

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HCM  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN  
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN  
BỘ MÔN CÔNG NGHỆ TRI THỨC

---

## Bài tập 1

Đề tài: Số phức và vector, ma trận phức

---

Môn học: Nhập môn Tính toán lượng tử

*Sinh viên thực hiện:*

Lưu Thượng Hồng (23122006)

*Giáo viên hướng dẫn:*

ThS. Vũ Quốc Hoàng

Ngày 18 tháng 10 năm 2025



## Mục lục

<b>1</b>	<b>Bài 1</b>	<b>1</b>
1.1	(a) . . . . .	1
1.2	(b) . . . . .	1
1.3	(c) . . . . .	2
1.4	(d) . . . . .	2
1.5	(e) . . . . .	2
1.6	(f) . . . . .	3
1.7	(g) . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Bài 2</b>	<b>3</b>
2.1	(a) . . . . .	3
2.2	(b) . . . . .	4
2.3	(c) . . . . .	4
2.4	(d) . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Bài 3</b>	<b>5</b>
3.1	(a) . . . . .	5
3.2	(b) . . . . .	5
3.3	(c) . . . . .	6
3.4	(d) . . . . .	7
3.5	(e) . . . . .	8
3.6	(f) . . . . .	8
3.7	(g) . . . . .	9
3.8	(h) . . . . .	9
3.9	(i) . . . . .	10
3.10	(j) . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Bài 4</b>	<b>11</b>
4.1	(a) . . . . .	11
4.2	(b) . . . . .	12
4.3	(c) . . . . .	12

4.4	(d)	12
4.5	(e)	13
4.6	(f)	13
4.7	(g)	14
<b>5</b>	<b>Bài 5</b>	<b>14</b>
5.1	(a)	14
5.2	(b)	14
<b>6</b>	<b>Bài 6</b>	<b>15</b>
6.1	(a)	15
6.2	(b)	15
6.3	(c)	15
<b>7</b>	<b>Bài 7</b>	<b>16</b>
7.1	(a)	16
7.2	(b)	16
7.3	(c)	16
7.4	(d)	16
<b>8</b>	<b>Bài 8</b>	<b>16</b>
8.1	(a)	16
8.2	(b)	16

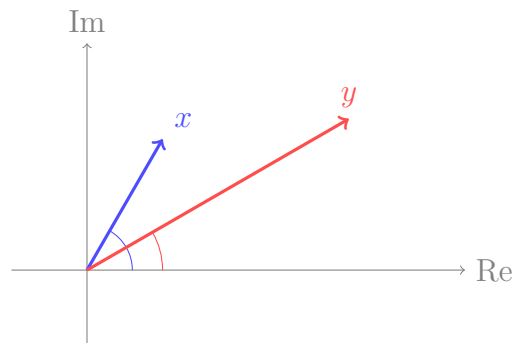
## 1 Bài 1

Cho  $x = e^{i\frac{\pi}{3}}$  và  $y = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ .

### 1.1 (a)

**Đề bài:** Vẽ minh họa  $x, y$  trên mặt phẳng phức.

**Bài làm:**



### 1.2 (b)

**Đề bài:** Tìm dạng đại số và dạng cực của  $x, y$ .

**Bài làm:**

- Dạng cực:

$$x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$y = 2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

- Dạng đại số:

$$x = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$y = \sqrt{3} + i$$

### 1.3 (c)

**Đề bài:** Tính  $\operatorname{Re}(x)$ ,  $\operatorname{Im}(x)$ ,  $|x|$ ,  $\arg(x)$ .

**Bài làm:**

- $\operatorname{Re}(x) = \frac{1}{2}$
- $\operatorname{Im}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $|x| = 1$
- $\arg(x) = \frac{\pi}{3}$

### 1.4 (d)

**Đề bài:** Tính  $\bar{x}$ ,  $-x$ ,  $x^{-1}$ .

**Bài làm:**

- $\bar{x} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $-x = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

### 1.5 (e)

**Đề bài:** Tính  $x + y$ ,  $x - y$ ,  $xy$ ,  $\frac{x}{y}$ ,  $\frac{y}{x}$ .

**Bài làm:**

- $x + y = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + i = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$
- $x - y = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - (\sqrt{3} + i) = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$
- $xy = e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$
- $\frac{x}{y} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{4} + i\frac{1}{4}$
- $\frac{y}{x} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} - i$

