习题三

1. 设$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\2\\4\\6\end{pmatrix}$，计算$3\boldsymbol{\alpha}+4\boldsymbol{\beta}$.

解

$$3\boldsymbol{\alpha}+4\boldsymbol{\beta}=3\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\2\\4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\14\\25\\36\end{pmatrix}.$$

2. 设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\5\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\1\\5\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}4\\3\\6\\7\end{pmatrix}$，并且$2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta})+3(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta})=2(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\beta})$. 求$\boldsymbol{\beta}$.

解 因为$2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta})+3(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta})=2(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\beta})$，所以$\boldsymbol{\beta}=\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$. 因此,

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\5\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\1\\5\\2\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}4\\3\\6\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/3\\7/3\\5/3\\-4/3\end{pmatrix}.$$

3. 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是实数,

$$V=\{\boldsymbol{\alpha}\,|\,\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n,x_1-a_1=x_2-a_2=\cdots=x_n-a_n\},$$

讨论$a_1,a_2,\cdots,a_n$满足什么条件时, V构成$\mathbf{R}$上的向量空间.

解 设$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots y_n)^{\mathrm{T}}\in V$，那么

$$x_1-a_1=x_2-a_2=\cdots=x_n-a_n, \tag{1}$$

$$y_1-a_1=y_2-a_2=\cdots=y_n-a_n, \tag{2}$$

如果$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V$，那么

$$(x_1+y_1)-a_1=(x_2+y_2)-a_2=\cdots=(x_n+y_n)-a_n. \tag{3}$$

比较等式(1)与等式(3)可得

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_n. \tag{4}$$

比较等式(2)与等式(4)可得

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n.$$

因此，由$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V$可得$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

反过来，设$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$，对任意的$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in V$，$\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots y_n)^{\mathrm{T}}\in V$，因为

$$x_1-a=x_2-a=\cdots=x_n-a,\quad y_1-a=y_2-a=\cdots=y_n-a,$$

所以$x_1+y_1-a=x_2+y_2-a=\cdots=x_n+y_n-a$. 于是$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V$.

对任意的$k\in\mathbf{R}$，$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in V$，因为$x_1-a=x_2-a=\cdots=x_n-a$,所以$kx_1-a=kx_2-a=\cdots=kx_n-a$，于是$k\boldsymbol{\alpha}\in V$. 因此，只有当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时，$V$才构成$\mathbf{R}$上的向量空间.

4. 证明$\mathbf{R}^2$的下列子集不能构成$\mathbf{R}$上的向量空间:

(1) $V_1=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}=(x,y)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^2, x\geq 0, y\geq 0\}$;

(2) $V_2=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}=(x,y)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^2, xy\geq 0\}$;

(3) $V_3=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}=(x,y)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^2, x^2+y^2\leq 1\}$.

证明 (1) 设$\boldsymbol{\alpha}=(x,y)^{\mathrm{T}}\in V_1$. 因为

$$(-1)\boldsymbol{\alpha}=(-x,-y)^{\mathrm{T}}\notin V_1,$$

所以V_1不能构成$\mathbf{R}$上的向量空间.

(2) 取$\boldsymbol{\alpha}=(2,3)^{\mathrm{T}}\in V_2, \boldsymbol{\beta}=(-1,-4)^{\mathrm{T}}\in V_2$. 因为

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(1,-1)^{\mathrm{T}}\notin V_2,$$

所以V_2不能构成$\mathbf{R}$上的向量空间.

(3) 取$\boldsymbol{\alpha}=(1,0)^{\mathrm{T}}\in V_3, \boldsymbol{\beta}=(0,1)^{\mathrm{T}}\in V_3$. 因为

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(1,1)^{\mathrm{T}}\notin V_3,$$

所以V_3不能构成$\mathbf{R}$上的向量空间.

5. 设 $W=\{\boldsymbol{\alpha}\,|\,\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n,\ x_1x_2\cdots x_n=0\}$，证明 W 不构成$\mathbf{R}$上的向量空间.

证明 取$\boldsymbol{\alpha}=(1,1,\cdots 1,0)^{\mathrm{T}}\in W,\boldsymbol{\beta}=(0,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\in W$. 因为

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(1,2,\cdots,2,1)^{\mathrm{T}}\notin W,$$

所以W不能构成$\mathbf{R}$上的向量空间.

6. 设 $W=\{\boldsymbol{\alpha}\,|\,\boldsymbol{\alpha}=(3x_1+2x_2,x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^3,x_1,x_2$为任意实数$\}$.

(1) 证明 W 是$\mathbf{R}^3$的一个子空间;

(2) 求$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in\mathbf{R}^3$，使得$W=L(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$.

