Qubit

Nhập môn Tính toán Lượng tử
(Introduction to Quantum Computing)

Vũ Quốc Hoàng (vqhoang@fit.hcmus.edu.vn)

FIT - HCMUS

2025

Nội dung

Nội dung

Qubit

Một **bit lượng tử** (qubit, quantum bit) là một hệ thống lượng tử có trạng thái là sự **chồng chất** (superposition) của 2 trạng thái cơ bản. Hệ thống này còn được gọi là **hệ thống lượng tử 2 mức** (two-level quantum system).

Nếu kí hiệu 2 trạng thái cơ bản của hệ là 0, 1 và đồng nhất với 2 ket

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

thì trạng thái ψ của qubit được mô tả là một tổ hợp tuyến tính của $|0\rangle, |1\rangle$

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2.$$

Hơn nữa, để thuận tiện tính toán, ta yêu cầu $|\psi\rangle$ phải được chuẩn hóa ($|\psi\rangle$ là vector đơn vị)

$$|||\psi\rangle|| = 1 \Leftrightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Qubit (tt)

Trong tính toán lượng tử, trạng thái lượng tử và ket biểu diễn nó được dùng lẫn lộn!

Các trạng thái sau đây của qubit rất hay được dùng

$$|0\rangle = 1|0\rangle + 0|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, |1\rangle = 0|0\rangle + 1|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, |\text{-}i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

(Kiểm tra các trạng thái này đều đã được chuẩn hóa!)

Nội dung

Phép đo

Ta đã biết $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{C}^2$, được gọi là cơ sở chuẩn tắc hay cơ sở Z. Trong tính toán lượng tử, cơ sở này còn được gọi là **cơ sở tính toán** (computational basis).

Một qubit ở trạng thái $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ khi được thực hiện **phép đo** (measurement) theo cơ sở tính toán sẽ được 1 trong 2 kết quả

- được 0 với xác suất $|\alpha|^2$ và ngay sau khi đo thì qubit chuyển sang trạng thái $|0\rangle$,
- được 1 với xác suất $|\beta|^2$ và ngay sau khi đo thì qubit chuyển sang trạng thái $|1\rangle$.

Việc chuyển trạng thái khi đo còn được gọi là sự **sụp đổ** (collapse).

Để phân biệt, trong trạng thái lượng tử $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, các hệ số α, β được gọi là các **amplitude**, còn $|\alpha|^2, |\beta|^2$ là các xác suất. Nhận xét, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ như yêu cầu của xác suất vì việc đo qubit chỉ cho ra 1 trong 2 kết quả.

Phép đo (tt)

Tổng quát, cho $B = \{|a\rangle, |b\rangle\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{C}^2$, trạng thái $|\psi\rangle$ của qubit có thể được viết theo cơ sở B là

$$|\psi\rangle = \langle a|\psi\rangle|a\rangle + \langle b|\psi\rangle|b\rangle.$$

Khi đó, phép đo theo cơ sở B sẽ cho 1 trong 2 kết quả

- được a với xác suất $|\langle a|\psi\rangle|^2$ và sụp đổ thành $|a\rangle$,
- được b với xác suất $|\langle b|\psi\rangle|^2$ và sụp đổ thành $|b\rangle$.

Lưu ý, $(\langle a|\psi\rangle, \langle b|\psi\rangle)$ là tọa độ của $|\psi\rangle$ theo cơ sở B.

(Kiểm tra $|\langle a|\psi\rangle|^2 + |\langle b|\psi\rangle|^2 = 1$!)

(Kiểm tra phép đo theo cơ sở tính toán chỉ là một trường hợp của định nghĩa này!)

Phép đo (tt)

Ví dụ 1

Qubit ở trạng thái $|0\rangle$ khi đo (theo cơ sở tính toán) sẽ chắc chắn được 0 (xác suất được 0 là 100%) và vẫn giữ trạng thái $|0\rangle$ sau khi đo. Qubit ở trạng thái $|1\rangle$ khi đo sẽ chắc chắn được 1 và vẫn giữ trạng thái $|1\rangle$. Do đó, $|0\rangle, |1\rangle$ tương tự như 0, 1 của **bit cổ điển** (classical bit).

Các trạng thái $|+\rangle, |-\rangle, |i\rangle, |\text{-}i\rangle$ là các trạng thái "tổ hợp đều" vì khi đo sẽ được 0 hoặc 1 với xác suất như nhau (50% được 0, 50% được 1). Chẳng hạn, xác suất được 0, 1 khi đo $|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle$ lần lượt là $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}, \left|\frac{i}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$.

Trạng thái $|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$ thì "thiên về 0" vì khi đo, xác suất được 0 là $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \frac{3}{4}$ (xác suất được 1 là $\frac{1}{4}$).

Phép đo (tt)

Ví dụ 1 (tt)

Trạng thái $|0\rangle$ viết theo cơ sở $B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$ là

$$|0\rangle = \langle +|0\rangle|+\rangle + \langle -|0\rangle|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

nên khi đo $|0\rangle$ theo cơ sở X sẽ được $|+\rangle$ với xác suất 50% (được $|-\rangle$ xác suất 50%). Ngược lại, khi đo $|+\rangle$ theo X sẽ chắc chắn được $|+\rangle$.

