函数极限与连续错题集

Xuan

2025 年 2 月 10 日

1 函数的概念与特性

解题思路 1 (求函数). **题型特征：**

- 给出自变量为 x 变形式的函数表达式，要求求出自变量为 x 的函数表达式
- x 变形式的函数表达式可能有一个或两个
- x 变形式可能是 $-x$，$\dfrac{1}{x}$，$x+\dfrac{1}{x}$ 等形式

解题思路：

1. x 变形式的函数表达式有一个
   - 想办法构造出复合函数所表达的式子，可利用换元法
2. x 变形式的函数表达式有两个
   - 两个 x 变形式互换得新的函数表达式（一般互为相反数或倒数）
   - 与原函数表达式构成方程组，求解 $f(x)$

易错点总结：

- 没有解题思路惯性思维
- 未能构造出复合函数所表达的式子
- 未能正确互换两个 x 变形式
- 未能正确构造出方程组
- 未能正确求解 $f(x)$（计算能力）

例题 1 (单 x 变形式求函数). 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+x^3}{1+x^4}$，则当 $x\geqslant 2$ 时，$f(x)=$ ____.

解答 1. 解答步骤:

1. 关键点: 想办法构造出 $x+\dfrac{1}{x}$ 所表达的式子
2. **详细过程:**

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x+x^3}{1+x^4}\text{ ，令 } x+\frac{1}{x}=t\text{ ，则 } x^2+1=tx\text{ ，}$$

$$\text{代入 } f(t)=\frac{tx^2}{(tx)^2-2x^2}\text{ ，得 } f(t)=\frac{t}{t^2-1}\text{ ，}$$

$$\text{即 } f(x)=\frac{x}{x^2-1}\text{ 。}$$

易错提示:

- 没有解题思路惯性思维
- 换元法不熟练

例题 2 (双 x 变形式求函数)**.** 计算下列极限：设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$ ，且满足 $2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$ ，则 $f(x)=$____.

解答 2. 解答步骤：

1. 关键点：$f(x)$ 与 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 互换，得方程组求解 *f(x)*
2. **详细过程：**

$$\text{由 } 2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ ，得}$$

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}f(x)=\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{\frac{1+2x}{x^2}}{\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}}=\frac{1+2x}{x\sqrt{1+x^2}} \text{ ，}$$

$$\text{结合以上两式，消去 } f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ ，可得 } f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ 。}$$

易错提示：

- 认真计算，避免代数运算错误
  1. 消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 时，只让一个式子做变换，减少出错概率
  2. $\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}=\frac{1+2x}{x^2}\neq\frac{2+x}{x^2}$
  3. 计算到 $\frac{3}{2}f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{3x}{2}$ 时，不要丢单独计算出来的 $\frac{3x}{2}$ 的 x