ĐẠI HỌC QUỐC GIA TPHCM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

BỘ MÔN CÔNG NGHỆ TRI THỨC

Bài tập 1

Đề tài: Số phức và vector, ma trận phức

Môn học: Nhập môn Tính toán lượng tử

Sinh viên thực hiện:	*Giáo viên hướng dẫn:*
Lưu Thượng Hồng (23122006)	ThS. Vũ Quốc Hoàng

Ngày 18 tháng 10 năm 2025

Mục lục

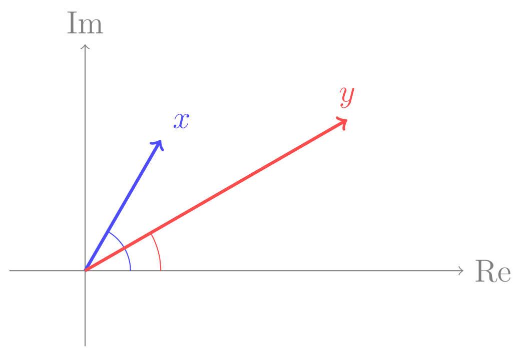
1 Bài 1

Cho $x = e^{i\frac{\pi}{3}}$ và $y = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

1.1 (a)

Đề bài: Vẽ minh họa x, y trên mặt phẳng phức.

Bài làm:



1.2 (b)

Đề bài: Tìm dạng đại số và dạng cực của x, y.

Bài làm:

- **Dạng cực**:

$$x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$y = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

- **Dạng đại số**:

$$x = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$y = \sqrt{3} + i$$

1.3 (c)

Đề bài: Tính $\mathrm{Re}(x)$, $\mathrm{Im}(x)$, $|x|$, $\arg(x)$.

Bài làm:

- $\mathrm{Re}(x) = \frac{1}{2}$
- $\mathrm{Im}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $|x| = 1$
- $\arg(x) = \frac{\pi}{3}$

1.4 (d)

Đề bài: Tính $\overline{x}, -x, x^{-1}$.

Bài làm:

- $\overline{x} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $-x = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1.5 (e)

Đề bài: Tính $x + y, x - y, xy, \frac{x}{y}, \frac{y}{x}$.

Bài làm:

- $x + y = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + i = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$
- $x - y = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\sqrt{3} + i\right) = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$
- $xy = e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$
- $\frac{x}{y} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{4} + i\frac{1}{4}$
- $\frac{y}{x} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} - i$

1.6 (f)

Đề bài: Tính x^4 và x^n, $n \in \mathbb{Z}$.

Bài làm:

- $x^4 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$
- $x^n = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{3}}$

1.7 (g)

Đề bài: Tính $\sqrt[4]{x}$ và $\sqrt[n]{x}$ $n \in \mathbb{N}^+$.

Bài làm:

- $\sqrt[4]{x} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$
- $\sqrt[n]{x} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{i\frac{\pi}{3n}}$

2 Bài 2

Cho $x, y \in \mathbb{C}$ chứng minh

2.1 (a)

Đề bài: $x\overline{x} = \overline{x}x = |x|^2$.

Bài làm:

$$x\overline{x} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |x|^2 \quad \text{(ĐPCM)}$$

2.2 (b)

Đề bài: $\overline{x^{-1}} = (\overline{x})^{-1} (x \neq 0)$.

Bài làm:

$$\overline{x^{-1}} = \overline{\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\overline{x}} = (\overline{x})^{-1} \quad \text{(ĐPCM)}$$

2.3 (c)

Đề bài: $|xy| = |x||y|$.

Bài làm:

Xét $x = a + bi$, $y = c + di$.

Ta có:

$$\begin{aligned} |xy| &= |(a+bi)(c+di)| = |(ac-bd)+(ad+bc)i| = \sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2} && (1)\\ &= \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2} = \sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2} && (2)\\ & && (3) \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} |x||y| = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} = \sqrt{a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2} && (4)\\ && (5) \end{aligned}$$

Vậy $|xy| = |x||y|$ (ĐPCM).