证明 (1) 因为$\mathbf{0}\in W$，所以$W\neq\varnothing$. 设

$$\boldsymbol{\alpha}=(3x_1+2x_2,x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in W,\boldsymbol{\beta}=(3y_1+2y_2,y_1,y_2)^{\mathrm{T}}\in W,k\in\mathbf{R}.$$

因为

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(3(x_1+y_1)+2(x_2+y_2),(x_1+y_1),(x_2+y_2))^{\mathrm{T}}\in W,$$

$$k\boldsymbol{\alpha}=(3kx_1+2kx_2,kx_1,kx_2)\in W,$$

所以，W是$\mathbf{R}$上的向量空间. 又因为W是$\mathbf{R}^3$的一个子集，所以W是$\mathbf{R}^3$的一个子空间.

(2) 取$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^3$，则$W=L(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$.

7. 判断下列命题的真假，并说明理由:

(1) $\mathbf{R}^2$是$\mathbf{R}^3$的子空间;

(2) $W=\{\boldsymbol{\alpha}\,|\,\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}-a+2\\a-2b\\3b+2a\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^3\}$是$\mathbf{R}^3$的子空间;

(3) $m\times n$实矩阵$\boldsymbol{A}$的零空间$N(\boldsymbol{A})$是向量空间$\mathbf{R}^n$的子空间;

(4) $m\times n$实矩阵$\boldsymbol{A}$的列空间$R(\boldsymbol{A})$是向量空间$\mathbf{R}^n$的子空间;

(5) $\mathbf{R}^n$ 中的零向量可以构成 $\mathbf{R}$ 上的向量空间.

解 (1) 错误. 因为 $\mathbf{R}^2$ 不是 $\mathbf{R}^3$ 的子集, 所以 $\mathbf{R}^2$ 不是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间;

(2) 错误. W 中的向量对向量的加法不封闭, 所以 W 不能构成 $\mathbf{R}^3$ 的子空间;

(3) 正确. $m\times n$ 实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零空间 $N(\boldsymbol{A})$是 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集合, 并且对向量的加法和 $\mathbf{R}$ 中的数与向量的乘法封闭, 所以 $N(\boldsymbol{A})$是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间;

(4) 错误. $m\times n$ 实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列空间 $R(\boldsymbol{A})$是向量空间 $\mathbf{R}^m$ 的子空间;

(5) 正确. $\{\mathbf{0}\}$是 $\mathbf{R}$ 上的向量空间.

8. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}2\\ -7\\ 8\end{pmatrix}$, 试确定 $\boldsymbol{\xi}$ 是否属于 $N(\boldsymbol{A})$.

解 因为 $\boldsymbol{A\xi}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -7\\ 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, 所以 $\boldsymbol{\xi}$ 属于 $N(\boldsymbol{A})$.

9. 判断下列向量组是否线性相关:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}4\\ 1\\ 5\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3\\ 6\\ 2\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\ 12\\ 7\end{pmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-3\\ 4\\ 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\ -6\\ 3\end{pmatrix}$;

(4) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 3\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 8\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$.

解 (1) 考虑方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}. \tag{1}$$

将方程组(1)的系数矩阵化为阶梯形:

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 5 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

因为方程组(1)的系数矩阵的秩为 2, 小于未知数的个数, 所以方程组(1)有非零解. 因此, 向量组是线性相关的.

(2) 考虑方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}. \tag{2}$$

将方程组(2)的系数矩阵化为阶梯形:

$$\begin{pmatrix}3&-1&3\\6&0&12\\2&1&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

因为方程组(2)的系数矩阵的秩为 2, 小于未知数的个数, 所以方程组有非零解. 因此, 向量组是线性相关的.

(3) 考虑方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}. \tag{3}$$

将方程组(3)的系数矩阵化为阶梯形:

$$\begin{pmatrix}1&-3&3\\0&4&-6\\0&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

因为方程组的系数矩阵的秩为 3, 等于未知数个数, 所以方程组只有零解. 因此, 向量组是线性无关的.

(4) 考虑方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}. \tag{4}$$

将方程组(4)的系数矩阵化为阶梯形:

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\3&8&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

因为方程组的系数矩阵的秩为 3, 等于未知数个数, 所以方程组只有零解. 因此, 向量组是线性无关的.

10. 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的, 证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的.

