

BÀI TẬP 2

Nhập môn Tính toán Lượng tử
(Kì 1 2025-2026)

1. Khảo sát phép đo theo các cơ sở $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$, $B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$, $B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$ của các trạng thái lượng tử sau

- (a) $|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$.
(b) $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle)$.
(c) $|\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$.

2. Viết dạng Bloch và mô tả trên mặt cầu Bloch các trạng thái lượng tử ở Câu 1.
3. Cho U là một toán tử tuyến tính trên \mathbb{C}^2 , biết

$$U|0\rangle = \frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle,$$
$$U|1\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle.$$

- (a) Chứng minh U là một cổng lượng tử.
(b) Cho biết kết quả biến đổi U trên các trạng thái $|+\rangle, |-\rangle, |i\rangle, |-i\rangle$.
(c) Cho biết kết quả biến đổi U trên các trạng thái của Câu 1.
(d) U tương ứng với phép quay quanh trục nào với góc bao nhiêu trên mặt cầu Bloch?
4. Từ trạng thái đầu vào $|0\rangle$,
(a) Vẽ mạch mô tả tính toán $HYTHX$.
(b) Tính đầu ra của Câu (a).
(c) Thêm phép đo ở cuối mạch của Câu (a) và tính xác suất được 1.
5. Cho biết các trạng thái sau là tách được hay vướng, nếu tách được thì biểu diễn trên mặt cầu Bloch
(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$.
(b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + i|11\rangle)$.
(c) $\frac{1}{4}(3|00\rangle - \sqrt{3}|01\rangle + \sqrt{3}|10\rangle - |11\rangle)$.
(d) $\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle|+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle|-\rangle$.

6. Cho hệ 2 qubit với trạng thái

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle - \frac{i}{2}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle.$$

Khảo sát các phép đo sau

- (a) Đo đồng thời 2 qubit.
- (b) Đo qubit 0.
- (c) Đo qubit 1.
- (d) Đo qubit 0 rồi đo qubit 1 và so kết quả với Câu (a).
- (e) Đo qubit 1 rồi đo qubit 0 và so kết quả với Câu (a).

7. Khảo sát phép toán 2 qubit $U = H \otimes X$.

- (a) Cho biết tác động của U lên các vector của cơ sở tính toán.
- (b) Xác định ma trận biểu diễn của U từ Câu (a).
- (c) Xác định ma trận biểu diễn của U bằng phép tích tensor.
- (d) Cho biết tác động của U lên trạng thái

$$|\psi\rangle = \frac{1}{4}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|11\rangle.$$

8. Xét trạng thái 3 qubit

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle.$$

- (a) Chứng minh $|GHZ\rangle$ là trạng thái vướng.
- (b) Khảo sát phép đo riêng qubit 0, qubit 1, qubit 2 và nhận xét.
- (c) Thiết kế mạch 3 qubit để tạo trạng thái $|GHZ\rangle$.