2.4 (d)

Đề bài: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Bài làm:

Xét $x = a + bi$, $y = c + di$.

Ta có:

$$\begin{aligned}
|x+y| = |(a+c)+(b+d)i| &= \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} = \sqrt{a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2} \\
&= \sqrt{(a^2+b^2)+(c^2+d^2)+2(ac+bd)} \\
&\leq \sqrt{(a^2+b^2)+(c^2+d^2)+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}} \quad \text{(BĐT Cauchy-Schwarz)} \\
&= \sqrt{(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2})^2} = \sqrt{(|x|+|y|)^2} = |x|+|y| \quad \text{(ĐPCM)}
\end{aligned}$$

3 Bài 3

Cho $|\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$, $|\psi\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$.

3.1 (a)

Đề bài: Tính $\langle\phi|$ và $\langle\psi|$.

Bài làm:

- $\langle\phi| = |\phi\rangle^\dagger = \frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0| + \frac{1}{2}\langle 1|$
- $\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger = \frac{2}{3}\langle 0| + \frac{1+2i}{3}\langle 1|$

3.2 (b)

Đề bài: Tính $\langle\phi|\psi\rangle$ và $\langle\psi|\phi\rangle$.

Bài làm: Ta có:

$$\begin{aligned}
\langle 0|0\rangle &= 1, & \langle 0|1\rangle &= 0, \\
\langle 1|0\rangle &= 0, & \langle 1|1\rangle &= 1.
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\langle\phi|\psi\rangle &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0| + \frac{1}{2}\langle 1|\right)\left(\frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3}\langle 0|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1-2i}{3}\langle 0|1\rangle + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\langle 1|0\rangle + \frac{1}{2}\cdot\frac{1-2i}{3}\langle 1|1\rangle \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3} + 0 + 0 + \frac{1-2i}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1-2i}{6} \\
&= \frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\phi\rangle &= \left(\frac{2}{3}\langle 0| + \frac{1+2i}{3}\langle 1|\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right) \\
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0|0\rangle + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\langle 0|1\rangle + \frac{1+2i}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 1|0\rangle + \frac{1+2i}{3}\cdot\frac{1}{2}\langle 1|1\rangle \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3} + 0 + 0 + \frac{1+2i}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1+2i}{6} \\
&= \frac{2\sqrt{3}+1+2i}{6}
\end{aligned}$$

3.3 (c)

Đề bài: Tính $|\phi\rangle\langle\phi|$ và $|\psi\rangle\langle\phi|$.

Bài làm:

$$\begin{aligned}
|\phi\rangle\langle\phi| &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0| + \frac{1}{2}\langle 1|\right) \\
&= \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{\sqrt{3}}{4}|0\rangle\langle 1| + \frac{\sqrt{3}}{4}|1\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| \\
&= \frac{3}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{4}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle\langle\phi| &= \left(\frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0| + \frac{1}{2}\langle 1|\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{3}|0\rangle\langle 1| + \frac{(1-2i)\sqrt{3}}{6}|1\rangle\langle 0| + \frac{1-2i}{6}|1\rangle\langle 1| \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} + \frac{(1-2i)\sqrt{3}}{6}\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix} + \frac{1-2i}{6}\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{(1-2i)\sqrt{3}}{6} & \frac{1-2i}{6}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

3.4 (d)

Đề bài: Tính $|\phi\rangle|\psi\rangle$ và $|\psi\rangle|\phi\rangle$.

