

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TPHCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Bài tập 2

Đề tài: Qubit, Hệ nhiều Qubit

Môn học: Nhập môn Tính toán lượng tử

Sinh viên thực hiện:

Lưu Thượng Hồng (23122006)

Giáo viên hướng dẫn:

ThS. Vũ Quốc Hoàng

Ngày 8 tháng 11 năm 2025



Mục lục

1	Bài 1	1
1.1	(a)	1
1.2	(b)	2
1.3	(c)	2
2	Bài 2	3
3	Bài 3	6
3.1	(a)	6
3.2	(b)	7
3.3	(c)	8
3.4	(d)	8
4	Bài 4	9
4.1	(a)	9
4.2	(b)	10
4.3	(c)	10
5	Bài 5	11
5.1	(a)	11
5.2	(b)	12
5.3	(c)	13
5.4	(d)	15
6	Bài 6	16
6.1	(a)	16
6.2	(b)	16
6.3	(c)	16
6.4	(d)	17
6.5	(e)	18

7	Bài 7	18
7.1	(a)	19
7.2	(b)	19
7.3	(c)	19
7.4	(d)	20
8	Bài 8	20
8.1	(a)	21
8.2	(b)	21
8.3	(c)	21

1 Bài 1

Đề bài: Khảo sát phép đo theo các cơ sở $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$, $B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$, $B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$ của các trạng thái lượng tử sau.

1.1 (a)

Đề bài: $|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$.

Bài làm:

Cơ sở B_Z : $[\psi_1]_{B_Z} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Khi đo $|\psi_1\rangle$ theo cơ sở B_Z thì sẽ được $|0\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \frac{3}{4}$, được $|1\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}$.

Cơ sở B_X : Trạng thái $|\psi_1\rangle$ biểu diễn theo cơ sở B_X như sau:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \langle +|\psi_1\rangle|+\rangle + \langle -|\psi_1\rangle|-\rangle \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)|+\rangle + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)|-\rangle \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}|-\rangle \end{aligned}$$

Khi đo $|\psi_1\rangle$ theo cơ sở B_X thì sẽ được $|+\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$, được $|-\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

Cơ sở B_Y : Trạng thái $|\psi_1\rangle$ biểu diễn theo cơ sở B_Y như sau:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \langle i|\psi_1\rangle|i\rangle + \langle -i|\psi_1\rangle|-i\rangle \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-i}{\sqrt{2}}\right)|i\rangle + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{i}{\sqrt{2}}\right)|-i\rangle \\ &= \frac{\sqrt{3}-i}{2\sqrt{2}}|i\rangle + \frac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{2}}|-i\rangle \end{aligned}$$

Khi đo $|\psi_1\rangle$ theo cơ sở B_Y thì sẽ được $|i\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{\sqrt{3}-i}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$, được $|-i\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$.

1.2 (b)

Đề bài: $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle)$.

Bài làm:

Cơ sở B_Z : $[\psi_2]_{B_Z} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$.

Khi đo $|\psi_2\rangle$ theo cơ sở B_Z thì sẽ được $|0\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$, được $|1\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}}\right|^2 = \frac{1}{2}$.

Cơ sở B_X : Trạng thái $|\psi_2\rangle$ biểu diễn theo cơ sở B_X như sau:

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= \langle +|\psi_2\rangle|+\rangle + \langle -|\psi_2\rangle|- \rangle \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)|+\rangle + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)|- \rangle \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)|+\rangle + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)|- \rangle \end{aligned}$$

Khi đo $|\psi_2\rangle$ theo cơ sở B_X thì sẽ được $|+\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right|^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$, được $|-\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right|^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

Cơ sở B_Y : Trạng thái $|\psi_2\rangle$ biểu diễn theo cơ sở B_Y như sau:

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= \langle i|\psi_2\rangle|i\rangle + \langle -i|\psi_2\rangle|-i\rangle \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{-i}{\sqrt{2}}\right)|i\rangle + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{i}{\sqrt{2}}\right)|-i\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)|i\rangle + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)|-i\rangle \end{aligned}$$

Khi đo $|\psi_2\rangle$ theo cơ sở B_Y thì sẽ được $|i\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{1}{2} - \frac{i}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right|^2 = \frac{3}{4}$, được $|-i\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{1}{2} + \frac{i}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right|^2 = \frac{1}{4}$.

1.3 (c)

Đề bài: $|\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$.

Bài làm:

Cơ sở B_Z : $[\psi_3]_{B_Z} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1-2i}{3}\right)$.

