ĐẠI HỌC QUỐC GIA TPHCM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Bài tập 2

Đề tài: Qubit, Hệ nhiều Qubit

Môn học: Nhập môn Tính toán lượng tử

Sinh viên thực hiện:

Lưu Thượng Hồng (23122006)

Giáo viên hướng dẫn:

ThS. Vũ Quốc Hoàng

Ngày 7 tháng 11 năm 2025

Mục lục

1 Bài 1 **1**

1.1 (a) 1

1.2 (b) 2

1.3 (c) 2

2 Bài 2 **3**

3 Bài 3 **6**

3.1 (a) 6

3.2 (b) 7

3.3 (c) 8

3.4 (d) 8

4 Bài 4 **9**

4.1 (a) 9

4.2 (b) 10

4.3 (c) 10

5 Bài 5 **11**

5.1 (a) 11

5.2 (b) 12

5.3 (c) 13

5.4 (d) 15

6 Bài 6 **16**

6.1 (a) 16

6.2 (b) 16

6.3 (c) 16

6.4 (d) 16

6.5 (e) 16

7 Bài 7 **16**

7.1 (a) 16

7.2 (b) 16

7.3 (c) 17

7.4 (d) 17

8 Bài 8 **17**

8.1 (a) 18

8.2 (b) 18

8.3 (c) 18

1 Bài 1

Đề bài: Khảo sát phép đo theo các cơ sở $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$, $B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$, $B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$ của các trạng thái lượng tử sau.

1.1 (a)

Đề bài: $|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$.

Bài làm:

Cơ sở B_Z**:** $[|\psi_1\rangle]_{B_Z} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Khi đo $|\psi_1\rangle$ theo cơ sở B_Z thì sẽ được $|0\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \frac{3}{4}$, được $|1\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}$.

Cơ sở B_X**:** Trạng thái $|\psi_1\rangle$ biểu diễn theo cơ sở B_X như sau:

$$\begin{aligned}|\psi_1\rangle &= \langle +|\psi_1\rangle|+\rangle + \langle -|\psi_1\rangle|-\rangle \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|+\rangle + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|-\rangle \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}|-\rangle\end{aligned}$$

Khi đo $|\psi_1\rangle$ theo cơ sở B_X thì sẽ được $|+\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$, được $|-\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

Cơ sở B_Y**:** Trạng thái $|\psi_1\rangle$ biểu diễn theo cơ sở B_Y như sau:

$$\begin{aligned}|\psi_1\rangle &= \langle i|\psi_1\rangle|i\rangle + \langle -i|\psi_1\rangle|-i\rangle \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-i}{\sqrt{2}}\right)|i\rangle + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{i}{\sqrt{2}}\right)|-i\rangle \\ &= \frac{\sqrt{3}-i}{2\sqrt{2}}|i\rangle + \frac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{2}}|-i\rangle\end{aligned}$$

Khi đo $|\psi_1\rangle$ theo cơ sở B_Y thì sẽ được $|i\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{\sqrt{3}-i}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$, được $|-i\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$.

1.2 (b)

Đề bài: $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle)$.

Bài làm:

Cơ sở B_Z: $[|\psi_2\rangle]_{B_Z} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$.

Khi đo $|\psi_2\rangle$ theo cơ sở B_Z thì sẽ được $|0\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$, được $|1\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}}\right|^2 = \frac{1}{2}$.

Cơ sở B_X: Trạng thái $|\psi_2\rangle$ biểu diễn theo cơ sở B_X như sau:

$$\begin{aligned}
|\psi_2\rangle &= \langle +|\psi_2\rangle|+\rangle + \langle -|\psi_2\rangle|-\rangle \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)|+\rangle + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)|-\rangle \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)|+\rangle + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)|-\rangle
\end{aligned}$$

Khi đo $|\psi_2\rangle$ theo cơ sở B_X thì sẽ được $|+\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right|^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$, được $|-\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right|^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

Cơ sở B_Y: Trạng thái $|\psi_2\rangle$ biểu diễn theo cơ sở B_Y như sau:

$$\begin{aligned}
|\psi_2\rangle &= \langle i|\psi_2\rangle|i\rangle + \langle -i|\psi_2\rangle|-i\rangle \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{-i}{\sqrt{2}}\right)|i\rangle + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{i}{\sqrt{2}}\right)|-i\rangle \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)|i\rangle + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)|-i\rangle
\end{aligned}$$

Khi đo $|\psi_2\rangle$ theo cơ sở B_Y thì sẽ được $|i\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{1}{2} - \frac{i}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right|^2 = \frac{3}{4}$, được $|-i\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{1}{2} + \frac{i}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right|^2 = \frac{1}{4}$.

1.3 (c)

Đề bài: $|\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$.

Bài làm:

Cơ sở B_Z: $[|\psi_3\rangle]_{B_Z} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1-2i}{3}\right)$.

Khi đo $|\psi_3\rangle$ theo cơ sở B_Z thì sẽ được $|0\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{2}{3}\right|^2 = \frac{4}{9}$, được $|1\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{1-2i}{3}\right|^2 = \frac{5}{9}$.

Cơ sở B_X: Trạng thái $|\psi_3\rangle$ biểu diễn theo cơ sở B_X như sau:

$$\begin{aligned}|\psi_3\rangle &= \langle +|\psi_3\rangle|+\rangle + \langle -|\psi_3\rangle|-\rangle \\ &= \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1-2i}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|+\rangle + \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1-2i}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|-\rangle \\ &= \left(\frac{3-2i}{3\sqrt{2}}\right)|+\rangle + \left(\frac{1+2i}{3\sqrt{2}}\right)|-\rangle\end{aligned}$$

Khi đo $|\psi_3\rangle$ theo cơ sở B_X thì sẽ được $|+\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{3-2i}{3\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{13}{18}$, được $|-\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{1+2i}{3\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{5}{18}$.

Cơ sở B_Y: Trạng thái $|\psi_3\rangle$ biểu diễn theo cơ sở B_Y như sau:

$$\begin{aligned}|\psi_3\rangle &= \langle i|\psi_3\rangle|i\rangle + \langle -i|\psi_3\rangle|-i\rangle \\ &= \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1-2i}{3}\cdot\frac{-i}{\sqrt{2}}\right)|i\rangle + \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1-2i}{3}\cdot\frac{i}{\sqrt{2}}\right)|-i\rangle \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}i\right)|i\rangle + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}i\right)|-i\rangle\end{aligned}$$

Khi đo $|\psi_3\rangle$ theo cơ sở B_Y thì sẽ được $|i\rangle$ với xác suất là $\left|-\frac{\sqrt{2}}{6}i\right|^2 = \frac{1}{18}$, được $|-i\rangle$ với xác suất là $\left|\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}i\right|^2 = \frac{17}{18}$.

2 Bài 2

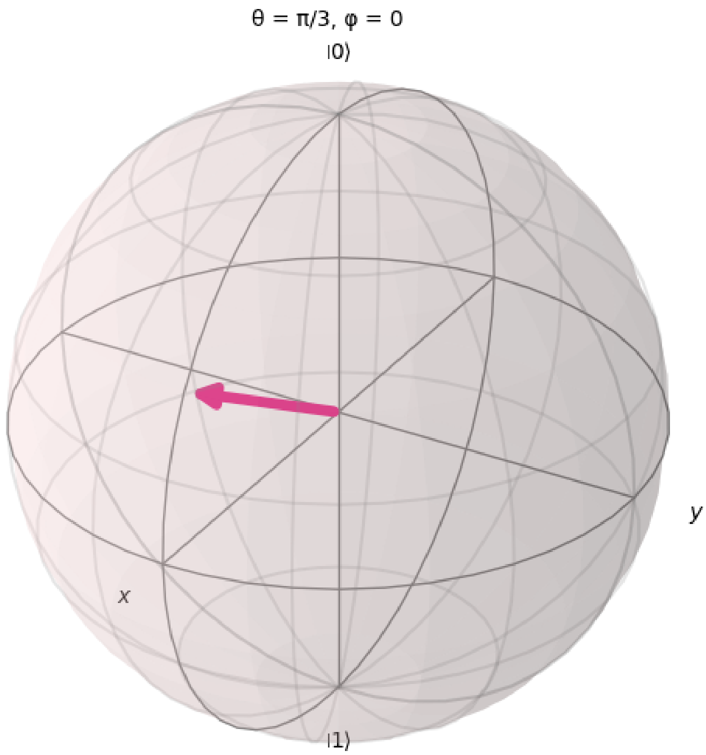
Đề bài: Viết dạng Bloch và mô tả trên mặt cầu Bloch các trạng thái lượng tử ở Câu 1.

Bài làm:

Trạng thái $|\psi_1\rangle$:

$$\begin{aligned}|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle &= \cos\frac{\pi}{6}|0\rangle + e^{i0}\sin\frac{\pi}{6}|1\rangle \\ \implies \theta = \frac{\pi}{3}, \phi = 0\end{aligned}$$

Hình vẽ:

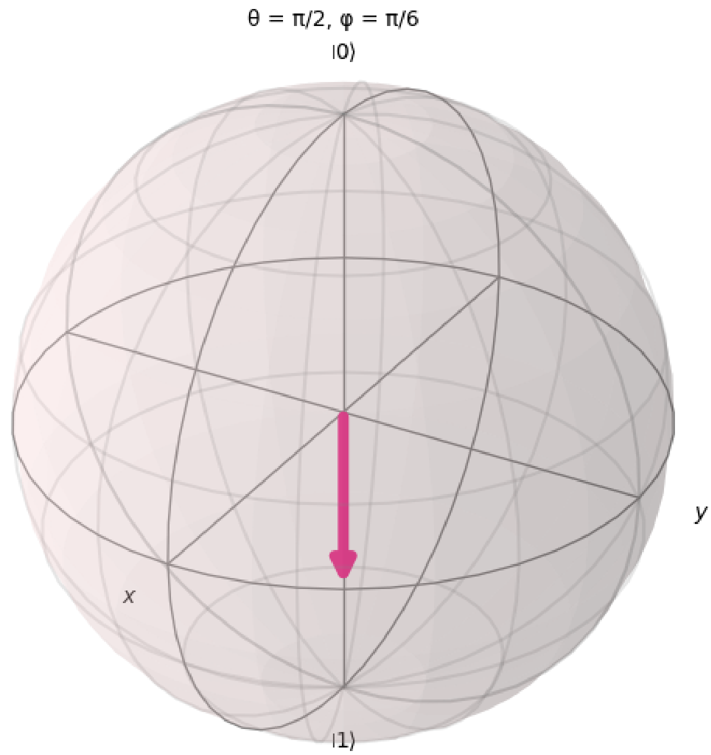


Hình 1: Trạng thái $|\psi_1\rangle$ trên mặt cầu Bloch

Trạng thái $|\psi_2\rangle$:

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle = \cos\frac{\pi}{4}|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}\sin\frac{\pi}{4}|1\rangle$$
$$\implies \theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{\pi}{6}$$

Hình vẽ:

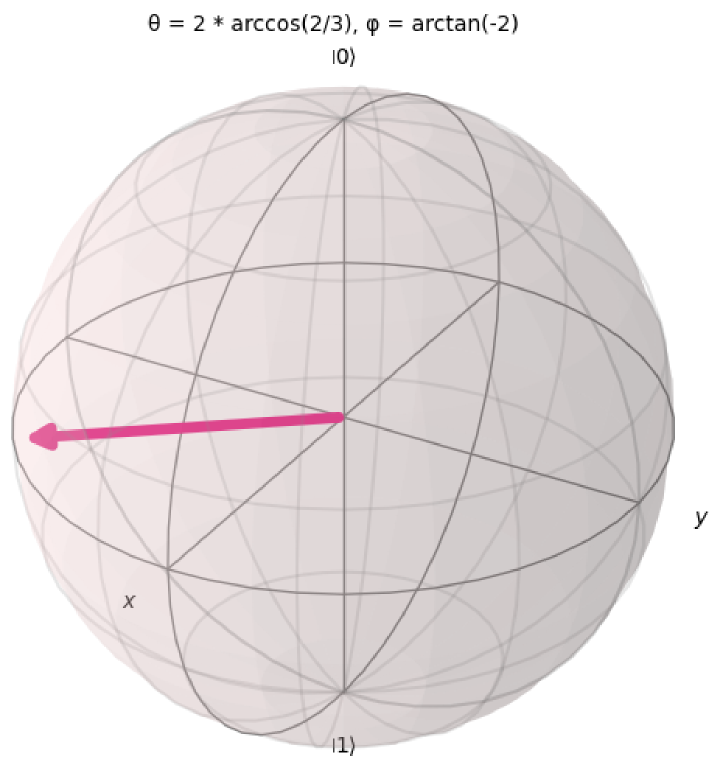


Hình 2: Trạng thái $|\psi_2\rangle$ trên mặt cầu Bloch

Trạng thái $|\psi_3\rangle$:

$$|\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \cos\frac{\theta}{2} = \frac{2}{3} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1-2i}{3} \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \cos\frac{\theta}{2} = \frac{2}{3} \\ e^{i\phi} = \frac{\frac{1-2i}{3}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{\frac{1-2i}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}} = \frac{\frac{1-2i}{3}}{\sqrt{\frac{5}{9}}} = \frac{1-2i}{\sqrt{5}} \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \theta = 2\arccos\frac{2}{3} \approx 0.841 \\ \phi = \arg\frac{1-2i}{\sqrt{5}} = \arctan(-2) \approx -1.107 \end{cases}$$

Hình vẽ:



Hình 3: Trạng thái $|\psi_3\rangle$ trên mặt cầu Bloch

3 Bài 3

Đề bài: Cho U là một toán tử tuyến tính trên $\mathbb{C}^2$, biết $U|0\rangle = \frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle$, $U|1\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle$. Ma trận biểu diễn của U theo cơ sở tính toán là:

$$U = \begin{bmatrix} U\left|0\right\rangle & U\left|1\right\rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2}-i & 1 \\ -1 & \sqrt{2}+i \end{bmatrix}$$

3.1 (a)

Đề bài: Chứng minh U là một cổng lượng tử.

Bài làm: Vì U là toán tử tuyến tính trên $\mathbb{C}^2$ nên đã thoả điều kiện:

$$U(\alpha\left|\phi\right\rangle + \beta\left|\psi\right\rangle) = \alpha U\left|\phi\right\rangle + \beta U\left|\psi\right\rangle, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall \left|\phi\right\rangle, \left|\psi\right\rangle \in \mathbb{C}^2$$

Ta cần chứng minh:

$$
\begin{aligned}
&||U\,|\phi\rangle\,|| = ||\,|\phi\rangle\,||, \quad \forall\,|\phi\rangle \in \mathbb{C}^2 \\
&\implies U\text{bảo toàn chuẩn, hay } U \text{ là ma trận unita} \\
&\implies U^\dagger U = I
\end{aligned}
$$

Ta có:

$$
\begin{aligned}
U^\dagger &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2}+i & -1 \\ 1 & \sqrt{2}-i \end{bmatrix} \\
\implies U^\dagger U &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \sqrt{2}+i & -1 \\ 1 & \sqrt{2}-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2}-i & 1 \\ -1 & \sqrt{2}+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I
\end{aligned}
$$

Vậy U là ma trận unita, tức là U là một cổng lượng tử.

3.2 (b)

Đề bài: Cho biết kết quả biến đổi U trên các trạng thái $|+\rangle, |-\rangle, |i\rangle, |-i\rangle$.

Bài làm: Ta có:

$$
\begin{aligned}
U\,|+\rangle &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2}-i & 1 \\ -1 & \sqrt{2}+i \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{2}-i+1 \\ \sqrt{2}+i-1 \end{bmatrix} \\
U\,|-\rangle &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2}-i & 1 \\ -1 & \sqrt{2}+i \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{2}-i-1 \\ -\sqrt{2}-i-1 \end{bmatrix} \\
U\,|i\rangle &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2}-i & 1 \\ -1 & \sqrt{2}+i \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -2+i\sqrt{2} \end{bmatrix} \\
U\,|-i\rangle &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2}-i & 1 \\ -1 & \sqrt{2}+i \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{2}-2i \\ -i\sqrt{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

3.3 (c)

Đề bài: Cho biết kết quả biến đổi U trên các trạng thái của Câu 1.

Bài làm: Ta có:

$$U|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{2}-i & 1\\ -1 & \sqrt{2}+i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1+\sqrt{6}-i\sqrt{3}\\ -\sqrt{3}+\sqrt{2}+i\end{bmatrix}$$
$$U|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{2}-i & 1\\ -1 & \sqrt{2}+i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}}\end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}-i+e^{i\frac{\pi}{6}}\\ -1+(\sqrt{2}+i)e^{i\frac{\pi}{6}}\end{bmatrix}$$
$$U|\psi_3\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{2}-i & 1\\ -1 & \sqrt{2}+i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1-2i}{3}\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1+2\sqrt{2}-4i\\ \sqrt{2}+(1-2\sqrt{2})i\end{bmatrix}$$

3.4 (d)

Đề bài: U tương ứng với phép quay quanh trục nào với góc bao nhiêu trên mặt cầu Bloch?

Bài làm:

Vì U unita nên luôn tìm được 2 vector riêng $|u_1\rangle, |u_2\rangle$ lập thành một cơ sở trực chuẩn với các trị riêng tương ứng là $e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}$, khi đó:

$$U|u_1\rangle = e^{i\theta_1}|u_1\rangle \equiv |u_1\rangle, \quad U|u_2\rangle = e^{i\theta_2}|u_2\rangle \equiv |u_2\rangle$$

Ta cần tìm 2 trị riêng và vector riêng của U.

Ta có ma trận đặc trưng:

$$\begin{aligned}U-\lambda I &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{2}-i-2\lambda & 1\\ -1 & \sqrt{2}+i-2\lambda\end{bmatrix}\\ \det(U-\lambda I) &= \frac{1}{4}[(\sqrt{2}-i-2\lambda)(\sqrt{2}+i-2\lambda)+1]\\ &= \frac{1}{4}[4\lambda^2-4\sqrt{2}\lambda+4] = 0\\ &\implies \begin{cases}\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}\\ \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2} = e^{-i\frac{\pi}{4}}\end{cases}\end{aligned}$$

Tìm vector riêng tương ứng với trị riêng:

$$
\begin{aligned}
&\text{Với } \lambda_1 : (U - \lambda_1 I) \left|u_1\right\rangle = 0 \\
&\qquad \Longrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -i(1+\sqrt{2}) & 1 \\ -1 & i(1-\sqrt{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \\
&\qquad \Longrightarrow \begin{cases} -i(1+\sqrt{2})a + b = 0 \\ -a + i(1-\sqrt{2})b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = i(1+\sqrt{2}) \end{cases} \Longrightarrow \left|u_1\right\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ i(1+\sqrt{2}) \end{bmatrix} \\
&\text{Với } \lambda_2 : (U - \lambda_2 I) \left|u_2\right\rangle = 0 \\
&\qquad \Longrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -i(1-\sqrt{2}) & 1 \\ -1 & i(1+\sqrt{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = 0 \\
&\qquad \Longrightarrow \begin{cases} -i(1-\sqrt{2})c + d = 0 \\ -c + i(1+\sqrt{2})d = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ d = i(1-\sqrt{2}) \end{cases} \Longrightarrow \left|u_2\right\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ i(1-\sqrt{2}) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Vậy U tương ứng với phép quay quanh trục tạo bởi $\left|u_1\right\rangle, \left|u_2\right\rangle$ với góc θ trên mặt cầu Bloch, trong đó:

$$\theta = \theta_2 - \theta_1 = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

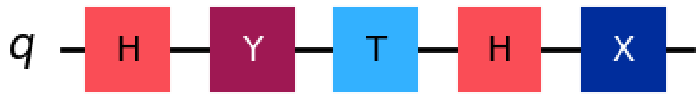
4 Bài 4

Đề bài: Từ trạng thái đầu vào $|0\rangle$,

4.1 (a)

Đề bài: Vẽ mạch mô tả tính toán HYTHX.

Bài làm:



Hình 4: Mạch tính toán HYTHX

4.2 (b)

Đề bài: Tính đầu ra của Câu (a).

Bài làm: Ta có:

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= XHTYH\,|0\rangle \\
&= XHTY\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\rangle\right) \\
&= XHT\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\,|1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}\,|0\rangle\right) \\
&= XH\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\,|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\,|1\rangle\right) \\
&= X\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\,|+\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\,|-\rangle\right) \\
&= -\frac{i}{\sqrt{2}}\,|+\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\,|-\rangle
\end{aligned}$$

4.3 (c)

Đề bài: Thêm phép đo $\tilde{\sigma}$ cuối mạch của Câu (a) và tính xác suất được 1.

Bài làm: Ta có:

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\,|+\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\,|-\rangle \\
&= \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle + \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|1\rangle \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{2+\sqrt{2}}{4}i\right)|0\rangle + \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{-2+\sqrt{2}}{4}i\right)|1\rangle
\end{aligned}$$

Xác suất được $|1\rangle$ là:

$$\left|\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{-2+\sqrt{2}}{4}i\right)\right|^2=\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

5 Bài 5

Đề bài: Cho biết các trạng thái sau là tách được hay vướng, nếu tách được thì biểu diễn trên mặt cầu Bloch.

5.1 (a)

Đề bài: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle+|10\rangle)$.

Bài làm: Ta có:

$$|\phi_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle+|10\rangle\right)=\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}$$

Giả sử $|\phi_1\rangle$ tách được, tức là tồn tại $|\psi_1\rangle=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ và $|\psi_2\rangle=\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$ sao cho $|\phi_1\rangle=|\psi_1\rangle\otimes|\psi_2\rangle$

Ta có:

$$|\phi_1\rangle=\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ac\\ad\\bc\\bd\end{bmatrix}$$

Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} ac = 0 \\ ad = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ bc = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ bd = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} acbd = 0 \\ acbd = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{(Mâu thuẫn)}$$

Vậy $|\phi_1\rangle$ không tách được.

5.2 (b)

Đề bài: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + i|11\rangle)$.

Bài làm: Ta có:

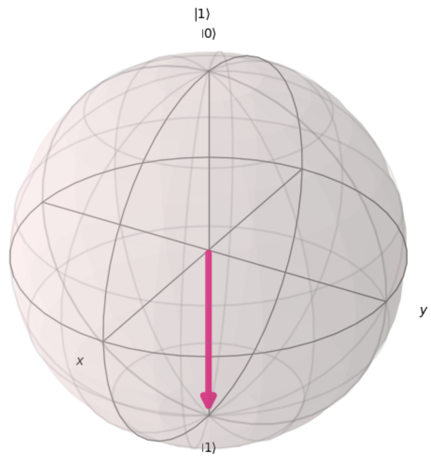
$$\begin{aligned} |\phi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|10\rangle + i|11\rangle\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1\rangle \otimes (|0\rangle + i|1\rangle)\right] \\ &= |1\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \\ &= |1\rangle \otimes |i\rangle \end{aligned}$$

Vậy $|\phi_2\rangle$ tách được.

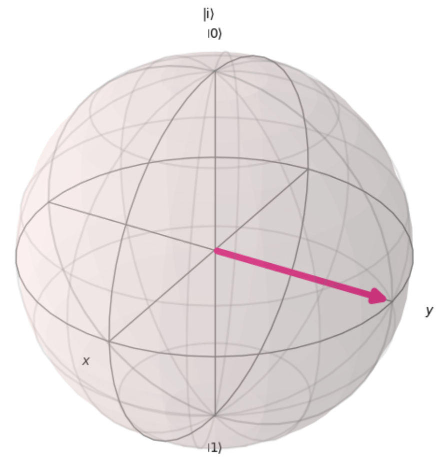
Dạng Bloch:

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \cos\frac{\pi}{2}\,|0\rangle + e^{i0}\sin\frac{\pi}{2}\,|1\rangle \implies \theta = \pi, \phi = 0 \\ |i\rangle &= \cos\frac{\pi}{4}\,|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{4}\,|1\rangle \implies \theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Hình vẽ:



Hình 5: Trạng thái $|1\rangle$ trên mặt cầu Bloch



Hình 6: Trạng thái $|i\rangle$ trên mặt cầu Bloch

5.3 (c)

Đề bài: $\frac{1}{4}(3|00\rangle - \sqrt{3}|01\rangle + \sqrt{3}|10\rangle - |11\rangle)$.

Bài làm:

Ta có:

$$\begin{aligned}
|\phi_3\rangle &= \frac{1}{4}\left(3\,|00\rangle - \sqrt{3}\,|01\rangle + \sqrt{3}\,|10\rangle - |11\rangle\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[|0\rangle \otimes (3\,|0\rangle - \sqrt{3}\,|1\rangle) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,|1\rangle \otimes (3\,|0\rangle - \sqrt{3}\,|1\rangle)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\left(|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\,|1\rangle\right) \otimes \left(3\,|0\rangle - \sqrt{3}\,|1\rangle\right)\right] \\
&= \left(\frac{1}{4}\,|0\rangle + \frac{1}{4\sqrt{3}}\,|1\rangle\right) \otimes \left(3\,|0\rangle - \sqrt{3}\,|1\rangle\right) \\
&= |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle
\end{aligned}$$

Vậy $|\phi_3\rangle$ tách được.

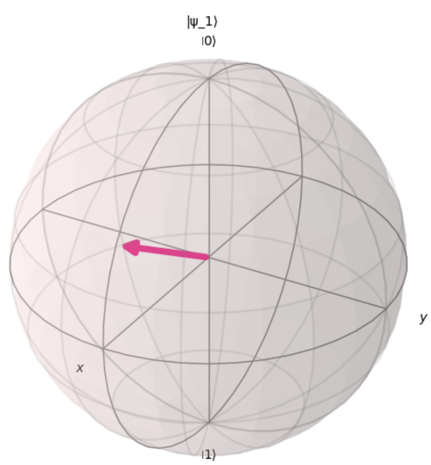
Chuẩn hoá $|\psi_1\rangle$ và $|\psi_2\rangle$ và chuyển về dạng Bloch:

$$
\begin{aligned}
|\psi_1\rangle &= \frac{\frac{1}{4}|0\rangle + \frac{1}{4\sqrt{3}}|1\rangle}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\right)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle = \cos\frac{\pi}{6}|0\rangle + e^{i0}\sin\frac{\pi}{6}|1\rangle \\
&\implies \theta = \frac{\pi}{3}, \phi = 0 \\
|\psi_2\rangle &= \frac{3|0\rangle - \sqrt{3}|1\rangle}{\sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle = \cos\frac{\pi}{6}|0\rangle + e^{i\pi}\sin\frac{\pi}{6}|1\rangle \\
&\implies \theta = \frac{\pi}{3}, \phi = \pi
\end{aligned}
$$

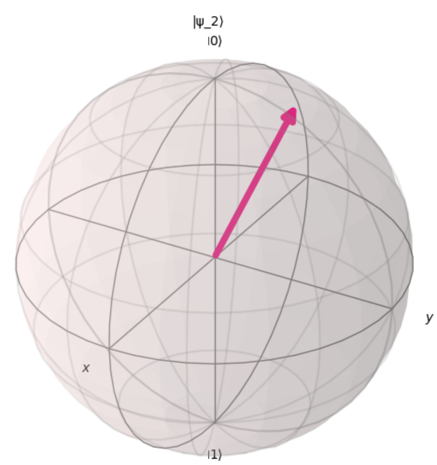
Dạng Bloch:

$$
\begin{aligned}
|\psi_1\rangle = \cos\frac{\pi}{6}|0\rangle + e^{i0}\sin\frac{\pi}{6}|1\rangle &\implies \theta = \frac{\pi}{3}, \phi = 0 \\
|\psi_2\rangle = \cos\frac{\pi}{6}|0\rangle + e^{i\pi}\sin\frac{\pi}{6}|1\rangle &\implies \theta = \frac{\pi}{3}, \phi = \pi
\end{aligned}
$$

Hình vẽ:



Hình 7: Trạng thái $|\psi_1\rangle$ trên mặt cầu Bloch



Hình 8: Trạng thái $|\psi_2\rangle$ trên mặt cầu Bloch

5.4 (d)

Đề bài: $\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle|+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle|-\rangle$. **Bài làm:**

$$|\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1-\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

Giả sử $|\phi_3\rangle$ tách được, tức là tồn tại $|\psi_1\rangle = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ và $|\psi_2\rangle = \begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$ sao cho $|\phi_4\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$

Ta có:

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \begin{bmatrix}ac\\ad\\bc\\bd\end{bmatrix}$$
$$|\phi_3\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \implies \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ac\\ad\\bc\\bd\end{bmatrix}$$

Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} ac = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ ad = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ bc = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ bd = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{ac}{ad} = \frac{c}{d} = 1 \\ \frac{bc}{bd} = \frac{c}{d} = -1 \end{cases} \quad \text{(Mâu thuẫn)}$$

Vậy $|\phi_3\rangle$ không tách được.

6 Bài 6

Đề bài: Cho hệ 2 qubit với trạng thái $|\psi\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle - \frac{i}{2}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$. Khảo sát các phép đo sau.

6.1 (a)

Đề bài: Đo đồng thời 2 qubit. **Bài làm:**

6.2 (b)

Đề bài: Đo qubit 0. **Bài làm:**

6.3 (c)

Đề bài: Đo qubit 1. **Bài làm:**

6.4 (d)

Đề bài: Đo qubit 0 rồi đo qubit 1 và so kết quả với Câu (a). **Bài làm:**

6.5 (e)

Đề bài: Đo qubit 1 rồi đo qubit 0 và so kết quả với Câu (a). **Bài làm:**

7 Bài 7

Đề bài: Khảo sát phép toán 2 qubit $U = H \otimes X$.

7.1 (a)

Đề bài: Cho biết tác động của U lên các vector của cơ sở tính toán. **Bài làm:**

7.2 (b)

Đề bài: Xác định ma trận biểu diễn của U từ Câu (a). **Bài làm:**

7.3 (c)

Đề bài: Xác định ma trận biểu diễn của U bằng phép tích tensor. **Bài làm:**

(Lời giải được lấy từ phần đầu Bài 8(a) trong file `bailam.tex`)

$$
\begin{aligned}
H =& \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\implies H \otimes X =& \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
=& \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & -1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
=& \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

7.4 (d)

Đề bài: Cho biết tác động của U lên trạng thái $|\psi\rangle = \frac{1}{4}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|11\rangle$. **Bài làm:**

(Lời giải được lấy từ phần sau Bài 8(a) trong file `bailam.tex`, sử dụng trạng thái $|\phi\rangle$ giống hệt $|\psi\rangle$ trong đề)

$$
(H \otimes X)|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}
$$

8 Bài 8

Đề bài: Xét trạng thái 3 qubit $|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle$.

8.1 (a)

Đề bài: Chứng minh $|GHZ\rangle$ là trạng thái vướng. **Bài làm:**

8.2 (b)

Đề bài: Khảo sát phép đo riêng qubit 0, qubit 1, qubit 2 và nhận xét. **Bài làm:**

8.3 (c)

Đề bài: Thiết kế mạch 3 qubit để tạo trạng thái $|GHZ\rangle$. **Bài làm:**