课程编号：A073003　　　　　　北京理工大学 2015-2016 学年第一学期

线性代数 B 试题 A 卷

班级 ________学号_________ 姓名 __________ 成绩 ___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）设 3 阶方阵 A, B 满足 $A^2B-A-B=I$，其中 I 为 3 阶单位矩阵，若

$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，求 B 及 $|B|$.

解：由 $A^2B-A-B=I$ 得

$$(A^2-I)B=I+A,$$

由 $I+A$ 可逆，得到

$$B=(A-I)^{-1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5\text{ 分}$$

而

$$A-I=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

所以

$$|B|=|(A-I)^{-1}|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}^{-1}=-1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 10\text{ 分}$$

二、（10 分）已知线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3\\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2\\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2\end{cases}$$

讨论参数λ取何值时，方程组无解，有唯一解和无穷多个解？在方程组有无穷多个解时，用导出组的基础解系表示解.

解

$$(A,\beta)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & \lambda-3\\ 1 & \lambda & 1 & -2\\ 1 & 1 & \lambda & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & -2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 3(\lambda-1)\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & -2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -(\lambda+2)(\lambda-1) & 3(\lambda-1)\end{pmatrix},$$

① 当$\lambda=-2$时方程组无解; ………………………3 分

② 当$\lambda\neq-2,\lambda\neq1$时，方程组有唯一解; ………………………6 分

③当$\lambda=1$时，方程组有无穷多个解. 此时增广矩阵的简化阶梯形为

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

特解取为$\xi^*=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$，导出组的基础解系为$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，因此，通解为

$\xi^*+c_1\xi_1+c\,\xi_2$. ………………………10 分

三、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 7 & 2 & 5\\ 3 & 0 & -1 & 1\\ 2 & 14 & 0 & 6\\ 0 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

（1）求 A 的列向量组的秩和它的一个极大无关组;

（2）用所求的极大无关组线性表出剩余列向量.

解：

$$A=\begin{pmatrix}1 & 7 & 2 & 5\\ 3 & 0 & -1 & 1\\ 2 & 14 & 0 & 6\\ 0 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 7 & 2 & 5\\ 0 & -21 & -14 & -14\\ 0 & 0 & -4 & -4\\ 0 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 7 & 2 & 5\\ 0 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，所以列向量组的秩为 3，……………………3 分

则极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ ……………………7 分

（2）

$$\alpha_4=\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_2+\alpha\ . \qquad \text{……………………10 分}$$

四、（10 分）已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一个基,

$$\beta_1=2\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=3\alpha_1+2\alpha_2,\beta_3=\alpha_3$$

(1) 证明 β_1,β_2,β_3 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基;

(2) 求基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵;

(3) 求向量 $\gamma=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 关于基 β_1,β_2,β_3 的坐标.

解：(1)由于

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&3&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

而 $\begin{vmatrix}2&3&0\\1&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}\neq 0$，故秩 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=$ 秩 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，因此 β_1,β_2,β_3 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基.

……………………4 分

(2)基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix}2&3&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. ………7 分

(3)设 $\gamma=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3$，则

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=(2k_1+3k_2)\alpha_1+(k_1+2k_2)\alpha_2+k_3\alpha_3,$$

故 $k_1=-1,k_2=1,k_3=1$，则向量 $\gamma=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 关于基 $\beta_1,\beta_2\beta$ 的坐标为

$(-1,1^T,$. ……………………10 分

五、（10 分）用施密特正交化方法, 由向量组

$$\alpha_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2=(2,2,0)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_3=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$$

构造一组标准正交向量组.

解：令

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},$$

………………………6 分

单位化

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\eta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\eta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

………………………10 分

六、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&2\end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的特征值和特征向量;
(2) 判断 A 是否可以相似对角化.

解：由 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&0\\4&\lambda+1&0\\-4&8&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$，可知 A 的特征值为

$$\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1.$$ ………………………3 分

当 $\lambda_1=2$ 时，$2I-A=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\4&3&0\\-4&8&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，求出线性方程组

$(2I-A)X=0$ 的一个基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，全部特征向量为 $c_1\xi_1=c_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，$I-A=\begin{pmatrix}-2&-1&0\\4&2&0\\-4&8&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&0\\0&10&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，求出线性方程组

$(I-A)X=0$ 的一个基础解系 $\xi_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\10\end{pmatrix}$，全部特征向量为 $c_2\xi_2=c_2\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\10\end{pmatrix}$.

……………………7 分

由于 A 是三阶矩阵，而 A 只有两个线性无关的特征向量，故 A 不能对角化. …10 分

七、（10 分）如果 $\mathbf{F}^n$ 中的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是线性无关的，并且向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\beta$ 是线性相关的，那么 b 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性表示，并且表示的方法是唯一的.