Bài làm:

$$
\begin{aligned}
|\phi\rangle|\psi\rangle &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right)\left(\frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3}|00\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1-2i}{3}|01\rangle + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}|10\rangle + \frac{1}{2}\cdot\frac{1-2i}{3}|11\rangle \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}|00\rangle + \frac{\sqrt{3}(1-2i)}{6}|01\rangle + \frac{1}{3}|10\rangle + \frac{1-2i}{6}|11\rangle \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}(1-2i)}{6}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{1-2i}{6}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}(1-2i)}{6}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1-2i}{6}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle|\phi\rangle &= \left(\frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right) \\
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}|00\rangle + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1-2i}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}|10\rangle + \frac{1-2i}{3}\cdot\frac{1}{2}|11\rangle \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}|00\rangle + \frac{1}{3}|01\rangle + \frac{(1-2i)\sqrt{3}}{6}|10\rangle + \frac{1-2i}{6}|11\rangle \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + \frac{(1-2i)\sqrt{3}}{6}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{1-2i}{6}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{(1-2i)\sqrt{3}}{6}\\ \frac{1-2i}{6}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

3.5 (e)

Đề bài: Tính $||\phi||$ và $||\psi||$.

Bài làm:

$$
\begin{aligned}
||\phi|| &= \sqrt{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2} = 1 \\
||\psi|| &= \sqrt{\left|\frac{2}{3}\right|^2 + \left|\frac{1-2i}{3}\right|^2} = 1
\end{aligned}
$$

3.6 (f)

Đề bài: Tính góc giữa $|\phi\rangle$ và $|\psi\rangle$.

Bài làm:

Gọi θ là góc giữa $\phi\rangle$ và $\psi\rangle$.

Ta có:

$$\cos\theta = \frac{|\langle\phi,\psi\rangle|}{||\phi||||\psi||} = \frac{|\langle\phi|\psi\rangle|}{||\phi||||\psi||} = \frac{\left|\frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6}\right|}{1\cdot 1} = \left|\frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6}\right|$$
$$\implies \theta = \arccos\left|\frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6}\right| \approx 0.6175934679 \quad \text{(rad)}$$

3.7 (g)

Đề bài: Tính $\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle$ và $\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle$.

Bài làm:

$$\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle = \frac{\langle\psi|\phi\rangle}{||\psi||^2}\psi = \langle\psi|\phi\rangle\psi = \frac{2\sqrt{3}+1+2i}{6}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1-2i}{3}\end{bmatrix}$$
$$\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle = \frac{\langle\phi|\psi\rangle}{||\phi||^2}\phi = \langle\phi|\psi\rangle\phi = \frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

3.8 (h)

Đề bài: Chuẩn hóa $\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle$ và $\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle$.

Bài làm:

Ta có:

$$||\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle|| = \left|\frac{2\sqrt{3}+1+2i}{6}\right|\cdot||\psi|| = \left|\frac{2\sqrt{3}+1+2i}{6}\right|\cdot 1 = \left|\frac{2\sqrt{3}+1+2i}{6}\right| := \mathbb{A}$$
$$||\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle|| = \left|\frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6}\right|\cdot||\phi|| = \left|\frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6}\right|\cdot 1 = \left|\frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6}\right| := \mathbb{B}$$

Vậy:

$$\text{norm}(\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle) = \frac{1}{||\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle||}\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle = \frac{1}{\mathbb{A}}\cdot\frac{2\sqrt{3}+1+2i}{6}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1-2i}{3}\end{bmatrix}$$
$$\text{norm}(\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle) = \frac{1}{||\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle||}\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle = \frac{1}{\mathbb{B}}\cdot\frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

3.9 (i)

Đề bài: Tìm tọa độ của $|\phi\rangle$ và $|\psi\rangle$ trong các cơ sở $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$, $B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$, $B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$.

Bài làm:

Cơ sở B_Z:

$$\begin{cases} |\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle \\ |\psi\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle \end{cases} \implies \begin{cases} [|\phi\rangle]_{B_Z} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ [|\psi\rangle]_{B_Z} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1-2i}{3}\right) \end{cases}$$

Cơ sở B_X: Vì cơ sở B_X là cơ sở trực chuẩn, ta có:

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_{B_X} = \Big(\langle +|\phi\rangle, \langle -|\phi\rangle\Big) = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right) \\ [|\psi\rangle]_{B_X} = \Big(\langle +|\psi\rangle, \langle -|\psi\rangle\Big) = \left(\frac{3-2i}{3\sqrt{2}}, \frac{1+2i}{3\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