Khi đo $|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$ theo X sẽ được $|+\rangle$ với xác suất là

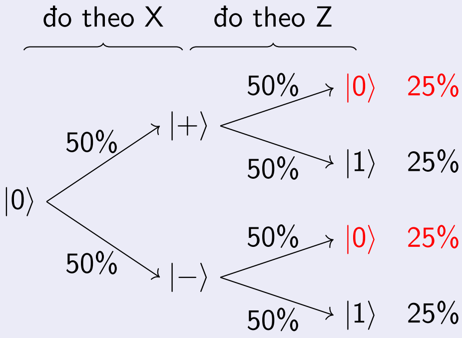
$$|\langle +|\psi\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{8} \approx 0.93.$$

(xác suất được $|-\rangle$ là khoảng 7%.)

Phép đo (tt)

Ví dụ 1 (tt)

Hỏi. Từ trạng thái $|0\rangle$ nếu đo liên tiếp theo cơ sở X rồi Z thì được 0 với xác suất bao nhiêu?
Trả lời. $25\% + 25\% = 50\%$ như sơ đồ sau cho thấy



Nội dung

Pha chung

Trạng thái của một qubit có thể được mô tả bằng dạng

$$|\psi\rangle \ = \rho_0 e^{i\theta_0}|0\rangle + \rho_1 e^{i\theta_1}|1\rangle$$

với $\rho_0, \rho_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ và $\theta_0, \theta_1 \in \mathbb{R}$ lần lượt là độ lớn và pha của các amplitude. Khi đó, yêu cầu chuẩn hóa có nghĩa là

$$|||\psi\rangle|| = 1 \Leftrightarrow |\rho_0 e^{i\theta_0}|^2 + |\rho_1 e^{i\theta_1}|^2 = 1 \Leftrightarrow \rho_0^2 + \rho_1^2 = 1.$$

Cho $\theta \in \mathbb{R}$, xét ket $|\phi\rangle = e^{i\theta}|\psi\rangle$, ta có

$$|\phi\rangle = e^{i\theta}|\psi\rangle \ = \rho_0 e^{i(\theta_0+\theta)}|0\rangle + \rho_1 e^{i(\theta_1+\theta)}|1\rangle$$

nên θ được gọi là **pha chung** (global phase) của các amplitude của $|\phi\rangle$.

Pha chung (tt)

Nhận xét

- $|||\phi\rangle|| = ||e^{i\theta}|\psi\rangle|| = |e^{i\theta}|||\psi\rangle|| = 1.$
- Nếu đo $|\phi\rangle$ theo cơ sở trực chuẩn $B = \{|a\rangle, |b\rangle\}$ bất kì của $\mathbb{C}^2$ thì được $|a\rangle$ với xác suất

$$|\langle a|\phi\rangle|^2 = |\langle a|(e^{i\theta}|\psi\rangle)|^2 = |e^{i\theta}\langle a||\psi\rangle|^2 = |\langle a||\psi\rangle|^2$$

  chính là xác suất được $|a\rangle$ khi đo $|\psi\rangle$ theo B (do đó xác suất được $|b\rangle$ cũng như nhau khi đo $|\phi\rangle$ hay $|\psi\rangle$).
- Các biến đổi T trên qubit là các toán tử tuyến tính của $\mathbb{C}^2$ nên

$$T|\phi\rangle = T(e^{i\theta}|\psi\rangle) = e^{i\theta}T|\psi\rangle.$$

Như vậy, $|\psi\rangle$ và $|\phi\rangle = e^{i\theta}|\psi\rangle$ đều mô tả cùng một trạng thái lượng tử nên các ket $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ được gọi là **tương đương** (equivalent) nhau, kí hiệu $|\psi\rangle \equiv |\phi\rangle$. Ta cũng nói, pha chung không có ý nghĩa Vật lý!

Pha tương đối

Vì pha chung không có ý nghĩa Vật lý nên ta có thể viết lại ket $|\psi\rangle\ = \rho_0 e^{i\theta_0}|0\rangle + \rho_1 e^{i\theta_1}|1\rangle$ bằng ket tương đương

$$\begin{aligned} |\phi\rangle \equiv e^{i(-\theta_0)}|\psi\rangle\ &= \rho_0 e^{i(\theta_0-\theta_0)}|0\rangle + \rho_1 e^{i(\theta_1-\theta_0)}|1\rangle \\ &= \rho_0|0\rangle + \rho_1 e^{i(\theta_1-\theta_0)}|1\rangle \end{aligned}$$

Như vậy, các trạng thái lượng tử của một qubit có thể được viết ở dạng

$$|\psi\rangle = \rho_0|0\rangle + \rho_1 e^{i\phi}|1\rangle$$

với $\rho_0, \rho_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ và $\phi \in [0, 2\pi)$. Số thực ϕ được gọi là **pha tương đối** của $|\psi\rangle$.

