

07 级 A 卷



一、 $-\frac{8}{7}$

二、

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{18} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

三、 $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

四、秩为 3 , $a_1 a_2 a_3$ 为一个极大无关组

五、坐标为 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$

六、 $p = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

七、 $(1 \ 0 \ 0) \ (0 \ 1 \ 0) \ (0 \ 0 \ 1)$ 是 \mathbf{R}^3 的标准正交基

八、
$$\begin{cases} X_1 = Z_1 + Z_2 \\ X_2 = Z_1 - Z_2 + \frac{1}{2}Z_3 \\ X_3 = Z_3 \end{cases}$$

九、证明：若 A 满秩，则 A 可逆。即 $A^{-1}A=I$ $A^{-1}AB=A^{-1}AC$
 $\Rightarrow B=C$ 与 $B \neq C$ 矛盾，故 A 不满秩

十、 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

则 $AB = AC = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $A \neq 0$ $B \neq C$

07 级 B 卷

一、 8

二、 $X = \begin{bmatrix} \frac{7}{25} & \frac{3}{5} & \frac{16}{75} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{15} \end{bmatrix}$

三、通解 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ a, b 为任意常数

四、(1)秩为 3， a_1, a_2, a_5 为一个极大无关组。

(2) $a_3 = a_1 + a_2$

$A_4 = a_1 - a_2$

五、坐标 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$



六、 $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

七、 $(1\ 0\ 0)$ $(0\ 1\ 0)$ $(0\ 0\ 1)$ 是 \mathbf{R}^3 的一个标准正交基

八、
$$\begin{cases} X_1 = Z_2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} Z_1 \\ X_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} Z_1 \\ X_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} Z_1 \end{cases}$$

九、证明： $Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}$ 则 $A = Q \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix} Q^{-1}$

$$A^T = (Q^{-1})^T \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix} Q^T = Q \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix} Q^{-1} = A$$

故 A 是对角矩阵

十、证明：设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 则易证 A 可相似对角化。若存在正交

矩阵 Q ，使得 $Q^{-1}AQ$ 是对角矩阵。由第九题知， A 是对角矩阵，矛盾，证毕。

08 级 A 卷



一、 4

$$\text{二、 } X = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$X_0 = (1, -2, 0, 0)^T$$

$$\text{三、 } X_1 = \left(-\frac{7}{9}, \frac{1}{7}, 1, 0\right)^T$$

$$X_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1\right)^T$$

通解为 $X_0 + k_1 X_1 + k_2 X_2$ 四、 (1) $a_1 a_2 a_3$ 为它的一个极大无关组

$$(2) a_4 = a_1 + a_2 + a_3$$

五、 (1) 设 $k_1 \beta_1 + k_2 \beta_2 + k_3 \beta_3 = 0$

将已知的 $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ 代入, 由 $a_1 a_2 a_3$ 线性无关证明 $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ 线性无关, 从而构成 R^3 的一个基。

$$(2) \text{过渡矩阵 } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3) \text{坐标为 } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

六、 (1) 特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 2$ 属于 1 的特征向量 $k_1 (-1, 2, 20)^T$

属于 2 的特征向量 $k_2 (0, 0, 1)^T$

(2) 几何重数小于代数重数，所以不可以相似对角化

七、标准正交基

$$a_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$$

$$a_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$$

八、(1) A 的特征值为 1, 1, 0 所以二次型的一个标准型为 $y_1^2 + y_2^2$

(2) 特征根不全大于零，所以不正定

九、(1) 特征值为 2, 5, 1

(2) 因为 $2 \times 5 \times 1 \neq 0$ 所以 $A^2 + I$ 满秩 所以它是可逆矩阵

十、(1) $a=1$

(2) 因为 $a \sim \text{diag}(1, 0, -2)$ 所以 $r(A) = 2$

所以 $AX=0$ 的基础解系有 $n-r=1$ 个解向量

又 A 属于特征值 0 的特征向量是 $AX=0$ 的非零解

设为 $(k_1, k_2, k_3)^T$ 属于不同特征值的特征向量正

交

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 - k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \quad \text{求得 } (1, 0, -1)^T$$

所以通解为 $(1, 0, -1)^T$



08 级 B 卷

一、 1

二、
$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

三、 基础解系 $X_1 = (-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 1, 0)$
 $X_2 = (-1, -2, 0, 1)$

