

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
BỘ MÔN CÔNG NGHỆ TRI THỨC

Bài tập 1

Đề tài: Số phức và vector, ma trận phức

Môn học: Nhập môn Tính toán lượng tử

Sinh viên thực hiện:

Lưu Thượng Hồng (23122006)

Giáo viên hướng dẫn:

ThS. Vũ Quốc Hoàng

Ngày 18 tháng 10 năm 2025



Mục lục

1	Bài 1	1
1.1	(a)	1
1.2	(b)	1
1.3	(c)	2
1.4	(d)	2
1.5	(e)	2
1.6	(f)	3
1.7	(g)	3
2	Bài 2	3
2.1	(a)	3
2.2	(b)	4
2.3	(c)	4
2.4	(d)	4
3	Bài 3	5
3.1	(a)	5
3.2	(b)	5
3.3	(c)	6
3.4	(d)	7
3.5	(e)	8
3.6	(f)	8
3.7	(g)	9
3.8	(h)	9
3.9	(i)	10
3.10	(j)	10
4	Bài 4	11
4.1	(a)	11
4.2	(b)	12
4.3	(c)	12

4.4	(d)	12
4.5	(e)	13
4.6	(f)	13
4.7	(g)	14
5	Bài 5	14
5.1	(a)	14
5.2	(b)	14
6	Bài 6	15
6.1	(a)	15
6.2	(b)	16
6.3	(c)	17
7	Bài 7	17
7.1	(a)	17
7.2	(b)	18
7.3	(c)	18
7.4	(d)	19
8	Bài 8	20
8.1	(a)	20
8.2	(b)	20

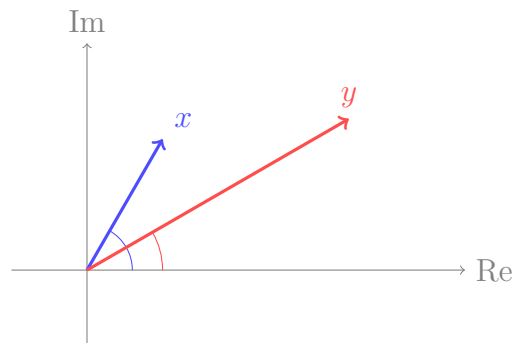
1 Bài 1

Cho $x = e^{i\frac{\pi}{3}}$ và $y = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

1.1 (a)

Đề bài: Vẽ minh họa x, y trên mặt phẳng phức.

Bài làm:



1.2 (b)

Đề bài: Tìm dạng đại số và dạng cực của x, y .

Bài làm:

- Dạng cực:

$$x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$y = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

- Dạng đại số:

$$x = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$y = \sqrt{3} + i$$

1.3 (c)

Đề bài: Tính $\operatorname{Re}(x)$, $\operatorname{Im}(x)$, $|x|$, $\arg(x)$.

Bài làm:

- $\operatorname{Re}(x) = \frac{1}{2}$
- $\operatorname{Im}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $|x| = 1$
- $\arg(x) = \frac{\pi}{3}$

1.4 (d)

Đề bài: Tính \bar{x} , $-x$, x^{-1} .

Bài làm:

- $\bar{x} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $-x = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1.5 (e)

Đề bài: Tính $x + y$, $x - y$, xy , $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{x}$.

Bài làm:

- $x + y = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + i = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$
- $x - y = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - (\sqrt{3} + i) = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$
- $xy = e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$
- $\frac{x}{y} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{4} + i\frac{1}{4}$
- $\frac{y}{x} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} - i$

1.6 (f)

Đề bài: Tính x^4 và x^n , $n \in \mathbb{Z}$.

Bài làm:

- $x^4 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$
- $x^n = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{3}}$

1.7 (g)

Đề bài: Tính $\sqrt[4]{x}$ và $\sqrt[n]{x}$ $n \in \mathbb{N}^+$.