Khi đo $|\psi_3\rangle$ theo cơ sở B_Z thì sẽ được $|0\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{2}{3}\right|^2 = \frac{4}{9}$, được $|1\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{1-2i}{3}\right|^2 = \frac{5}{9}$.

Cơ sở B_X : Trạng thái $|\psi_3\rangle$ biểu diễn theo cơ sở B_X như sau:

$$\begin{aligned} |\psi_3\rangle &= \langle +|\psi_3\rangle|+\rangle + \langle -|\psi_3\rangle|- \rangle \\ &= \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1-2i}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) |+\rangle + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1-2i}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) |- \rangle \\ &= \left(\frac{3-2i}{3\sqrt{2}} \right) |+\rangle + \left(\frac{1+2i}{3\sqrt{2}} \right) |- \rangle \end{aligned}$$

Khi đo $|\psi_3\rangle$ theo cơ sở B_X thì sẽ được $|+\rangle$ với xác suất là $\left| \frac{3-2i}{3\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{13}{18}$, được $|- \rangle$ với xác suất là $\left| \frac{1+2i}{3\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{5}{18}$.

Cơ sở B_Y : Trạng thái $|\psi_3\rangle$ biểu diễn theo cơ sở B_Y như sau:

$$\begin{aligned} |\psi_3\rangle &= \langle i|\psi_3\rangle|i\rangle + \langle -i|\psi_3\rangle|-i\rangle \\ &= \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1-2i}{3} \cdot \frac{-i}{\sqrt{2}} \right) |i\rangle + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1-2i}{3} \cdot \frac{i}{\sqrt{2}} \right) |-i\rangle \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}i \right) |i\rangle + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}i \right) |-i\rangle \end{aligned}$$

Khi đo $|\psi_3\rangle$ theo cơ sở B_Y thì sẽ được $|i\rangle$ với xác suất là $\left| -\frac{\sqrt{2}}{6}i \right|^2 = \frac{1}{18}$, được $|-i\rangle$ với xác suất là $\left| \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}i \right|^2 = \frac{17}{18}$.

2 Bài 2

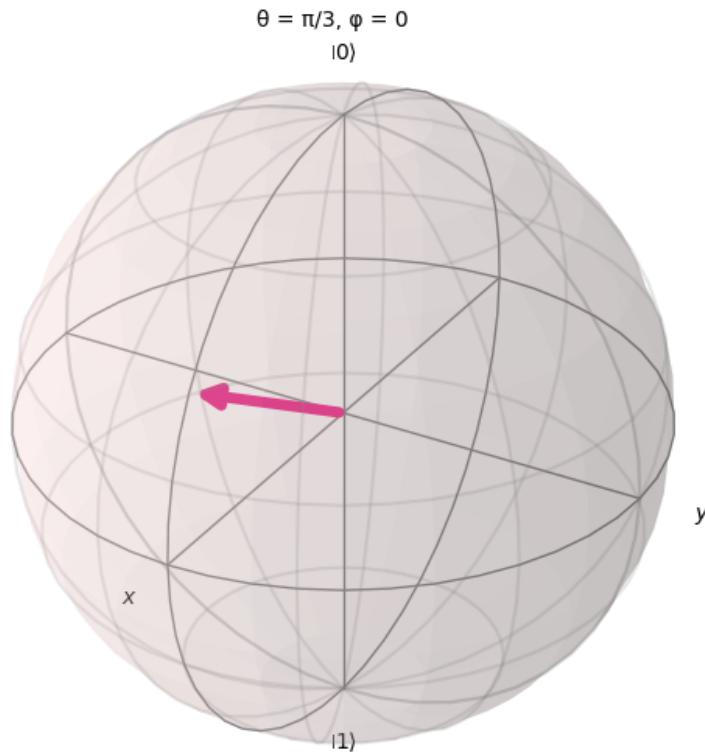
Đề bài: Viết dạng Bloch và mô tả trên mặt cầu Bloch các trạng thái lượng tử ở Câu 1.