证明 设有常数 x_1,x_2,x_3 使得 $x_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0}$, 即

$$(x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(-x_1+2x_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(3x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}.$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是线性无关的，所以

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 \qquad = 0 \\ \qquad 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

这个方程组的系数矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$的秩等于 3，所以方程组只有零解．因此，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$是线性无关的．

11．证明如果一个向量组的部分向量构成的向量组是线性相关的，那么这个向量组是线性相关的．

证明 设$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$中的部分向量构成的线性相关的向量组，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$中其余向量为$\boldsymbol{\alpha}_{i_{s+1}},\boldsymbol{\alpha}_{i_{s+2}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_t}$. 因为$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}$是线性相关的，所以存在不全为零的常数$k_{i_1},k_{i_2},\cdots,k_{i_s}$，使得

$$k_{i_1}\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+k_{i_2}\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+k_{i_s}\boldsymbol{\alpha}_{i_s}=\mathbf{0}.$$

令$k_{i_{s+1}}=k_{i_{s+2}}=\cdots=k_{i_t}=0$，那么$k_{i_1},k_{i_2},\cdots,k_{i_s},k_{i_{s+1}},\cdots,k_{i_t}$不全为零，并且满足

$$k_{i_1}\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+k_{i_2}\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+k_{i_s}\boldsymbol{\alpha}_{i_s}+k_{i_{s+1}}\boldsymbol{\alpha}_{i_{s+1}}+k_{i_t}\boldsymbol{\alpha}_{i_t}=\mathbf{0}.$$

于是$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t=\mathbf{0}$．因为$\{k_1,k_2,\cdots,k_t\}=\{k_{i_1},k_{i_2},\cdots,k_{i_s},k_{i_{s+1}},\cdots,k_{i_t}\}$，所以$k_1,k_2,\cdots,k_t$不全为零．因此，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$是线性相关的．

12．设m,n是两个正整数，并且$m<n$，$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{mi})^{\mathrm{T}}$是$\mathbf{F}^m$中的向量，$\boldsymbol{\beta}_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{mi},a_{(m+1)i},\cdots,a_{ni})^{\mathrm{T}}$是$\mathbf{F}^n$中的向量，$i=1,2,\cdots,t.$ 证明如果$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$是线性无关的，那么$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$是线性无关的；如果$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$是线性相关的，那么$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$是线性相关的．

证明 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$是线性无关的．令

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\beta}_t=\mathbf{0},$$

因为$\boldsymbol{\beta}_i$的前 m 个分量是$\boldsymbol{\alpha}_i$的分量，所以

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_t\boldsymbol{\alpha}_t = \mathbf{0}.$$

又因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$是线性无关的，所以$k_1 = k_2 = \cdots = k_t = 0$. 因此，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$是线性无关的.

假设$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$是线性相关的，那么存在不全为零的常数$k_1, k_2, \cdots, k_t$，使得

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + k_t\boldsymbol{\beta}_t = \mathbf{0}.$$

于是

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_t\boldsymbol{\alpha}_t = \mathbf{0}.$$

因此$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$是线性相关的.

13. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是线性无关的，问$a, b$满足什么条件时 $a\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1, b\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$是线性无关的?

解 令

$$x_1(a\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)+x_2(b\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0},$$

即

$$(-x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(ax_1-x_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(bx_2-x_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}.$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是线性无关的，所以

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ ax_1 - x_2 = 0 \\ bx_2 - x_3 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

对方程组(1)的系数矩阵作初等行变换，得到

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ a & -1 & 0 \\ 0 & b & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & ab-1 \end{pmatrix},$$

于是，当$ab \neq 1$时，方程组(1)只有零解$x_1 = x_2 = x_3 = 0$. 因此，只有当$ab \neq 1$时 $a\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1, b\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$是线性无关的.

14. 已知$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2\\3\\-4\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\10\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\5\end{pmatrix}$，问$\boldsymbol{\beta}$能否由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示?

解 考虑方程组$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}$，即

$$\begin{cases}x_1 \qquad\quad +3x_3+\ \ x_4=2\\ -x_1+3x_2 \qquad\quad +\ \ x_4=3\\ 2x_1+\ \ x_2+7x_3+3x_4=-4\\ 2x_1+4x_2+10x_3+5x_4=1.\end{cases}\tag{2}$$

将方程组(2)的增广矩阵化为阶梯形

$$\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&1&3\\2&1&7&3&-4\\2&4&10&5&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&1&-8\\0&0&0&1&-29\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

因为方程组的系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，所以方程组有解. 因此，$\boldsymbol{\beta}$可以由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示. █

15. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$是$\mathbf{F}^n$中的向量. 已知$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=4$. 证明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5$是线性无关的.

证明 因为$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是线性无关的，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$是线性相关的，因而$\boldsymbol{\alpha}_4$可以由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，即存在常数$k_1,k_2,k_3$，使得

$$\boldsymbol{\alpha}_4=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3\tag{1}$$

因为$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=4$，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$是线性无关的. 设常数$h_1,h_2,h_3,h_4$满足

$$h_1\boldsymbol{\alpha}_1+h_2\boldsymbol{\alpha}_2+h_3\boldsymbol{\alpha}_3+h_4(2\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5)=\mathbf{0}.\tag{2}$$

将等式(1)代入等式(2)，得到

$$(h_1+2h_4k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(h_2+2h_4k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(h_3+2h_4k_3)\boldsymbol{\alpha}_3+h_4\boldsymbol{\alpha}_5=\mathbf{0}.$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$是线性无关的，所以

$$\begin{cases} h_1+2h_4k_1=0 \\ h_2+2h_4k_2=0 \\ h_3+2h_4k_3=0 \\ \qquad\quad h_4=0. \end{cases}$$

于是$l_1=l_2=l_3=l_4=0$. 因此，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5$是线性无关的.