通解为 $X = k_1 X_1 + k_2 X_2$

四、 (1) 秩为 3 $a_1 a_2 a_3$ 为极大无关组

(2) $a_4 = a_1 - a_2 + a_3$

五、 (1) 同 08 年第五题

(2) 过渡矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(3) 坐标 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

六、 (1) 特征值 2 1 (二重)

特征向量 $(0, 0, 1)^T$

$(-\frac{1}{20}, \frac{1}{10}, 0)^T$

(2) 可以相似对角化

09 级第一学期 A 卷



一、 4

$$\text{二、 } X = \begin{bmatrix} -6 & 10 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \\ -4 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

三、 $a \neq 1, -2$ 时 方程组有唯一解 $X_1 = \frac{(a+1)^2}{a+2}$

$a = -2$ 时 方程组无解

$A=1$ 时 方程组有无穷解

$$\text{且通解为 } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

四、 (1) 秩为 3 $a_1 a_2 a_3$ 为一个极大无关组

$$(2) a_4 = -3a_1 + 5a_2 - a_3$$

五、 (1) 略

$$(2) P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3) \text{坐标为 } \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

六、 证明; 设 $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m = 0$

$$k_1 a_1^T + k_2 a_1^T a_2 + \dots + k_m a_1^T a_m = 0$$

$$k_1 a_1^T a_1 = 0 \Rightarrow k_1 = 0$$

同理可证 $k_2 = 0 \quad k_3 = 0 \quad \dots \quad k_m = 0$

所以 $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_m$ 线性无关

七、标准正交基 $(1, 0, 0)^T$ $(0, 1, 0)^T$



八、⁽¹⁾ $Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

⁽²⁾ 因为特征值不全大于零，所以不正定

九、⁽¹⁾ 特征值 0, 0, -1

⁽²⁾ $0 \times 0 \times (-1) = 0$ 所以不可逆 所以是不可逆矩阵

十、 $\lambda = 1$ 或 0

$$r(A) = r \quad q_{\lambda=0} = n - r$$

$$A^2 - A = 0 \Rightarrow -A(I - A) = 0 \Rightarrow r(A) + r(I - A) \leq n$$

$$A + (I - A) = n$$

$$r(A) + r(I - A) \geq n$$

A 有 n 个线性无关的特征向量，所以可以对角化

$$\text{得 } q_{\lambda=1} = r$$

$$|A - 2I| = (0 - 2)^r \cdot (1 - 2)^{n-r} = (-2)^r \cdot (-1)^{n-r}$$

09 年第一学期 B 卷

一、 4

二、

三、 略



四、 $a_4 = -3a_1 + 5a_2 - a_3$

五、 $(1, -2, 2)^T$

六、 略

七、 $(1, 0, 0)^T \quad (0, 1, 0)^T \quad (0, 0, 1)^T$

八、 $Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 不正定

九、 $0, 0, -1$

$\text{Det}(A^2 - I) = 0 \times 0 \times (-1) = 0$ 所以不可逆

十、 见书本 235 页

09 年第二学期 A 卷

一、 $-\frac{16}{27}$

二、 $\begin{bmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{bmatrix}$

三、 $\lambda = -1$ 时无解， $\lambda \neq 3$ 和 -1 时有唯一解，

唯一解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\lambda + 2}{\lambda + 1} \\ x_2 = -\frac{1}{\lambda + 1} \\ x_3 = \frac{1}{\lambda + 1} \end{cases}$$

四、 秩为 2 $a_3 = 3a_1 - 2a_2$



$$\text{五、} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{六、} \quad A=5 \quad b=6$$

$$\text{七、} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\text{八、} \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad \text{不正定}$$

$$\text{九、} \quad \text{设 } k_0x_0+k_1x_1+k_2x_2+\dots k_tx_t=0$$

$$A(k_0x_0+k_1x_1+k_2x_2+\dots k_tx_t)=0$$

$$k_0b=0 \quad \text{又 } b \neq 0 \quad \text{所以 } k_0=0$$

$$\text{又 } x_1x_2x_3\dots x_t \text{ 线性无关}$$

$$\text{所以 } k_1k_2k_3\dots k_t \text{ 均等于零}$$

$$\text{所以 } x_0x_1x_2x_3\dots x_t \text{ 线性无关}$$

十、

09 年第二学期 B 卷

$$\text{一、} \quad \frac{27}{256}$$

$$\text{二、} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

三、略

四、 $Y = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\beta_1 = (0, -1, 1)^T$$
$$\beta_2 = (1, 1, -2)^T$$
$$\beta_3 = (0, 1, 1)^T$$

