ĐẠI HỌC QUỐC GIA TPHCM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

BỘ MÔN CÔNG NGHỆ TRI THỨC

---

# Bài tập 1

## Đề tài: Số phức và vector, ma trận phức

---

**Môn học: Nhập môn Tính toán lượng tử**

*Sinh viên thực hiện:*

Lưu Thượng Hồng (23122006)

*Giáo viên hướng dẫn:*

ThS. Vũ Quốc Hoàng

Ngày 17 tháng 10 năm 2025

# Mục lục

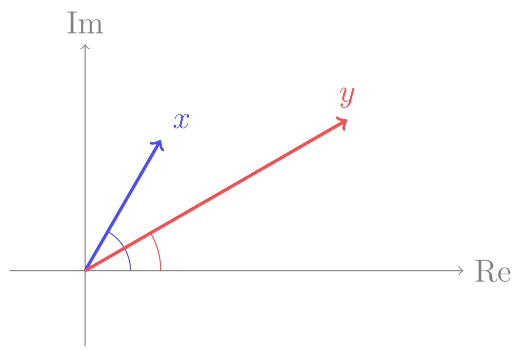
# 1 Bài 1

Cho $x = e^{i\frac{\pi}{3}}$ và $y = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

## 1.1 (a)

**Đề bài:** Vẽ minh họa $x, y$ trên mặt phẳng phức.

**Bài làm:**




## 1.2 (b)

**Đề bài:** Tìm dạng đại số và dạng cực của $x, y$.

**Bài làm:**

- **Dạng cực**:

$$x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$y = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

- **Dạng đại số**:

$$x = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$y = \sqrt{3} + i$$

## 1.3 (c)

**Đề bài:** Tính $\mathrm{Re}(x)$, $\mathrm{Im}(x)$, $|x|$, $\arg(x)$.

**Bài làm:**

- $\mathrm{Re}(x) = \frac{1}{2}$
- $\mathrm{Im}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $|x| = 1$
- $\arg(x) = \frac{\pi}{3}$

## 1.4 (d)

**Đề bài:** Tính $\overline{x}, -x, x^{-1}$.

**Bài làm:**

- $\overline{x} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $-x = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

## 1.5 (e)

**Đề bài:** Tính $x + y, x - y, xy, \frac{x}{y}, \frac{y}{x}$.

**Bài làm:**

- $x + y = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + i = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$
- $x - y = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\sqrt{3} + i\right) = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$
- $xy = e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$
- $\frac{x}{y} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{4} + i\frac{1}{4}$
- $\frac{y}{x} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} - i$

### 1.6 (f)

**Đề bài:** Tính $x^4$ và $x^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

**Bài làm:**

- $x^4 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$
- $x^n = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{3}}$

### 1.7 (g)

**Đề bài:** Tính $\sqrt[4]{x}$ và $\sqrt[n]{x}$ $n \in \mathbb{N}^+$.

**Bài làm:**

- $\sqrt[4]{x} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$
- $\sqrt[n]{x} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{i\frac{\pi}{3n}}$

## 2 Bài 2

Cho $x, y \in \mathbb{C}$ chứng minh

### 2.1 (a)

**Đề bài:** $x\overline{x} = \overline{x}x = |x|^2$.

**Bài làm:**

$$x\overline{x} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = |x|^2 \quad \text{(ĐPCM)}$$

## 2.2 (b)

**Đề bài:** $\overline{x^{-1}} = (\overline{x})^{-1} (x \neq 0)$.

**Bài làm:**

$$\overline{x^{-1}} = \overline{\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\overline{x}} = (\overline{x})^{-1} \quad \text{(ĐPCM)}$$

## 2.3 (c)

**Đề bài:** $|xy| = |x||y|$.

**Bài làm:**

Xét $x = a + bi$, $y = c + di$.

Ta có:

$$\begin{aligned} |xy| &= |(a+bi)(c+di)| = |(ac-bd)+(ad+bc)i| = \sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2} && (1)\\ &= \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2} = \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} && (2)\\ & && (3) \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} |x||y| = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} = \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2} && (4)\\ && (5) \end{aligned}$$

Vậy $|xy| = |x||y|$ (ĐPCM).

## 2.4 (d)

**Đề bài:** $|x + y| \leq |x| + |y|$.

**Bài làm:**

Xét $x = a + bi$, $y = c + di$.

Ta có:

$$\begin{aligned}|x+y| = |(a+c)+(b+d)i| &= \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} = \sqrt{a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2} \\ &= \sqrt{(a^2+b^2)+(c^2+d^2)+2(ac+bd)} \\ &\le \sqrt{(a^2+b^2)+(c^2+d^2)+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}} \quad \text{(BĐT Cauchy-Schwarz)} \\ &= \sqrt{(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2})^2} = \sqrt{(|x|+|y|)^2} = |x|+|y| \quad \text{(ĐPCM)}\end{aligned}$$

# 3 Bài 3

Cho $|\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$, $|\psi\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$.

