函数极限与连续笔记

Xuan

2025 年 2 月 11 日

1 函数概念与特性

定理 1 (函数). 我们只研究单值函数，即对于每一个 x，函数 $y=f(x)$ 有唯一确定的值的函数

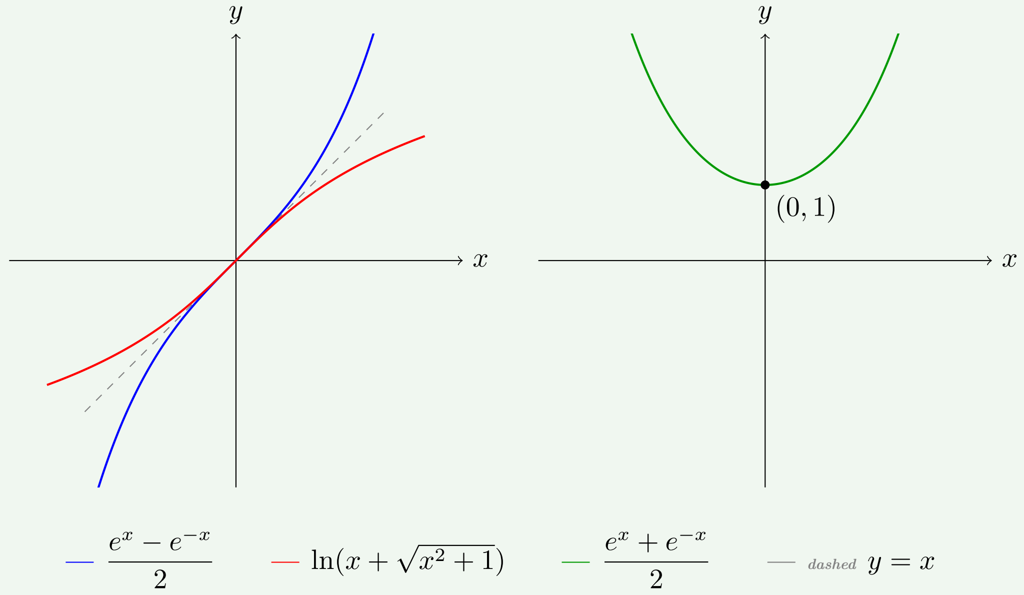
定理 2 (反函数). 把函数 $y=f(x)$ 的 x 和 y 互换位置（定义域和值域也互换），得到新的函数 $y=f^{-1}(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ 称为 $f(x)$ 的反函数

1. 由于 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 都是单值函数，故对于每一个 x，函数 y 有唯一确定的值，对于每一个 y，函数 x 也有唯一确定的值。又因严格单调函数一定是一一对应的函数，而一一对应的函数不一定是单调函数，故：
   "是严格单调函数"⇒"是一一对应的函数"⇔"有反函数"
2. $f^{-1}(f(x))=x$，$f(f^{-1}(x))=x$
3. $y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 是同一个函数，在同一坐标系上的图像也完全重合，$y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 才互为反函数且因 x，y 互换，函数图像关于 $y=x$ 对称
4. $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 在区间内的单调性相同，且在交点处的函数值相等

重要实例 1 (3 个双曲函数). 反双曲正弦函数：$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，双曲正弦函数：$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，双曲余弦函数：$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

- 定义域都是 $(-\infty,+\infty)$
- $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 和 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 互为反函数，都是奇函数，且都单调递增
- $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 是偶函数，于 y 轴相交于点 $(0,1)$

函数图像如下：



重要结论

1. $x \Rightarrow 0$ 时，$y = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \sim x$
2. $[ln(x+\sqrt{x^2+1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$，于是 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C$
3. 由于 $y = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数，故 $\int_{-1}^{1}[\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + x^2]dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$

定义 1 (复合函数)**.** 有一函数 $y = f(u)$，$u \in D_f$，另有一函数 $u = f(x)$，$x \in D_g$ 满足：

1. $u = f(x)$ 的值域含于在 $y = f(u)$ 的定义域内，即 $g(x) \subseteq D_f$
2. $u = f(x)$ 的定义域 D_g 不做要求

则：

1. $y = f[g(x)]$，$x \in D_g$ 为由 $y = f(u)$ 和 $u = f(x)$ 构成的复合函数
2. $f[g(x)]$ 的值域含于在 $y = f(u)$ 的值域内 $f[g(x)] \subseteq f(u)$

重要实例 2 (隐函数)**.** 方程 $F(x, y) = 0$ 在某区间能满足单值函数的要求，则 $F(x, y) = 0$ 在上述区间内确定了一个隐函数 $y = y(x)$，求 $y(x_0)$ 时，如好求则直接求出，若不好求则用观察法，例如：

1. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $lny-\frac{x}{y}+x=0$ 确定，则 $y(2)=1$
2. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $lny+e^{y-1}=\frac{x}{2}$ 确定，则 $y(2)=1$