Bài làm:

Trạng thái $|\psi_1\rangle$:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{\sqrt{3}}{2} |0\rangle + \frac{1}{2} |1\rangle = \cos \frac{\pi}{6} |0\rangle + e^{i0} \sin \frac{\pi}{6} |1\rangle \\ &\implies \theta = \frac{\pi}{3}, \phi = 0 \end{aligned}$$

Hình vẽ:



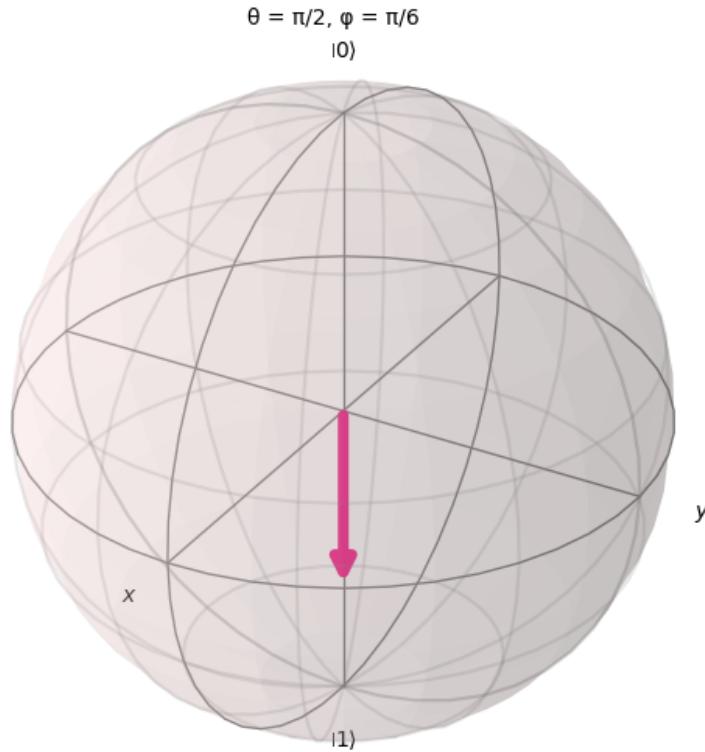
Hình 1: Trạng thái $|\psi_1\rangle$ trên mặt cầu Bloch

Trạng thái $|\psi_2\rangle$:

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle = \cos \frac{\pi}{4}|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}} \sin \frac{\pi}{4}|1\rangle$$
$$\implies \theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{\pi}{6}$$

Hình vẽ:

Bài tập 2



Hình 2: Trạng thái $|\psi_2\rangle$ trên mặt cầu Bloch

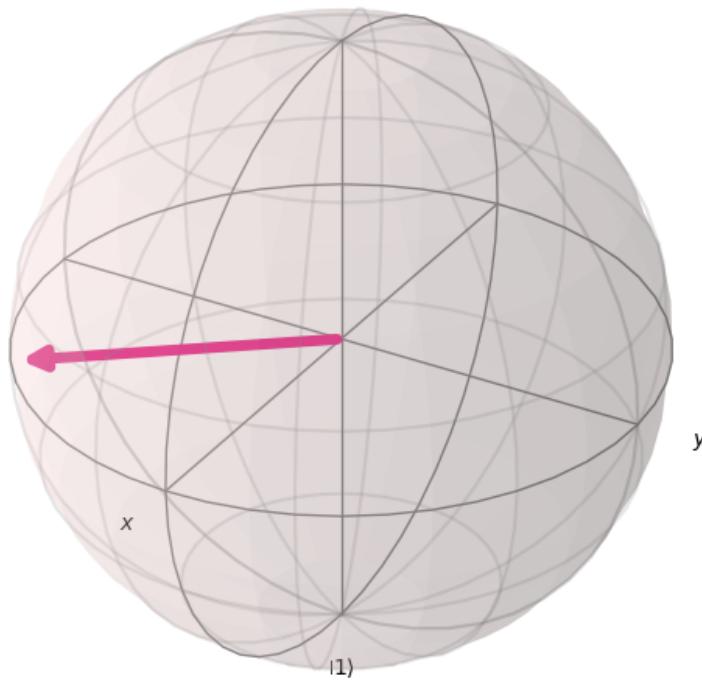
Trạng thái $|\psi_3\rangle$:

$$\begin{aligned}
 |\psi_3\rangle &= \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \\
 \implies &\begin{cases} \cos\frac{\theta}{2} = \frac{2}{3} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1-2i}{3} \end{cases} \\
 \implies &\begin{cases} \cos\frac{\theta}{2} = \frac{2}{3} \\ e^{i\phi} = \frac{\frac{1-2i}{3}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{\frac{1-2i}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}} = \frac{\frac{1-2i}{3}}{\sqrt{\frac{5}{9}}} = \frac{1-2i}{\sqrt{5}} \end{cases} \\
 \implies &\begin{cases} \theta = 2\arccos\frac{2}{3} \approx 0.841 \\ \phi = \arg\frac{1-2i}{\sqrt{5}} = \arctan(-2) \approx -1.107 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Hình vẽ:

$$\theta = 2 * \arccos(2/3), \varphi = \arctan(-2)$$

$|0\rangle$



Hình 3: Trạng thái $|\psi_3\rangle$ trên mặt cầu Bloch

3 Bài 3

Đề bài: Cho U là một toán tử tuyến tính trên \mathbb{C}^2 , biết $U|0\rangle = \frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle$, $U|1\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle$.

