函数极限与连续错题集

Xuan

2025 年 2 月 11 日

1 函数概念与特性

定理 1 (函数). 我们只研究单值函数，即对于每一个 x，函数 $y=f(x)$ 有唯一确定的值的函数

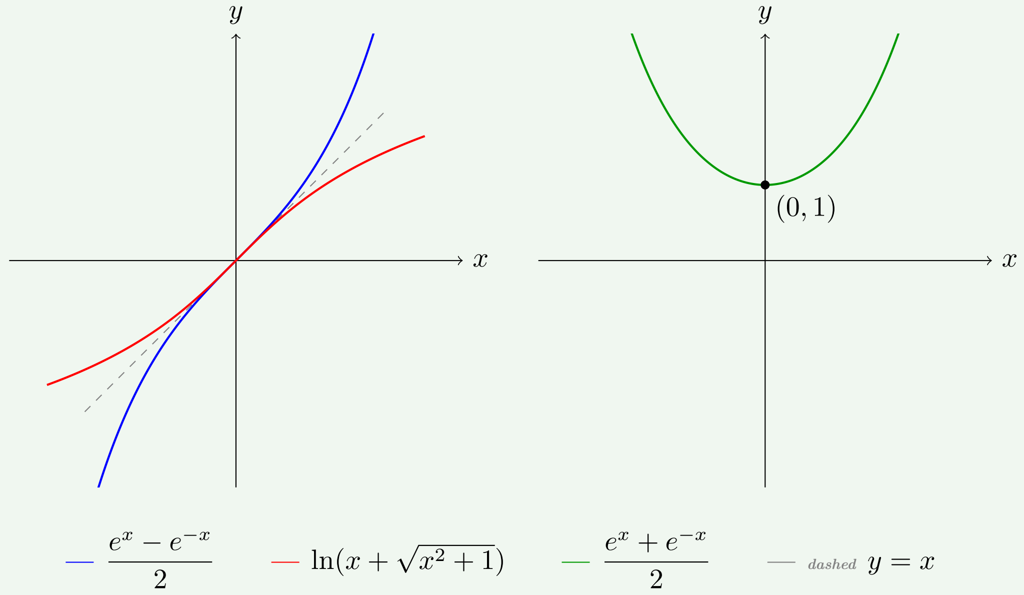
定理 2 (反函数). 把函数 $y=f(x)$ 的 x 和 y 互换位置（定义域和值域也互换），得到新的函数 $y=f^{-1}(x)$ 称为 $f(x)$ 的反函数

1. 由于 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 都是单值函数，故对于每一个 x，函数 y 有唯一确定的值，对于每一个 y，函数 x 也有唯一确定的值。又因严格单调函数一定是一一对应的函数，而一一对应的函数不一定是单调函数，故：
   "是严格单调函数"⇒"是一一对应的函数"⇔"有反函数"
2. $f^{-1}(x)f(x)=x$，$f(x)f^{-1}(x)=x$
3. $y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 是同一个函数，在同一坐标系上的图像也完全重合，$y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 才互为反函数且因 x，y 互换，函数图像关于 $y=x$ 对称
4. $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 在区间内的单调性相同，且在交点处的函数值相等

重要实例 1 (3 个双曲函数). 反双曲正弦函数：$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，双曲正弦函数：$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，双曲余弦函数：$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

- 定义域都是 $(-\infty,+\infty)$
- $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 和 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 互为反函数，都是奇函数，且都单调递增
- $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 是偶函数，于 y 轴相交于点 $(0,1)$

函数图像如下：



重要结论

1. $x \Rightarrow 0$ 时，$y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \sim x$
2. $[ln(x + \sqrt{x^2+1})]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$，于是 $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$
3. 由于 $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ 是奇函数，故 $\int_{-1}^{1} [\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + x^2] dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \dfrac{2}{3}$

定义 1 (复合函数)**.** 有一函数 $y = f(u)$，$u \in D_f$，另有一函数 $u = f(x)$，$x \in D_g$ 满足：

1. $u = f(x)$ 的值域含于在 $y = f(u)$ 的定义域内，即 $g(x) \subseteq D_f$
2. $u = f(x)$ 的定义域 D_g 不做要求

则：

1. $y = f[g(x)]$，$x \in D_g$ 为由 $y = f(u)$ 和 $u = f(x)$ 构成的复合函数
2. $f[g(x)]$ 的值域含于在 $y = f(u)$ 的值域内 $f[g(x)] \subseteq f(u)$

