

# 函数极限与连续性

Luan

2025 年 2 月 10 日

## 1 函数概念与特性

函数极限是微积分中最基本的概念之一，它描述了函数在某一点附近的行为特征。

**定义 1 (函数极限)**. 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某去心邻域内有定义，如果存在常数  $A$ ，对于任意给定的正数  $\varepsilon$ ，总存在正数  $\delta$ ，当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时，有：

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

则称  $A$  为  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的极限，记为：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

这个定义虽然看起来复杂，但本质上描述的是函数值无限接近某个常数的过程。

## 2 极限的性质

极限的四则运算法则是解决极限问题的基本工具，掌握这些性质可以大大简化计算过程。

**定理 1 (极限四则运算)**. 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ， $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ ，则：

- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$  (当  $B \neq 0$ )

这些性质告诉我们，在计算极限时，可以将复杂的表达式分解成简单的部分分别计算。

## 3 重要极限

在极限计算中，有几个特别重要的极限，它们构成了解决复杂极限问题的基础。

**重要实例 1** (第一重要极限及其应用). 基本形式:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

相关变形:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

使用注意:

- $x$  必须以弧度为单位
- 分母必须是  $x$
- 常与等价无穷小代换结合使用

几何意义: 当  $x \rightarrow 0$  时:

- $\sin x \sim x$
- $\tan x \sim x$
- $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

**重要实例 2** (第二重要极限及其应用). 基本形式:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

常见变形:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

应用技巧:

- 注意提取极限中的幂指数形式
- 将复杂表达式转化为标准形式
- 结合对数进行化简

易错点:

- 底数和指数的变化需同步考虑
- 注意变形时的等价替换
- 区分极限不存在的情况

**重要实例 3** (等价无穷小的应用). 常用等价无穷小 ( $x \rightarrow 0$ ):

- $\sin x \sim x$
- $\tan x \sim x$
- $\arcsin x \sim x$
- $\ln(1+x) \sim x$
- $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

使用原则:

1. 乘除可以替换
2. 加减需要相同阶数
3. 替换后不能出现未定式

## 4 连续函数的性质

**定理 2** (连续函数的性质). 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则:

1. 有界性:  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界
2. 最值定理:  $f(x)$  在  $[a, b]$  上必取得最大值和最小值
3. 介值定理: 对于任意介于最小值和最大值之间的值, 函数都能取到