## 3.1 (a)

**Đề bài:** Tính $\langle\phi|$ và $\langle\psi|$.

**Bài làm:**

- $\langle\phi| = |\phi\rangle^\dagger = \frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0| + \frac{1}{2}\langle 1|$
- $\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger = \frac{2}{3}\langle 0| + \frac{1+2i}{3}\langle 1|$

## 3.2 (b)

**Đề bài:** Tính $\langle\phi|\psi\rangle$ và $\langle\psi|\phi\rangle$.

**Bài làm:** Ta có:

$$\begin{aligned}\langle 0|0\rangle &= 1, & \langle 0|1\rangle &= 0, \\ \langle 1|0\rangle &= 0, & \langle 1|1\rangle &= 1.\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\langle\phi|\psi\rangle &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0| + \frac{1}{2}\langle 1|\right)\left(\frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3}\langle 0|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1-2i}{3}\langle 0|1\rangle + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\langle 1|0\rangle + \frac{1}{2}\cdot\frac{1-2i}{3}\langle 1|1\rangle \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3} + 0 + 0 + \frac{1-2i}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1-2i}{6} \\
&= \frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\phi\rangle &= \left(\frac{2}{3}\langle 0| + \frac{1+2i}{3}\langle 1|\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right) \\
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0|0\rangle + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\langle 0|1\rangle + \frac{1+2i}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 1|0\rangle + \frac{1+2i}{3}\cdot\frac{1}{2}\langle 1|1\rangle \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3} + 0 + 0 + \frac{1+2i}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1+2i}{6} \\
&= \frac{2\sqrt{3}+1+2i}{6}
\end{aligned}$$

## 3.3 (c)

**Đề bài:** Tính $|\phi\rangle\langle\phi|$ và $|\psi\rangle\langle\phi|$.

**Bài làm:**

$$\begin{aligned}
|\phi\rangle\langle\phi| &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0| + \frac{1}{2}\langle 1|\right) \\
&= \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{\sqrt{3}}{4}|0\rangle\langle 1| + \frac{\sqrt{3}}{4}|1\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| \\
&= \frac{3}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{4}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle\langle\phi| &= \left(\frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0| + \frac{1}{2}\langle 1|\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{3}|0\rangle\langle 1| + \frac{(1-2i)\sqrt{3}}{6}|1\rangle\langle 0| + \frac{1-2i}{6}|1\rangle\langle 1| \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{(1-2i)\sqrt{3}}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1-2i}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{(1-2i)\sqrt{3}}{6} & \frac{1-2i}{6} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

## 3.4 (d)

**Đề bài:** Tính $|\phi\rangle|\psi\rangle$ và $|\psi\rangle|\phi\rangle$.

**Bài làm:**

$$
\begin{aligned}
|\phi\rangle|\psi\rangle &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right)\left(\frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3}|00\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1-2i}{3}|01\rangle + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}|10\rangle + \frac{1}{2}\cdot\frac{1-2i}{3}|11\rangle \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}|00\rangle + \frac{\sqrt{3}(1-2i)}{6}|01\rangle + \frac{1}{3}|10\rangle + \frac{1-2i}{6}|11\rangle \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}(1-2i)}{6}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1-2i}{6}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}(1-2i)}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1-2i}{6} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle|\phi\rangle &= \left(\frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right) \\
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}|00\rangle + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1-2i}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}|10\rangle + \frac{1-2i}{3}\cdot\frac{1}{2}|11\rangle \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}|00\rangle + \frac{1}{3}|01\rangle + \frac{(1-2i)\sqrt{3}}{6}|10\rangle + \frac{1-2i}{6}|11\rangle \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + \frac{(1-2i)\sqrt{3}}{6}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{1-2i}{6}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{(1-2i)\sqrt{3}}{6}\\ \frac{1-2i}{6}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

## 3.5 (e)

**Đề bài:** Tính $||\phi||$ và $||\psi||$.

**Bài làm:**

$$
\begin{aligned}
||\phi|| &= \sqrt{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2} = 1 \\
||\psi|| &= \sqrt{\left|\frac{2}{3}\right|^2 + \left|\frac{1-2i}{3}\right|^2} = 1
\end{aligned}
$$

## 3.6 (f)

**Đề bài:** Tính góc giữa $|\phi\rangle$ và $|\psi\rangle$.

**Bài làm:**

Gọi $\theta$ là góc giữa $\phi\rangle$ và $\psi\rangle$.

