

极限与连续错题集

Luan

2025 年 2 月 8 日

1 函数极限

在解决极限问题时，我们常常遇到需要使用有理化方法的情况。这类题目通常涉及根式，且直接代入会得到未定式。掌握有理化求极限的方法，对于解决此类问题至关重要。

解题思路 1 (有理化求极限). 题型特征:

- 含有根式: $\sqrt{1+x}$ 、 $\sqrt[3]{1+x}$ 等
- 为 $\frac{0}{0}$ 型未定式
- 分子含根式, 分母为多项式

解题思路:

1. 识别特征

- 是否含有根式
- 代入后是否为未定式
- 分子分母结构分析

2. 关键方法

- 有理化: 乘以分子分母的共轭式
- 约分: 化简后的分子分母约去公因式
- 代值: 最后代入极限点求值

3. 计算技巧

- 提取公因式简化计算
- 使用等价无穷小代换
- 注意正负号变化

易错点总结:

- 直接代入导致 $\frac{0}{0}$ 型未定式
- 有理化时忘记同分母运算
- 约分过程符号或计算错误
- 遗漏分母不为零的条件讨论

在下面这个典型例题中，我们将详细展示有理化方法的应用过程。这个例子代表了一类最基本的有理化求极限问题，通过这个例子可以很好地理解有理化的思路 and 技巧。

例题 1 (有理化求极限). 计算下列极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

分析: 代入 $x = 0$ 得到 $\frac{0}{0}$ 型未定式，需要通过有理化处理。

解答 1. 解决这类问题时，关键在于找到合适的有理化方式。通常我们选择与分子共轭的式子进行有理化，这样可以消去根式。下面是详细的解答过程:

解答步骤:

1. **关键点:** 分子分母同乘 $\sqrt{1+x} + 1$

2. **详细过程:**

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} \\ &= \frac{(\sqrt{1+x})^2 - 1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} \\ &= \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} \end{aligned}$$

3. **求极限:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2}$$

通过上述解答过程，我们可以看到有理化方法的优雅之处：它能够将含有根式的极限问题转化为简单的代数运算。这种方法不仅适用于本题，还可以推广到更复杂的情况。

易错提示:

- 直接代入会得到 $\frac{0}{0}$ 型未定式
- 有理化时要注意分子分母同时乘以共轭式
- 化简时注意不要遗漏分母项

这个例子展示了有理化求极限的基本思路和常见陷阱。在解决类似问题时，要特别注意有理化的选择和运算过程的严谨性。