

BÀI TẬP 1

Nhập môn Tính toán Lượng tử
(Kì 1 2025-2026)

1. Cho $x = e^{i\frac{\pi}{3}}, y = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.
 - (a) Vẽ minh họa x, y trên mặt phẳng phức.
 - (b) Tìm dạng đại số và dạng cực của x, y .
 - (c) Tính $\operatorname{Re}(x), \operatorname{Im}(x), |x|, \arg x$.
 - (d) Tính $\bar{x}, -x, x^{-1}$.
 - (e) Tính $x + y, x - y, xy, \frac{x}{y}, \frac{y}{x}$.
 - (f) Tính x^4 và $x^n, n \in \mathbb{Z}$.
 - (g) Tính $\sqrt[4]{x}$ và $\sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}^+$.
2. Cho $x, y \in \mathbb{C}$, chứng minh
 - (a) $x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2$.
 - (b) $\overline{x^{-1}} = (\bar{x})^{-1}$ ($x \neq 0$).
 - (c) $|xy| = |x||y|$.
 - (d) $|x + y| \leq |x| + |y|$.
3. Cho $|\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle, |\psi\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$
 - (a) Tính $\langle\phi|$ và $\langle\psi|$.
 - (b) Tính $\langle\phi|\psi\rangle$ và $\langle\psi|\phi\rangle$.
 - (c) Tính $|\phi\rangle\langle\psi|$ và $|\psi\rangle\langle\phi|$.
 - (d) Tính $|\phi\rangle|\psi\rangle$ và $|\psi\rangle|\phi\rangle$.
 - (e) Tính $\|\phi\|$ và $\|\psi\|$.
 - (f) Tính góc giữa $|\phi\rangle$ với $|\psi\rangle$.
 - (g) Tính $\operatorname{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle$ và $\operatorname{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle$.
 - (h) Chuẩn hóa $\operatorname{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle$ và $\operatorname{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle$.
 - (i) Tìm tọa độ của $|\phi\rangle$ và $|\psi\rangle$ trong các cơ sở

$$B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}, B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}, B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}.$$

- (j) Cho $|a\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle, |b\rangle = \frac{i}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$, chứng minh $B = \{a, b\}$ là một cơ sở trực chuẩn của \mathbb{C}^2 và tìm tọa độ của $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ theo B .

4. Cho U là toán tử trên \mathbb{C}^2 với

$$U|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, \quad U|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Tìm biểu diễn của U trong cơ sở chính tắc $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$.
- (b) Cho $|\phi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$, tìm $U|\phi\rangle$.
- (c) U có unita không?
- (d) U có Hermite không?
- (e) Tìm U^\dagger, U^{-1} .
- (f) Tìm $HUH|0\rangle, HUH|1\rangle$ và HUH (H là ma trận Hadamard).
- (g) Tìm $UHU|0\rangle, UHU|1\rangle$ và UHU .

5. Chứng minh $XY = iZ$ bằng cách

- (a) Nhân ma trận.
- (b) Xét tác động của các toán tử trên $|0\rangle, |1\rangle$.

6. Cho $|\phi\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}+i}{4}|11\rangle$

- (a) Cho thấy $|\phi\rangle$ là vector đơn vị.
- (b) Tính $\text{proj}_{|+-\rangle} |\phi\rangle$ và chuẩn hóa $\text{proj}_{|+-\rangle} |\phi\rangle$.
- (c) Tính tọa độ của $|\phi\rangle$ theo cơ sở Bell.

7. Kiểm tra các vector sau có phân tách được

- (a) $|\phi_1\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$.
- (b) $|\phi_2\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}|00\rangle - \sqrt{3}|01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$.
- (c) $|\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + i|11\rangle)$.
- (d) $|\phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1-\rangle$.

8. Cho $|\phi\rangle = \frac{1}{4}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|11\rangle$

- (a) Tính $(H \otimes X)|\phi\rangle$.
- (b) Tính CNOT $|\phi\rangle$.