Pha tương đối có ý nghĩa Vật lý vì các trạng thái lượng tử $|\psi\rangle = \rho_0|0\rangle + \rho_1 e^{i\phi}|1\rangle$ và $|\psi'\rangle = \rho_0|0\rangle + \rho_1 e^{i\phi'}|1\rangle$ với $\phi \neq \phi'$ có thể được phân biệt bằng phép đo theo một cơ sở trực chuẩn nào đó.

Pha chung và pha tương đối

Ví dụ 2

Hai ket $|a\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle$ và $|b\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ tương đương nhau ($|a\rangle \equiv |b\rangle$) vì

$$\begin{aligned}|b\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle &= -i\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{-i}{\sqrt{2}}|1\rangle\right)\\ &= e^{i\frac{3\pi}{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) = e^{i\frac{3\pi}{2}}|a\rangle,\end{aligned}$$

tức là $|a\rangle, |b\rangle$ chỉ khác pha chung là $\frac{3\pi}{2}$.

Ta cũng thấy $|a\rangle, |b\rangle$ mô tả cùng một trạng thái lượng tử mà thường được mô tả là

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle.$$

Pha chung và pha tương đối

Ví dụ 2 (tt)

Ta có

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{2}}|1\rangle,$$
$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i0}|1\rangle.$$

Như vậy, $|i\rangle$ và $|+\rangle$ chỉ khác nhau pha tương đối là $\frac{\pi}{2}$ và 0.
Vì pha tương đối có ý nghĩa Vật lý nên $|i\rangle$ và $|+\rangle$ là 2 trạng thái lượng tử thật sự khác nhau. Chẳng hạn, nếu đo theo cơ sở $B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$ thì xác suất để được $|+\rangle$ khi đo $|i\rangle$ và $|+\rangle$ lần lượt là

$$|\langle +|i\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}, \quad |\langle +|+\rangle|^2 = 1.$$

Mặt cầu Bloch

Ta đã thấy, trạng thái lượng tử của một qubit có thể được viết ở dạng

$$|\psi\rangle = \rho_0|0\rangle + \rho_1 e^{i\phi}|1\rangle$$

với $\rho_0, \rho_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ và $\phi \in [0, 2\pi)$. Vì $|||\psi\rangle||| = 1$ nên

$$|\rho_0|^2 + |\rho_1 e^{i\phi}|^2 = \rho_0^2 + \rho_1^2 = 1.$$

Do đó $\rho_0 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \rho_1 = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ với duy nhất θ nào đó trong $[0, \pi)$.

Như vậy, trạng thái lượng tử của một qubit được xác định bằng ket có dạng (gọi là **dạng Bloch** hoặc **dạng chuẩn tắc**)

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle, \theta \in [0, \pi), \phi \in [0, 2\pi).$$

Mặt cầu Bloch (tt)

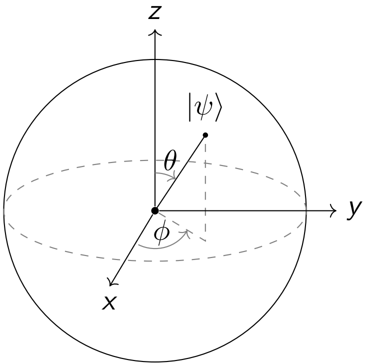
Vì mỗi điểm trên mặt cầu đơn vị có thể được xác định bằng **tọa độ cầu** (spherical coordinate) (θ, ϕ) với

- θ là **"vĩ độ"** (colatitude)
- ϕ là **"kinh độ"** (longitude)

nên mỗi trạng thái lượng tử

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

có thể được biểu diễn bằng một điểm tương ứng trên mặt cầu đơn vị còn được gọi là **mặt cầu Bloch** (Bloch sphere surface).



Mặt cầu Bloch (tt)

Khi đo qubit có trạng thái (viết theo dạng Bloch)

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

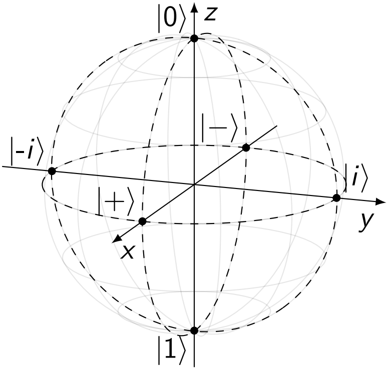
theo cơ sở tính toán sẽ được 0 với xác suất $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (xác suất được 1 là $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$).
Đặc biệt, các "tổ hợp đều" của $|0\rangle, |1\rangle$ là các điểm nằm trên **đường xích đạo** (equator) của mặt cầu Bloch vì

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Mệnh đề. Nếu $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ trực chuẩn trong $\mathbb{C}^2$ thì $|a\rangle, |b\rangle$ được biểu diễn bằng 2 điểm đối nhau qua tâm (antipode) trên mặt cầu Bloch.

Mặt cầu Bloch (tt)

Biểu diễn trên mặt cầu Bloch của các trạng thái lượng tử hay dùng như sau (kiểm tra!)



Nhận xét $|0\rangle, |1\rangle$ đối qua tâm do $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ trực chuẩn, hơn nữa $|0\rangle, |1\rangle$ nằm trên trục X nên $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ được gọi là cơ sở X. Tương tự với $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ và $\{|i\rangle, |\text{-}i\rangle\}$.

