

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Bài tập 2

Đề tài: Qubit, Hệ nhiều Qubit

Môn học: Nhập môn Tính toán lượng tử

Sinh viên thực hiện:

Lưu Thượng Hồng (23122006)

Giáo viên hướng dẫn:

ThS. Vũ Quốc Hoàng

Ngày 5 tháng 11 năm 2025



Mục lục

1	Bài 1	1
1.1	(a)	1
1.2	(b)	2
1.3	(c)	2
2	Bài 2	3
3	Bài 3	6
3.1	(a)	6
3.2	(b)	6
3.3	(c)	6
3.4	(d)	7
4	Bài 4	7
4.1	(a)	7
4.2	(b)	7
4.3	(c)	7
5	Bài 5	7
5.1	(a)	7
5.2	(b)	8
5.3	(c)	8
5.4	(d)	8
6	Bài 6	9
6.1	(a)	9
6.2	(b)	9
6.3	(c)	10
6.4	(d)	10
6.5	(e)	10

7 Bài 7	10
7.1 (a)	10
7.2 (b)	10
7.3 (c)	11
7.4 (d)	11
8 Bài 8	11
8.1 (a)	12
8.2 (b)	12
8.3 (c)	12

1 Bài 1

Đề bài: Khảo sát phép đo theo các cơ sở $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$, $B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$, $B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$ của các trạng thái lượng tử sau.

1.1 (a)

Đề bài: $|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$.

Bài làm:

Cơ sở B_Z : $[|\psi_1\rangle]_{B_Z} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Khi đo $|\psi_1\rangle$ theo cơ sở B_Z thì sẽ được $|0\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \frac{3}{4}$, được $|1\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}$.

Cơ sở B_X : Trạng thái $|\psi_1\rangle$ biểu diễn theo cơ sở B_X như sau:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \langle +|\psi_1\rangle|+\rangle + \langle -|\psi_1\rangle|-\rangle \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)|+\rangle + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)|-\rangle \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}|-\rangle \end{aligned}$$

Khi đo $|\psi_1\rangle$ theo cơ sở B_X thì sẽ được $|+\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$, được $|-\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

Cơ sở B_Y : Trạng thái $|\psi_1\rangle$ biểu diễn theo cơ sở B_Y như sau:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \langle i|\psi_1\rangle|i\rangle + \langle -i|\psi_1\rangle|-i\rangle \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-i}{\sqrt{2}}\right)|i\rangle + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{i}{\sqrt{2}}\right)|-i\rangle \\ &= \frac{\sqrt{3}-i}{2\sqrt{2}}|i\rangle + \frac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{2}}|-i\rangle \end{aligned}$$

Khi đo $|\psi_1\rangle$ theo cơ sở B_Y thì sẽ được $|i\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{\sqrt{3}-i}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$, được $|-i\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$.

1.2 (b)

Đề bài: $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle)$.

Bài làm:

Cơ sở B_Z : $[|\psi_2\rangle]_{B_Z} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$.

Khi đo $|\psi_2\rangle$ theo cơ sở B_Z thì sẽ được $|0\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$, được $|1\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}}\right|^2 = \frac{1}{2}$.

Cơ sở B_X : Trạng thái $|\psi_2\rangle$ biểu diễn theo cơ sở B_X như sau:

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= \langle +|\psi_2\rangle|+\rangle + \langle -|\psi_2\rangle|-\rangle \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)|+\rangle + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)|-\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)|+\rangle + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)|-\rangle \end{aligned}$$

Khi đo $|\psi_2\rangle$ theo cơ sở B_X thì sẽ được $|+\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right|^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$, được $|-\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right|^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

Cơ sở B_Y : Trạng thái $|\psi_2\rangle$ biểu diễn theo cơ sở B_Y như sau:

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= \langle i|\psi_2\rangle|i\rangle + \langle -i|\psi_2\rangle|-i\rangle \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{-i}{\sqrt{2}}\right)|i\rangle + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{i}{\sqrt{2}}\right)|-i\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)|i\rangle + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)|-i\rangle \end{aligned}$$

Khi đo $|\psi_2\rangle$ theo cơ sở B_Y thì sẽ được $|i\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{1}{2} - \frac{i}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right|^2 = \frac{3}{4}$, được $|-i\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{1}{2} + \frac{i}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right|^2 = \frac{1}{4}$.

1.3 (c)

Đề bài: $|\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$.

Bài làm:

Cơ sở B_Z : $[|\psi_3\rangle]_{B_Z} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1-2i}{3}\right)$.

Khi đo $|\psi_3\rangle$ theo cơ sở B_Z thì sẽ được $|0\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{2}{3}\right|^2 = \frac{4}{9}$, được $|1\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{1-2i}{3}\right|^2 = \frac{5}{9}$.

