

Topic 21 - Mặt Tham Số và Diện Tích Mặt Tham Số

Bài 1 Xác định các điểm P và Q có nằm trên mặt phẳng được cho không.

1) $r(u, v) = \langle 2u + 3v, 1 + 5u - v, 2 + u + v \rangle, P(7, 10, 4), Q(5, 22, 5).$

2) $r(u, v) = \langle u + v, u^2 - v, u + v^2 \rangle, P(3, -1, 5), Q(-1, 3, 4).$

Bài 2 Nhận dạng mặt có phương trình vector được cho.

1) $r(u, v) = (u + v)i + (3 - v)j + (1 + 4u + 5v)k.$

2) $r(u, v) = (2 \sin u)i + (3 \cos u)j + vk.$

3) $\langle s, t, t^2 - s^2 \rangle.$

4) $r(s, t) = \langle s \sin 2t, s^2, s \cos 2t \rangle.$

Bài 3 Sử dụng máy tính để vẽ mặt tham số. In ra và chỉ rõ đường cong lưới nào có u không đổi và đường cong lưới nào có v không đổi.

1) $r(u, v) = \langle u^2, v^2, u + v \rangle, -1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1.$

2) $r(u, v) = \langle u^2, v^3, -v \rangle, -2 \leq u \leq 2, -2 \leq v \leq 2.$

3) $r(u, v) = \langle u \cos v, u \sin v, u^5 \rangle, -1 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi.$

4) $r(u, v) = \langle u, \sin(u + v), \sin v \rangle, -\pi \leq u \leq \pi, -\pi \leq v \leq \pi.$

5) $x = \sin u, y = \cos u \sin v, z = \sin v, 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi.$

6) $x = \sin v, y = \cos u \sin 4v, z = \sin 2u \sin 2v, 0 \leq u \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$

Bài 4 Sắp xếp các phương trình với các đồ thị I-VI cho phù hợp và giải thích cho câu trả lời của bạn. Xác định họ đường cong lưới nào có u không đổi và họ đường cong lưới nào có v không đổi.

1) $r(u, v) = (u \cos v)i + (u \sin v)j + vk.$

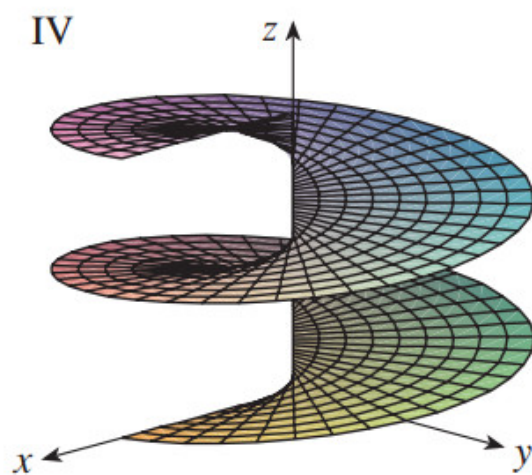
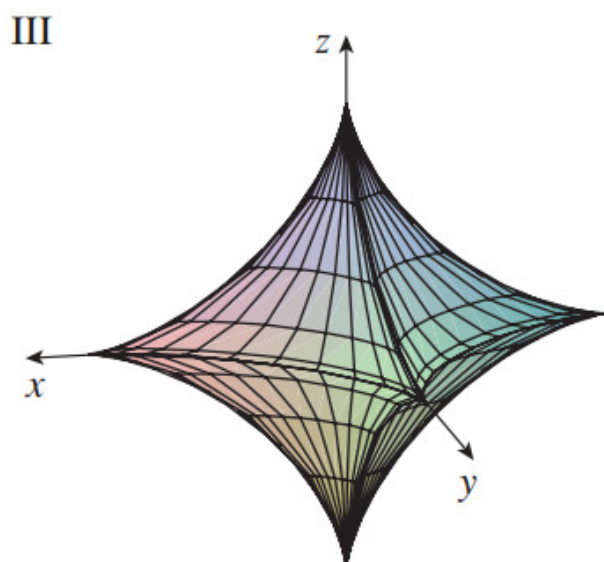
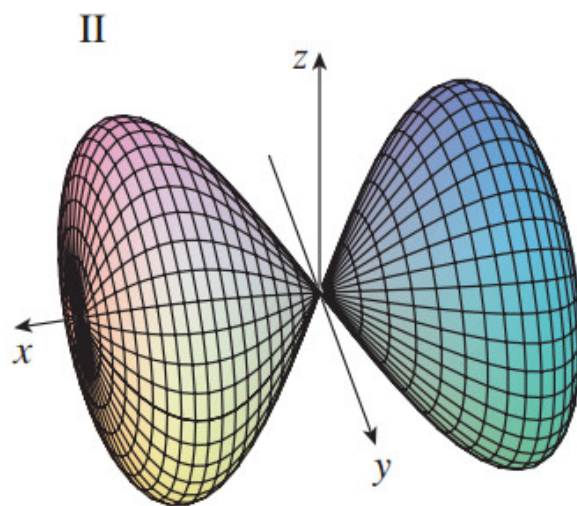
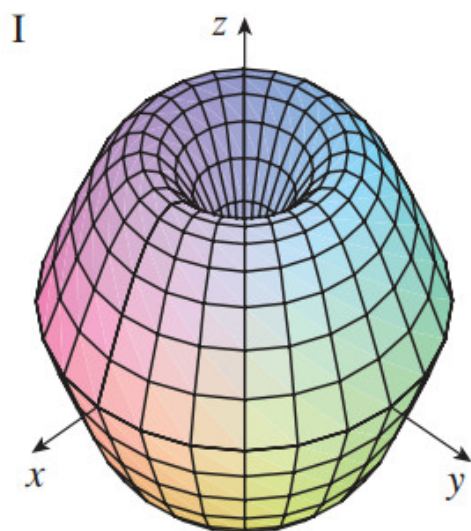
2) $r(u, v) = (u \cos v)i + (u \sin v)j + \sin uk, -\pi \leq u \leq \pi.$