Mặt cầu Bloch (tt)

Ví dụ 3

Xét các ket $|a\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle, |b\rangle = \frac{i}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$

- $|||a\rangle||^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1, |||b\rangle||^2 = 1,$
- $\langle a|b\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{i}{2} - \frac{i}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

nên $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ trực chuẩn.

Viết theo dạng Bloch

$$|a\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + i\frac{1}{2}|1\rangle = \cos\frac{\pi}{6}|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{6}|1\rangle,$$

$$|b\rangle \equiv -i\left(\frac{i}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle\right) = \frac{1}{2}|0\rangle + (-i)\frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$$

$$= \cos\frac{\pi}{3}|0\rangle + e^{i\frac{3\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{3}|1\rangle.$$

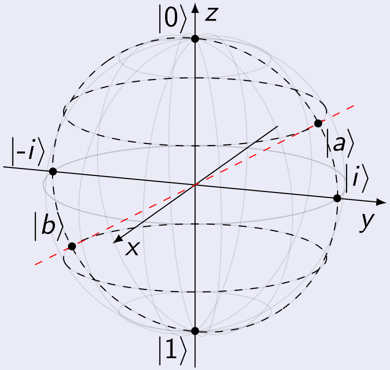
Mặt cầu Bloch (tt)

Ví dụ 3 (tt)

Do đó, trên mặt cầu Bloch

- $|a\rangle$ có vĩ độ $\theta = \frac{\pi}{3}$, kinh độ $\phi = \frac{\pi}{2}$.
- $|b\rangle$ có vĩ độ $\theta = \frac{2\pi}{3}$, kinh độ $\phi = \frac{3\pi}{2}$.

Nhận xét $|a\rangle, |b\rangle$ đối qua tâm trên mặt cầu Bloch. Điều này là bắt buộc vì $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ trực chuẩn.



Nội dung

Cổng lượng tử

Một **cổng lượng tử (1 qubit)** (single-qubit quantum gate) là một thao tác biến đổi trạng thái của qubit $T : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ thỏa

- $T(\alpha|\phi\rangle + \beta|\psi\rangle) = \alpha T(|\phi\rangle) + \beta T(|\psi\rangle)$,
- $||T(|\psi\rangle)|| = 1$ nếu $|||\psi\rangle|| = 1$,

với mọi số phức α, β và mọi trạng thái $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ của qubit.

Như vậy, T là một toán tử tuyến tính bảo toàn chuẩn trên $\mathbb{C}^2$. Do đó T có thể được biểu diễn bằng một ma trận unita $U \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ thỏa

$$T(|\psi\rangle) = U|\psi\rangle, |\psi\rangle \in \mathbb{C}^2.$$

Vì U unita nên U khả nghịch với $U^{-1} = U^\dagger$, do đó, cổng T là khả nghịch và ma trận biểu diễn cho biến đổi ngược của T chính là $U^\dagger$.

Trong tính toán lượng tử, cổng lượng tử và ma trận unita biểu diễn nó được dùng lẫn lộn!

Cổng lượng tử (tt)

Vì cổng lượng tử U tuyến tính nên U có thể được xác định bằng kết quả biến đổi trên các vector của một cơ sở, chẳng hạn trên $|0\rangle, |1\rangle$ của cơ sở tính toán. Nếu $|a\rangle = U|0\rangle, |b\rangle = U|1\rangle$ thì ma trận biểu diễn cho U trong cơ sở tính toán là

$$U = \begin{bmatrix} |a\rangle & |b\rangle \end{bmatrix}.$$

Hơn nữa, $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ cũng lập thành một cơ sở trực chuẩn nên U là ma trận chuyển cơ sở tính toán sang cơ sở $\{|a\rangle, |b\rangle\}$.
Vì U unita nên luôn tìm được 2 vector riêng $|u_1\rangle, |u_2\rangle$ lập thành một cơ sở trực chuẩn với các trị riêng tương ứng là $e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}$, khi đó

$$U|u_1\rangle = e^{i\theta_1}|u_1\rangle \equiv |u_1\rangle, \quad U|u_2\rangle = e^{i\theta_2}|u_2\rangle \equiv |u_2\rangle$$

Do đó U biểu diễn cho phép xoay quanh trục tạo bởi $|u_1\rangle, |u_2\rangle$ một góc $\theta_2 - \theta_1$ trên mặt cầu Bloch. U cũng có thể được mô tả bằng tích ngoài

$$U = e^{i\theta_1}|u_1\rangle\langle u_1| + e^{i\theta_2}|u_2\rangle\langle u_2|.$$

Cổng đơn vị

Cổng đơn vị (identity gate) tương ứng với toán tử đơn vị

$$I|0\rangle = |0\rangle, \quad I|1\rangle = |1\rangle.$$

$$I(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha I|0\rangle + \alpha I|1\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|0\rangle.$$

I mô tả cho biến đổi "không làm gì cả" (NOOP).