## 1.6 (f)

**Đề bài:** Tính  $x^4$  và  $x^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Bài làm:**

- $x^4 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$
- $x^n = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{3}}$

## 1.7 (g)

**Đề bài:** Tính  $\sqrt[4]{x}$  và  $\sqrt[n]{x}$   $n \in \mathbb{N}^+$ .

**Bài làm:**

- $\sqrt[4]{x} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$
- $\sqrt[n]{x} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{i\frac{\pi}{3n}}$

## 2 Bài 2

Cho  $x, y \in \mathbb{C}$  chứng minh

### 2.1 (a)

**Đề bài:**  $x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2$ .

**Bài làm:**

$$x\bar{x} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |x|^2 \quad (\text{ĐPCM})$$

## 2.2 (b)

**Đề bài:**  $\overline{x^{-1}} = (\bar{x})^{-1} (x \neq 0)$ .

**Bài làm:**

$$\overline{x^{-1}} = \overline{\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\bar{x}} = (\bar{x})^{-1} \quad (\text{DPCM})$$

## 2.3 (c)

**Đề bài:**  $|xy| = |x||y|$ .

**Bài làm:**

Xét  $x = a + bi$ ,  $y = c + di$ .

Ta có:

$$|xy| = |(a + bi)(c + di)| = |(ac - bd) + (ad + bc)i| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \quad (1)$$

$$= \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2} = \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} \quad (2)$$

$$(3)$$

Mặt khác:

$$|x||y| = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2} \quad (4)$$

$$(5)$$

Vậy  $|xy| = |x||y|$  (DPCM).

## 2.4 (d)

**Đề bài:**  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

**Bài làm:**

Xét  $x = a + bi$ ,  $y = c + di$ .

Ta có:

$$\begin{aligned}|x + y| &= |(a + c) + (b + d)i| = \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} = \sqrt{a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2} \\&= \sqrt{(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) + 2(ac + bd)} \\&\leq \sqrt{(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}} \quad (\text{BĐT Cauchy-Schwarz}) \\&= \sqrt{(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2})^2} = \sqrt{(|x| + |y|)^2} = |x| + |y| \quad (\text{ĐPCM})\end{aligned}$$

### 3 Bài 3

Cho  $|\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$ ,  $|\psi\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$ .

#### 3.1 (a)

**Đề bài:** Tính  $\langle\phi|$  và  $\langle\psi|$ .

**Bài làm:**

- $\langle\phi| = |\phi\rangle^\dagger = \frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0| + \frac{1}{2}\langle 1|$
- $\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger = \frac{2}{3}\langle 0| + \frac{1+2i}{3}\langle 1|$

#### 3.2 (b)

**Đề bài:** Tính  $\langle\phi|\psi\rangle$  và  $\langle\psi|\phi\rangle$ .

**Bài làm:** Ta có:

$$\begin{aligned}\langle 0|0\rangle &= 1, & \langle 0|1\rangle &= 0, \\ \langle 1|0\rangle &= 0, & \langle 1|1\rangle &= 1.\end{aligned}$$



$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\langle\phi|\psi\rangle &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0| + \frac{1}{2}\langle 1|\right) \left(\frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3}\langle 0|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1-2i}{3}\langle 0|1\rangle + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\langle 1|0\rangle + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-2i}{3}\langle 1|1\rangle \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} + 0 + 0 + \frac{1-2i}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1-2i}{6} \\ &= \frac{2\sqrt{3} + 1 - 2i}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\psi|\phi\rangle &= \left(\frac{2}{3}\langle 0| + \frac{1+2i}{3}\langle 1|\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0|0\rangle + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\langle 0|1\rangle + \frac{1+2i}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\langle 1|0\rangle + \frac{1+2i}{3} \cdot \frac{1}{2}\langle 1|1\rangle \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} + 0 + 0 + \frac{1+2i}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1+2i}{6} \\ &= \frac{2\sqrt{3} + 1 + 2i}{6}\end{aligned}$$

### 3.3 (c)

**Đề bài:** Tính  $|\phi\rangle\langle\phi|$  và  $|\psi\rangle\langle\phi|$ .

**Bài làm:**

$$\begin{aligned}|\phi\rangle\langle\phi| &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0| + \frac{1}{2}\langle 1|\right) \\ &= \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{\sqrt{3}}{4}|0\rangle\langle 1| + \frac{\sqrt{3}}{4}|1\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| \\ &= \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle\langle\phi| &= \left(\frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0| + \frac{1}{2}\langle 1|\right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{3}|0\rangle\langle 1| + \frac{(1-2i)\sqrt{3}}{6}|1\rangle\langle 0| + \frac{1-2i}{6}|1\rangle\langle 1| \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{(1-2i)\sqrt{3}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1-2i}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{(1-2i)\sqrt{3}}{6} & \frac{1-2i}{6} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

