北京理工大学2012-2013学年第一学期

《微积分A》（I）A卷试题答案及评分标准

一、填空题（每题4分）

(1)2;　(2) $y = x - 1$;　(3) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,　$-\sqrt{1-x^2} + C$, 漏C扣1分.

(4) $4\sqrt{2}$;　(5) $y = Ce^{-x} + xe^{-x}$. 漏C扣1分.

二、

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^{\tan 2x} \ln(1+t^2)dt}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\ln(1+\tan^2(2x))\sec^2(2x)}{3x^2}$ 3分

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\tan^2(2x)\sec^2(2x)}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{8x^2\sec^2(2x)}{3x^2}$ 7分

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{8}{3}\sec^2(2x) = \frac{8}{3}$ 9分

三、

因为$f'(x) = e^{x^2-ex+2}$，所以$f'(\tan x) = e^{\tan^2 x - 2\tan x + 2}$. 3分

$\frac{dy}{dx} = f'(\tan x)\cdot\sec^2 x = e^{\tan^2 x - 2\tan x + 2}\cdot\sec^2 x$...........................7分

因此，$\frac{dy}{dx}|_{x=0} = e^2\cdot 1 = e^2$. 9分

或者直接计算$\frac{dy}{dx}|_{x=0} = f'(0)\sec^2 x = e^2\cdot 1 = e^2$也是正确的。

四、

$$y=\begin{cases}0, & x\ge 0\\ \frac{x}{1+x^2}, & x<0\end{cases}$$ 2分

$y'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, 令$y'=0$得，$x=-1$，此时$y=-\frac{1}{2}$，

点$(-1,-\frac{1}{2})$在直线$y=\frac{1}{2}x$上......3分

$\frac{1}{2}x-\frac{x}{1+x^2}=\frac{x(x^2-1)}{2(1+x^2)}$，故，当$-1\le x\le 0$时，

$y=\frac{x}{1+x^2}$的图像在$y=\frac{1}{2}x$的下方. 4分

$S_1=\int_0^1(\frac{x}{2}-0)dx=\frac{1}{4}$, ...6分

$S_2=\int_{-1}^0(\frac{x}{2}-\frac{x}{1+x^2})dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}$ 8分

$S=S_1+S_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\ln 2.$ 9分

注：未作图形位置判断，直接积分得到正确的S_2算正确，若正负符号错误，酌情扣分。

五、

$f(x)=(e^{-x^2})'=-2xe^{-2x^2}$ 2分

$\int xf'(x)dx=\int xdf(x)$ 5分

$=xf(x)-\int f(x)dx$ 7分

$=-2x^2e^{-x^2}-e^{-x^2}+C.$ 9分

其他解法，如计算出$f'(x)$，然后带入计算，结果正确也可，漏C扣1分。

六、

$\tan\theta_1 = \frac{6}{x}$ 1分

$\tan\theta_2 = \frac{6}{x}$ 2分

$y = \tan\theta = \tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2} = \frac{4x}{60+x^2}$ 4分

$\frac{dy}{dx} = \frac{240-4x^2}{(60+x^2)^2}$ 6分

令$\frac{dy}{dx} = 0$，得$x = \sqrt{60}$米... 8分

当$x < \sqrt{60}$时，$y' > 0$,当$x > \sqrt{60}$时，$y' < 0$，

故$x = \sqrt{60}$米时，获得最大射门角度.............................. 9分

利用$\cos\theta = \frac{a^2+b^2-16}{2ab}$，其中$a^2 = x^2 + 100$, $b^2 = x^2 + 36$,其方法也是正确的。