Ma trận biểu diễn của U theo cơ sở tính toán là:

$$U = \begin{bmatrix} U|0\rangle & U|1\rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2}-i & 1 \\ -1 & \sqrt{2}+i \end{bmatrix}$$

3.1 (a)

Đề bài: Chứng minh U là một cổng lượng tử.

Bài làm: Vì U là toán tử tuyến tính trên \mathbb{C}^2 nên đã thoả điều kiện:

$$U(\alpha|\phi\rangle + \beta|\psi\rangle) = \alpha U|\phi\rangle + \beta U|\psi\rangle, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall |\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$$

Ta cần chứng minh:

$$\|U|\phi\rangle\| = \||\phi\rangle\|, \quad \forall |\phi\rangle \in \mathbb{C}^2$$

$\implies U$ bảo toàn chuẩn, hay U là ma trận unita

$$\implies U^\dagger U = I$$

Ta có:

$$U^\dagger = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} + i & -1 \\ 1 & \sqrt{2} - i \end{bmatrix}$$

$$\implies U^\dagger U = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \sqrt{2} + i & -1 \\ 1 & \sqrt{2} - i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} - i & 1 \\ -1 & \sqrt{2} + i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Vậy U là ma trận unita, tức là U là một cỗng lượng tử.

3.2 (b)

Đề bài: Cho biết kết quả biến đổi U trên các trạng thái $|+\rangle, |-\rangle, |i\rangle, |-i\rangle$.

Bài làm: Ta có:

$$U|+\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} - i & 1 \\ -1 & \sqrt{2} + i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} - i + 1 \\ \sqrt{2} + i - 1 \end{bmatrix}$$

$$U|-\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} - i & 1 \\ -1 & \sqrt{2} + i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} - i - 1 \\ -\sqrt{2} - i - 1 \end{bmatrix}$$

$$U|i\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} - i & 1 \\ -1 & \sqrt{2} + i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -2 + i\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$U|-i\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} - i & 1 \\ -1 & \sqrt{2} + i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} - 2i \\ -i\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

3.3 (c)

Đề bài: Cho biết kết quả biến đổi U trên các trạng thái của Câu 1.

Bài làm: Ta có:

$$\begin{aligned} U|\psi_1\rangle &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2}-i & 1 \\ -1 & \sqrt{2}+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{6}-i\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}+\sqrt{2}+i \end{bmatrix} \\ U|\psi_2\rangle &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2}-i & 1 \\ -1 & \sqrt{2}+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2}-i+e^{i\frac{\pi}{6}} \\ -1+(\sqrt{2}+i)e^{i\frac{\pi}{6}} \end{bmatrix} \\ U|\psi_3\rangle &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2}-i & 1 \\ -1 & \sqrt{2}+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1-2i}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1+2\sqrt{2}-4i \\ \sqrt{2}+(1-2\sqrt{2})i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.4 (d)

Đề bài: U tương ứng với phép quay quanh trục nào với góc bao nhiêu trên mặt cầu Bloch?

Bài làm:

Vì U unita nên luôn tìm được 2 vector riêng $|u_1\rangle, |u_2\rangle$ lập thành một cơ sở trực chuẩn với các trị riêng tương ứng là $e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}$, khi đó:

$$U|u_1\rangle = e^{i\theta_1}|u_1\rangle \equiv |u_1\rangle, \quad U|u_2\rangle = e^{i\theta_2}|u_2\rangle \equiv |u_2\rangle$$

Ta cần tìm 2 trị riêng và vector riêng của U .