### 3.4 (d)

**Đề bài:** Tính  $|\phi\rangle|\psi\rangle$  và  $|\psi\rangle|\phi\rangle$ .

**Bài làm:**

$$\begin{aligned}
 |\phi\rangle|\psi\rangle &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right) \left(\frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle\right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3}|00\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1-2i}{3}|01\rangle + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}|10\rangle + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-2i}{3}|11\rangle \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3}|00\rangle + \frac{\sqrt{3}(1-2i)}{6}|01\rangle + \frac{1}{3}|10\rangle + \frac{1-2i}{6}|11\rangle \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}(1-2i)}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1-2i}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}(1-2i)}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1-2i}{6} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle|\phi\rangle &= \left(\frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right) \\
 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}|00\rangle + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1-2i}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}|10\rangle + \frac{1-2i}{3} \cdot \frac{1}{2}|11\rangle \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3}|00\rangle + \frac{1}{3}|01\rangle + \frac{(1-2i)\sqrt{3}}{6}|10\rangle + \frac{1-2i}{6}|11\rangle \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{(1-2i)\sqrt{3}}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1-2i}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{(1-2i)\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1-2i}{6} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

### 3.5 (e)

**Đề bài:** Tính  $\|\phi\|$  và  $\|\psi\|$ .

**Bài làm:**

$$\begin{aligned}
 \|\phi\| &= \sqrt{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2} = 1 \\
 \|\psi\| &= \sqrt{\left|\frac{2}{3}\right|^2 + \left|\frac{1-2i}{3}\right|^2} = 1
 \end{aligned}$$

### 3.6 (f)

**Đề bài:** Tính góc giữa  $|\phi\rangle$  và  $|\psi\rangle$ .

**Bài làm:**

Gọi  $\theta$  là góc giữa  $|\phi\rangle$  và  $|\psi\rangle$ .

Ta có:

$$\cos \theta = \frac{|\langle \phi, \psi \rangle|}{||\phi|| ||\psi||} = \frac{|\langle \phi | \psi \rangle|}{||\phi|| ||\psi||} = \frac{\left| \frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6} \right|}{1 \cdot 1} = \left| \frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6} \right|$$

$$\Rightarrow \theta = \arccos \left| \frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6} \right| \approx 0.6175934679 \quad (\text{rad})$$

### 3.7 (g)

**Đề bài:** Tính  $\text{proj}_{|\psi\rangle} |\phi\rangle$  và  $\text{proj}_{|\phi\rangle} |\psi\rangle$ .

**Bài làm:**

$$\text{proj}_{|\psi\rangle} |\phi\rangle = \frac{\langle \psi | \phi \rangle}{||\psi||^2} \psi = \langle \psi | \phi \rangle \psi = \frac{2\sqrt{3}+1+2i}{6} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1-2i}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{proj}_{|\phi\rangle} |\psi\rangle = \frac{\langle \phi | \psi \rangle}{||\phi||^2} \phi = \langle \phi | \psi \rangle \phi = \frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

### 3.8 (h)

**Đề bài:** Chuẩn hóa  $\text{proj}_{|\psi\rangle} |\phi\rangle$  và  $\text{proj}_{|\phi\rangle} |\psi\rangle$ .

**Bài làm:**

Ta có:

$$||\text{proj}_{|\psi\rangle} |\phi\rangle|| = \left| \frac{2\sqrt{3}+1+2i}{6} \right| \cdot ||\psi|| = \left| \frac{2\sqrt{3}+1+2i}{6} \right| \cdot 1 = \left| \frac{2\sqrt{3}+1+2i}{6} \right| := \mathbb{A}$$

$$||\text{proj}_{|\phi\rangle} |\psi\rangle|| = \left| \frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6} \right| \cdot ||\phi|| = \left| \frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6} \right| \cdot 1 = \left| \frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6} \right| := \mathbb{B}$$