Cơ sở B_Y: Vì cơ sở B_Y là cơ sở trực chuẩn, ta có:

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_{B_Y} = \Big(\langle i|\phi\rangle, \langle -i|\phi\rangle\Big) = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{2}}\right) \\ [|\psi\rangle]_{B_Y} = \Big(\langle i|\psi\rangle, \langle -i|\psi\rangle\Big) = \left(\frac{-i}{3\sqrt{2}}, \frac{4+i}{3\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

3.10 (j)

Đề bài: Cho $|a\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle$, $|b\rangle = \frac{i}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$, chứng minh $B = \{a, b\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{C}^2$ và tìm tọa độ của $|\phi\rangle$, $|\psi\rangle$ theo B.

Bài làm:

Ta cần chứng minh $\langle a|b\rangle = 0$ và $||a|| = ||b|| = 1$.

Ta có:

$$\begin{aligned}
\langle a|b\rangle &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0| - \frac{i}{2}\langle 1|\right)\left(\frac{i}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}i}{4}\langle 0|0\rangle + \frac{3}{4}\langle 0|1\rangle - \frac{i^2}{4}\langle 1|0\rangle - \frac{i\sqrt{3}}{4}\langle 1|1\rangle \\
&= \frac{\sqrt{3}i}{4} + 0 - 0 - \frac{i\sqrt{3}}{4} = 0 \quad (*) \\
||a|| &= \sqrt{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 + \left|\frac{i}{2}\right|^2} = 1 = \sqrt{\left|\frac{i}{2}\right|^2 + \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2} = ||b|| \quad (**)
\end{aligned}$$

Từ (*) và (**), suy ra $B = \{a, b\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{C}^2$.

Ta tìm toạ độ của $|\phi\rangle$ và $|\psi\rangle$ theo B:

$$\begin{cases}
[|\phi\rangle]_B = \left(\langle a|\phi\rangle, \langle b|\phi\rangle\right) = \left(\frac{3-i}{4}, \frac{\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{4}\right) \\
[|\psi\rangle]_B = \left(\langle a|\psi\rangle, \langle b|\psi\rangle\right) = \left(\frac{2\sqrt{3}-2-i}{6}, \frac{\sqrt{3}-2i(1+\sqrt{3})}{6}\right)
\end{cases}$$

4 Bài 4

Cho U là toán tử trên $\mathbb{C}^2$ với $U|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ và $U|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$.

4.1 (a)

Đề bài: Tìm biểu diễn của U trong cơ sở chính tắc $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$.

Bài làm:

Ma trận biểu diễn của U trong cơ sở chính tắc B_Z là:

$$[U]_{B_Z} = \begin{bmatrix} U|0\rangle & U|1\rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

4.2 (b)

Đề bài: Cho $|\phi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$, tìm $U|\phi\rangle$.

Bài làm:

$$U|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \alpha - i\beta \\ -i\alpha + \beta \end{bmatrix}$$

4.3 (c)

Đề bài: U có unita không?

Bài làm:

Ta có:

$$U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

$$U^\dagger U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = UU^\dagger$$

Vậy U có unita

4.4 (d)

Đề bài: U có Hermite không?

Bài làm:

Ta có:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

$$U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

Vì $U \neq U^\dagger$, nên U không Hermite.

4.5 (e)

Đề bài: Tìm $U^\dagger$, U^{-1}.

Bài làm:

$$U^{-1} = U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(vì } U \text{ unita)}$$

4.6 (f)

Đề bài: Tìm $HUH|0\rangle$, $HUH|1\rangle$ và HUH (H là ma trận Hadamard).