16. 设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$，分别求 a，b 的值，使得下列结论成立:

(1) 向量$\boldsymbol{\beta}$能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，并且表示方法是唯一的;

(2) 向量$\boldsymbol{\beta}$能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，但是表示方法是不唯一的;

(3) 向量$\boldsymbol{\beta}$不能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

解 考虑方程组$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$，即

$$\begin{cases} ax_1-2x_2-\ x_3=1 \\ 2x_1+\ x_2+\ x_3=b \\ 10x_1+5x_2+4x_3=-1. \end{cases} \tag{1}$$

对方程组(1)的增广矩阵作初等行变换，得到

$$\begin{pmatrix} a & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & b/2 \\ 0 & -4-a & -2-a & 2-ab \\ 0 & 0 & 1 & 1+5b \end{pmatrix}.$$

情况 1 $a\neq -4$. 此时方程组(1)的增广矩阵的阶梯形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & b/2 \\ 0 & 1 & \dfrac{2+a}{4+a} & \dfrac{ab-2}{4+a} \\ 0 & 0 & 1 & 1+5b \end{pmatrix},$$

因为方程组(1)增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩，并且等于未知数的个数，所以方程组(1)有唯一解. 因此，向量$\boldsymbol{\beta}$能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，并且表示的方法是唯一的;

情况 2 $a=-4$. 此时方程组(1)的增广矩阵等价于下列矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & b/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2+4b \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

① 当$b=0$时，因为方程组(1)的增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩，小于未知数的个数，所以方程组(1)有解，但是不唯一．因此，向量$\boldsymbol{\beta}$能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，但是表示方法是不唯一的；

② 当$b\neq 0$时，因为方程组(1)的增广矩阵的秩等于3，系数矩阵的秩等于2，所以方程组(1)无解．因此，向量$\boldsymbol{\beta}$不能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示．

综上所述，我们得到

(1) 当$a\neq -4$时，向量$\boldsymbol{\beta}$能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，并且表示方法是唯一的；

(2) 当$a=-4$且$b=0$时，向量$\boldsymbol{\beta}$能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，但是表示方法是不唯一的；

(3) 当$a=-4$且$b\neq 0$时，向量$\boldsymbol{\beta}$不能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示．

17．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，试确定$\boldsymbol{\alpha}$是否在$\boldsymbol{A}$的列空间中，是否在$\boldsymbol{A}$的零空间中，或者同时在这两个空间中．

解 因为$\boldsymbol{A\alpha}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\neq \boldsymbol{0}$，所以$\boldsymbol{\alpha}$不在$\boldsymbol{A}$的零空间中．

考虑线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}$．将$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}$的增广矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\alpha})$化为阶梯形，得到

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\alpha})=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 5 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2/3 & 1 & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.,$$

因为$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\alpha})$，所以$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}$有解．因此，$\boldsymbol{\alpha}$可以由$\boldsymbol{A}$的列构成的向量组线性表示，即$\boldsymbol{\alpha}$在$\boldsymbol{A}$的列空间中．

18. 举例说明下列命题不成立:

(1) 如果存在一组不全为零的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得

$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m \neq \mathbf{0}$，那么向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是线性无关的;

(2) 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是线性相关的, 那么 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 一定可以由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示;

(3) 如果 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示, 那么 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 一定是线性无关的;

(4) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是线性无关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中任意两个向量的分量不成比例;

(5) 线性相关的向量组至少有一个部分组(真子集)也线性相关.

解 (1) 取 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, k_1 = 1, k_2 = 1,$ 则 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 \neq \mathbf{0}$，但是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是线性相关的;

(2) 取 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性相关的, 但是 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;

(3) 取 $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示, 但是 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是线性相关的;

(4) 取 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性相关的, 但是其中任意两个向量的分量不成比例;

(5) 取 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性相关的, 但是其中任意真子集都是线性无关的.

19. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\mathbf{F}^n$ 中的向量. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 但是 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示，所以存在常数 k_1,k_2,k_3，使得 $\boldsymbol{\alpha}_1=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，如果 $k_3\neq 0$, 那么 $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1-\dfrac{k_1}{k_3}\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{k_2}{k_3}\boldsymbol{\alpha}_3$. 这与 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示相矛盾，于是我们得到 $k_3=0$,，因此，$\boldsymbol{\alpha}_1=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3$, 即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

20. 判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ 是否等价.