I có ma trận biểu diễn

$$I = \begin{bmatrix}|0\rangle & |1\rangle\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|.$$

Vì $I|\psi\rangle = |\psi\rangle, \forall|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$ nên mọi vector đều là vector riêng của I với trị riêng $1 = e^{i0}$. Do đó, I là phép quay góc $0°$ quanh trục bất kỳ của mặt cầu Bloch!

Cổng Pauli X

Cổng NOT (NOT gate) hay **cổng Pauli X** (Pali X gate)

$$X|0\rangle = |1\rangle, \quad X|1\rangle = |0\rangle.$$

$$X(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha X|0\rangle + \beta X|1\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle = \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle.$$

X mô tả cho biến đổi "lật bit" (bit flip) là phiên bản lượng tử của cổng NOT cổ điển!
X có ma trận biểu diễn

$$X = \begin{bmatrix}|1\rangle & |0\rangle\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|.$$

Vì (kiểm tra!)

$$X|+\rangle = |+\rangle, \quad X|-\rangle = -|-\rangle.$$

nên X có 2 vector riêng trực chuẩn là $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ với trị riêng tương ứng là $1 = e^{i0}, -1 = e^{i\pi}$. Do đó, X là phép quay góc 180° quanh trục x của mặt cầu Bloch.

Cổng Pauli Z

Cổng Pauli Z (Pali Z gate)

$$Z|0\rangle = |0\rangle, \quad Z|1\rangle = -|1\rangle = e^{i\pi}|1\rangle.$$

$$Z(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle.$$

Nếu $\beta = \rho e^{i\theta}$ thì $-\beta = e^{i\pi}\rho e^{i\theta} = \rho e^{i(\theta+\pi)}$ nên Z mô tả cho biến đổi "lật pha" (phase flip) vì Z "đôn thêm" pha tương đối π.
Z có ma trận biểu diễn

$$Z = \begin{bmatrix} |0\rangle & -|1\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|.$$

Vì

$$Z|0\rangle = |0\rangle, \quad Z|1\rangle = -|1\rangle.$$

nên Z có 2 vector riêng trực chuẩn là $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ với trị riêng tương ứng là $1, -1$. Do đó, Z là phép quay góc 180° quanh trục z của mặt cầu Bloch.

Cổng Pauli Y

Cổng Pauli Y (Pali Y gate)

$$Y|0\rangle = i|1\rangle, \quad Y|1\rangle = -i|0\rangle.$$

$$Y(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = i\alpha|1\rangle - i\beta|0\rangle = -i(\beta|0\rangle - \alpha|1\rangle) \equiv \beta|0\rangle - \alpha|1\rangle.$$

Y mô tả cho biến đổi "lật cả bit lẫn pha".
Y có ma trận biểu diễn

$$Y = \begin{bmatrix} i|1\rangle & -i|0\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0| \equiv |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|.$$

Vì (kiểm tra!)

$$Y|i\rangle = |i\rangle, \quad Y|\text{-}i\rangle = -|\text{-}i\rangle.$$

nên Y có 2 vector riêng trực chuẩn là $\{|i\rangle, |\text{-}i\rangle\}$ với trị riêng tương ứng là $1, -1$. Do đó, Y là phép quay góc 180° quanh trục y của mặt cầu Bloch.

Cổng Hadamard

Cổng Hadamard (Hadamard gate)

$$H|0\rangle = |+\rangle, \quad H|1\rangle = |-\rangle.$$

$$H(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle.$$

Vì $H|0\rangle = |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ nên H mô tả cho biến đổi "tổ hợp đều".
H có ma trận biểu diễn

$$H = \begin{bmatrix} |+\rangle & |-\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ta cũng có (kiểm tra!)

$$H|+\rangle = |0\rangle, \quad H|-\rangle = |1\rangle.$$

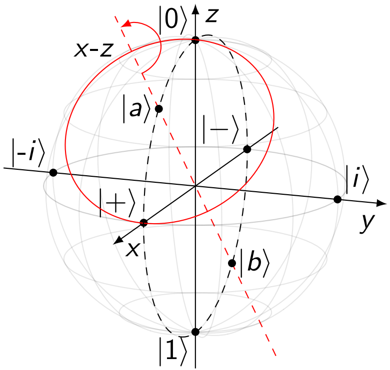
Do đó, ta "đoán" H là phép quay góc 180° quanh trục x-z của mặt cầu Bloch.

Cổng Hadamard (tt)

Đặt $|a\rangle = |0\rangle + |+\rangle, |b\rangle = |1\rangle - |-\rangle$.
Ta có (kiểm tra!)

- $|a\rangle, |b\rangle$ là 2 vector riêng của H với trị riêng tương ứng là $1, -1$,
- $\{\frac{|a\rangle}{|||a\rangle||}, \frac{|b\rangle}{|||b\rangle||}\}$ là một họ trực chuẩn,
- $|a\rangle$ có vĩ độ $\theta = \frac{\pi}{4}$, kinh độ $\phi = 0$.

Do đó, H là phép quay góc 180° quanh trục x-z.



Cổng pha

Cổng pha (phase gate)

$$S|0\rangle = |0\rangle, \quad S|1\rangle = i|1\rangle = e^{i\frac{\pi}{2}}|1\rangle.$$

$$S(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha|0\rangle + i\beta|1\rangle.$$

S mô tả cho biến đổi "đôn thêm" pha tương đối $\frac{\pi}{2}$.