Bài làm:

Ta có ma trận Hadamard H là:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Vậy:

$$\begin{aligned}
HUH &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 1-i \\ 1+i & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2-2i & 0 \\ 0 & 2+2i \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix} \\
\implies HUH|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i \\ 0 \end{bmatrix} \\
HUH|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1+i \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

4.7 (g)

Đề bài: Tìm $UHU|0\rangle$, $UHU|1\rangle$ và UHU. **Bài làm:**

Ta có:

$$\begin{aligned}
UHU &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1-i & 1+i\\ 1-i & -1-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}2-2i & 0\\ 0 & -2-2i\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1-i & 0\\ 0 & -1-i\end{bmatrix}\\
\implies UHU|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1-i & 0\\ 0 & -1-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1-i\\ 0\end{bmatrix}\\
UHU|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1-i & 0\\ 0 & -1-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\ -1-i\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

5 Bài 5

Chứng minh $XY = iZ$ bằng cách

5.1 (a)

Đề bài: Nhân ma trận.

Bài làm: Ta có:

$$XY = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix} = i\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} = iZ \quad \text{(ĐPCM)}$$

5.2 (b)

Đề bài: Xét tác động của các toán tử trên $|0\rangle$, $|1\rangle$.

Bài làm:

Xét $XY|0\rangle$ và $XY|1\rangle$:

$$XY|0\rangle = X(Y|0\rangle) = X\left(\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = X\begin{bmatrix}0\\i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}i\\0\end{bmatrix}$$
$$XY|1\rangle = X(Y|1\rangle) = X\left(\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = X\begin{bmatrix}-i\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-i\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-i\end{bmatrix}$$

Xét $iZ|0\rangle$ và $iZ|1\rangle$:

$$iZ|0\rangle = i\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = i\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}i\\0\end{bmatrix}$$
$$iZ|1\rangle = i\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = i\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-i\end{bmatrix}$$

Vì $XY|0\rangle = iZ|0\rangle$, $XY|1\rangle = iZ|1\rangle$ và $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ là cơ sở trên $\mathbb{C}^2$, nên $XY = iZ$. (ĐPCM)

6 Bài 6

Cho $|\phi\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}+i}{4}|11\rangle$.

6.1 (a)

Đề bài: Cho thấy $|\phi\rangle$ là vector đơn vị.

Bài làm:

Ta có:

$$\begin{aligned}||\phi|| &= \sqrt{\left|\frac{1}{2}\right|^2 + \left|\frac{i}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right|^2}\\ &= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}\\ &= \sqrt{1} = 1\end{aligned}$$

Vậy $|\phi\rangle$ là vector đơn vị.

6.2 (b)

Đề bài: Tính $\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle$ và chuẩn hóa $\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle$.

Bài làm:

Ta có:

$$|+-\rangle = |+\rangle \otimes |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\implies \langle +-| = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle &= \frac{\langle +-|\phi\rangle}{|||+-\rangle||^2}|+-\rangle = \langle +-|\phi\rangle|+-\rangle \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{i}{\sqrt{2}}\\\frac{\sqrt{3}+i}{4}\end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 0 + \frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}+i}{4}\right) \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix} \\
&= \left(\frac{2-\sqrt{3}}{16} + \frac{-1+2\sqrt{2}}{16}i\right)|+-\rangle
\end{aligned}$$

Chuẩn hoá $\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle$:

$$||\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle|| = \left|\frac{2-\sqrt{3}}{16} + \frac{-1+2\sqrt{2}}{16}i\right| \cdot |||+-\rangle|| = \left|\frac{2-\sqrt{3}}{16} + \frac{-1+2\sqrt{2}}{16}i\right| \cdot 1 := \mathbb{A}$$

$$\implies \text{norm}(\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle) = \frac{1}{||\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle||}\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle = \frac{1}{\mathbb{A}}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{16} + \frac{-1+2\sqrt{2}}{16}i\right)|+-\rangle$$

6.3 (c)

Đề bài: Tính tọa độ của $|\phi\rangle$ theo cơ sở Bell.

