函数极限与连续错题集

Xuan

2025 年 2 月 10 日

1 函数概念与特性

定理 1 (函数). 我们只研究单值函数，即对于每一个 x，函数 $y=f(x)$ 有唯一确定的值的函数

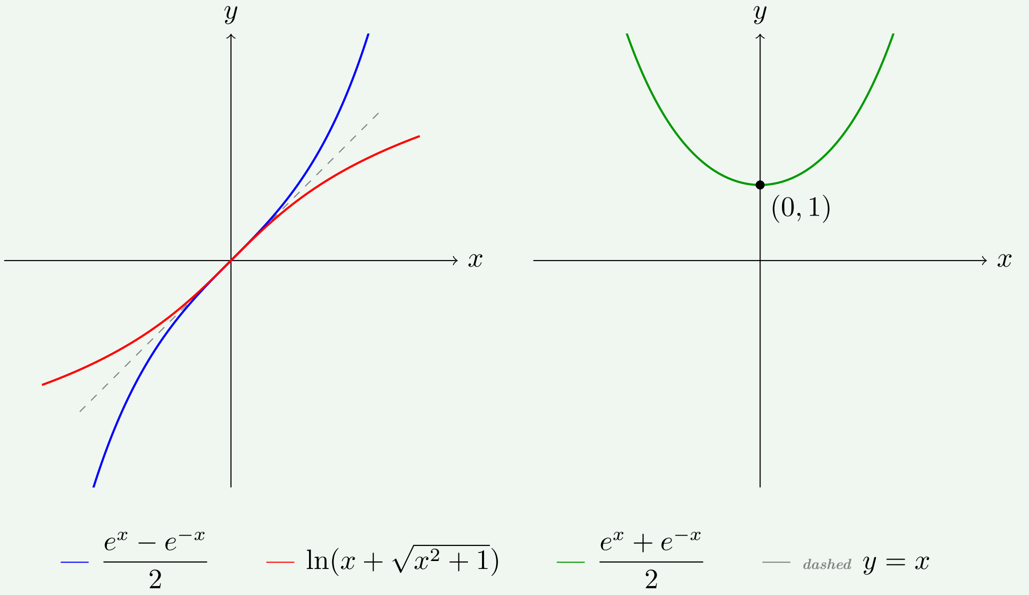
定理 2 (反函数). 把函数 $y=f(x)$ 的 x 和 y 互换位置（定义域和值域也互换），得到新的函数 $y=f^{-1}(x)$ 称为 $f(x)$ 的反函数

1. 由于 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 都是单值函数，故对于每一个 x，函数 y 有唯一确定的值，对于每一个 y，函数 x 也有唯一确定的值。又因严格单调函数一定是一一对应的函数，而一一对应的函数不一定是单调函数，故：
“是严格单调函数”$\rightarrow$“是一一对应的函数”$\Leftrightarrow$“有反函数”
2. $f^{-1}(x)f(x)=x$，$f(x)f^{-1}(x)=x$
3. $y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 是同一个函数，在同一坐标系上的图像也完全重合，$y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 才互为反函数且因 x，y 互换，函数图像关于 $y=x$ 对称
4. $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 在区间内的单调性相同，且在交点处的函数值相等

重要实例 1 (3 个双曲函数). 反双曲正弦函数：$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，双曲正弦函数：$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，双曲余弦函数：$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

- 定义域都是 $(-\infty,+\infty)$
- $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 和 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 互为反函数，都是奇函数，且都单调递增
- $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 是偶函数，于 y 轴相交于点 $(0,1)$

函数图像如下：



重要结论

1. $x \to 0$ 时，$y = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \sim x$
2. $[ln(x+\sqrt{x^2+1})]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$，于是 $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C$
3. 由于 $y = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数，故 $\int_{-1}^{1} [\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + x^2] dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \dfrac{2}{3}$