

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HCM  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN  
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN  
BỘ MÔN CÔNG NGHỆ TRI THỨC

---

## Bài tập 1

Đề tài: Số phức và vector, ma trận phức

---

Môn học: Nhập môn Tính toán lượng tử

*Sinh viên thực hiện:*

Lưu Thượng Hồng (23122006)

*Giáo viên hướng dẫn:*

ThS. Vũ Quốc Hoàng

Ngày 16 tháng 10 năm 2025



## Mục lục

<b>1</b>	<b>Bài 1</b>	<b>1</b>
1.1	(a) . . . . .	1
1.2	(b) . . . . .	1
1.3	(c) . . . . .	2
1.4	(d) . . . . .	2
1.5	(e) . . . . .	2
1.6	(f) . . . . .	3
1.7	(g) . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Bài 2</b>	<b>3</b>
2.1	(a) . . . . .	3
2.2	(b) . . . . .	4
2.3	(c) . . . . .	4
2.4	(d) . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Bài 3</b>	<b>5</b>
3.1	(a) . . . . .	5
3.2	(b) . . . . .	5
3.3	(c) . . . . .	5
3.4	(d) . . . . .	6
3.5	(e) . . . . .	6
3.6	(f) . . . . .	6
3.7	(g) . . . . .	6
3.8	(h) . . . . .	6
3.9	(i) . . . . .	7
3.10	(j) . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Bài 4</b>	<b>7</b>
4.1	(a) . . . . .	7
4.2	(b) . . . . .	7
4.3	(c) . . . . .	7

4.4	(d)	7
4.5	(e)	7
4.6	(f)	8
4.7	(g)	8
<b>5</b>	<b>Bài 5</b>	<b>8</b>
5.1	(a)	8
5.2	(b)	8
<b>6</b>	<b>Bài 6</b>	<b>8</b>
6.1	(a)	8
6.2	(b)	8
6.3	(c)	9
<b>7</b>	<b>Bài 7</b>	<b>9</b>
7.1	(a)	9
7.2	(b)	9
7.3	(c)	9
7.4	(d)	9
<b>8</b>	<b>Bài 8</b>	<b>9</b>
8.1	(a)	9
8.2	(b)	10

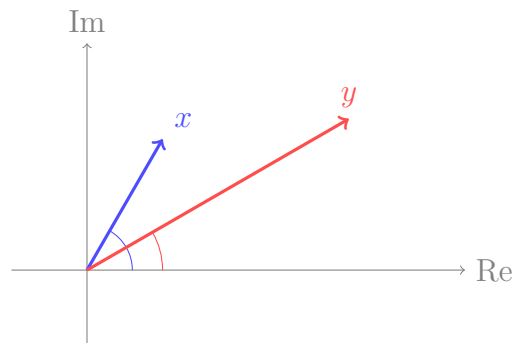
## 1 Bài 1

Cho  $x = e^{i\frac{\pi}{3}}$  và  $y = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ .

### 1.1 (a)

**Đề bài:** Vẽ minh họa  $x, y$  trên mặt phẳng phức.

**Bài làm:**



### 1.2 (b)

**Đề bài:** Tìm dạng đại số và dạng cực của  $x, y$ .

**Bài làm:**

- Dạng cực:

$$x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$y = 2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

- Dạng đại số:

$$x = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$y = \sqrt{3} + i$$

### 1.3 (c)

**Đề bài:** Tính  $\operatorname{Re}(x)$ ,  $\operatorname{Im}(x)$ ,  $|x|$ ,  $\arg(x)$ .

**Bài làm:**

- $\operatorname{Re}(x) = \frac{1}{2}$
- $\operatorname{Im}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $|x| = 1$
- $\arg(x) = \frac{\pi}{3}$

### 1.4 (d)

**Đề bài:** Tính  $\bar{x}$ ,  $-x$ ,  $x^{-1}$ .

**Bài làm:**

- $\bar{x} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $-x = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