解 由于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$，所以这两个向量组不等价.

21. 如果 n 阶单位矩阵的列构成的向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 可以由 $\mathbf{F}^n$ 中的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性无关的.

证明 因为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，所以根据定理 3.3，存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}.$$

于是

$$n=\mathrm{r}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\le \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),$$

即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=n$. 因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性无关的.

22. 设 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 的一个极大无关组，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 中的任意向量 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 都可以由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表示.

证明 根据极大无关组的定义，$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是线性无关的，并且对 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 中的任意向量 $\boldsymbol{\alpha}_k$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{\alpha}_k$ 都是线性相关的. 根据定理 3.2，向量 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表示.

23. 求下列向量组的一个极大无关组，并且将不在极大无关组中的向量用极

大无关组线性表示:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\\4\end{pmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3\\1\\2\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}4\\2\\3\\7\end{pmatrix}$.

解 (1) 将向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$按列排成矩阵，并且用初等行变换将矩阵化为简化阶梯形，得到

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&2\\1&0&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&5\\0&0&1&-1\end{pmatrix}.$$

因为阶梯形的主元位于第$1,2,3$列，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的一个极大无关组. 由简化阶梯形可以看出

$$\boldsymbol{\alpha}_4=-3\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(2) 将向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$按列排成矩阵，并且用初等行变换将矩阵化为简化阶梯形，得到

$$\begin{pmatrix}1&1&2&2\\0&2&1&5\\2&0&3&-1\\1&1&0&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

因为阶梯形的主元位于第$1,2,3$列，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的一个极大无关组. 由简化阶梯形可以看出

$$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(3) 将向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$按列排成矩阵，并且用初等行变换将矩阵化为简化阶梯形，得到

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为阶梯形的主元位于第$1,2$列，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$的一个极大无关组．由简化阶梯形可以看出

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_5 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2.$$

24. 证明秩为r的向量组中任意r个线性无关的向量都是向量组的一个极大无关组.

证明 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$的秩为$r$，$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$中$r$个线性无关的向量．对向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$中的任意一个向量$\boldsymbol{\alpha}_k$，因为$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{\alpha}_k$是线性相关的，所以根据定理 3.2，$\boldsymbol{\alpha}_k$可以由$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$线性表示．因此，$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$的一个极大无关组.

25. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$都是$\mathbf{R}^3$中的向量，并且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是线性无关的，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$是线性无关的.

(1) 证明存在既可以由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示，又可以由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性表示的非零向量;

(2) 当$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$时，求出所有既可以由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示，又可以由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性表示的向量.

解 (1) 因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$都是$\mathbf{R}^3$中的向量，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$是线性相关的．于是存在不全为零的常数$h_1,h_2,k_1,k_2$，满足$h_1\boldsymbol{\alpha}_1 + h_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}$．由此可得

$$h_1\boldsymbol{\alpha}_1 + h_2\boldsymbol{\alpha}_2 = -(k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2) \tag{1}$$

令

$$\boldsymbol{\gamma} = h_1\boldsymbol{\alpha}_1 + h_2\boldsymbol{\alpha}_2 = -(k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2).$$

我们现在证明$\boldsymbol{\gamma} \neq \mathbf{0}$. 如果$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$, 那么$\boldsymbol{\gamma} = h_1\boldsymbol{\alpha}_1 + h_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$. 因为$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$是线性无关的, 所以$h_1 = h_2 = 0$. 同理可得$k_1 = k_2 = 0$. 这与$l_1, l_2, k_1, k_2$不全为零矛盾. 因此, $\boldsymbol{\gamma} \neq \mathbf{0}$, 并且$\boldsymbol{\gamma}$既可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$线性表示, 又可由$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$线性表示.

(2) 设$\boldsymbol{\gamma}$既可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$线性表示, 又可由$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$线性表示, 那么存在常数$x_1$, x_2, y_1, y_2使得

$$\boldsymbol{\gamma} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 = y_1\boldsymbol{\beta}_1 + y_2\boldsymbol{\beta}_2,$$

于是x_1, x_2, y_1, y_2满足齐次方程组:

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 - y_1\boldsymbol{\beta}_1 - y_2\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}.$$

因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, -\boldsymbol{\beta}_1, -\boldsymbol{\beta}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

所以

$$\left(x_1, x_2, y_1, y_2\right)^{\mathrm{T}} = c\left(-1, 1, 1, 1\right)^{\mathrm{T}},$$

因此

$$\boldsymbol{\gamma} = -c\boldsymbol{\alpha}_1 + c\boldsymbol{\alpha}_2 = c\boldsymbol{\beta}_1 + c\boldsymbol{\beta}_2 = c\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

26. 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$是$\mathbf{F}$上的向量空间 V 中的一个向量组, 证明$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$的极大无关组是$L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)$的一个基.