S có ma trận biểu diễn

$$S = \begin{bmatrix} |0\rangle & i|1\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = |0\rangle\langle 0| + i|1\rangle\langle 1|.$$

S là phép quay góc 90° quanh trục z của mặt cầu Bloch. (kiểm tra!)
Nhận xét, $S^2 = SS$ mô tả cho phép biến đổi "S rồi S nữa", tức là làm 2 lần S, do đó là phép quay góc 180° quanh trục z, đó chính là biến đổi Z, như vậy $S^2 = Z$ (kiểm tra bằng cách nhân ma trận!) nên thường viết $S = \sqrt{Z}$.

Cổng T

Cổng T (T gate)

$$T|0\rangle = |0\rangle, \quad T|1\rangle = e^{i\frac{\pi}{4}}|1\rangle.$$

$$T(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{4}}\beta|1\rangle.$$

T mô tả cho biến đổi "đôn thêm" pha tương đối $\frac{\pi}{4}$.

T có ma trận biểu diễn

$$T = \begin{bmatrix}|0\rangle & e^{i\frac{\pi}{4}}|1\rangle\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}}\end{bmatrix} = |0\rangle\langle 0| + e^{i\frac{\pi}{4}}|1\rangle\langle 1|.$$

T là phép quay góc 45° quanh trục z của mặt cầu Bloch. (kiểm tra!)

Nhận xét, $T^2 = S$ và $T^4 = Z$ (kiểm tra!) nên thường viết $T = \sqrt{S}$.

Cổng dịch pha

Cho $\theta \in [0, 2\pi)$, **cổng dịch pha** (phase shift gate)

$$R(\theta)|0\rangle = |0\rangle, \quad R(\theta)|1\rangle = e^{i\theta}|1\rangle.$$

$$R(\theta)(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha|0\rangle + e^{i\theta}\beta|1\rangle.$$

$R(\theta)$ mô tả cho biến đổi "đôn thêm" pha tương đối θ.
$R(\theta)$ có ma trận biểu diễn

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} |0\rangle & e^{i\theta}|1\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} = |0\rangle\langle 0| + e^{i\theta}|1\rangle\langle 1|.$$

$R(\theta)$ là phép quay góc θ quanh trục z của mặt cầu Bloch. (kiểm tra!)
$R(\theta)$ là **cổng được tham số hóa** (parameterized gate) theo **tham số** (parameter) θ vì tùy giá trị cụ thể của θ ta có $R(\theta)$ cụ thể, chẳng hạn

$$Z = R(\pi), \quad S = R\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad T = R\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Cổng lượng tử (tt)

Nhận xét, nghịch đảo của cổng I là I (kiểm tra!). Hơn nữa, các cổng X, Y, Z, H cũng Hermite (kiểm tra!) nên là nghịch đảo của chính nó, chẳng hạn

$$H^{-1} = H^{\dagger} = H.$$

Điều này là dễ hiểu vì các cổng này đều là các phép quay 180° quanh một trục của mặt cầu Bloch (tương ứng là các trục x, y, z, x-z) nên "quay thêm lần nữa là huề".

Các cổng S, T (quay tương ứng $90^{\circ}, 45^{\circ}$ quanh trục z) không là nghịch đảo của chính nó. Dễ thấy (kiểm tra!)

$$S^{-1} = S^3, \quad T^{-1} = T^7.$$

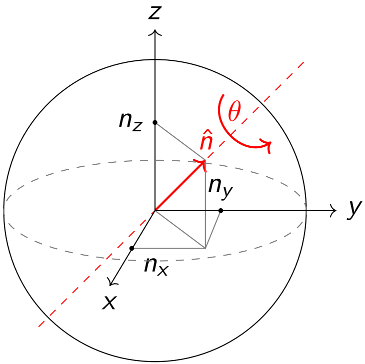
Cũng dễ thấy (kiểm tra!)

$$R^{-1}(\theta) = R(2\pi - \theta) = R(-\theta).$$

Cổng lượng tử (tt)

Một cổng lượng tử (1 qubit) là một phép quay trên mặt cầu Bloch.

Nếu $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{R}^3$ là vector đơn vị mô tả (bằng tọa độ Descartes) hướng của trục quay thì người ta chứng minh được, cổng lượng tử thực hiện phép quay góc θ quanh trục $\hat{n}$ của mặt cầu Bloch có ma trận biểu diễn là



$$U = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) I - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (n_x X + n_y Y + n_z Z) \quad (*)$$

Cổng lượng tử (tt)

Ví dụ 4

Gọi $R_z(\theta)$ là toán tử quay quanh trục z góc $\theta \in [0, 2\pi)$, vì trục z được xác định bởi vector đơn vị $\hat{n} = (0, 0, 1)$ nên từ $(*)$ ta có

$$
\begin{aligned}
R_z(\theta) &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) I - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) Z \\
&= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Lưu ý, đây chính là cổng dịch pha $R(\theta)$ vì (nhớ là, pha chung không có ý nghĩa Vật lý)

$$
R_z(\theta) = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{bmatrix} = e^{-i\frac{\theta}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} = R(\theta).
$$