Bài làm:

- $\sqrt[4]{x} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$
- $\sqrt[n]{x} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{i\frac{\pi}{3n}}$

2 Bài 2

Cho $x, y \in \mathbb{C}$ chứng minh

2.1 (a)

Đề bài: $x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2$.

Bài làm:

$$x\bar{x} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |x|^2 \quad (\text{ĐPCM})$$

2.2 (b)

Đề bài: $\overline{x^{-1}} = (\bar{x})^{-1} (x \neq 0)$.

Bài làm:

$$\overline{x^{-1}} = \overline{\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\bar{x}} = (\bar{x})^{-1} \quad (\text{DPCM})$$

2.3 (c)

Đề bài: $|xy| = |x||y|$.

Bài làm:

Xét $x = a + bi$, $y = c + di$.

Ta có:

$$|xy| = |(a + bi)(c + di)| = |(ac - bd) + (ad + bc)i| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \quad (1)$$

$$= \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2} = \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} \quad (2)$$

$$(3)$$

Mặt khác:

$$|x||y| = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2} \quad (4)$$

$$(5)$$

Vậy $|xy| = |x||y|$ (DPCM).

2.4 (d)

Đề bài: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Bài làm:

Xét $x = a + bi$, $y = c + di$.

Ta có:

$$\begin{aligned}|x + y| &= |(a + c) + (b + d)i| = \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} = \sqrt{a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2} \\&= \sqrt{(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) + 2(ac + bd)} \\&\leq \sqrt{(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}} \quad (\text{BĐT Cauchy-Schwarz}) \\&= \sqrt{(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2})^2} = \sqrt{(|x| + |y|)^2} = |x| + |y| \quad (\text{ĐPCM})\end{aligned}$$

3 Bài 3

Cho $|\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$, $|\psi\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$.

3.1 (a)

Đề bài: Tính $\langle\phi|$ và $\langle\psi|$.

Bài làm:

- $\langle\phi| = |\phi\rangle^\dagger = \frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0| + \frac{1}{2}\langle 1|$
- $\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger = \frac{2}{3}\langle 0| + \frac{1+2i}{3}\langle 1|$

3.2 (b)

Đề bài: Tính $\langle\phi|\psi\rangle$ và $\langle\psi|\phi\rangle$.

Bài làm: Ta có:

$$\begin{aligned}\langle 0|0\rangle &= 1, & \langle 0|1\rangle &= 0, \\ \langle 1|0\rangle &= 0, & \langle 1|1\rangle &= 1.\end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned}\langle\phi|\psi\rangle &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0| + \frac{1}{2}\langle 1|\right) \left(\frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3}\langle 0|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1-2i}{3}\langle 0|1\rangle + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\langle 1|0\rangle + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-2i}{3}\langle 1|1\rangle \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} + 0 + 0 + \frac{1-2i}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1-2i}{6} \\ &= \frac{2\sqrt{3} + 1 - 2i}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\psi|\phi\rangle &= \left(\frac{2}{3}\langle 0| + \frac{1+2i}{3}\langle 1|\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0|0\rangle + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\langle 0|1\rangle + \frac{1+2i}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\langle 1|0\rangle + \frac{1+2i}{3} \cdot \frac{1}{2}\langle 1|1\rangle \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} + 0 + 0 + \frac{1+2i}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1+2i}{6} \\ &= \frac{2\sqrt{3} + 1 + 2i}{6}\end{aligned}$$

3.3 (c)

Đề bài: Tính $|\phi\rangle\langle\phi|$ và $|\psi\rangle\langle\phi|$.

Bài làm:

$$\begin{aligned}|\phi\rangle\langle\phi| &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0| + \frac{1}{2}\langle 1|\right) \\ &= \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{\sqrt{3}}{4}|0\rangle\langle 1| + \frac{\sqrt{3}}{4}|1\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| \\ &= \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle\langle\phi| &= \left(\frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0| + \frac{1}{2}\langle 1|\right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{3}|0\rangle\langle 1| + \frac{(1-2i)\sqrt{3}}{6}|1\rangle\langle 0| + \frac{1-2i}{6}|1\rangle\langle 1| \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{(1-2i)\sqrt{3}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1-2i}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{(1-2i)\sqrt{3}}{6} & \frac{1-2i}{6} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

3.4 (d)

Đề bài: Tính $|\phi\rangle|\psi\rangle$ và $|\psi\rangle|\phi\rangle$.