重要实例 2 (隐函数)**.** 方程 $F(x, y) = 0$ 在某区间能满足单值函数的要求，则 $F(x, y) = 0$ 在上述区间内确定了一个隐函数 $y = y(x)$，求 $y(x_0)$ 时，如好求则直接求出，若不好求则用观察法，例如：

1. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $lny - \frac{x}{y} + x = 0$ 确定，则 $y(2) = 1$
2. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $lny + e^{y-1} = \frac{x}{2}$ 确定，则 $y(2) = 1$

定理 3 (函数的四种特性). 要熟练将数学含义和代数式相互转化

1. 有界性：$y = f(x)$，$x \in I$ 有界 $\Leftrightarrow$ 存在 $M > 0$，使得 $|f(x)| \leq M$，$x \in I$
   (a) 不知区间，无法讨论有界性
   (b) 只要在区间 I 上或其端点处存在点 x_0，使得 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，则 $f(x)$ 无界（举反例）
   (c) 证明有界的思路，给 $f(x)$ 套绝对值，利用各种不等式
      i. 三角函数不等式：$|\sin x| \leq 1$，$|\cos x| \leq 1$，$|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$
      ii. 指数函数不等式：$e^x > 1 + x$（当 $x \neq 0$ 时）
      iii. 对数函数不等式：$\ln(1+x) < x$（当 $x > 0$ 时）
      iv. 绝对值不等式：$|a+b| \leq |a| + |b|$，$||a| - |b|| \leq |a - b|$
      v. 基本不等式：$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$（当 $a, b > 0$ 时）
      vi. 柯西不等式：$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2$
2. 单调性：对于任意 x_1，$x_2 \in D$，$x_1 \neq x_2$

单调性	基础定义	高级定义	导数
单调递增	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$	$f'(x) > 0$
单调递减	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$	$f'(x) < 0$
单调不减	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$	$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \geq 0$	$f'(x) \geq 0$
单调不增	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$	$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \leq 0$	$f'(x) \leq 0$

3. 奇偶性：
   (a) 基础定义：若定义域关于原点对称，且

i. 对于任意 x，有 $f(-x)=-f(x) \Leftrightarrow y=f(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow y=f(x)$ 关于原点对称 $\Rightarrow y=f(0)=0$

ii. 对于任意 x，有 $f(-x)=f(x) \Leftrightarrow y=f(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow y=f(x)$ 关于 y 轴对称

iii. 对于任意 x，有 $f(-x)=\pm f(x) \Leftrightarrow y=f(x)$ 是奇偶函数 $\Leftrightarrow y=f(x)$ 关于原点且关于 y 轴对称

(b) 重要结论

- $f(x)+f(-x)$ 必是偶函数，如 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$
- $f(x)-f(-x)$ 必是奇函数，如 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$
- $f(x)f(-x)$ 必是偶函数
- $ln[f(x)/f(-x)]$ 必是奇函数

(c) 复合函数 $f[g(x)]$ 的奇偶性（内偶则偶，内奇同外）

- 奇 [偶] $\Rightarrow$ 偶，如 $sinx^2$
- 偶 [奇] $\Rightarrow$ 偶，如 $cos(sinx)$，$|sinx|$
- 奇 [奇] $\Rightarrow$ 奇，如 $sin\dfrac{1}{x}$，$\sqrt[3]{tanx}$
- 偶 [偶] $\Rightarrow$ 偶，如 $cos|x|$，$|cosx|$
- 非奇非偶 [偶] $\Rightarrow$ 偶，如 e^{x^2}，$ln|x|$

(d) 特殊函数的奇偶性：$[ln(x+\sqrt{x^2+1})]'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ （奇变偶）

(e) 导数的奇偶性：求导后奇偶互变

(f) 积分的奇偶性，奇函数积分变偶函数

(g) 高级奇偶性判别式：设对任意的 x，y，都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，则 $f(x)$ 是奇函数

- 证明思路：先 $f(x+0)=f(x)+f(0)$，得证 $f(0)=0$，后 $f(x-x)=f(x)+f(-x)=0$，得证 $f(-x)=-f(x)$

4. 周期性：$y=f(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow$ 存在 $T>0$，使得 $f(x+T)=f(x)$，若 $g(x)$ 以 T 为周期，则：

- $g(ax+b)$ 以 $\dfrac{T}{|a|}$ 为周期
- 复合函数 $f[g(x)]$ 一定是周期函数，如 e^{sinx}，cos^2x
- $g'(x)$ 依旧是以 T 为周期的周期函数
- 只有当 $\int_0^T g(x)dx=0$ 时，$\int_0^x g(t)dt$ 才是以 T 为周期的周期函数