定理 3 (函数的四种特性). 要熟练将数学含义和代数式相互转化

有界性

$y=f(x)$，$x\in I$ 有界 $\Leftrightarrow$ 存在 $M>0$，使得 $|f(x)|\leq M$，$x\in I$

1. 不知区间，无法讨论有界性
2. 只要在区间 I 上或其端点处存在点 x_0，使得 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则 $f(x)$ 无界（举反例）
3. 证明有界的思路，给 $f(x)$ 套绝对值，利用各种不等式
   (a) 三角函数不等式：$|\sin x|\leq 1$，$|\cos x|\leq 1$，$|\sin x+\cos x|\leq\sqrt{2}$
   (b) 指数函数不等式：$e^x>1+x$（当 $x\neq 0$ 时）
   (c) 对数函数不等式：$\ln(1+x)<x$（当 $x>0$ 时）
   (d) 绝对值不等式：$|a+b|\leq|a|+|b|$，$||a|-|b||\leq|a-b|$
   (e) 基本不等式：$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$（当 $a,b>0$ 时）
   (f) 柯西不等式：$(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2$

单调性

对于任意 x_1，$x_2\in D$，$x_1\neq x_2$

单调性	基础定义	高级定义	导数
单调递增	$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$	$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$	$f'(x)>0$
单调递减	$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$	$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0$	$f'(x)<0$
单调不减	$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$	$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]\geq 0$	$f'(x)\geq 0$
单调不增	$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$	$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]\leq 0$	$f'(x)\leq 0$

奇偶性

1. 基础定义：若定义域关于原点对称，且
    (a) 对于任意 x，有 $f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow y = f(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow y = f(x)$ 关于原点对称 $\Rightarrow y = f(0) = 0$
    (b) 对于任意 x，有 $f(-x) = f(x) \Leftrightarrow y = f(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow y = f(x)$ 关于 y 轴对称
    (c) 对于任意 x,有 $f(-x) = \pm f(x) \Leftrightarrow y = f(x)$ 是奇偶函数 $\Leftrightarrow y = f(x)$ 关于原点且关于 y 轴对称
2. 重要结论
    - $f(x) + f(-x)$ 必是偶函数，如 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
    - $f(x) - f(-x)$ 必是奇函数，如 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
    - $f(x)f(-x)$ 必是偶函数
    - $ln[f(x)/f(-x)]$ 必是奇函数
3. 复合函数 $f[g(x)]$ 的奇偶性（内偶则偶，内奇同外）
    - 奇 [偶] $\Rightarrow$ 偶，如 $sinx^2$
    - 偶 [奇] $\Rightarrow$ 偶，如 $cos(sinx)$，$|sinx|$
    - 奇 [奇] $\Rightarrow$ 奇，如 $sin\frac{1}{x}$，$\sqrt[3]{tanx}$
    - 偶 [偶] $\Rightarrow$ 偶，如 $cos|x|$，$|cosx|$
    - 非奇非偶 [偶] $\Rightarrow$ 偶，如 e^{x^2}，$ln|x|$
4. 特殊函数的奇偶性：$[ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ （奇变偶）
5. 导数的奇偶性：求导后奇偶互变
6. 积分的奇偶性，奇函数积分变偶函数
7. 高级奇偶性判别式：设对任意的 x，y，都有 $f(x + y) = f(x) + f(y)$，则 $f(x)$ 是奇函数
    - 证明思路：先 $f(x + 0) = f(x) + f(0)$，得证 $f(0) = 0$，后 $f(x - x) = f(x) + f(-x) = 0$，得证 $f(-x) = -f(x)$

周期性

$y = f(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow$ 存在 $T > 0$，使得 $f(x + T) = f(x)$，若 $g(x)$ 以 T 为周期，则：

- $g(ax + b)$ 以 $\frac{T}{|a|}$ 为周期
- 复合函数 $f[g(x)]$ 一定是周期函数，如 e^{sinx}，cos^2x
- $g'(x)$ 依旧是以 T 为周期的周期函数
- 只有当 $\int_0^T g(x)dx = 0$ 时，$\int_0^x g(t)dt$ 才是以 T 为周期的周期函数

2 函数的图像

重要实例 3 (基本初等函数). 反对幂指三 + 常数函数

幂函数

当 $x>0$ 且 $a\neq -1$ 时，$y=x^a$ 全都单调递增，具有于 $y=x^a=x^{-1}=\dfrac{1}{x}$ 相反的单调性，又因 lnx 也在 $x>0$ 时也单调递增，故:

- 见到 $\sqrt{u}$，$\sqrt[3]{u}$ 时，可用 u 来研究最值
- 见到时 $|u|$，由 $|u|=\sqrt{u^2}$，可用 u^2 来研究最值
- 见到 $u_1u_2u_3$ 时，可用 $ln(u_1u_2u_3)=lnu_1+lnu_2+lnu_3$ 来研究最值
- 见到 $\dfrac{1}{u}$ 时，可用 u 来研究最值（结论相反）