仿上面的给分标准给分。

七、

$y' = \tan x$ 1分

弧长$s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+(y')^2}dx$ 5分

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx$ 6分

$= \ln|\sec x + \tan x||_0^{\frac{\pi}{4}}$ 8分

$= \ln(1+\sqrt{2})$ 9分

八、$f(x)=e^{-x}+x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$ 1分

$f'(x)=-e^{-x}+\int_0^x f(t)dt$ 2分

$f(0)=1,f'(0)=-1$ 3分

$f''(x)=e^{-x}+f(x)$ 4分

令$y=f(x)$，则$y''-y=e^{-x}$，特征方程为：$r^2-1=0$ 5分

特征值$r_1=1,\ r_2=-1$,齐次方程的通解$y^*=C_1e^{-x}+C_2e^x$ 6分

设非齐次方程的特解$\bar{y}=axe^{-x}$，带入原方程得$a=-\frac{1}{2}$，

故$\bar{y}=-\frac{1}{2}xe^{-x}$ 7分

$y=f(x)=y^*+\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^x-\frac{1}{2}xe^{-x}$ 8分

将$f(0)=1,\ f'(0)=-1$，带入得：$C_1=\frac{3}{4},C_2=\frac{1}{4}$，

故$f(x)=\frac{3}{4}e^{-x}+\frac{1}{4}e^x-\frac{1}{2}xe^{-x}$ 9分

九、线密度：$\rho=\frac{\sqrt{2}}{4}m$ 1分

细棒所在地直线方程：$y=2-x$,

沿x方向引力的微元$dF_x=k\frac{dm}{r^2}\cdot\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}km\frac{\sqrt{2}xdx}{r^3}=\frac{1}{2}km\frac{x}{r^3}dx$

其中，$r=\sqrt{x^2+(2-x)^2}$ 5分

$F_x=\int_0^2 dF_x=\int_0^2\frac{1}{2}km\frac{x}{r^3}dx$ 7分

$=\frac{km}{4\sqrt{2}}\int_0^2\frac{x}{(\sqrt{(x-1)^2+1})^3}dx$, 令$t=x-1$

$= \frac{km}{4\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\frac{t+1}{(\sqrt{t^2+1})^3}dt = \frac{km}{4\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(\sqrt{t^2+1})^3}dt$, 令$t = \tan\alpha$

$= \frac{km}{2\sqrt{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos\alpha d\alpha = \frac{km}{4}$

解法2. 利用坐标变换，将细棒放在新坐标系的Y轴，端点分别为$(0,-\sqrt{2})$和$(0,\sqrt{2})$，质点放在X轴上，坐标为$(-\sqrt{2},0)$。设细棒沿新坐标系的X轴方向对质点的引力为F_X，则$F_X\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$就是本题所求的分力的大小。

$dF_X = \frac{km}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{r^3}dY = \frac{km}{2}\frac{1}{r^3}dY$, 其中，$r = \sqrt{Y^2+2}$ 5分

$F_X = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dF_x$ 7分

$F_X = \frac{km}{2}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{Y^2+2}^3}dY$

$= km\int_{0}^{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{Y^2+2}^3}dY$, 令$Y = \sqrt{2}\tan t$

$= \frac{km}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos t dt = \frac{\sqrt{2}}{4}km$

故，所求的分力$= F_X\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{km}{4}$ 9分

十、

(1) 因为$\int_a^b a\omega(x)dx \le \int_a^b x\omega(x)dx \le \int_a^b b\omega(x)dx$， ………………… 3分

所以，$a = a\int_a^b \omega(x)dx \le \int_a^b x\omega(x)dx \le b\int_a^b \omega(x)dx = b$ ……………… 4分

用广义积分中值定义证明也正确。

(2)设$x_0 = \int_a^b x\omega(x)dx$, 则$a \le x_0 \le b$

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(\xi)\frac{(x-x_0)^2}{2!}$ ………………………… 5分

$f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$\omega(x)f(x) \ge \omega(x)f(x_0) + \omega(x)f'(x_0)(x - x_0)$ ………………………… 6分

$\int_a^b \omega(x)f(x)dx \ge \int_a^b \omega(x)f(x_0)dx + \int_a^b \omega(x)f'(x_0)(x - x_0)dx$ ………… 7分

$= f(x_0)\int_a^b \omega(x)dx + f'(x_0)\int_a^b \omega(x)(x - x_0)dx$

$= f(x_0) + f'(x_0)[\int_a^b x\omega(x)dx - x_0\int_a^b \omega(x)dx]$

$= f(x_0)$

$= f(\int_a^b x\omega(x)dx)$ ………………………………………………… 8分