Bài làm:

Ta có cơ sở Bell:

$$B_{\text{Bell}} = \begin{cases} |\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \\ |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \\ |\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \\ |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \end{cases} \implies \begin{cases} |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle + |\Phi^-\rangle) \\ |01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle + |\Psi^-\rangle) \\ |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle - |\Psi^-\rangle) \\ |11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle - |\Phi^-\rangle) \end{cases}$$

Vậy tạo độ của $|\phi\rangle$ theo cơ sở Bell là:

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &= \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}+i}{4}|11\rangle \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle + |\Phi^-\rangle) + \frac{i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle - |\Psi^-\rangle) + \frac{\sqrt{3}+i}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle - |\Phi^-\rangle) \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+i}{4\sqrt{2}}\right)|\Phi^+\rangle + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}+i}{4\sqrt{2}}\right)|\Phi^-\rangle + \frac{i}{2}|\Psi^+\rangle - \frac{i}{2}|\Psi^-\rangle \\ &\implies [|\phi\rangle]_{B_{\text{Bell}}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+i}{4\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}+i}{4\sqrt{2}} \\ \frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

7 Bài 7

Kiểm tra các vector sau có phân tách được.

7.1 (a)

Đề bài: $|\phi_1\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$.

Bài làm:

Ta có:

$$\begin{aligned}
|\phi_1\rangle &= \frac{1}{2}(|0\rangle \otimes |0\rangle - |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle) \\
&= \frac{1}{2}[|0\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle) + |1\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle)] \\
&= \frac{1}{2}[(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle - |1\rangle)] \\
&= |+\rangle \otimes |-\rangle
\end{aligned}$$

Vậy $|\phi_1\rangle$ tách được

7.2 (b)

Đề bài: $|\phi_2\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}|00\rangle - \sqrt{3}|01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$.

Bài làm:

Ta có:

$$\begin{aligned}
|\phi_2\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}|00\rangle - \sqrt{3}|01\rangle + |10\rangle - |11\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(\sqrt{3}|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle - |1\rangle)\right] \quad := |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle
\end{aligned}$$

Vậy $|\phi_2\rangle$ tách được

7.3 (c)

Đề bài: $|\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + i|11\rangle)$.

Bài làm:

Ta có:

$$\begin{aligned}
|\phi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|10\rangle + i|11\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1\rangle \otimes (|0\rangle + i|1\rangle)\right] \\
&= |1\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \\
&= |1\rangle \otimes |i\rangle
\end{aligned}$$

Vậy $|\phi_3\rangle$ tách được

7.4 (d)

Đề bài: $|\phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1-\rangle$.

Bài làm:

Ta có:

$$|\phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1-\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

Giả sử $|\phi_4\rangle$ tách được, tức là tồn tại $|\psi_1\rangle = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ và $|\psi_2\rangle = \begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$ sao cho $|\phi_4\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$

Ta có:

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \begin{bmatrix}ac\\ad\\bc\\bd\end{bmatrix}$$
$$|\phi_4\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \implies \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ac\\ad\\bc\\bd\end{bmatrix}$$

Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} ac = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ ad = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ bc = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ bd = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{ac}{ad} = \frac{c}{d} = 1 \\ \frac{bc}{bd} = \frac{c}{d} = -1 \end{cases} \quad \text{(Mâu thuẫn)}$$

Vậy $|\phi_4\rangle$ không tách được.

8 Bài 8

Cho $|\phi\rangle = \frac{1}{4}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|11\rangle$.

Bài làm:

Ta có:

$$|\phi\rangle = \frac{1}{4}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|11\rangle$$
$$\implies |\phi\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$$

8.1 (a)

Đề bài: Tính $(H \otimes X)|\phi\rangle$.

Bài làm:

Ta có:

$$
\begin{aligned}
H =& \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\implies H \otimes X =& \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
=& \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Vậy:

$$
(H \otimes X)|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}
$$

8.2 (b)

Đề bài: Tính CNOT$|\phi\rangle$.

Bài làm:

Vì CNOT $= [|00\rangle \quad |01\rangle \quad |11\rangle \quad |10\rangle]$ nên ta có CNOT biến các ket $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ lần lượt thành $|00\rangle, |01\rangle, |11\rangle, |10\rangle$.

Vậy:

$$
\text{CNOT}|\phi\rangle = \frac{1}{4}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle
$$