Bài làm:

$$\begin{aligned}
 |\phi\rangle|\psi\rangle &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right) \left(\frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle\right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3}|00\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1-2i}{3}|01\rangle + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}|10\rangle + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-2i}{3}|11\rangle \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3}|00\rangle + \frac{\sqrt{3}(1-2i)}{6}|01\rangle + \frac{1}{3}|10\rangle + \frac{1-2i}{6}|11\rangle \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}(1-2i)}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1-2i}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}(1-2i)}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1-2i}{6} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle|\phi\rangle &= \left(\frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right) \\
 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}|00\rangle + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1-2i}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}|10\rangle + \frac{1-2i}{3} \cdot \frac{1}{2}|11\rangle \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3}|00\rangle + \frac{1}{3}|01\rangle + \frac{(1-2i)\sqrt{3}}{6}|10\rangle + \frac{1-2i}{6}|11\rangle \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{(1-2i)\sqrt{3}}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1-2i}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{(1-2i)\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1-2i}{6} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

3.5 (e)

Đề bài: Tính $\|\phi\|$ và $\|\psi\|$.

Bài làm:

$$\begin{aligned}
 \|\phi\| &= \sqrt{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2} = 1 \\
 \|\psi\| &= \sqrt{\left|\frac{2}{3}\right|^2 + \left|\frac{1-2i}{3}\right|^2} = 1
 \end{aligned}$$

3.6 (f)

Đề bài: Tính góc giữa $|\phi\rangle$ và $|\psi\rangle$.

Bài làm:

Gọi θ là góc giữa $|\phi\rangle$ và $|\psi\rangle$.

Ta có:

$$\cos \theta = \frac{|\langle \phi, \psi \rangle|}{\|\phi\| \|\psi\|} = \frac{|\langle \phi | \psi \rangle|}{\|\phi\| \|\psi\|} = \frac{\left| \frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6} \right|}{1 \cdot 1} = \left| \frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6} \right|$$

$$\Rightarrow \theta = \arccos \left| \frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6} \right| \approx 0.6175934679 \quad (\text{rad})$$

3.7 (g)

Đề bài: Tính $\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle$ và $\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle$.

Bài làm:

$$\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle = \frac{\langle \psi | \phi \rangle}{\|\psi\|^2} \psi = \langle \psi | \phi \rangle \psi = \frac{2\sqrt{3}+1+2i}{6} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1-2i}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle = \frac{\langle \phi | \psi \rangle}{\|\phi\|^2} \phi = \langle \phi | \psi \rangle \phi = \frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

3.8 (h)

Đề bài: Chuẩn hóa $\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle$ và $\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle$.

Bài làm:

Ta có:

$$\|\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle\| = \left| \frac{2\sqrt{3}+1+2i}{6} \right| \cdot \|\psi\| = \left| \frac{2\sqrt{3}+1+2i}{6} \right| \cdot 1 = \left| \frac{2\sqrt{3}+1+2i}{6} \right| := \mathbb{A}$$

$$\|\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle\| = \left| \frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6} \right| \cdot \|\phi\| = \left| \frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6} \right| \cdot 1 = \left| \frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6} \right| := \mathbb{B}$$

Vậy:

$$\text{norm}(\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle) = \frac{1}{\|\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle\|} \text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle = \frac{1}{\mathbb{A}} \cdot \frac{2\sqrt{3}+1+2i}{6} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1-2i}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{norm}(\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle) = \frac{1}{\|\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle\|} \text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle = \frac{1}{\mathbb{B}} \cdot \frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

3.9 (i)

Đề bài: Tìm tọa độ của $|\phi\rangle$ và $|\psi\rangle$ trong các cơ sở $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$, $B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$, $B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$.