Cơ sở B_X : Trạng thái $|\psi_3\rangle$ biểu diễn theo cơ sở B_X như sau:

$$\begin{aligned} |\psi_3\rangle &= \langle +|\psi_3\rangle|+\rangle + \langle -|\psi_3\rangle|-\rangle \\ &= \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1-2i}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)|+\rangle + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1-2i}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)|-\rangle \\ &= \left(\frac{3-2i}{3\sqrt{2}}\right)|+\rangle + \left(\frac{1+2i}{3\sqrt{2}}\right)|-\rangle \end{aligned}$$

Khi đo $|\psi_3\rangle$ theo cơ sở B_X thì sẽ được $|+\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{3-2i}{3\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{13}{18}$, được $|-\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{1+2i}{3\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{5}{18}$.

Cơ sở B_Y : Trạng thái $|\psi_3\rangle$ biểu diễn theo cơ sở B_Y như sau:

$$\begin{aligned} |\psi_3\rangle &= \langle i|\psi_3\rangle|i\rangle + \langle -i|\psi_3\rangle|-i\rangle \\ &= \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1-2i}{3} \cdot \frac{-i}{\sqrt{2}}\right)|i\rangle + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1-2i}{3} \cdot \frac{i}{\sqrt{2}}\right)|-i\rangle \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}i\right)|i\rangle + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}i\right)|-i\rangle \end{aligned}$$

Khi đo $|\psi_3\rangle$ theo cơ sở B_Y thì sẽ được $|i\rangle$ với xác suất là $\left|-\frac{\sqrt{2}}{6}i\right|^2 = \frac{1}{18}$, được $|-i\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}i\right|^2 = \frac{17}{18}$.

2 Bài 2

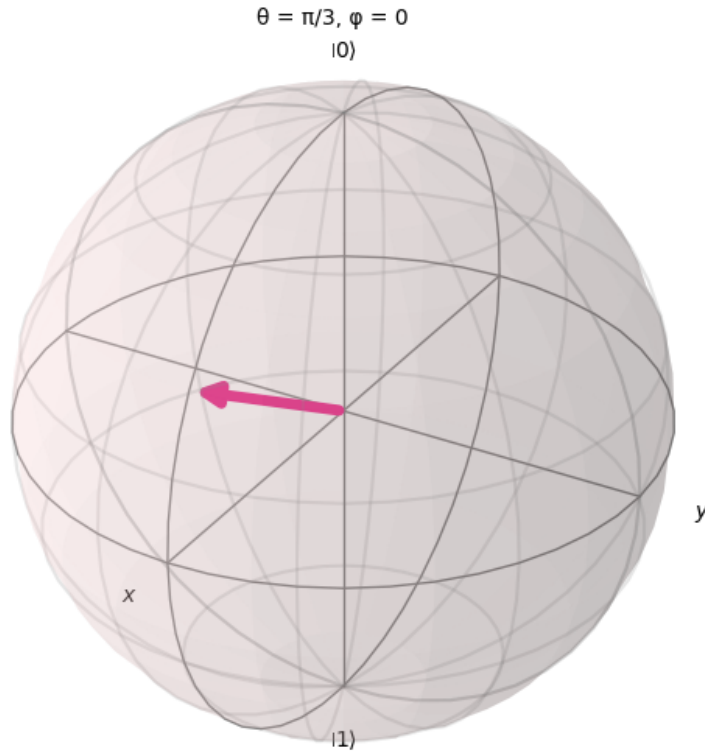
Đề bài: Viết dạng Bloch và mô tả trên mặt cầu Bloch các trạng thái lượng tử ở Câu 1.

Bài làm:

Trạng thái $|\psi_1\rangle$:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle = \cos \frac{\pi}{6}|0\rangle + e^{i0} \sin \frac{\pi}{6}|1\rangle \\ \implies \theta &= \frac{\pi}{3}, \phi = 0 \end{aligned}$$

Hình vẽ:



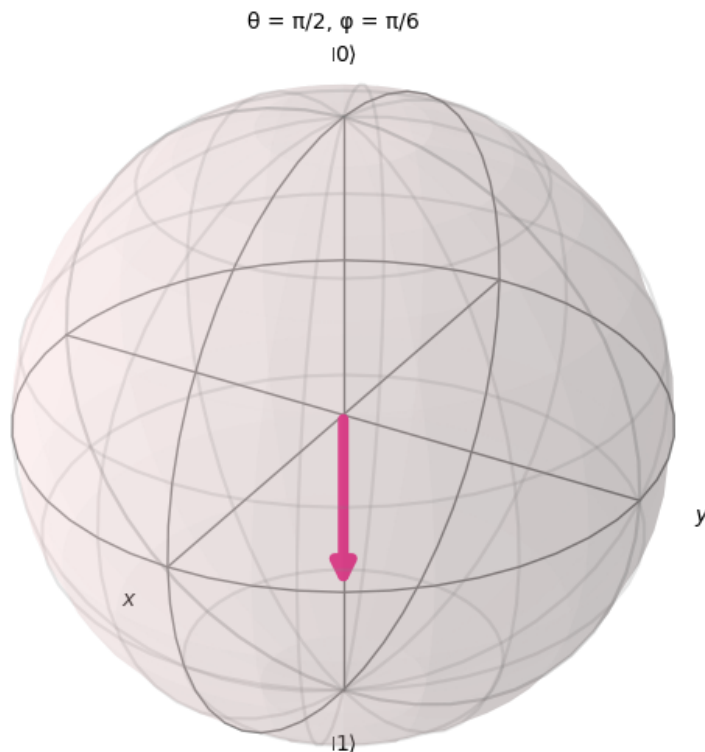
Hình 1: Trạng thái $|\psi_1\rangle$ trên mặt cầu Bloch

Trạng thái $|\psi_2\rangle$:

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{6}} |1\rangle = \cos \frac{\pi}{4} |0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}} \sin \frac{\pi}{4} |1\rangle$$

$$\implies \theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{\pi}{6}$$

Hình vẽ:

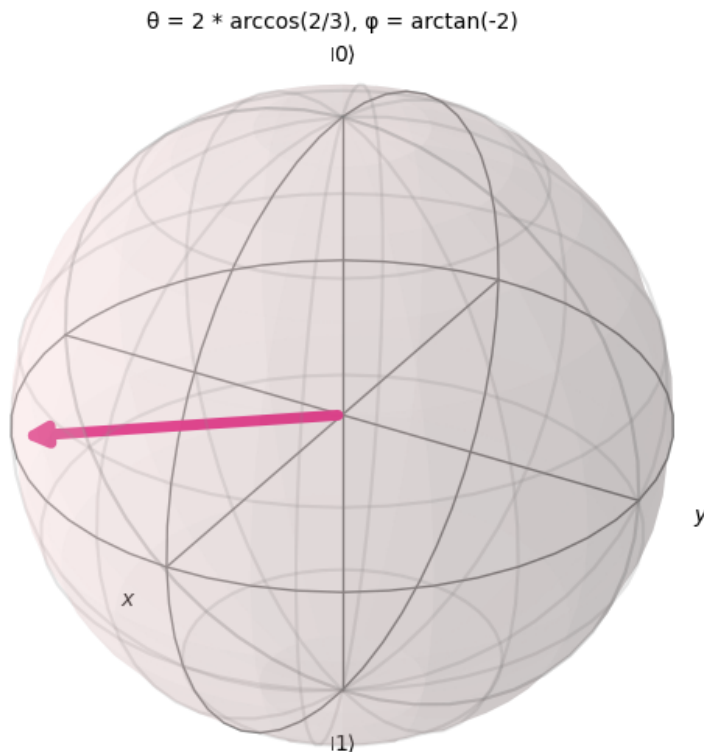


Hình 2: Trạng thái $|\psi_2\rangle$ trên mặt cầu Bloch

Trạng thái $|\psi_3\rangle$:

$$\begin{aligned}
 |\psi_3\rangle &= \frac{2}{3} |0\rangle + \frac{1-2i}{3} |1\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \\
 \Rightarrow &\begin{cases} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{2}{3} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1-2i}{3} \end{cases} \\
 \Rightarrow &\begin{cases} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{2}{3} \\ e^{i\phi} = \frac{\frac{1-2i}{3}}{\sqrt{1-\cos^2 \frac{\theta}{2}}} = \frac{\frac{1-2i}{3}}{\sqrt{1-(\frac{2}{3})^2}} = \frac{\frac{1-2i}{3}}{\sqrt{\frac{5}{9}}} = \frac{1-2i}{\sqrt{5}} \end{cases} \\
 \Rightarrow &\begin{cases} \theta = 2 \arccos \frac{2}{3} \approx 0.841 \\ \phi = \arg \frac{1-2i}{\sqrt{5}} = \arctan(-2) \approx -1.107 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Hình vẽ:



Hình 3: Trạng thái $|\psi_3\rangle$ trên mặt cầu Bloch

3 Bài 3

Đề bài: Cho U là một toán tử tuyến tính trên \mathbb{C}^2 , biết $U|0\rangle = \frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle$, $U|1\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle$.