Vậy:

$$\text{norm}(\text{proj}_{|\psi\rangle} |\phi\rangle) = \frac{1}{||\text{proj}_{|\psi\rangle} |\phi\rangle||} \text{proj}_{|\psi\rangle} |\phi\rangle = \frac{1}{\mathbb{A}} \cdot \frac{2\sqrt{3}+1+2i}{6} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1-2i}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{norm}(\text{proj}_{|\phi\rangle} |\psi\rangle) = \frac{1}{||\text{proj}_{|\phi\rangle} |\psi\rangle||} \text{proj}_{|\phi\rangle} |\psi\rangle = \frac{1}{\mathbb{B}} \cdot \frac{2\sqrt{3}+1-2i}{6} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

### 3.9 (i)

**Đề bài:** Tìm tọa độ của  $|\phi\rangle$  và  $|\psi\rangle$  trong các cơ sở  $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ ,  $B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$ ,  $B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$ .

**Bài làm:**

**Cơ sở  $B_Z$ :**

$$\begin{cases} |\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle \\ |\psi\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle \end{cases} \implies \begin{cases} [|\phi\rangle]_{B_Z} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ [|\psi\rangle]_{B_Z} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1-2i}{3}\right) \end{cases}$$

**Cơ sở  $B_X$ :** Vì cơ sở  $B_X$  là cơ sở trực chuẩn, ta có:

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_{B_X} = \left(\langle +|\phi\rangle, \langle -|\phi\rangle\right) = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right) \\ [|\psi\rangle]_{B_X} = \left(\langle +|\psi\rangle, \langle -|\psi\rangle\right) = \left(\frac{3-2i}{3\sqrt{2}}, \frac{1+2i}{3\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

**Cơ sở  $B_Y$ :** Vì cơ sở  $B_Y$  là cơ sở trực chuẩn, ta có:

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_{B_Y} = \left(\langle i|\phi\rangle, \langle -i|\phi\rangle\right) = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{2}}\right) \\ [|\psi\rangle]_{B_Y} = \left(\langle i|\psi\rangle, \langle -i|\psi\rangle\right) = \left(\frac{-i}{3\sqrt{2}}, \frac{4+i}{3\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

### 3.10 (j)

**Đề bài:** Cho  $|a\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle$ ,  $|b\rangle = \frac{i}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$ , chứng minh  $B = \{a, b\}$  là một cơ sở trực chuẩn của  $\mathbb{C}^2$  và tìm tọa độ của  $|\phi\rangle$ ,  $|\psi\rangle$  theo  $B$ .

**Bài làm:**

Ta cần chứng minh  $\langle a|b\rangle = 0$  và  $\|a\| = \|b\| = 1$ .

Ta có:

$$\begin{aligned}\langle a|b\rangle &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0| - \frac{i}{2}\langle 1|\right) \left(\frac{i}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}i}{4}\langle 0|0\rangle + \frac{3}{4}\langle 0|1\rangle - \frac{i^2}{4}\langle 1|0\rangle - \frac{i\sqrt{3}}{4}\langle 1|1\rangle \\ &= \frac{\sqrt{3}i}{4} + 0 - 0 - \frac{i\sqrt{3}}{4} = 0 \quad (*) \\ \|a\| &= \sqrt{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 + \left|\frac{i}{2}\right|^2} = 1 = \sqrt{\left|\frac{i}{2}\right|^2 + \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2} = \|b\| \quad (**)\end{aligned}$$

Từ (\*) và (\*\*), suy ra  $B = \{a, b\}$  là một cơ sở trực chuẩn của  $\mathbb{C}^2$ .

Ta tìm tọa độ của  $|\phi\rangle$  và  $|\psi\rangle$  theo  $B$ :

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_B = \left(\langle a|\phi\rangle, \langle b|\phi\rangle\right) = \left(\frac{3-i}{4}, \frac{\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{4}\right) \\ [|\psi\rangle]_B = \left(\langle a|\psi\rangle, \langle b|\psi\rangle\right) = \left(\frac{2\sqrt{3}-2-i}{6}, \frac{\sqrt{3}-2i(1+\sqrt{3})}{6}\right) \end{cases}$$

## 4 Bài 4

Cho  $U$  là toán tử trên  $\mathbb{C}^2$  với  $U|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$  và  $U|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$ .

