



BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH 2

CHƯƠNG 1-BÀI 6. CỰC TRỊ HÀM NHIỀU BIẾN

TS. NGUYỄN ĐÌNH DƯƠNG
BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG - KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG

Email: duongnd@hcmut.edu.vn

Ngày 15/02/2021



- 1.1 Bài 1.1: Hàm nhiều biến
- 1.2 Bài 1.2: Đạo hàm riêng
- 1.3 Bài 1.3: Đạo hàm theo hướng và Gradient
- 1.4 Bài 1.4: Đạo hàm hàm hợp, hàm ẩn
- 1.5 Bài 1.5: Công thức Taylor
- 1.6 Bài 1.6: Cực trị hàm nhiều biến



Nội dung

Ý tưởng hình học

Phương pháp Lagrange: Một ràng buộc

Phương pháp nhân tử Lagrange: Hai ràng buộc

Trao đổi



Chuẩn đầu ra

- Mô tả ý tưởng hình học của Phương pháp nhân tử Lagrange
- Sử dụng Phương pháp nhân tử Lagrange để giải bài toán max/min với 1 điều kiện ràng buộc
- Sử dụng Phương pháp nhân tử Lagrange để giải bài toán max/min với 2 điều kiện ràng buộc



Nội dung

Ý tưởng hình học

Phương pháp Lagrange: Một ràng buộc

Phương pháp nhân tử Lagrange: Hai ràng buộc

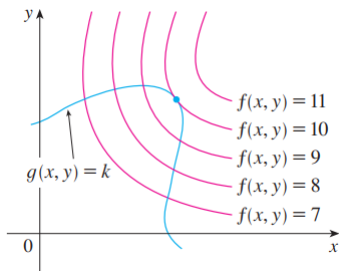
Trao đổi

Đường mức và Gradient

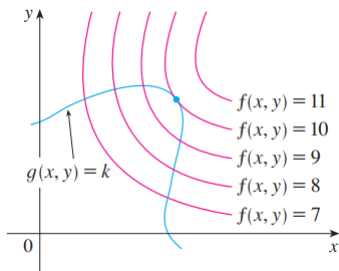
Tìm cực trị của $f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) = k$

Hình vẽ bên biểu thị các đường mức $f(x, y) = c$, trong đó $c = 7, 8, 9, 10, 11$

Tìm cực đại của f với ràng buộc $g(x, y) = k$ tức là tìm giá trị lớn nhất của c sao cho đường mức $f(x, y) = c$ tiếp xúc với $g(x, y) = k$,



Đường mức và Gradient



Tìm cực trị của $f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) = k$

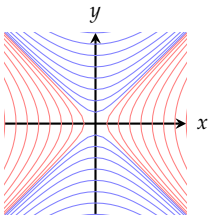
Hình vẽ bên biểu thị các đường mức $f(x, y) = c$, trong đó $c = 7, 8, 9, 10, 11$

Tìm cực đại của f với ràng buộc $g(x, y) = k$ tức là tìm giá trị lớn nhất của c sao cho đường mức $f(x, y) = c$ tiếp xúc với $g(x, y) = k$, tức là **chúng có tiếp tuyến chung**.

Khi đó pháp tuyến tại tiếp điểm (x_0, y_0) của 2 đường cong trùng nhau, tức là 2 vector gradient của chúng song song

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

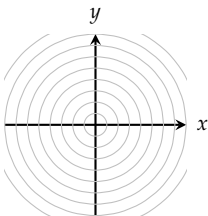
Đường mức và Gradient



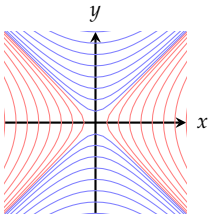
∇f chính là pháp vector với đường mức của hàm f

Hình bên trái là đường mức của:

- $f(x, y) = x^2 - y^2$
- $g(x, y) = x^2 + y^2$



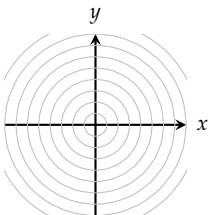
Đường mức và Gradient



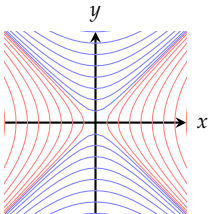
∇f chính là pháp vector với đường mức của hàm f

Hình bên trái là đường mức của:

- $f(x, y) = x^2 - y^2$
- $g(x, y) = x^2 + y^2$
- Trong mỗi hình vẽ, gradient chỉ theo hướng nào?