证明 设$\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$是$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$的一个极大无关组, $\boldsymbol{\alpha}$是$L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)$中的任意一个向量. 因为$\boldsymbol{\alpha}$可以由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性表示, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ $\boldsymbol{\alpha}$可以由$\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$线性表示, 所以$\boldsymbol{\alpha}$可以由$\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$线性表示. 因此$\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$是$L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)$的一个基.

27. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\10\end{pmatrix}$ 是 $\mathbf{R}^4$ 中的一个向量组.

(1) 求 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_5)$ 的一个基;

(2) 将求得的 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_5)$ 的基扩充成为 $\mathbf{R}^4$ 的一个基.

解 (1) 将向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 按列排成矩阵, 并且用初等行变换将矩阵化为简化阶梯形, 得到

$$\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

因为阶梯形的主元位于第1,2,4列, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的一个极大无关组. 因此, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_5)$ 的一个基.

(2) 将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 按行排成矩阵, 并且用初等行变换将其化为阶梯形:

$$\begin{pmatrix}1&-1&2&4\\0&3&1&2\\1&-2&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&4\\0&1&0&4\\0&0&1&-10\end{pmatrix}$$

取 $\boldsymbol{\alpha}_6=\boldsymbol{\varepsilon}_4=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_6$ 是 $\mathbf{R}^4$ 的一个基.

28. (1) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基;

(2) 求向量 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-2\\3\\-4\end{pmatrix}$ 关于基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的坐标.

解 (1) 因为 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&1&1\\0&3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$, 所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=$.

因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基.

(2) 将$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$按列排成矩阵，并且用初等行变换将矩阵化为简化阶梯形，得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5/6 & -7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

因此，向量$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$关于基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的坐标分别为$\begin{pmatrix} 5/6 \\ 1/3 \\ 1/2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -7/2 \\ -3 \\ 5/2 \end{pmatrix}$.

29. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$\mathbf{F}$上的 3 维向量空间 V 的一个基，令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(1) 证明$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$也是 V 的一个基;

(2) 求向量$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$关于基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的坐标.

解 (1) 设常数x_1,x_2,x_3满足$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0}$，代入$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的表达式，得到

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3)+x_2(2\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3)+x_3(3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0}. \tag{1}$$

也即

$$(x_1+2x_2+3x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(2x_1+2x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(3x_1+4x_2+3x_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}. \tag{2}$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是 V 的一个基，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是线性无关的，于是由等式(2)得到

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+2x_2+\ x_3=0 \\ 3x_1+4x_2+3x_3=0, \end{cases} \tag{3}$$

因为齐次方程组(3)只有零解，所以$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$是线性无关的. 因此$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$也是 V 的一个基.

(2) 因为由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，并且向量$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$关于基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的坐标为$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$，所以$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$关于基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的坐标为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

−2

30. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$

$\boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$是$\mathbf{R}^4$的两个基.

(1) 求基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$的过渡矩阵;

(2) 如果向量$\boldsymbol{\xi}$关于基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的坐标为$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{\xi}$关于基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$的坐标;

(3) 如果向量$\boldsymbol{\eta}$关于基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$的坐标为$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{\eta}$关于基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的坐标.

解 (1) 设基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$的过渡矩阵为$\boldsymbol{P}$，那么

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{P}.$$

因此

$$P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

(2) $\boldsymbol{\xi}$ 关于基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的坐标为

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(3) $\boldsymbol{\eta}$ 关于基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的坐标为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

31. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的两个基，求 $\mathbf{R}^3$ 中关于这两个基有相同坐标的所有向量.

解 设 $\mathbf{R}^3$ 中的向量 $\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 关于基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 有相同坐标 Y，即

$\boldsymbol{\gamma}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)Y$, $\boldsymbol{\gamma}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)Y$，于是 $Y=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}\boldsymbol{\gamma}$, $Y=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)^{-1}\boldsymbol{\gamma}$. 因此

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

由此可得齐次方程组

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \tag{1}$$

齐次方程组(1)的通解 $\boldsymbol{\gamma} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是关于基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 有相同坐标的向量，其中 c 为任意常数.

32. 已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的零空间的维数与一个基;

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的列空间的维数与一个基.

解 将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为简化阶梯形:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 由 $\boldsymbol{A}$ 的简化阶梯形可得 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系. 因此 $\boldsymbol{A}$ 的零空间的维数为 3, $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的零空间的一个基.

(2) 因为 $\boldsymbol{A}$ 的简化阶梯形的非零行数为 2, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的列空间的维数为 2, 并且 $\boldsymbol{A}$ 的第 1, 3 两列,第 3 列 $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ 构成 $\boldsymbol{A}$ 的列空间的一个基.