Nội dung

Mạch lượng tử

Tương tự mạch cổ điển, **mạch lượng tử** (quantum circuit) là một mô hình của **tính toán lượng tử** (quantum computation), trong đó việc tính toán được mô tả bằng một dãy các cổng lượng tử (và/hoặc các thao tác khác như phép đo) trên các qubit.
Các qubit được biểu diễn bằng các đường ngang và các cổng lượng tử được biểu diễn bằng các hộp nằm trên đường của qubit mà cổng tác động. Thứ tự tác động của các cổng là từ trái qua phải. Chẳng hạn, **sơ đồ mạch** (circuit diagram) sau

$$|\psi\rangle \;—\; \boxed{U_1} \;—\; \boxed{U_2} \;—\; \boxed{U_3} \;—\; |\phi\rangle$$

mô tả các "bước tính toán" để từ trạng thái **đầu vào** (input) $|\psi\rangle$ được trạng thái **đầu ra** (output) $|\phi\rangle$

$$|\phi\rangle = U_3 U_2 U_1 |\psi\rangle.$$

Mạch lượng tử (tt)

Các cổng lượng tử thông dụng được mô tả bằng các hộp có nhãn là kí hiệu của cổng. Chẳng hạn, sơ đồ mạch sau

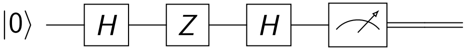
$$|0\rangle \;—\boxed{H}—\boxed{Z}—\boxed{H}—\; |\phi\rangle$$

mô tả các tính toán: từ đầu vào $|0\rangle$ thực hiện cổng Hadamard H rồi cổng Pauli Z rồi lại cổng Hadmard để được đầu ra

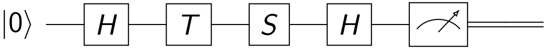
$$|\phi\rangle = HZH|0\rangle = HZ|+\rangle = HZ\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = H\frac{1}{\sqrt{2}}(Z|0\rangle + Z|1\rangle)$$
$$= H\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = H|-\rangle = |1\rangle.$$

Mạch lượng tử (tt)

Lưu ý, phép đo không phải là toán tử (nó thậm chí **không tất định** (nondeterministic) vì kết quả mang tính ngẫu nhiên). Tuy nhiên, phép đo vẫn được xem là một thao tác trên qubit (thường được thực hiện sau cùng để có kết quả là các bit cổ điển 0, 1).
Trong sơ đồ mạch sau



kí hiệu "đồng hồ đo" mô tả phép đo và đường nét kép mô tả bit cổ điển (đường nét đơn mô tả qubit). Mạch này chắc chắn cho kết quả 1 như đã phân tích. Mạch sau

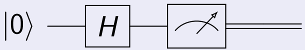


cho 1 với xác suất khoảng 85% (cho 0 với xác suất khoảng 15%). (kiểm tra!)

Mạch lượng tử (tt)

Ví dụ 5

Mạch lượng tử sau



trông đơn giản nhưng là "ước mơ khó thành" của tính toán cổ điển! Thật vậy, vì

$$H|0\rangle = |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

nên mạch trên cho ra các bit cổ điển 0, 1 với xác suất đều là 50%. Ngẫu nhiên là nguồn tài nguyên cực kỳ quan trọng trong tính toán cổ điển. Tuy nhiên, do bản chất **tất định** (deterministic), tính toán cổ điển chỉ có **"giả ngẫu nhiên"** (pseudorandom). Ngược lại, tính toán lượng tử tạo ra "ngẫu nhiên thực sự" (truly random).

Nội dung

Qubit vật lý

Các hệ thống lượng tử 2 mức trong thực tế khi được dùng làm qubit được gọi là **qubit vật lý** (physical qubit). Ngược lại, qubit trừu tượng bằng mô hình Toán học được gọi là **qubit logic** (logical qubit). Không giống các qubit logic, qubit vật lý chịu nhiều ràng buộc thực tế và công nghệ như tính ổn định, bị lỗi, mở rộng, ... Thông thường, cần nhiều qubit vật lý để có một qubit logic. Vài qubit vật lý hay dùng trong thực tế là

- **Photon** với 2 trạng thái **phân cực** (polarization) cơ bản là ngang (Horizontal) và dọc (Vertical).
- **Electron** với 2 trạng thái **spin** cơ bản là Up và Down.
- **Bẫy ion** (trapped ion) với 2 **mức năng lượng** (energy level) cơ bản là "trạng thái nghỉ" (ground state) và "trạng thái kích thích" (excited state).

(xem thêm Wikipedia.)

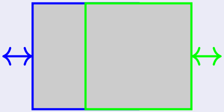
Qubit vật lý (tt)

Ví dụ 6

Xem thí nghiệm 3 kính lọc phân cực tại Yotube.

Kính lọc phân cực (polarizing filters) cho phép các hạt photon (ánh sáng) có trạng thái phân cực cùng hướng với kính đi qua và hấp thụ các photon khác.

