

Hình thức thi tự luận: Đề gồm 9 câu.

Sinh viên không được sử dụng tài liệu.

Câu 1 : (1đ)

Cho hàm số $f(x, y) = \sinh(x + y) + x^2y - 2y$.

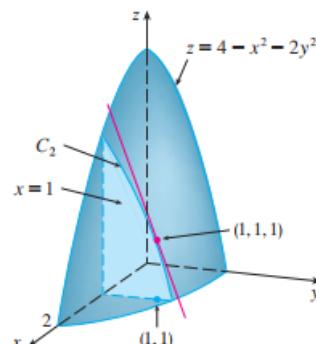
a/ Tính f'_x, f'_y .

b/ Viết phương trình tiếp diện của mặt cong $z = f(x, y)$ tại điểm $M(1, -1, 1)$.

Câu 2 : (1đ)

Cho mặt cong S là 1 phần đồ thị hàm số $z = 4 - x^2 - 2y^2$ trong hình vẽ dưới đây.

Tìm phương trình đường cong C_2 thuộc mặt S và phương trình tiếp tuyến của C_2 tại điểm $M(1, 1, 1)$



Câu 3 : (1đ)

Tính khối lượng khối V giới hạn bởi nửa mặt cầu $z = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ và mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ biết khối lượng riêng tại điểm $M(x, y, z)$ là $\rho(x, y, z) = 3 - x$.

Câu 4 : (1đ)

Cho D miền giới hạn bởi 2 đường cong $y = \sqrt{2 - x^2}$ và $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$. Tính độ dài đường biên của D (bỏ qua đơn vị tính).

Câu 5 : (1đ)

Cho C là giao tuyến của mặt trụ $z = 1 - y^2$ và mặt phẳng $x + z = 1$, từ điểm $A(4, 2, -3)$ đến $B(0, 0, 1)$. Tính tích phân $\int_C (x + 2z)dx + (1 + z)dy + xydz$.

Câu 6 : (1đ)

Tính diện tích phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm giữa 2 mặt trụ $x^2 + y^2 = 2x$ và $x^2 + y^2 = 4x$ (bỏ qua các đơn vị tính).

Câu 7 : (1đ)

Tính tích phân $I = \iint_S xdydz + ydzdx - zdxdy$ với mặt S là phia trong mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, phần nằm trên mặt phẳng $z = 3$.

Câu 8 : (1đ)

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} \cdot n!}{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}$.

Câu 9 : (2đ)

Cho chuỗi lũy thừa: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{2n-1}}{3^n} \right) (x-1)^n$.

a/ Tìm miền hội tụ D của chuỗi lũy thừa trên.

b/ Tìm tất cả các giá trị $x \in D$ sao cho $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{2n-1}}{3^n} \right) (x-1)^n = 1$

ĐÁP ÁN

Câu 1 a/ $f'_x = \cosh(x+y) + 2xy$, $f'_y = \cosh(x+y) + x^2 - 2$ (0.5)
 b/ $z = 2 - x$ (0.5)

Câu 2 PT của $C_2 : z = 3 - 2y^2$ (0.5), pt tiếp tuyến: $z = 5 - 4y$ (0.5)

Câu 3 Áp dụng công thức $m(V) = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz$. Khử z từ 2 pt 2 mặt: $z = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow x^2 + y^2 = 1$ nên $D_{xy} : x^2 + y^2 \leq 1$ (0.25). Suy ra:
 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \leq 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, ta được $m(V) = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} (3 - x) dz$

(0.25)

$$m(V) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r (3 - r \cos \varphi) \left(1 + \sqrt{1 - r^2} - r \right) dr \quad (0.25) = 3\pi \quad (0.25)$$

Câu 4 a/ Biên của D gồm 2 phần $C_1 : y = \sqrt{2 - x^2}, -1 \leq x \leq 1$ và $C_2 : y = 1 - \sqrt{1 - x^2}, -1 \leq x \leq 1$ (0.25)

Cách 1: Nhận xét C_1 là 1/4 đường tròn bán kính $\sqrt{2}$, C_2 là nửa đường tròn bán kính 1 (0.25) nên độ dài cần tính là $\frac{1}{4} \cdot 2\pi\sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot 2\pi$ (0.5)

Cách 2: Dùng tích phân đường 1: $l = \int_{C_1} dl + \int_{C_2} dl$ (0.25)

$$l = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{2 - x^2}} dx + \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} dx \quad (0.25) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \pi \quad (0.25)$$

Câu 5 PT tham số của $C : x = t^2, y = t, z = 1 - t^2, t : 2 \rightarrow 0$ (0.25)

$$I = \int_2^0 (t^2 + 2(1 - t^2)) 2tdt + (1 + 1 - t^2) dt + t^2 \cdot t \cdot (-2tdt) \quad (0.5) = -\frac{172}{15} \quad (0.25)$$

Câu 6 Vecto pháp quay xuồng nên $\gamma > \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos \gamma < 0 \rightarrow \vec{n} = -\frac{(x, y, z)}{5}$ (0.25)

$$I = \iint_S \frac{x^2 + y^2 - z^2}{5} ds \quad (0.25) = \iint_D \frac{2x^2 + 2y^2 - 25}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} dx dy, D : x^2 + y^2 \leq 16 \quad (0.25)$$

$$= -\frac{92}{3}\pi \quad (0.25)$$

Câu 7 $\lim \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ (0.25) = $\lim \frac{4(n+1)}{3n+1} = \frac{4}{3}$ (0.5) PK (0.25)

Câu 8 a/ Đặt $X = x - 1$, ta tính BKHT $R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{3}{4}$, (0.25)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4^n \cdot 2^{-1}}{3^n} \right) \left(\frac{3}{4} \right)^n = \frac{1}{2} \text{ PK theo đkccsht (0.25)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4^n \cdot 2^{-1}}{3^n} \right) \left(-\frac{3}{4} \right)^n = \frac{(-1)^n}{2} \text{ PK theo đkccsht. (0.25)}$$

Chuỗi HT khi và chỉ khi: $-\frac{3}{4} < X < \frac{3}{4} \leftrightarrow \frac{1}{4} < x < \frac{7}{4}$, nên MHT là $D = \left(\frac{1}{4}, \frac{7}{4} \right)$

(0.25)

b/ $\forall x \in D$ chuỗi HT nên có tổng (0.25).

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4^n}{2 \cdot 3^n} \right) (x-1)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4(x-1)}{3} \right)^n = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{4(x-1)}{3}} = \frac{3}{2(7-4x)} \quad (0.5)$$

. Vậy $S(x) = 3 \Leftrightarrow x = \frac{13}{8} \in D$ (0.25)