3) $r(u, v) = (\sin v)i + (\cos u \sin 2v)j + (\sin u \sin 2v)vk.$

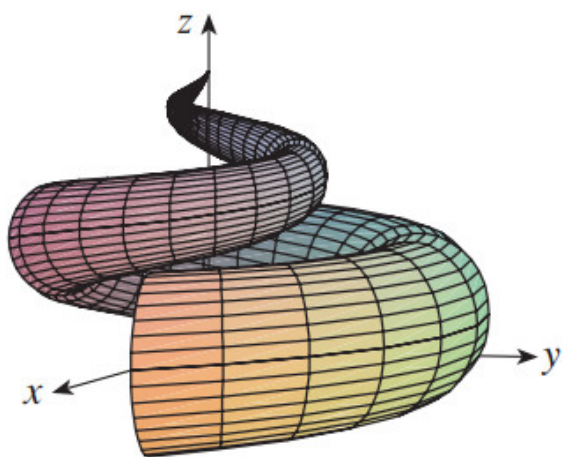
4) $x = (1 - u)(3 + \cos v) \cos 4\pi u, y = (1 - u)(3 + \cos v) \sin 4\pi u, z = 3u + (1 - u) \sin v.$

5) $x = \cos^3 u \sin^3 v, y = \sin^3 u \cos^3 v, z = \sin^3 v.$

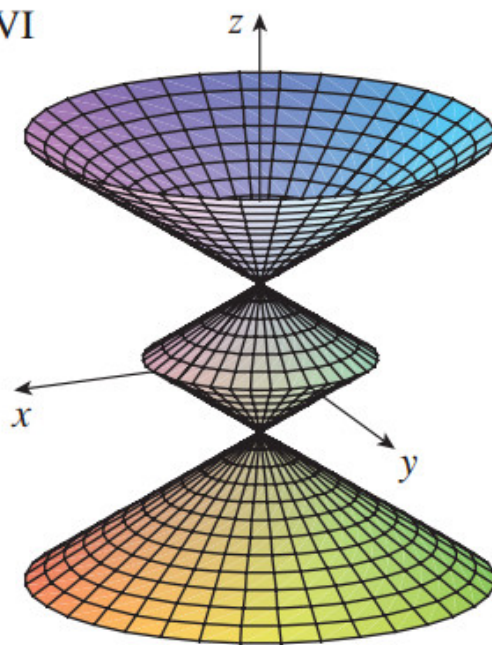
6) $x = (1 - |u|) \cos v, y = (1 - |u|) \sin v, z = u.$