### 1.5 (e)

**Đề bài:** Tính  $x + y$ ,  $x - y$ ,  $xy$ ,  $\frac{x}{y}$ ,  $\frac{y}{x}$ .

**Bài làm:**

- $x + y = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + i = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$
- $x - y = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - (\sqrt{3} + i) = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$
- $xy = e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$
- $\frac{x}{y} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{4} + i\frac{1}{4}$
- $\frac{y}{x} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} - i$

## 1.6 (f)

**Đề bài:** Tính  $x^4$  và  $x^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Bài làm:**

- $x^4 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$
- $x^n = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{3}}$

## 1.7 (g)

**Đề bài:** Tính  $\sqrt[4]{x}$  và  $\sqrt[n]{x}$   $n \in \mathbb{N}^+$ .

**Bài làm:**

- $\sqrt[4]{x} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$
- $\sqrt[n]{x} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{i\frac{\pi}{3n}}$

## 2 Bài 2

Cho  $x, y \in \mathbb{C}$  chứng minh

### 2.1 (a)

**Đề bài:**  $x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2$ .

**Bài làm:**

$$x\bar{x} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |x|^2 \quad (\text{ĐPCM})$$

## 2.2 (b)

**Đề bài:**  $\overline{x^{-1}} = (\bar{x})^{-1} (x \neq 0)$ .

**Bài làm:**

$$\overline{x^{-1}} = \overline{\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\bar{x}} = (\bar{x})^{-1} \quad (\text{DPCM})$$

## 2.3 (c)

**Đề bài:**  $|xy| = |x||y|$ .

**Bài làm:**

Xét  $x = a + bi$ ,  $y = c + di$ .

Ta có:

$$|xy| = |(a + bi)(c + di)| = |(ac - bd) + (ad + bc)i| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \quad (1)$$

$$= \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2} = \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} \quad (2)$$

$$(3)$$

Mặt khác:

$$|x||y| = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2} \quad (4)$$

$$(5)$$

Vậy  $|xy| = |x||y|$  (DPCM).

## 2.4 (d)

**Đề bài:**  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

**Bài làm:**

Xét  $x = a + bi$ ,  $y = c + di$ .

Ta có:

$$\begin{aligned}|x + y| &= |(a + c) + (b + d)i| = \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} = \sqrt{a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2} \\&= \sqrt{(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) + 2(ac + bd)} \\&\leq \sqrt{(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}} \quad (\text{BĐT Cauchy-Schwarz}) \\&= \sqrt{(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2})^2} = \sqrt{(|x| + |y|)^2} = |x| + |y| \quad (\text{ĐPCM})\end{aligned}$$

### 3 Bài 3

Cho  $|\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$ ,  $|\psi\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$ .

#### 3.1 (a)

**Đề bài:** Tính  $\langle\phi|$  và  $\langle\psi|$ .

**Bài làm:**

- $\langle\phi| = \dots$
- $\langle\psi| = \dots$

#### 3.2 (b)

**Đề bài:** Tính  $\langle\phi|\psi\rangle$  và  $\langle\psi|\phi\rangle$ .

**Bài làm:**

- $\langle\phi|\psi\rangle = \dots$
- $\langle\psi|\phi\rangle = \dots$

#### 3.3 (c)

**Đề bài:** Tính  $|\phi\rangle\langle\phi|$  và  $|\psi\rangle\langle\phi|$ .

**Bài làm:**

- $|\phi\rangle\langle\phi| = \dots$
- $|\psi\rangle\langle\phi| = \dots$



### 3.4 (d)

**Đề bài:** Tính  $|\phi\rangle|\psi\rangle$  và  $|\psi\rangle|\phi\rangle$ .

**Bài làm:** (Tensor product)

- $|\phi\rangle|\psi\rangle = \dots$
- $|\psi\rangle|\phi\rangle = \dots$

### 3.5 (e)

**Đề bài:** Tính  $||\phi||$  và  $||\psi||$ .

**Bài làm:**

- $||\phi|| = \dots$
- $||\psi|| = \dots$

### 3.6 (f)

**Đề bài:** Tính góc giữa  $|\phi\rangle$  và  $|\psi\rangle$ .

**Bài làm:**

### 3.7 (g)

**Đề bài:** Tính  $\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle$  và  $\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle$ .

**Bài làm:**

- $\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle = \dots$
- $\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle = \dots$

### 3.8 (h)

**Đề bài:** Chuẩn hóa  $\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle$  và  $\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle$ .

**Bài làm:**

- Chuẩn hóa  $\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle = \dots$
- Chuẩn hóa  $\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle = \dots$

### 3.9 (i)

**Đề bài:** Tìm tọa độ của  $|\phi\rangle$  và  $|\psi\rangle$  trong các cơ sở  $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ ,  $B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$ ,  $B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$ .

**Bài làm:**

### 3.10 (j)

**Đề bài:** Cho  $|a\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle$ ,  $|b\rangle = \frac{i}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$ , chứng minh  $B = \{a, b\}$  là một cơ sở trực chuẩn của  $\mathbb{C}^2$  và tìm tọa độ của  $|\phi\rangle$ ,  $|\psi\rangle$  theo  $B$ . **Bài làm:**

## 4 Bài 4

Cho  $U$  là toán tử trên  $\mathbb{C}^2$  với  $U|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$  và  $U|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ .

### 4.1 (a)

**Đề bài:** Tìm biểu diễn của  $U$  trong cơ sở chính tắc  $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ . **Bài làm:**

### 4.2 (b)

**Đề bài:** Cho  $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ , tìm  $U|\phi\rangle$ . **Bài làm:**

### 4.3 (c)

**Đề bài:**  $U$  có unita không? **Bài làm:**

### 4.4 (d)

**Đề bài:**  $U$  có Hermite không? **Bài làm:**

### 4.5 (e)

**Đề bài:** Tìm  $U^\dagger$ ,  $U^{-1}$ . **Bài làm:**

- $U^\dagger = \dots$
- $U^{-1} = \dots$

#### 4.6 (f)

**Đề bài:** Tìm  $HUH|0\rangle$ ,  $HUH|1\rangle$  và  $HUH$  ( $H$  là ma trận Hadamard). **Bài làm:**

#### 4.7 (g)

**Đề bài:** Tìm  $UHU|0\rangle$ ,  $UHU|1\rangle$  và  $UHU$ . **Bài làm:**

### 5 Bài 5

Chứng minh  $XY = iZ$  bằng cách

#### 5.1 (a)

**Đề bài:** Nhân ma trận. **Bài làm:**

#### 5.2 (b)

**Đề bài:** Xét tác động của các toán tử trên  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$ . **Bài làm:**

### 6 Bài 6

Cho  $|\phi\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}+i}{4}|11\rangle$ .

#### 6.1 (a)

**Đề bài:** Cho thấy  $|\phi\rangle$  là vector đơn vị. **Bài làm:**

#### 6.2 (b)

**Đề bài:** Tính  $\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle$  và chuẩn hóa  $\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle$ . **Bài làm:**

- $\text{proj}_{|+\rangle}|\phi\rangle = \dots$
- Chuẩn hóa  $\text{proj}_{|+\rangle}|\phi\rangle = \dots$

### 6.3 (c)

**Đề bài:** Tính tọa độ của  $|\phi\rangle$  theo cơ sở Bell. **Bài làm:**

## 7 Bài 7

Kiểm tra các vector sau có phân tách được (separable)

### 7.1 (a)

**Đề bài:**  $|\phi_1\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$ . **Bài làm:**

### 7.2 (b)

**Đề bài:**  $|\phi_2\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}|00\rangle - \sqrt{3}|01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$ . **Bài làm:**

### 7.3 (c)

**Đề bài:**  $|\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + i|11\rangle)$ . **Bài làm:**

### 7.4 (d)

**Đề bài:**  $|\phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1-\rangle$ . **Bài làm:**

## 8 Bài 8

Cho  $|\phi\rangle = \frac{1}{4}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|11\rangle$ .

### 8.1 (a)

**Đề bài:** Tính  $(H \otimes X)|\phi\rangle$ . **Bài làm:**

## 8.2 (b)

**Đề bài:** Tính  $\text{CNOT}|\phi\rangle$ . **Bài làm:**