33. 求下列齐次方程组的基础解系，并且用求得的基础解系表示方程组的通解.

(1) $\begin{cases} 3x_1+5x_2-4x_3=0 \\ -3x_1-2x_2+4x_3=0 \\ 6x_1+\ \ x_2-8x_3=0. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1+2x_2+\ x_3+\ x_4+\ \ x_5=0 \\ 2x_1+4x_2+3x_3+2x_4+\ x_5=0 \\ -x_1-2x_2+\ x_3+3x_4-3x_5=0 \\ \qquad\qquad 2x_3+5x_4-2x_5=0. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1+x_2+ \qquad\quad x_5=0 \\ x_1+x_2+x_3 \qquad\quad =0 \\ \qquad\quad x_3+x_4+x_5=0. \end{cases}$ (4) $nx_1+(n-1)x_2+\cdots+2x_{n-1}+x_n=0.$

解 (1) 写出方程组的系数矩阵并将矩阵化为简化阶梯形:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

写出以阶梯形矩阵为系数矩阵的齐次方程组:

$$\begin{cases} x_1 \quad -\dfrac{4}{3}x_3=0 \\ \quad x_2 \qquad =0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 x_3 是自由未知数. 将方程组(1)中含自由未知数的项移到等式的右端, 得到

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{4}{3}x_3 \\ x_2=0. \end{cases} \tag{2}$$

在方程组(2)中令 $x_3=1$, 得到 $x_1=\dfrac{4}{3}, x_2=0$. 于是 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是方程组的一个基础解系. 因此, 方程组的通解为

$$\boldsymbol{\xi}=c\boldsymbol{\xi}_1,$$

其中 c 为任意常数.

(2) 写出方程组的系数矩阵并将它化为简化阶梯形:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

写出以阶梯形为系数矩阵的齐次方程组:

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \qquad +2x_5=0 \\ \qquad\quad x_3 \ -\ x_5=0 \\ \qquad\qquad x_4 \qquad =0, \end{cases} \tag{3}$$

其中 x_2, x_5 是自由未知数. 将方程组(3)中含自由未知数的项移到等式的右端，得到

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_5 \\ x_3 = x_5 \\ x_4 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

在方程组(4)中分别令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得到 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 将 5 个未知数按自然顺序排列，得到 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是方程组的一个基础解系. 因此，方程组的通解为

$$\boldsymbol{\xi} = c_1\boldsymbol{\xi}_1 + c_2\boldsymbol{\xi}_2,$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

(3) 写出方程组的系数矩阵并将它化为简化阶梯形:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

写出以简化阶梯形为系数矩阵的齐次方程组:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad\quad + \ x_5 = 0 \\ \qquad\quad x_3 \quad - \ x_5 = 0 \\ \qquad\qquad x_4 + 2x_5 = 0, \end{cases} \tag{5}$$

其中 x_2, x_5 是自由未知数. 将方程组(5)中含自由未知数的项移到等式的右端，得到

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_5 \\ x_3 = x_5 \\ x_4 = -2x_5. \end{cases} \tag{6}$$

在方程组(6)中分别令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得到 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$，将 5 个未知

数按自然顺序排列，得到$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-2\\1\end{pmatrix}$是方程组的一个基础解系. 因此，方程组的通解为

$$\xi=c_1\xi_1+c_2\xi_2,$$

其中c_1,c_2为任意常数.

(4) 将方程的两端同除以常数 n，得到

$$x_1+\frac{(n-1)}{n}x_2+\cdots+\frac{2}{n}x_{n-1}+\frac{1}{n}x_n=0,$$

其中$x_2,x_3,\cdots,x_n$是自由未知数. 将方程中含自由未知数的项移到等式的右端，得到

$$x_1=-\frac{(n-1)}{n}x_2-\cdots-\frac{2}{n}x_{n-1}-\frac{1}{n}x_n\,.$$

分别令$\begin{pmatrix}x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，得到$x_1=-\frac{n-1}{n},-\frac{n-2}{n},\cdots,-\frac{1}{n}$. 于是

$\xi_1=\begin{pmatrix}-(n-1)/n\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-(n-2)/n\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\xi_{n-1}=\begin{pmatrix}-1/n\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$是方程组的一个基础解系.

,

因此，方程组的通解为

$$\xi=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_{n-1}\xi_{n-1},$$

其中$c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}$为任意常数.

34. 求下列非齐次方程组的解(用导出方程组的基础解系表示方程组的通解).