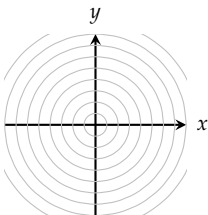
Đường mức và Gradient



∇f chính là pháp vector với đường mức của hàm f

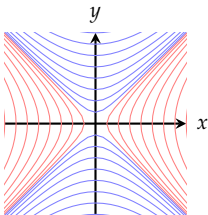
Hình bên trái là đường mức của:

- $f(x, y) = x^2 - y^2$
- $g(x, y) = x^2 + y^2$



- Trong mỗi hình vẽ, gradient chỉ theo hướng nào?
- Có những điểm nào mà ∇f và ∇g song song?

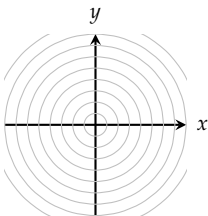
Đường mức và Gradient



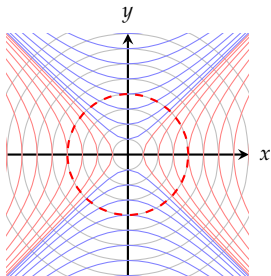
∇f chính là pháp vector với đường mức của hàm f

Hình bên trái là đường mức của:

- $f(x, y) = x^2 - y^2$
- $g(x, y) = x^2 + y^2$



- Trong mỗi hình vẽ, gradient chỉ theo hướng nào?
- Có những điểm nào mà ∇f và ∇g song song?
- Tiếp tuyến tương ứng tại các điểm đó như thế nào?



Bài toán Tìm GTLN, GTNN của

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

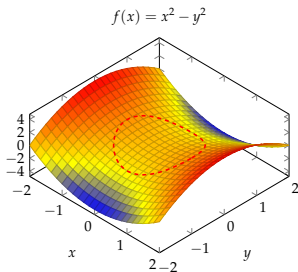
với điều kiện

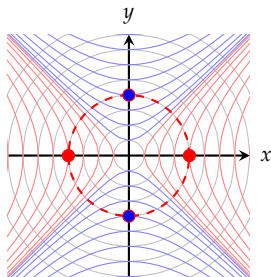
$$x^2 + y^2 = 1$$

Ở đây:

- $f(x, y)$ là *hàm mục tiêu*
- $x^2 + y^2 = 1$ là *điều kiện ràng buộc*

GTLN, GTNN xuất hiện ở điểm nào?





Bài toán Tìm GTLN, GTNN của

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

với điều kiện

$$x^2 + y^2 = 1$$

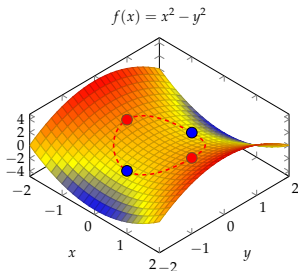
Ở đây:

- $f(x, y)$ là hàm mục tiêu
- $x^2 + y^2 = 1$ là điều kiện ràng buộc

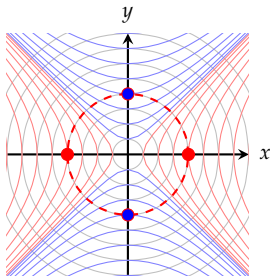
GTLN, GTNN xuất hiện ở điểm nào?

GTLN: $f(1, 0) = f(-1, 0) = 1$

GTNN: $f(0, 1) = f(0, -1) = -1$



Điều kiện Lagrange

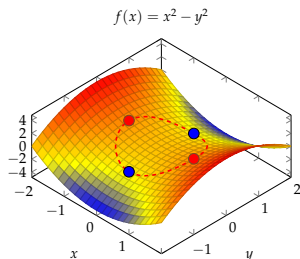


Bài toán Tìm GTLN, GTNN của

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

với điều kiện

$$g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$$



GTLN, GTNN xảy ra tại các điểm mà ∇f và ∇g song song, tức là

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

Tại sao có điều này ???