3.1 (a)

Đề bài: Chứng minh U là một cổng lượng tử. **Bài làm:**

3.2 (b)

Đề bài: Cho biết kết quả biến đổi U trên các trạng thái $|+\rangle, |-\rangle, |i\rangle, |-i\rangle$. **Bài làm:**

3.3 (c)

Đề bài: Cho biết kết quả biến đổi U trên các trạng thái của Câu 1. **Bài làm:**

3.4 (d)

Đề bài: U tương ứng với phép quay quanh trục nào với góc bao nhiêu trên mặt cầu Bloch? **Bài làm:**

4 Bài 4

Đề bài: Từ trạng thái đầu vào $|0\rangle$,

4.1 (a)

Đề bài: Vẽ mạch mô tả tính toán HYTHX. **Bài làm:**

4.2 (b)

Đề bài: Tính đầu ra của Câu (a). **Bài làm:**

4.3 (c)

Đề bài: Thêm phép đo σ cuối mạch của Câu (a) và tính xác suất được 1. **Bài làm:**

5 Bài 5

Đề bài: Cho biết các trạng thái sau là tách được hay vướng, nếu tách được thì biểu diễn trên mặt cầu Bloch.

5.1 (a)

Đề bài: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$. **Bài làm:**

5.2 (b)

Đề bài: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + i|11\rangle)$. **Bài làm:**

(Lời giải được lấy từ Bài 7(c) trong file `bailam.tex`)

$$\begin{aligned} |\phi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle + i|11\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|1\rangle \otimes (|0\rangle + i|1\rangle)] \\ &= |1\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle \right) \\ &= |1\rangle \otimes |i\rangle \end{aligned}$$

Vậy $|\phi_3\rangle$ tách được.

5.3 (c)

Đề bài: $\frac{1}{4}(3|00\rangle - \sqrt{3}|01\rangle + \sqrt{3}|10\rangle - |11\rangle)$. **Bài làm:**

5.4 (d)

Đề bài: $\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle|+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle|-\rangle$. **Bài làm:**

(Lời giải được lấy từ Bài 7(d) trong file `bailam.tex`)

$$\begin{aligned} |\phi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|0+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1-\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Giả sử $|\phi_4\rangle$ tách được, tức là tồn tại $|\psi_1\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ và $|\psi_2\rangle = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ sao cho $|\phi_4\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$

Ta có:

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \begin{bmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{bmatrix}$$

$$|\phi_4\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{bmatrix}$$

Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} ac = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ ad = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ bc = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ bd = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{ac}{ad} = \frac{c}{d} = 1 \\ \frac{bc}{bd} = \frac{c}{d} = -1 \end{cases} \quad (\text{Mâu thuẫn})$$

Vậy $|\phi_4\rangle$ không tách được.

6 Bài 6

Đề bài: Cho hệ 2 qubit với trạng thái $|\psi\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle - \frac{i}{2}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$. Khảo sát các phép đo sau.

6.1 (a)

Đề bài: Đo đồng thời 2 qubit. **Bài làm:**

6.2 (b)

Đề bài: Đo qubit 0. **Bài làm:**

6.3 (c)

Đề bài: Đo qubit 1. **Bài làm:**

6.4 (d)

Đề bài: Đo qubit 0 rồi đo qubit 1 và so kết quả với Câu (a). **Bài làm:**

6.5 (e)

Đề bài: Đo qubit 1 rồi đo qubit 0 và so kết quả với Câu (a). **Bài làm:**

7 Bài 7

Đề bài: Khảo sát phép toán 2 qubit $U = H \otimes X$.

7.1 (a)

Đề bài: Cho biết tác động của U lên các vector của cơ sở tính toán. **Bài làm:**

7.2 (b)

Đề bài: Xác định ma trận biểu diễn của U từ Câu (a). **Bài làm:**

7.3 (c)

Đề bài: Xác định ma trận biểu diễn của U bằng phép tích tensor. **Bài làm:**

(Lời giải được lấy từ phần đầu Bài 8(a) trong file `bailam.tex`)

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow H \otimes X &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & -1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

7.4 (d)

Đề bài: Cho biết tác động của U lên trạng thái $|\psi\rangle = \frac{1}{4}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|11\rangle$. **Bài làm:**

(Lời giải được lấy từ phần sau Bài 8(a) trong file `bailam.tex`, sử dụng trạng thái $|\phi\rangle$ giống hệt $|\psi\rangle$ trong đề)

$$(H \otimes X)|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

8 Bài 8

Đề bài: Xét trạng thái 3 qubit $|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle$.

8.1 (a)

Đề bài: Chứng minh $|GHZ\rangle$ là trạng thái vướng. **Bài làm:**

8.2 (b)

Đề bài: Khảo sát phép đo riêng qubit 0, qubit 1, qubit 2 và nhận xét. **Bài làm:**

8.3 (c)

Đề bài: Thiết kế mạch 3 qubit để tạo trạng thái $|GHZ\rangle$. **Bài làm:**