Ta có ma trận đặc trưng:

$$\begin{aligned} U - \lambda I &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2}-i-2\lambda & 1 \\ -1 & \sqrt{2}+i-2\lambda \end{bmatrix} \\ \det(U - \lambda I) &= \frac{1}{4} [(\sqrt{2}-i-2\lambda)(\sqrt{2}+i-2\lambda) + 1] \\ &= \frac{1}{4} [4\lambda^2 - 4\sqrt{2}\lambda + 4] = 0 \\ \implies &\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}} \\ \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2} = e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Tìm vector riêng tương ứng với trị riêng:

Với $\lambda_1 : (U - \lambda_1 I) |u_1\rangle = 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i(1 + \sqrt{2}) & 1 \\ -1 & i(1 - \sqrt{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} -i(1 + \sqrt{2})a + b = 0 \\ -a + i(1 - \sqrt{2})b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = i(1 + \sqrt{2}) \end{cases} \Rightarrow |u_1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ i(1 + \sqrt{2}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Với $\lambda_2 : (U - \lambda_2 I) |u_2\rangle = 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i(1 - \sqrt{2}) & 1 \\ -1 & i(1 + \sqrt{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} -i(1 - \sqrt{2})c + d = 0 \\ -c + i(1 + \sqrt{2})d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ d = i(1 - \sqrt{2}) \end{cases} \Rightarrow |u_2\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ i(1 - \sqrt{2}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vậy U tương ứng với phép quay quanh trục tạo bởi $|u_1\rangle, |u_2\rangle$ với góc θ trên mặt cầu Bloch, trong đó:

$$\theta = \theta_2 - \theta_1 = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

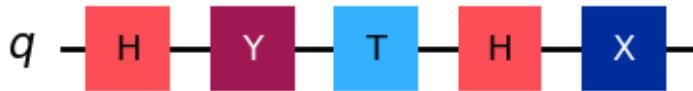
4 Bài 4

Đề bài: Từ trạng thái đầu vào $|0\rangle$,

4.1 (a)

Đề bài: Vẽ mạch mô tả tính toán HYTHX.

Bài làm:



Hình 4: Mạch tính toán HYTHX

4.2 (b)

Đề bài: Tính đầu ra của Câu (a).

Bài làm: Ta có:

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= XHTYH|0\rangle \\
 &= XHTY\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \\
 &= XHT\left(\frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|0\rangle\right) \\
 &= XH\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}|1\rangle\right) \\
 &= X\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}|-\rangle\right) \\
 &= -\frac{i}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}|-\rangle
 \end{aligned}$$

4.3 (c)

Đề bài: Thêm phép đo $\tilde{\sigma}$ cuối mạch của Câu (a) và tính xác suất được 1.

Bài làm: Ta có:

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= -\frac{i}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}|-\rangle \\
 &= \left(-\frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle + \left(-\frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)|1\rangle \\
 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{2+\sqrt{2}}{4}i\right)|0\rangle + \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{-2+\sqrt{2}}{4}i\right)|1\rangle
 \end{aligned}$$

Xác suất được $|1\rangle$ là:

$$\left| \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{-2+\sqrt{2}}{4}i \right) \right|^2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 + \left(\frac{-2+\sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

5 Bài 5

Đề bài: Cho biết các trạng thái sau là tách được hay vuông, nếu tách được thì biểu diễn trên mặt cầu Bloch.

5.1 (a)

Đề bài: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$.

Bài làm: Ta có:

$$|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Giả sử $|\phi_1\rangle$ tách được, tức là tồn tại $|\psi_1\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ và $|\psi_2\rangle = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ sao cho $|\phi_1\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$

Ta có:

$$|\phi_1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{bmatrix}$$

Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} ac = 0 \\ ad = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ bc = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ bd = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} acbd = 0 \\ acbd = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{Mâu thuẫn})$$

Vậy $|\phi_1\rangle$ không tách được.

5.2 (b)

Đề bài: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + i|11\rangle)$.

Bài làm: Ta có:

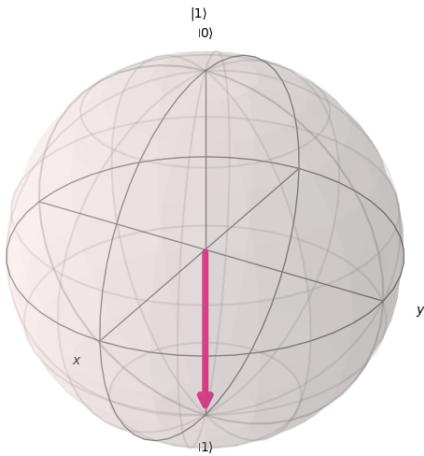
$$\begin{aligned} |\phi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + i|11\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle \otimes (|0\rangle + i|1\rangle)] \\ &= |1\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \\ &= |1\rangle \otimes |i\rangle \end{aligned}$$

Vậy $|\phi_2\rangle$ tách được.