Ta có:

$$\cos\theta = \frac{|\langle\phi,\psi\rangle|}{||\phi||||\psi||} = \frac{|\langle\phi|\psi\rangle|}{||\phi||||\psi||} = \frac{\left|\frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6}\right|}{1\cdot 1} = \left|\frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6}\right|$$

$$\implies \theta = \arccos\left|\frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6}\right| \approx 0.6175934679 \quad \text{(rad)}$$

## 3.7 (g)

**Đề bài:** Tính $\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle$ và $\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle$.

**Bài làm:**

$$\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle = \frac{\langle\psi|\phi\rangle}{||\psi||^2}\psi = \langle\psi|\phi\rangle\psi = \frac{2\sqrt{3}+1+2i}{6}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1-2i}{3}\end{bmatrix}$$

$$\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle = \frac{\langle\phi|\psi\rangle}{||\phi||^2}\phi = \langle\phi|\psi\rangle\phi = \frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

## 3.8 (h)

**Đề bài:** Chuẩn hóa $\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle$ và $\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle$.

**Bài làm:**

Ta có:

$$||\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle|| = \left|\frac{2\sqrt{3}+1+2i}{6}\right|\cdot||\psi|| = \left|\frac{2\sqrt{3}+1+2i}{6}\right|\cdot 1 = \left|\frac{2\sqrt{3}+1+2i}{6}\right| := \mathbb{A}$$

$$||\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle|| = \left|\frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6}\right|\cdot||\phi|| = \left|\frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6}\right|\cdot 1 = \left|\frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6}\right| := \mathbb{B}$$

Vậy:

$$\text{norm}(\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle) = \frac{1}{||\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle||}\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle = \frac{1}{\mathbb{A}}\cdot\frac{2\sqrt{3}+1+2i}{6}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1-2i}{3}\end{bmatrix}$$

$$\text{norm}(\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle) = \frac{1}{||\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle||}\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle = \frac{1}{\mathbb{B}}\cdot\frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

## 3.9 (i)

**Đề bài:** Tìm tọa độ của $|\phi\rangle$ và $|\psi\rangle$ trong các cơ sở $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$, $B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$, $B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$.

**Bài làm:**

**Cơ sở $B_Z$:**

$$\begin{cases} |\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle \\ |\psi\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle \end{cases} \implies \begin{cases} [|\phi\rangle]_{B_Z} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ [|\psi\rangle]_{B_Z} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1-2i}{3}\right) \end{cases}$$

**Cơ sở $B_X$:** Vì cơ sở $B_X$ là cơ sở trực chuẩn, ta có:

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_{B_X} = \Big(\langle +|\phi\rangle, \langle -|\phi\rangle\Big) = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right) \\ [|\psi\rangle]_{B_X} = \Big(\langle +|\psi\rangle, \langle -|\psi\rangle\Big) = \left(\frac{3-2i}{3\sqrt{2}}, \frac{1+2i}{3\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

**Cơ sở $B_Y$:** Vì cơ sở $B_Y$ là cơ sở trực chuẩn, ta có:

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_{B_Y} = \Big(\langle i|\phi\rangle, \langle -i|\phi\rangle\Big) = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{2}}\right) \\ [|\psi\rangle]_{B_Y} = \Big(\langle i|\psi\rangle, \langle -i|\psi\rangle\Big) = \left(\frac{-i}{3\sqrt{2}}, \frac{4+i}{3\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

## 3.10 (j)

**Đề bài:** Cho $|a\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle$, $|b\rangle = \frac{i}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$, chứng minh $B = \{a, b\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{C}^2$ và tìm tọa độ của $|\phi\rangle$, $|\psi\rangle$ theo $B$.

**Bài làm:**

Ta cần chứng minh $\langle a|b\rangle = 0$ và $||a|| = ||b|| = 1$.

Ta có:

$$\begin{aligned}
\langle a|b\rangle &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0| - \frac{i}{2}\langle 1|\right)\left(\frac{i}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}i}{4}\langle 0|0\rangle + \frac{3}{4}\langle 0|1\rangle - \frac{i^2}{4}\langle 1|0\rangle - \frac{i\sqrt{3}}{4}\langle 1|1\rangle \\
&= \frac{\sqrt{3}i}{4} + 0 - 0 - \frac{i\sqrt{3}}{4} = 0 \quad (*) \\
||a|| &= \sqrt{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 + \left|\frac{i}{2}\right|^2} = 1 = \sqrt{\left|\frac{i}{2}\right|^2 + \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2} = ||b|| \quad (**)
\end{aligned}$$

Từ (*) và (**), suy ra $B = \{a, b\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{C}^2$.

