函数极限与连续性

Xuan

2025 年 2 月 8 日

1 函数极限的定义

函数极限是微积分中最基本的概念之一，它描述了函数在某一点附近的行为特征。

定义 1 (函数极限). 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有：

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记为：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

这个定义虽然看起来复杂，但本质上描述的是函数值无限接近某个常数的过程。

2 极限的性质

极限的四则运算法则是解决极限问题的基本工具，掌握这些性质可以大大简化计算过程。

定理 1 (极限四则运算). 设 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim_{x \to x_0} g(x) = B$，则：

1. $\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$
2. $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$
3. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ （当 $B \neq 0$）

这些性质告诉我们，在计算极限时，可以将复杂的表达式分解成简单的部分分别计算。

3 重要极限

在极限计算中，有几个特别重要的极限，它们构成了解决复杂极限问题的基础。

重要实例 1 (第一重要极限及其应用). **基本形式:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

相关变形:

- $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$
- $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

使用注意:

- x 必须以弧度为单位
- 分母必须是 x
- 常与等价无穷小代换结合使用

几何意义: 当 $x\to 0$ 时:

- $\sin x\sim x$
- $\tan x\sim x$
- $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$

重要实例 2 (第二重要极限及其应用). **基本形式:**

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$

常见变形:

- $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$
- $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

应用技巧:

- 注意提取极限中的幂指数形式
- 将复杂表达式转化为标准形式
- 结合对数进行化简

易错点:

- 底数和指数的变化需同步考虑
- 注意变形时的等价替换
- 区分极限不存在的情况

重要实例 3 (等价无穷小的应用). **常用等价无穷小（$x \to 0$）:**

- $\sin x \sim x$
- $\tan x \sim x$
- $\arcsin x \sim x$
- $\ln(1+x) \sim x$
- $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

使用原则:

1. 乘除可以替换

2. 加减需要相同阶数

3. 替换后不能出现未定式

4 连续函数的性质

定理 2 (连续函数的性质). 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则:

1. 有界性: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界

2. 最值定理: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必取得最大值和最小值

3. 介值定理: 对于任意介于最小值和最大值之间的值，函数都能取到