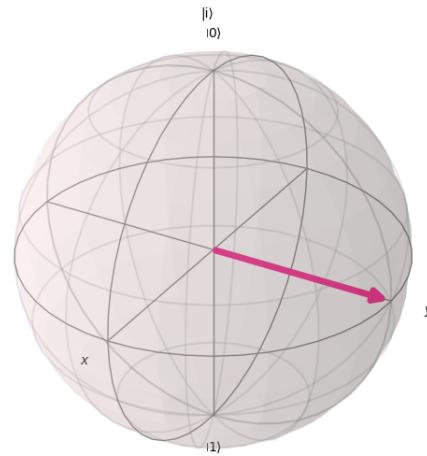
Dạng Bloch:

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \cos \frac{\pi}{2} |0\rangle + e^{i0} \sin \frac{\pi}{2} |1\rangle \implies \theta = \pi, \phi = 0 \\ |i\rangle &= \cos \frac{\pi}{4} |0\rangle + e^{i\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{4} |1\rangle \implies \theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Hình vẽ:



Hình 5: Trạng thái $|11\rangle$ trên mặt cầu Bloch



Hình 6: Trạng thái $|i\rangle$ trên mặt cầu Bloch

5.3 (c)

Đề bài: $\frac{1}{4}(3|00\rangle - \sqrt{3}|01\rangle + \sqrt{3}|10\rangle - |11\rangle)$.

Bài làm:

Ta có:

$$\begin{aligned}
 |\phi_3\rangle &= \frac{1}{4} \left(3|00\rangle - \sqrt{3}|01\rangle + \sqrt{3}|10\rangle - |11\rangle \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left[|0\rangle \otimes (3|0\rangle - \sqrt{3}|1\rangle) + \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle \otimes (3|0\rangle - \sqrt{3}|1\rangle) \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[\left(|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle \right) \otimes \left(3|0\rangle - \sqrt{3}|1\rangle \right) \right] \\
 &= \left(\frac{1}{4}|0\rangle + \frac{1}{4\sqrt{3}}|1\rangle \right) \otimes \left(3|0\rangle - \sqrt{3}|1\rangle \right) \\
 &= |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle
 \end{aligned}$$

Bài tập 2

Vậy $|\phi_3\rangle$ tách được.

Chuẩn hoá $|\psi_1\rangle$ và $|\psi_2\rangle$ và chuyển về dạng Bloch:

$$|\psi_1\rangle = \frac{\frac{1}{4}|0\rangle + \frac{1}{4\sqrt{3}}|1\rangle}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\right)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle = \cos \frac{\pi}{6}|0\rangle + e^{i0} \sin \frac{\pi}{6}|1\rangle$$

$$\implies \theta = \frac{\pi}{3}, \phi = 0$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{3|0\rangle - \sqrt{3}|1\rangle}{\sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle = \cos \frac{\pi}{6}|0\rangle + e^{i\pi} \sin \frac{\pi}{6}|1\rangle$$

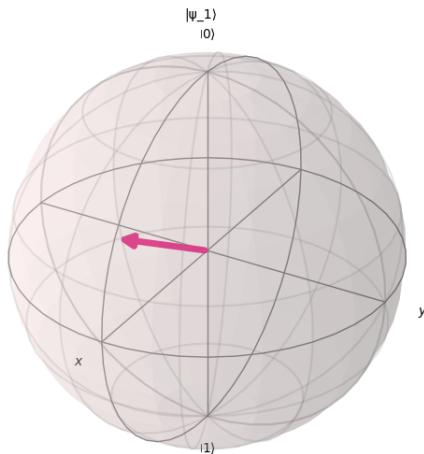
$$\implies \theta = \frac{\pi}{3}, \phi = \pi$$

Dạng Bloch:

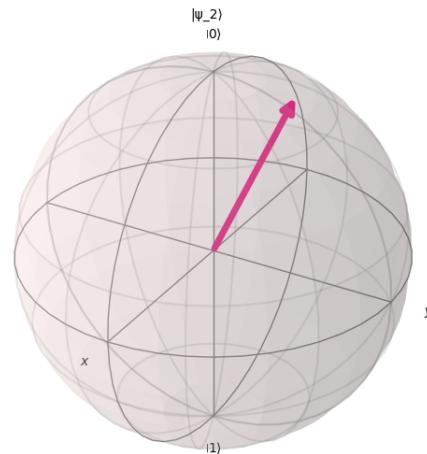
$$|\psi_1\rangle = \cos \frac{\pi}{6}|0\rangle + e^{i0} \sin \frac{\pi}{6}|1\rangle \implies \theta = \frac{\pi}{3}, \phi = 0$$

$$|\psi_2\rangle = \cos \frac{\pi}{6}|0\rangle + e^{i\pi} \sin \frac{\pi}{6}|1\rangle \implies \theta = \frac{\pi}{3}, \phi = \pi$$