证明 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\beta$ 是线性相关的，所以存在 $\mathbf{F}$ 中的不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_t,h$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t+h\beta=0. \qquad ①$$ ……………………3 分

如果 $h=0$，那么 $k_1,k_2,\cdots,k_t$ 必不全为零，并且

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t=0,$$

这意味着 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是线性相关的，与条件矛盾. 因此，由等式①可得

$$\beta=\left(-\frac{k_1}{h}\right)\alpha_1+\left(-\frac{k_2}{h}\right)\alpha_2+\cdots+\left(-\frac{k_t}{h}\right)\alpha_t,$$

即 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性表示. ……………………6 分

假设

$$\beta=h_1\alpha_1+h_2\alpha_2+\cdots+h_t\alpha_t, \qquad ②$$

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t, \qquad ③$$

都是 β 由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性表示的表示式. 等式③与等式②相减得

$$(k_1-h_1)\alpha_1+(k_2-h_2)\alpha_2+\cdots+(k_t-h_t)\alpha_t=0. \qquad ④$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是线性无关的，所以由等式④可得

$$k_1-h_1=0,\ k_2-h_2=0,\ \cdots,\ k_t-h_t=0,$$

即 $k_1=h_1$, $k_2=h_2$, $\cdots$, $k_t=h_t$. 因此, b 由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性表示的表示方法是唯一的. ………………………10 分

八、(10 分)已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$.

(1)用正交变换将它化为标准形, 并给出所用的正交变换; (2)该二次型是否正定?

解: 二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0&2&-2\\2&4&4\\-2&4&-3\end{pmatrix}$. ………………………2 分

特征方程

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-2&2\\-2&\lambda-4&-4\\2&-4&\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-6)(\lambda+6)=0,$$

得 A 的特征值为 1,6 和 10. ………………………4 分

对于 $\lambda=1$, 特征方程组 $(\lambda I-A)X=0$ 为 $\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-3&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$, 由于

$$\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-3&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以特征向量为 $\xi_1=(-2,0,1)^{\mathrm{T}}$, 单位化 $\eta_1=(-\frac{2}{\sqrt5},0,\frac{1}{\sqrt5})^{\mathrm{T}}$.

对于 $\lambda=6$, 特征方程组 $\begin{pmatrix}6&-2&2\\-2&2&-4\\2&-4&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$, 由于

$$\begin{pmatrix}6&-2&2\\-2&2&-4\\2&-4&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{5}{2}\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以特征向量为 $\xi_2=(1,5,{}^{\mathrm{T}}$,

单位化 $\eta_2=\frac{1}{\sqrt{30}}(1,5,{}^{\mathrm{T}}$.

对于 $\lambda=-6$，特征方程组 $\begin{pmatrix}-6 & -2 & 2\\ -2 & -10 & -4\\ 2 & -4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$，由于

$$\begin{pmatrix}-6 & -2 & 2\\ -2 & -10 & -4\\ 2 & -4 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以特征向量为 $\xi_3=(1,-1,2)^T$，

单位化 $\eta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)^T$. ………………………6 分

令 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ 经正交变换 $X=QY$，得 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2-6y_2^2+6y_3^2$ ……8 分

（2）二次型不正定。 ………………………10 分

九、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，已知线性方程组 $AX=b$ 存在两个不同的解. 求 λ,a；

解：已知 $AX=b$ 有两个不同的解，$r(A)=r(A,b)<3$。……………………2 分

又 $|A|=0$，即

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0,$$

知 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$. ………………………6 分

当 $\lambda=1$ 时，$r(A)=1\neq r(A,b)=2$，此时，$AX=b$ 无解,

当 $\lambda=-1$ 时，代入有 $r(A)=r(A,b)$，得 $a=-2$. ………………………10 分

十、（10 分）设 A 为三阶矩阵，α_1,α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1,1$ 特征向量，向量 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，

（1）证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

（2）令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，求 $P^{-1}AP$

解（1）法一：假设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关. 由于 α_1,α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1,1$ 特征向量，从而 α_1,α_2 线性无关，故 α_3 可由 α_1,α_2 线性表出，不妨设 $\alpha_3=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$，其中 l_1,l_2 不全为零（若 l_1,l_2 同时为 0，则 α_3 为 0，由 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$ 可知 $\alpha_2=0$）.

因为 $A\alpha_1=-\alpha_1$, $A\alpha_2=\alpha_2$，所以

$$A\alpha_3=A(l_1\alpha_1+l_2\alpha_2)=-l_1\alpha_1+l_2\alpha_2,$$

又

$$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3=\alpha_2+l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$$

所以 $-l_1\alpha_1+l_2\alpha_2=\alpha_2+l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$，整理得：$2l_1\alpha_1+\alpha_2=0$，即 α_1,α_2 线性相关，矛盾（因为 α_1,α_2 分别属于不同特征值得特征向量，故 α_1,α_2 线性无关）. 所以，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关. ………………………5 分

法二：假设存在 k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0 \qquad (1)$$

用矩阵 A 左乘（1）式两端，并由题设知 $A\alpha_1=-\alpha_1$, $A\alpha_2=\alpha_2$ 得：

$$-k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3(\alpha_2+\alpha_3)=0 \qquad (2)$$

（1）减（2）得

$$2k_1\alpha_1-k_3\alpha_2=0$$

由于 α_1,α_2 分别属于不同特征值得特征向量，故 α_1,α_2 线性无关，从而 $k_1=k_3=0$. 代入（1）式得 $k_2\alpha_2=0$，而 α_2 是 A 的特征向量，所以 $\alpha_2\neq0$，故 $k_2=0$.
综上 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关 ………………………5 分

（2）记 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,则 P 可逆，且

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha$$

$$=(-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2+\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

即：$AP = P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，所以

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ……………………10 分