Ta tìm toạ độ của $|\phi\rangle$ và $|\psi\rangle$ theo $B$:

$$\begin{cases}
[|\phi\rangle]_B = \Big(\langle a|\phi\rangle, \langle b|\phi\rangle\Big) = \left(\frac{3-i}{4}, \frac{\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{4}\right) \\
[|\psi\rangle]_B = \Big(\langle a|\psi\rangle, \langle b|\psi\rangle\Big) = \left(\frac{2\sqrt{3}-2-i}{6}, \frac{\sqrt{3}-2i(1+\sqrt{3})}{6}\right)
\end{cases}$$

# 4 Bài 4

Cho $U$ là toán tử trên $\mathbb{C}^2$ với $U|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ và $U|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$.

## 4.1 (a)

**Đề bài:** Tìm biểu diễn của $U$ trong cơ sở chính tắc $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$.

**Bài làm:**

Ma trận biểu diễn của $U$ trong cơ sở chính tắc $B_Z$ là:

$$[U]_{B_Z} = \begin{bmatrix} U|0\rangle & U|1\rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

## 4.2 (b)

**Đề bài:** Cho $|\phi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$, tìm $U|\phi\rangle$.

**Bài làm:**

$$U|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \alpha - i\beta \\ -i\alpha + \beta \end{bmatrix}$$

## 4.3 (c)

**Đề bài:** $U$ có unita không?

**Bài làm:**

Ta có:

$$U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

$$U^\dagger U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = UU^\dagger$$

Vậy $U$ có unita

## 4.4 (d)

**Đề bài:** $U$ có Hermite không?

**Bài làm:**

Ta có:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

$$U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

Vì $U \neq U^\dagger$, nên $U$ không Hermite.

## 4.5 (e)

**Đề bài:** Tìm $U^\dagger$, $U^{-1}$.

**Bài làm:**

$$U^{-1} = U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(vì } U \text{ unita)}$$

## 4.6 (f)

**Đề bài:** Tìm $HUH|0\rangle$, $HUH|1\rangle$ và $HUH$ ($H$ là ma trận Hadamard).

**Bài làm:**

Ta có ma trận Hadamard $H$ là:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Vậy:

$$\begin{aligned}
HUH &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 1-i \\ 1+i & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2-2i & 0 \\ 0 & 2+2i \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix} \\
\implies HUH|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i \\ 0 \end{bmatrix} \\
HUH|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1+i \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

### 4.7 (g)

**Đề bài:** Tìm $UHU|0\rangle$, $UHU|1\rangle$ và $UHU$. **Bài làm:**

Ta có:

$$\begin{aligned}
UHU &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1-i & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 2-2i & 0 \\ 0 & -2-2i \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & -1-i \end{bmatrix} \\
\implies UHU|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1-i \\ 0 \end{bmatrix} \\
UHU|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ -1-i \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

## 5 Bài 5

Chứng minh $XY = iZ$ bằng cách

### 5.1 (a)

**Đề bài:** Nhân ma trận. **Bài làm:**

### 5.2 (b)

**Đề bài:** Xét tác động của các toán tử trên $|0\rangle$, $|1\rangle$. **Bài làm:**

## 6 Bài 6

Cho $|\phi\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}+i}{4}|11\rangle$.

### 6.1 (a)

**Đề bài:** Cho thấy $|\phi\rangle$ là vector đơn vị. **Bài làm:**

### 6.2 (b)

**Đề bài:** Tính $\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle$ và chuẩn hóa $\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle$. **Bài làm:**

- $\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle = \dots$
- Chuẩn hóa $\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle = \dots$

### 6.3 (c)

**Đề bài:** Tính tọa độ của $|\phi\rangle$ theo cơ sở Bell. **Bài làm:**

## 7 Bài 7

Kiểm tra các vector sau có phân tách được (separable)

### 7.1 (a)

**Đề bài:** $|\phi_1\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$. **Bài làm:**

### 7.2 (b)

**Đề bài:** $|\phi_2\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}|00\rangle - \sqrt{3}|01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$. **Bài làm:**

### 7.3 (c)

**Đề bài:** $|\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + i|11\rangle)$. **Bài làm:**

### 7.4 (d)

**Đề bài:** $|\phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1-\rangle$. **Bài làm:**

# 8 Bài 8

Cho $|\phi\rangle = \frac{1}{4}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|11\rangle$.

## 8.1 (a)

**Đề bài:** Tính $(H \otimes X)|\phi\rangle$. **Bài làm:**

## 8.2 (b)

**Đề bài:** Tính CNOT$|\phi\rangle$. **Bài làm:**