Hình vẽ:



Hình 7: Trạng thái $|\psi_1\rangle$ trên mặt cầu Bloch



Hình 8: Trạng thái $|\psi_2\rangle$ trên mặt cầu Bloch

5.4 (d)

Đề bài: $\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle|+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle|- \rangle$. **Bài làm:**

$$\begin{aligned} |\phi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|0+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1-\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Giả sử $|\phi_3\rangle$ tách được, tức là tồn tại $|\psi_1\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ và $|\psi_2\rangle = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ sao cho $|\phi_4\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$

Ta có:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle &= \begin{bmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{bmatrix} \\ |\phi_3\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \implies \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} ac = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ ad = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ bc = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ bd = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{ac}{ad} = \frac{c}{d} = 1 \\ \frac{bc}{bd} = \frac{c}{d} = -1 \end{cases} \quad (\text{Mâu thuẫn})$$

Vậy $|\phi_3\rangle$ không tách được.

6 Bài 6

Đề bài: Cho hệ 2 qubit với trạng thái $|\psi\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle - \frac{i}{2}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$. Khảo sát các phép đo sau.

6.1 (a)

Đề bài: Đo đồng thời 2 qubit.

Bài làm:

Khi đo đồng thời 2 qubit theo cơ sở tính toán, ta có các kết quả và xác suất tương ứng như sau:

- Được $|00\rangle$ với xác suất $P_{00} = \left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}$
- Được $|10\rangle$ với xác suất $P_{10} = \left|-\frac{i}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}$
- Được $|11\rangle$ với xác suất $P_{11} = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$

6.2 (b)

Đề bài: Đo qubit 0.

Bài làm:

Để đo riêng qubit 0 theo cơ sở tính toán, ta viết lại:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{2}|0\rangle \otimes |0\rangle - \frac{i}{2}|1\rangle \otimes |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \otimes |1\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2}|0\rangle - \frac{i}{2}|1\rangle\right) \otimes |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \otimes |1\rangle \end{aligned}$$

Khi đó, qubit 0 được:

- $|0\rangle$ với xác suất $\left|\frac{1}{2}|0\rangle - \frac{i}{2}|1\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}$.
- $|1\rangle$ với xác suất $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}$.

6.3 (c)

Đề bài: Đo qubit 1.

Bài làm:

Để đo riêng qubit 1 theo cơ sở tính toán, ta viết lại:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{2}|0\rangle \otimes |0\rangle - \frac{i}{2}|1\rangle \otimes |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \otimes |1\rangle \\ &= |0\rangle \otimes \frac{1}{2}|0\rangle + |1\rangle \otimes \left(-\frac{i}{2}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \end{aligned}$$

Khi đó, qubit 1 được:

- $|0\rangle$ với xác suất $\left|\frac{1}{2}|0\rangle\right|^2 = \frac{1}{4}$.
- $|1\rangle$ với xác suất $\left|-\frac{i}{2}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right|^2 = \frac{3}{4}$.

6.4 (d)

Đề bài: Đo qubit 0 rồi đo qubit 1 và so kết quả với Câu (a).

Bài làm:

Khi đo qubit 0, ta có 2 trường hợp:

- Qubit 0 được $|0\rangle$ với xác suất $\frac{1}{2}$ và hệ sụp đổ thành:

$$|\psi_0\rangle = \frac{\frac{1}{2}|0\rangle - \frac{i}{2}|1\rangle}{\left|\frac{1}{2}|0\rangle - \frac{i}{2}|1\rangle\right|} \otimes |0\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \otimes |0\rangle$$

Tiếp tục đo qubit 1, ta được $|00\rangle$ với xác suất $\frac{1}{2}$, được $|10\rangle$ với xác suất $\frac{1}{2}$.

- Qubit 0 được $|1\rangle$ với xác suất $\frac{1}{2}$ và hệ sụp đổ thành:

$$|\psi_0\rangle = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle}{\left|\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right|} \otimes |1\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle$$

Tiếp tục đo qubit 1, ta được $|11\rangle$ với xác suất 1.