Bài làm:

Cơ sở B_Z :

$$\begin{cases} |\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle \\ |\psi\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle \end{cases} \implies \begin{cases} [|\phi\rangle]_{B_Z} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ [|\psi\rangle]_{B_Z} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1-2i}{3}\right) \end{cases}$$

Cơ sở B_X : Vì cơ sở B_X là cơ sở trực chuẩn, ta có:

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_{B_X} = \left(\langle +|\phi\rangle, \langle -|\phi\rangle\right) = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right) \\ [|\psi\rangle]_{B_X} = \left(\langle +|\psi\rangle, \langle -|\psi\rangle\right) = \left(\frac{3-2i}{3\sqrt{2}}, \frac{1+2i}{3\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

Cơ sở B_Y : Vì cơ sở B_Y là cơ sở trực chuẩn, ta có:

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_{B_Y} = \left(\langle i|\phi\rangle, \langle -i|\phi\rangle\right) = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{2}}\right) \\ [|\psi\rangle]_{B_Y} = \left(\langle i|\psi\rangle, \langle -i|\psi\rangle\right) = \left(\frac{-i}{3\sqrt{2}}, \frac{4+i}{3\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

3.10 (j)

Đề bài: Cho $|a\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle$, $|b\rangle = \frac{i}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$, chứng minh $B = \{a, b\}$ là một cơ sở trực chuẩn của \mathbb{C}^2 và tìm tọa độ của $|\phi\rangle$, $|\psi\rangle$ theo B .

Bài làm:

Ta cần chứng minh $\langle a|b\rangle = 0$ và $\|a\| = \|b\| = 1$.

Ta có:

$$\begin{aligned}\langle a|b\rangle &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0| - \frac{i}{2}\langle 1|\right) \left(\frac{i}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}i}{4}\langle 0|0\rangle + \frac{3}{4}\langle 0|1\rangle - \frac{i^2}{4}\langle 1|0\rangle - \frac{i\sqrt{3}}{4}\langle 1|1\rangle \\ &= \frac{\sqrt{3}i}{4} + 0 - 0 - \frac{i\sqrt{3}}{4} = 0 \quad (*) \\ \|a\| &= \sqrt{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 + \left|\frac{i}{2}\right|^2} = 1 = \sqrt{\left|\frac{i}{2}\right|^2 + \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2} = \|b\| \quad (**)\end{aligned}$$

Từ (*) và (**), suy ra $B = \{a, b\}$ là một cơ sở trực chuẩn của \mathbb{C}^2 .

Ta tìm tọa độ của $|\phi\rangle$ và $|\psi\rangle$ theo B :

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_B = \left(\langle a|\phi\rangle, \langle b|\phi\rangle\right) = \left(\frac{3-i}{4}, \frac{\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{4}\right) \\ [|\psi\rangle]_B = \left(\langle a|\psi\rangle, \langle b|\psi\rangle\right) = \left(\frac{2\sqrt{3}-2-i}{6}, \frac{\sqrt{3}-2i(1+\sqrt{3})}{6}\right) \end{cases}$$

4 Bài 4

Cho U là toán tử trên \mathbb{C}^2 với $U|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ và $U|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$.

4.1 (a)

Đề bài: Tìm biểu diễn của U trong cơ sở chính tắc $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$.

Bài làm:

Ma trận biểu diễn của U trong cơ sở chính tắc B_Z là:

$$[U]_{B_Z} = \begin{bmatrix} U|0\rangle & U|1\rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

4.2 (b)

Đề bài: Cho $|\phi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$, tìm $U|\phi\rangle$.

Bài làm:

$$U|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \alpha - i\beta \\ -i\alpha + \beta \end{bmatrix}$$

4.3 (c)

Đề bài: U có unita không?