V



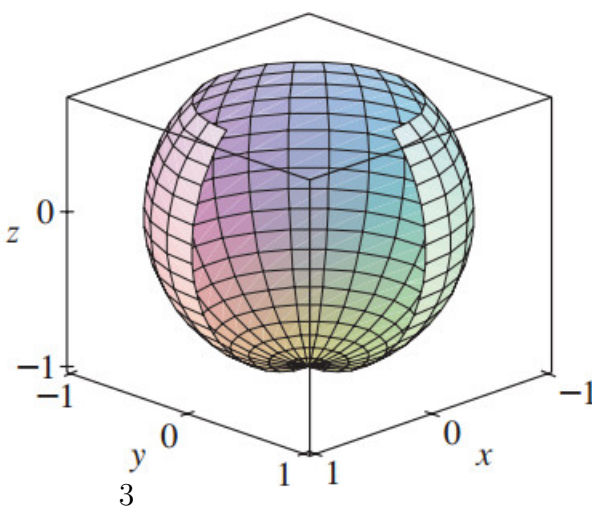
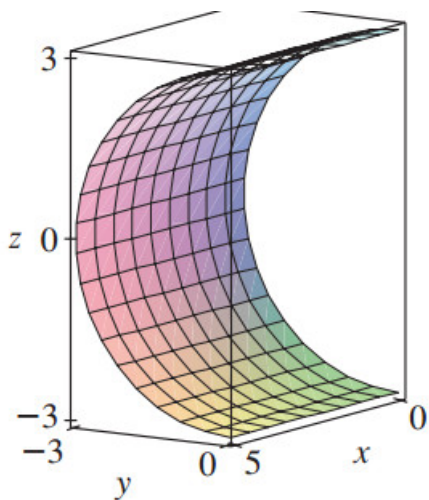
VI



Bài 5 Tìm biểu diễn tham số của mặt dưới đây.

- 1) Mặt phẳng qua gốc tọa độ chứa các vector $i - j$ và $j - k$.
- 2) Mặt phẳng đi qua điểm $(0, -1, 5)$ và chứa các vector $\langle 2, 1, 4 \rangle$ và $\langle -3, 2, 5 \rangle$.
- 3) Một phần của mặt hyperboloid $4x^2 - 4y^2 - z^2 = 4$ nằm ở phía trước của mặt phẳng yz .
- 4) Một phần của mặt ellipsoid $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ nằm bên trái mặt phẳng xz .
- 5) Một phần của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ nằm phía trên mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- 6) Một phần của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ nằm giữa các mặt phẳng $z = -2$ và $z = 2$.
- 7) Một phần của mặt trụ $y^2 + z^2 = 16$ nằm giữa các mặt phẳng $x = 0$ và $x = 5$.
- 8) Một phần của mặt phẳng $z = x + 3$ nằm bên trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

Bài 6 Sử dụng một hệ thống máy tính để vẽ đồ thị trông giống đồ thị được cho



Bài 7 Tìm các phương trình tham số của mặt tạo thành bằng cách quay đường cong $y = e^{-x}, 0 \leq x \leq 3$, quanh trục x và sử dụng chúng để vẽ bề mặt đó.

Bài 8 Tìm phương trình tham số của mặt tạo thành bằng cách quay đường cong $x = 4y^2 - y^4, -2 \leq x \leq 2$, quanh trục y và sử dụng chúng để vẽ bề mặt đó.

Bài 9 Mặt có các phương trình tham số

$$x = 2 \cos \theta + r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right); y = 2 \sin \theta + r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right); z = r \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

trong đó $-\frac{1}{2} \leq r \leq \frac{1}{2}$ và $0 \leq \theta \leq 2\pi$, được gọi là **dải Mobius**. Hãy vẽ mặt này với một số góc nhìn. Nó có điều gì khác thường?