Tổng hợp lại, ta có các kết quả và xác suất tương ứng như sau:

- Được $|00\rangle$ với xác suất $P_{00} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- Được $|10\rangle$ với xác suất $P_{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- Được $|11\rangle$ với xác suất $P_{11} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

So sánh với Câu (a), ta thấy kết quả giống hệt nhau. Vậy việc đo qubit 0 trước không làm thay đổi xác suất thu được các trạng thái khi đo đồng thời 2 qubit.

6.5 (e)

Đề bài: Đo qubit 1 rồi đo qubit 0 và so kết quả với Câu (a).

Bài làm:

Khi đo qubit 1, ta có 2 trường hợp:

- Qubit 1 được $|0\rangle$ với xác suất $\frac{1}{4}$ và hệ sụp đổ thành:

$$|\psi_1\rangle = \frac{\frac{1}{2}|0\rangle}{\left|\frac{1}{2}|0\rangle\right|} \otimes |0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$$

Tiếp tục đo qubit 0, ta được $|00\rangle$ với xác suất 1.

- Qubit 1 được $|1\rangle$ với xác suất $\frac{3}{4}$ và hệ sụp đổ thành:

$$|\psi_1\rangle = \frac{-\frac{i}{2}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle}{\left|-\frac{i}{2}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right|} \otimes |1\rangle = \left(-\frac{i}{\sqrt{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle\right) \otimes |1\rangle$$

Tiếp tục đo qubit 0, ta được $|10\rangle$ với xác suất $\frac{1}{3}$, được $|11\rangle$ với xác suất $\frac{2}{3}$.

Tổng hợp lại, ta có các kết quả và xác suất tương ứng như sau:

- Được $|00\rangle$ với xác suất $P_{00} = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$
- Được $|10\rangle$ với xác suất $P_{10} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$
- Được $|11\rangle$ với xác suất $P_{11} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

So sánh với Câu (a), ta thấy kết quả giống hệt nhau. Vậy việc đo qubit 1 trước không làm thay đổi xác suất thu được các trạng thái khi đo đồng thời 2 qubit.

7 Bài 7

Đề bài: Khảo sát phép toán 2 qubit $U = H \otimes X$.

7.1 (a)

Đề bài: Cho biết tác động của U lên các vector của cơ sở tính toán.

Bài làm:

$$\begin{aligned} U|00\rangle &= (H \otimes X)(|0\rangle \otimes |0\rangle) = H|0\rangle \otimes X|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \\ U|01\rangle &= (H \otimes X)(|0\rangle \otimes |1\rangle) = H|0\rangle \otimes X|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \\ U|10\rangle &= (H \otimes X)(|1\rangle \otimes |0\rangle) = H|1\rangle \otimes X|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \\ U|11\rangle &= (H \otimes X)(|1\rangle \otimes |1\rangle) = H|1\rangle \otimes X|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \end{aligned}$$

7.2 (b)

Đề bài: Xác định ma trận biểu diễn của U từ Câu (a).

Bài làm:

Từ Câu (a), ta có ma trận biểu diễn của U là:

$$U = \begin{bmatrix} U|00\rangle & U|01\rangle & U|10\rangle & U|11\rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

7.3 (c)

Đề bài: Xác định ma trận biểu diễn của U bằng phép tích tensor.

Bài làm:

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\implies H \otimes X &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & -1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

7.4 (d)

Đề bài: Cho biết tác động của U lên trạng thái $|\psi\rangle = \frac{1}{4}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|11\rangle$.

Bài làm:

$$\begin{aligned}
U|\psi\rangle &= U \left(\frac{1}{4}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|11\rangle \right) \\
&= \frac{1}{4}U|00\rangle + \frac{1}{2}U|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}U|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}U|11\rangle \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \right) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \right) \\
&= \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \right)|00\rangle + \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right)|01\rangle + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \right)|10\rangle + \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right)|11\rangle
\end{aligned}$$

8 Bài 8

Đề bài: Xét trạng thái 3 qubit $|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle$.

8.1 (a)

Đề bài: Chứng minh $|GHZ\rangle$ là trạng thái vương. **Bài làm:**

8.2 (b)

Đề bài: Khảo sát phép đo riêng qubit 0, qubit 1, qubit 2 và nhận xét. **Bài làm:**

8.3 (c)

Đề bài: Thiết kế mạch 3 qubit để tạo trạng thái $|GHZ\rangle$. **Bài làm:**