Bài làm:

Ta có:

$$U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$
$$U^\dagger U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = UU^\dagger$$

Vậy U có unita

4.4 (d)

Đề bài: U có Hermite không?

Bài làm:

Ta có:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$
$$U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

Vì $U \neq U^\dagger$, nên U không Hermite.

4.5 (e)

Đề bài: Tìm U^\dagger, U^{-1} .

Bài làm:

$$U^{-1} = U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{vì } U \text{ unita})$$

4.6 (f)

Đề bài: Tìm $HUH|0\rangle, HUH|1\rangle$ và HUH (H là ma trận Hadamard).

Bài làm:

Ta có ma trận Hadamard H là:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Vậy:

$$\begin{aligned} HUH &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 1-i \\ 1+i & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2-2i & 0 \\ 0 & 2+2i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix} \\ \Rightarrow HUH|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i \\ 0 \end{bmatrix} \\ HUH|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1+i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.7 (g)

Đề bài: Tìm $UHU|0\rangle$, $UHU|1\rangle$ và UHU . **Bài làm:**

Ta có:

$$\begin{aligned}
 UHU &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1-i & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2-2i & 0 \\ 0 & -2-2i \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & -1-i \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow UHU|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i \\ 0 \end{bmatrix} \\
 UHU|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1-i \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

5 Bài 5

Chứng minh $XY = iZ$ bằng cách

5.1 (a)

Đề bài: Nhân ma trận.

Bài làm: Ta có:

$$XY = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = iZ \quad (\text{ĐPCM})$$

5.2 (b)

Đề bài: Xét tác động của các toán tử trên $|0\rangle$, $|1\rangle$.

Bài làm:

Xét $XY|0\rangle$ và $XY|1\rangle$:

$$\begin{aligned} XY|0\rangle &= X(Y|0\rangle) = X \left(\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = X \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} \\ XY|1\rangle &= X(Y|1\rangle) = X \left(\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = X \begin{bmatrix} -i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Xét $iZ|0\rangle$ và $iZ|1\rangle$:

$$\begin{aligned} iZ|0\rangle &= i \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} \\ iZ|1\rangle &= i \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = i \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vì $XY|0\rangle = iZ|0\rangle$, $XY|1\rangle = iZ|1\rangle$ và $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ là cơ sở trên \mathbb{C}^2 , nên $XY = iZ$. (ĐPCM)

6 Bài 6

Cho $|\phi\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}+i}{4}|11\rangle$.

6.1 (a)

Đề bài: Cho thấy $|\phi\rangle$ là vector đơn vị.

Bài làm:

Ta có:

$$\begin{aligned} \|\phi\| &= \sqrt{\left| \frac{1}{2} \right|^2 + \left| \frac{i}{\sqrt{2}} \right|^2 + \left| \frac{\sqrt{3}+i}{4} \right|^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

Vậy $|\phi\rangle$ là vector đơn vị.

6.2 (b)

Đề bài: Tính $\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle$ và chuẩn hóa $\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle$.

Bài làm:

Ta có:

$$|+-\rangle = |+\rangle \otimes |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \langle +-| = \frac{1}{2} [1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]$$

$$\begin{aligned} \text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle &= \frac{\langle +-|\phi\rangle}{\| |+-\rangle \|^2} |+-\rangle = \langle +-|\phi\rangle |+-\rangle \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}+i}{4} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 0 + \frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}+i}{4} \right) \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{2-\sqrt{3}}{16} + \frac{-1+2\sqrt{2}}{16}i \right) |+-\rangle \end{aligned}$$

Chuẩn hoá $\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle$:

$$\begin{aligned} \|\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle\| &= \left| \frac{2-\sqrt{3}}{16} + \frac{-1+2\sqrt{2}}{16}i \right| \cdot \| |+-\rangle \| = \left| \frac{2-\sqrt{3}}{16} + \frac{-1+2\sqrt{2}}{16}i \right| \cdot 1 := \mathbb{A} \\ \Rightarrow \text{norm}(\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle) &= \frac{1}{\|\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle\|} \text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle = \frac{1}{\mathbb{A}} \left(\frac{2-\sqrt{3}}{16} + \frac{-1+2\sqrt{2}}{16}i \right) |+-\rangle \end{aligned}$$

6.3 (c)

Đề bài: Tính tọa độ của $|\phi\rangle$ theo cơ sở Bell.