Tại sao $\nabla f = \lambda \nabla g$ hàm đạt cực trị?

Bài toán Tìm cực trị của $f(x, y)$ với điều kiện ràng buộc $g(x, y) = k$.

- Điều kiện ràng buộc hạn chế các điểm (x, y) chỉ thuộc đường cong dạng tham số $(x(t), y(t))$ của g
- Khi đó, ta cần tìm cực trị hàm $\phi(t) = f(x(t), y(t))$ - hàm 1 biến
- Sử dụng quy tắc đạo hàm hàm hợp, $\phi'(t) = 0$ tương đương với

$$(\nabla f)(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) = 0$$

- Tức là, ∇f vuông góc với vector tiếp tuyến của đường mức g
- Nói cách khác, ∇f song song ∇g

Số λ được gọi là *nhân tử Lagrange*



Nội dung

Ý tưởng hình học

Phương pháp Lagrange: Một ràng buộc

Phương pháp nhân tử Lagrange: Hai ràng buộc

Trao đổi

Nhân tử Lagrange: Một ràng buộc, Hai biến

Tìm cực trị của $f(x, y)$ với điều kiện ràng buộc $g(x, y) = k$:

(a) Tìm (x, y, λ) thỏa mãn

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

$$g(x, y) = k$$

(b) Tính $f(x, y)$ tại các nghiệm (x, y) tìm được ở bước trên. So sánh các giá trị để tìm GTLN, GTNN

- 1 Tìm GTLN, GTNN của $f(x, y) = x^2 - y^2$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.
- 2 Tìm GTLN, GTNN của $f(x, y) = 3x + y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 10$

Nhân tử Lagrange: Một ràng buộc, Ba biến

Tìm cực trị của $f(x, y, z)$ với điều kiện $g(x, y, z) = k$:

(a) Tìm (x, y, z, λ) thỏa mãn

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

$$g(x, y, z) = k$$

(b) Tính $f(x, y, z)$ tại các nghiệm (x, y, z) ở bước trên. So sánh các giá trị để tìm GTLN, GTNN

① Tìm GTLN, GTNN của $f(x, y, z) = e^{xyz}$ với điều kiện $2x^2 + y^2 + z^2 = 24$



Nội dung

Ý tưởng hình học

Phương pháp Lagrange: Một ràng buộc

Phương pháp nhân tử Lagrange: Hai ràng buộc

Trao đổi

Nhân tử Lagrange: Hai ràng buộc, Ba biến

Để tìm GTLN, GTNN của $f(x, y, z)$ với điều kiện $g(x, y, z) = k, h(x, y, z) = \ell$:

(a) Tìm (x, y, z, λ, μ) thỏa mãn

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z)$$

$$g(x, y, z) = k$$

$$h(x, y, z) = \ell$$

(b) Tính $f(x, y, z)$ tại các nghiệm (x, y, z) để tìm GTLN, GTNN

Tìm GTLN, GTNN của $f(x, y, z) = x + y + z$ với điều kiện

$$x^2 + z^2 = 2$$

$$x + y = 1$$

Giải thích phương pháp

Tìm GTLN, GTNN của $f(x, y, z)$ với các điều kiện

$$g(x, y, z) = k$$

$$h(x, y, z) = \ell$$

- Mặt $S_1 = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = k\}$ và $S_2 = \{(x, y, z) : h(x, y, z) = \ell\}$ có giao tuyến là đường cong C
- Ta biết rằng $\nabla f(x, y, z)$ trực giao với C nếu f đạt cực trị tại (x, y, z)
- Ngoài ra $\nabla g(x, y, z)$ và $\nabla h(x, y, z)$ cũng trực giao với C
- Khi đó, tồn tại λ và μ thỏa mãn

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z)$$



Tổng kết

- Học phương pháp nhân tử Lagrange giải bài toán tìm GTLN, GTNN với 1 ràng buộc
- Mở rộng phương pháp nhân tử Lagrange giải bài toán tìm GTLN, GTNN với 2 ràng buộc



Nội dung

Ý tưởng hình học

Phương pháp Lagrange: Một ràng buộc

Phương pháp nhân tử Lagrange: Hai ràng buộc

Trao đổi



TRAO ĐỔI