TN-1: đặt 2 kính lọc cùng hướng ngang chồng lên nhau.

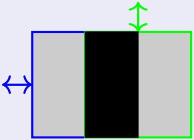


Quan sát: lượng photon đi qua cả 2 kính giống như đi qua mỗi kính.

Qubit vật lý (tt)

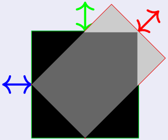
Ví dụ 6 (tt)

TN-2: đặt kính lọc hướng dọc chồng lên kính lọc hướng ngang.



Quan sát: không còn photon đi qua cả 2 kính.

TN-3: đặt kính lọc hướng chéo xen giữa hướng ngang và dọc.



Quan sát: có photon đi qua cả 3 kính!

Qubit vật lý (tt)

Ví dụ 6 (tt)

Kết quả quan sát ở TN-3 là không bình thường: "lọc 2 lần thì hết mà 3 lần thì còn!"

Giải thích. Mỗi photon là một hệ thống lượng tử 2 mức với trạng thái phân cực là sự chồng chất của 2 trạng thái cơ bản. Theo mô hình tính toán lượng tử, mỗi photon là một qubit với trạng thái là ket đơn vị $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$ là tổ hợp tuyến tính

$$|\psi\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$$

của 2 vector trực chuẩn $|a\rangle, |b\rangle$ trong $\mathbb{C}^2$.

Mỗi kính lọc tương ứng với một phép đo theo cơ sở trực chuẩn $\{|a\rangle, |b\rangle\}$, mà mỗi photon khi được đo sẽ sụp đổ trạng thái thành $|a\rangle$ với xác suất $|\alpha|^2$ và thành $|b\rangle$ với xác suất $|\beta|^2$. Hơn nữa, kính sẽ để photon $|a\rangle$ đi qua và hấp thụ photon $|b\rangle$.

Qubit vật lý (tt)

Ví dụ 6 (tt)

Kí hiệu hướng phân cực ngang là $|0\rangle$, phân cực dọc là $|1\rangle$ thì $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ trực chuẩn. Kính ngang có cơ sở trực chuẩn tương ứng là $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ (để ngang đi qua và hấp thụ dọc) còn kính dọc có cơ sở trực chuẩn tương ứng là $\{|1\rangle, |0\rangle\}$ (để dọc đi qua và hấp thụ ngang).

Trong TN-1 và TN-2, photon đến kính ngang sẽ sụp đổ thành $|0\rangle$ hoặc $|1\rangle$ và photon $|0\rangle$ được đi qua còn $|1\rangle$ bị hấp thụ. Nếu ánh sáng môi trường là "phân cực ngẫu nhiên" thì có 50% lượng photon đi qua.

Sau đó, TN-1 đặt thêm kính ngang 2 thì photon qua kính ngang 1 có trạng thái $|0\rangle$ nên chắc chắn qua kính ngang 2. Do đó toàn bộ photon qua kính 1 cũng qua kính 2. Ngược lại, TN-2 đặt thêm kính dọc 2 thì photon $|0\rangle$ chắc chắn bị kính dọc hấp thụ nên không còn photon qua kính 2.

Qubit vật lý (tt)

Ví dụ 6 (tt)

Hướng phân cực chéo là tổ hợp đều của $|0\rangle$ (ngang) và $|1\rangle$ (dọc) nên kính chéo có cơ sở trực chuẩn tương ứng là $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ với

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle, \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle.$$

Lưu ý, ta cũng có $|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle, |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$.

Như vậy, 3 kính trong TN-3 là

1. kính ngang 1 với cơ sở trực chuẩn tương ứng là $\{|0\rangle, |1\rangle\}$,
2. kính chéo 2 với cơ sở trực chuẩn tương ứng là $\{|+\rangle, |-\rangle\}$,
3. kính dọc 3 với cơ sở trực chuẩn tương ứng là $\{|1\rangle, |0\rangle\}$.

Qubit vật lý (tt)

Ví dụ 6 (tt)

Trong TN-3

1. photon qua kính ngang 1 có trạng thái $|0\rangle$,
2. photon $|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$ khi gặp kính chéo 2 sẽ sụp đổ thành $|+\rangle$ với xác suất 50% và được đi qua (50% thành $|-\rangle$ bị hấp thụ),
3. photon $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ khi gặp kính dọc 3 sẽ sụp đổ thành $|1\rangle$ với xác suất 50% và được đi qua (50% thành $|0\rangle$ bị hấp thụ).

Như vậy, trong các photon qua kính 1 thì có 50% qua được kính 2 và 25% qua được tiếp kính 3. Chung cuộc, nếu ánh sáng môi trường là "phân cực ngẫu nhiên" thì có 1/8 lượng photon đi qua cả 3 kính. Lưu ý, nếu để kính chéo trước kính ngang hoặc sau kính dọc thì vẫn không có photon nào đi qua cả 3 kính (giải thích!).

Tài liệu tham khảo

Chapter 2, 3. Thomas G. Wong. *Introduction to Classical and Quantum Computing*. Rooted Grove, 2022.

Chapter 1, 3. Chris Bernhardt. *Quantum Computing for Everyone*. MIT Press, 2019.