Bài làm:

Ta có cơ sở Bell:

$$B_{\text{Bell}} = \begin{cases} |\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \\ |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \\ |\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \\ |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \end{cases} \implies \begin{cases} |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle + |\Phi^-\rangle) \\ |01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle + |\Psi^-\rangle) \\ |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle - |\Psi^-\rangle) \\ |11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle - |\Phi^-\rangle) \end{cases}$$

Vậy tọa độ của $|\phi\rangle$ theo cơ sở Bell là:

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &= \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}+i}{4}|11\rangle \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle + |\Phi^-\rangle) + \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle - |\Psi^-\rangle) + \frac{\sqrt{3}+i}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle - |\Phi^-\rangle) \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+i}{4\sqrt{2}} \right) |\Phi^+\rangle + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}+i}{4\sqrt{2}} \right) |\Phi^-\rangle + \frac{i}{2} |\Psi^+\rangle - \frac{i}{2} |\Psi^-\rangle \\ &\implies [|\phi\rangle]_{B_{\text{Bell}}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+i}{4\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}+i}{4\sqrt{2}} \\ \frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

7 Bài 7

Kiểm tra các vector sau có phân tách được.

7.1 (a)

Đề bài: $|\phi_1\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$.

Bài làm:

Ta có:

$$\begin{aligned} |\phi_1\rangle &= \frac{1}{2}(|0\rangle \otimes |0\rangle - |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle) \\ &= \frac{1}{2}[|0\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle) + |1\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle)] \\ &= \frac{1}{2}[(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle - |1\rangle)] \\ &= |+\rangle \otimes |-\rangle \end{aligned}$$

Vậy $|\phi_1\rangle$ tách được

7.2 (b)

Đề bài: $|\phi_2\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}|00\rangle - \sqrt{3}|01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$.

Bài làm:

Ta có:

$$\begin{aligned} |\phi_2\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{3}|00\rangle - \sqrt{3}|01\rangle + |10\rangle - |11\rangle \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(\sqrt{3}|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \right] \quad := |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \end{aligned}$$

Vậy $|\phi_2\rangle$ tách được

7.3 (c)

Đề bài: $|\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + i|11\rangle)$.

Bài làm:

Ta có:

$$\begin{aligned} |\phi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle + i|11\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|1\rangle \otimes (|0\rangle + i|1\rangle)] \\ &= |1\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle \right) \\ &= |1\rangle \otimes |i\rangle \end{aligned}$$

Vậy $|\phi_3\rangle$ tách được

7.4 (d)

Đề bài: $|\phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1-\rangle$.

Bài làm:

Ta có:

$$\begin{aligned} |\phi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|0+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1-\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Giả sử $|\phi_4\rangle$ tách được, tức là tồn tại $|\psi_1\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ và $|\psi_2\rangle = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ sao cho $|\phi_4\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$

Ta có:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle &= \begin{bmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{bmatrix} \\ |\phi_4\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle &\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} ac = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ ad = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ bc = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ bd = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{ac}{ad} = \frac{c}{d} = 1 \\ \frac{bc}{bd} = \frac{c}{d} = -1 \end{cases} \quad (\text{Mâu thuẫn})$$

Vậy $|\phi_4\rangle$ không tách được.

8 Bài 8

Cho $|\phi\rangle = \frac{1}{4}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|11\rangle$.

8.1 (a)

Đề bài: Tính $(H \otimes X)|\phi\rangle$. **Bài làm:**

8.2 (b)

Đề bài: Tính $\text{CNOT}|\phi\rangle$. **Bài làm:**