

Ω giới hạn bởi $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, y \leq x\}$

2.3 Ứng dụng

1. Tính thể tích các vật thể V dưới đây:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2, z = 0, y = x, y = -x\sqrt{3}\}$$

2. Tính khối lượng vật thể V với khối lượng riêng (hàm mật độ) tại mỗi điểm $(x, y, z) \in V$ tương ứng.

$$3. V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 3 - x^2 - y^2, z \geq 2x\}; \rho(x, y, z) = 4 - z$$

4. Tính giá trị trung bình của hàm $f(x, y, z)$ trên khối Ω tương ứng:

$$5. f(x, y, z) = x + y + z; \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}\}$$