### 4.1 (a)

**Đề bài:** Tìm biểu diễn của  $U$  trong cơ sở chính tắc  $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ .

**Bài làm:**

Ma trận biểu diễn của  $U$  trong cơ sở chính tắc  $B_Z$  là:

$$[U]_{B_Z} = \begin{bmatrix} U|0\rangle & U|1\rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

## 4.2 (b)

**Đề bài:** Cho  $|\phi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ , tìm  $U|\phi\rangle$ .

**Bài làm:**

$$U|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \alpha - i\beta \\ -i\alpha + \beta \end{bmatrix}$$

## 4.3 (c)

**Đề bài:**  $U$  có unita không?

**Bài làm:**

Ta có:

$$U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$
$$U^\dagger U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = UU^\dagger$$

Vậy  $U$  có unita

## 4.4 (d)

**Đề bài:**  $U$  có Hermite không?

**Bài làm:**

Ta có:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$
$$U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

Vì  $U \neq U^\dagger$ , nên  $U$  không Hermite.

#### 4.5 (e)

**Đề bài:** Tìm  $U^\dagger, U^{-1}$ .

**Bài làm:**

$$U^{-1} = U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{vì } U \text{ unita})$$

#### 4.6 (f)

**Đề bài:** Tìm  $HUH|0\rangle, HUH|1\rangle$  và  $HUH$  ( $H$  là ma trận Hadamard).

**Bài làm:**

Ta có ma trận Hadamard  $H$  là:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Vậy:

$$\begin{aligned} HUH &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 1-i \\ 1+i & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2-2i & 0 \\ 0 & 2+2i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix} \\ \Rightarrow HUH|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i \\ 0 \end{bmatrix} \\ HUH|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1+i \end{bmatrix} \end{aligned}$$



## 4.7 (g)

**Đề bài:** Tìm  $UHU|0\rangle$ ,  $UHU|1\rangle$  và  $UHU$ . **Bài làm:**

Ta có:

$$\begin{aligned}
 UHU &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1-i & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2-2i & 0 \\ 0 & -2-2i \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & -1-i \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow UHU|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i \\ 0 \end{bmatrix} \\
 UHU|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1-i \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

## 5 Bài 5

Chứng minh  $XY = iZ$  bằng cách

### 5.1 (a)

**Đề bài:** Nhân ma trận.

**Bài làm:** Ta có:

$$XY = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = iZ \quad (\text{ĐPCM})$$

### 5.2 (b)

**Đề bài:** Xét tác động của các toán tử trên  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$ .

**Bài làm:**

Xét  $XY|0\rangle$  và  $XY|1\rangle$ :

$$\begin{aligned} XY|0\rangle &= X(Y|0\rangle) = X \left( \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = X \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} \\ XY|1\rangle &= X(Y|1\rangle) = X \left( \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = X \begin{bmatrix} -i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Xét  $iZ|0\rangle$  và  $iZ|1\rangle$ :

$$\begin{aligned} iZ|0\rangle &= i \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} \\ iZ|1\rangle &= i \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = i \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vì  $XY|0\rangle = iZ|0\rangle$ ,  $XY|1\rangle = iZ|1\rangle$  và  $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$  là cơ sở trên  $\mathbb{C}^2$ , nên  $XY = iZ$ . (ĐPCM)

## 6 Bài 6

Cho  $|\phi\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3+i}}{4}|11\rangle$ .

### 6.1 (a)

**Đề bài:** Cho thấy  $|\phi\rangle$  là vector đơn vị. **Bài làm:**

### 6.2 (b)

**Đề bài:** Tính  $\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle$  và chuẩn hóa  $\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle$ . **Bài làm:**

- $\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle = \dots$
- Chuẩn hóa  $\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle = \dots$

### 6.3 (c)

**Đề bài:** Tính tọa độ của  $|\phi\rangle$  theo cơ sở Bell. **Bài làm:**

## 7 Bài 7

Kiểm tra các vector sau có phân tách được (separable)

### 7.1 (a)

Đề bài:  $|\phi_1\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$ . Bài làm:

### 7.2 (b)

Đề bài:  $|\phi_2\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}|00\rangle - \sqrt{3}|01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$ . Bài làm:

### 7.3 (c)

Đề bài:  $|\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + i|11\rangle)$ . Bài làm:

### 7.4 (d)

Đề bài:  $|\phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1-\rangle$ . Bài làm:

## 8 Bài 8

Cho  $|\phi\rangle = \frac{1}{4}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|11\rangle$ .

### 8.1 (a)

Đề bài: Tính  $(H \otimes X)|\phi\rangle$ . Bài làm:

### 8.2 (b)

Đề bài: Tính  $\text{CNOT}|\phi\rangle$ . Bài làm: