$(x+1) * u''+u'=1, \quad u'(0) = 1, \quad u(1)-u'(1) = 2$

Rozwiązanie dokładne:

u=C1log(x+1) + C2 + x

Ostatecznie po zastosowaniu warunków brzegowych:

u = x+2

Znajdowanie rozwiązania przybliżonego - metodą różnic brzegowych:

Dzielę przedział [0,1] na n równych przedziałów [xi-1,xi] takich, że:

$$x_i - x_{i-1} = h = \frac{1}{n}$$

Przybliżenia pierwszej i drugiej pochodnej:

$$u'(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h}$$

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2}$$

Wstawiam te przybliżenia do równania $(x+1)*u''+u'$= f(x), gdzie f(x) = 1

$$(x_i + 1)\left(\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2}\right) + \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} = f(x_i)$$

$$u(x_{i-1})\left(\frac{x_i + 1}{h^2} - \frac{1}{2h}\right) + u(x_i)\left(\frac{-2(x_i + 1)}{h^2}\right) + u(x_{i+1})\left(\frac{x_i + 1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right) = f(x_i)$$

Teraz musze zastosować warunki brzegowe dla wzoru powyżej:

$$u'(x_n) = \frac{u(x_{n+1}) - u(x_{n-1})}{2h} = u(x_n) - 2$$

$$u(x_{n+1}) = 2h(u(x_n) - 2) + u(x_{n-1})$$

$$u(x_{n-1})\left(\frac{x_n + 1}{h^2} - \frac{1}{2h}\right) + u(x_n)\left(\frac{-2(x_n + 1)}{h^2}\right) + (2h * u(x_n) - 4h + u(x_{n-1}))\left(\frac{x_n + 1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right) = f(x_n)$$

Ostatecznie:

$$u(x_{n-1})\left(\frac{2(x_n + 1)}{h^2}\right) + u(x_n)\left(\frac{-2(x_n + 1)}{h^2} + \frac{2(x_n + 1)}{h} + 1\right) = f(x_n) + \frac{4(x_n + 1)}{h} + 2$$

$$u'(x_0) = \frac{u(x_1) - u(x_{-1})}{2h} = 1$$

$$u(x_{-1}) = u(x_1) - 2h$$

$$(u(x_1) - 2h)\left(\frac{x_0 + 1}{h^2} - \frac{1}{2h}\right) + u(x_0)\left(\frac{-2(x_0 + 1)}{h^2}\right) + u(x_1)\left(\frac{x_0 + 1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right) = f(x_0)$$

Ostatecznie:

$$u(x_0)\left(\frac{-2(x_0 + 1)}{h^2}\right) + u(x_1)\left(\frac{2(x_0 + 1)}{h^2}\right) = f(x_0) + \frac{2(x_0 + 1)}{h} - 1$$

Wyznaczamy macierz A lewej strony równania

$\frac{-2(x_0 + 1)}{h^2}$	$\frac{2(x_0 + 1)}{h^2}$				
$\frac{x_1 + 1}{h^2} - \frac{1}{2h}$	$\frac{-2(x_1 + 1)}{h^2}$	$\frac{x_1 + 1}{h^2} + \frac{1}{2h}$			
	$\frac{x_2 + 1}{h^2} - \frac{1}{2h}$	$\frac{-2(x_2 + 1)}{h^2}$	$\frac{x_2 + 1}{h^2} + \frac{1}{2h}$		
		*	*	*	
			$\frac{x_{n-1} + 1}{h^2} - \frac{1}{2h}$	$\frac{-2(x_{n-1} + 1)}{h^2}$	$\frac{x_{n-1} + 1}{h^2} + \frac{1}{2h}$
				$\frac{2(x_n + 1)}{h^2}$	$\frac{-2(x_n + 1)}{h^2} + \frac{2(x_n + 1)}{h} + 1$

Następnie wyznaczamy macierz f prawej strony równania

$f(x_0) + \frac{2(x_0 + 1)}{h} - 1$
$f(x_1)$
$f(x_2)$
*
$f(x_{n-1})$
$f(x_n) + \frac{4(x_n + 1)}{h} + 2$

Rozwiązanie sprowadza się do znalezienia wektora u, takiego, że:

$$A \cdot u^T = f \implies u^T = A^{-1} \cdot f$$

Informacja dodatkowa:

Program został napisany w języku JavaScript, włączenie programu polega na zwyczajnym otworzeniu pliku index.html co otworzy program w przeglądarce

Do obliczeń posłużyłem się bibliotekami numeric.js oraz math.js, a do generowania wykresów biblioteką plotly.js