Bài 10 Tìm các phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với mặt tham số được cho tại điểm được định rõ.

- 1) $x = u + v, y = 3u^2, z = u - v, (2, 3, 0)$.
- 2) $x = u^2 + 1, y = v^3 + 1, z = u + v, (5, 2, 3)$.
- 3) $r(u, v) = (u \cos v)i + (u \sin v)j + vk; u = 1, v = \frac{\pi}{3}$.
- 4) $r(u, v) = (\sin u)i + (\cos u \sin v)j + (\sin v)k; u = \frac{\pi}{6}, v = \frac{\pi}{6}$.

Bài 11 Tìm các phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với mặt tham số được cho tại điểm được định rõ. Vẽ mặt và mặt phẳng tiếp xúc đó.

- 1) $r(u, v) = u^2i + (2u \sin v)j + (u \cos v)k; u = 1, v = 0$.
- 2) $r(u, v) = (1 - u^2 - v^2)i - vj - uk; (-1, -1, -1)$.

Bài 12 Tìm diện tích của mặt.

- 1) Một phần của mặt phẳng $3x + 2y + z = 6$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.
- 2) Một phần của mặt phẳng có phương trình vector $r(u, v) = \langle u + v, 2 - 3u, 1 + u - v \rangle$ được cho bởi $0 \leq u \leq 2, -1 \leq v \leq 1$.
- 3) Một phần của mặt phẳng $x + 2y + 3z = 1$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 3$.
- 4) Một phần của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm giữa mặt phẳng $y = x$ và mặt trụ $y = x^2$.
- 5) Mặt $z = \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.
- 6) Một phần của mặt $z = 1 + 3x + 2y^2$ nằm phía trên hình tam giác có các đỉnh $(0, 0), (0, 1), (2, 1)$.
- 7) Một phần của mặt $z = xu$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.
- 8) Một phần của mặt paraboloid $x = y^2 + z^2$ nằm trong mặt trụ $y^2 + z^2 = 9$.

- 9) Một phần của mặt $y = 4x + z^2$ nằm giữa các mặt phẳng $x = 0, x = 1, z = 0$ và $z = 1$.
- 10) Mặt xoắn ốc có phương trình vector $r(u, v) = (u \cos v)i + (u \sin v)j + vk, 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \pi$.
- 11) Mặt có các phương trình tham số $x = u^2, y = uv, z = \frac{1}{2}v^2, 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2$.
- 12) Một phần của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ nằm bên trong mặt trụ $x^2 + y^2 = a^2$, trong đó $0 < a < b$.

Bài 13 Nếu phương trình của mặt S là $z = f(x, y)$, trong đó $x + y \leq R^2$, và bạn biết rằng $|f_x| \leq 1$ và $|f_y| \leq 1$, thì bạn có thể nói gì về $A(S)$?

Bài 14 Tìm diện tích của mặt chính xác đến bốn chữ số thập phân bằng cách biểu diễn diện tích dưới dạng một tích phân một lớp và sử dụng máy tính để tính tích phân đó.

- 1) Một phần của mặt $z = \cos(x^2 + y^2)$ nằm bên trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.
- 2) Một phần của mặt $z = e^{-x^2-y^2}$ nằm phía trên đĩa tròn phẳng $x^2 + y^2 \leq 4$.

Bài 15 Tìm diện tích chính xác đến bốn chữ số thập phân của một phần của mặt $z = \frac{1+x^2}{1+y^2}$ nằm phía trên hình vuông $|x| + |y| \leq 1$. Minh họa bằng cách vẽ một phần của mặt này.

Bài 16 Tìm diện tích của mặt có phương trình vector $r(u, v) = \langle \cos^3 u \cos^3 v, \sin^3 u \cos^3 v, \sin^3 v \rangle, 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi$. Nêu rõ kết quả của bạn chính xác đến bốn chữ số thập phân.

Bài 17 Tìm diện tích chính xác của mặt $z = 1 + 2x + 3y + 4y^2, 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 1$.