(1) $\begin{cases}3x_1+5x_2-4x_3=7\\-3x_1-2x_2+4x_3=-1\\6x_1+\ \ x_2-8x_3=-4.\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5\\x_1-\ \ x_2+\ \ x_3+\ \ x_4=1.\end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -4 \\ x_1 + x_3 - x_4 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 7x_1 + 7x_3 - 3x_4 = 3. \end{cases}$ (4) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8.$

解 (1) 用初等行变换将方程组的增广矩阵化为简化阶梯形:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

写出以简化阶梯形为增广矩阵的线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 \quad -\dfrac{4}{3}x_3 = -1 \\ \quad x_2 \qquad = 2. \end{cases} \tag{1}$$

方程组(1)中令 $x_3 = 0$，得到 $x_1 = -1, x_2 = 2$. 于是 $\boldsymbol{\gamma}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是方程组(1)的一个特解.

去掉方程组(1)的常数项, 得到的齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{4}{3}x_3 = 0 \\ x_2 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

与原方程组的导出方程组是同解的. 在方程组(2)中令 $x_3 = 1$, 得到 $x_1 = \dfrac{4}{3}, x_2 = 0.$

于是 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是原方程组的导出方程组的一个基础解系. 因此, 原方程组的通解为

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_0 + c\boldsymbol{\xi}_1,$$

其中 c 为任意常数.

(2) 用初等行变换将方程组的增广矩阵化为简化阶梯形:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/3 & 2 & 7/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & 1 & 4/3 \end{pmatrix}.$$

写出以简化阶梯形为增广矩阵的线性方程组

$$\begin{cases} x_1 \quad + \dfrac{5}{3}x_3 + 2x_4 = \dfrac{7}{3} \\ \quad x_2 + \dfrac{2}{3}x_3 + x_4 = \dfrac{4}{3}. \end{cases} \tag{3}$$

方程组(3)中令 $x_3 = 0, x_4 = 0$，得到 $x_1 = \dfrac{7}{3}, x_2 = \dfrac{4}{3}$，于是 $\boldsymbol{\gamma}_0 = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 4/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是方程组的一个特解. 去掉方程组(3)的常数项，得到的齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 \quad + \dfrac{5}{3}x_3 + 2x_4 = 0 \\ \quad x_2 + \dfrac{2}{3}x_3 + x_4 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

与原方程组的导出方程组是同解的. 在方程组(4)中分别令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 得到 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$，于是 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -5/3 \\ -2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是原方程组的导出方程组的一个基础解系. 因此，原方程组的通解为

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_0 + c_1\boldsymbol{\xi}_1 + c_2\boldsymbol{\xi}_2,$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

(3) 用初等行变换将方程组的增广矩阵化为简化阶梯形:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 7 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

写出以简化阶梯形为增广矩阵的线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 \quad = 3 \\ \quad x_2 - 2x_3 \quad = -8 \\ \qquad\qquad x_4 = 6, \end{cases} \tag{5}$$

方程组(5)中令 $x_3=0$，得到 $x_1=3, x_2=-8, x_4=6$，于是 $\boldsymbol{\gamma}_0=\begin{pmatrix}3\\-8\\0\\6\end{pmatrix}$ 是方程组(5)的一个特解. 去掉方程组(5)的常数项，得到的齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 \quad = 0 \\ \quad x_2 - 2x_3 \quad = 0 \\ \qquad\qquad x_4 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

与原方程组的导出方程组是同解的. 在方程组(6)中令 $x_3=1$，得到 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$，

于是 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix}$ 是原方程组的导出方程组的一个基础解系. 因此，原方程组的通解为

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_0+c_1\boldsymbol{\xi}_1,$$

其中 c_1 为任意常数.

(4) 在方程

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8 \tag{7}$$

中取 $x_2=x_3=x_4=x_5=0$，得到 $x_1=1$，于是 $\boldsymbol{\gamma}_0=\begin{pmatrix}8\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ 是方程组(7)的一个特解. 去掉方程组(7)的常数项，分别令 $\begin{pmatrix}x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$，得到

$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\xi_4=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$是方程组(7)的导出方程组的一个基础解系.

因此，方程组(7)的通解为

$$\gamma=\gamma_0+c_1\xi_1+c_2\xi_2+c_3\xi_3+c_4\xi_4,$$

其中c_1,c_2,c_3,c_4为任意常数.

35. 设$\boldsymbol{A}$是$\mathbf{F}$上的$m\times n$矩阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$. 证明齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$的任意$n-r$个线性无关的解向量都构成$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$的一个基础解系.

证明 因为$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$，所以$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$的解空间$N(\boldsymbol{A})$的维数是$n-r$. 因此，齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$的任意$n-r$个线性无关的解向量都是$N(\boldsymbol{A})$的一个基，也就是$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$的一个基础解系.

36. 设$\boldsymbol{A}$是$\mathbf{F}$上的$m\times n$矩阵，$m<n$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=m$，$\boldsymbol{B}$是$\mathbf{F}$上的$n\times(n-m)$矩阵，并且$\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$. 如果$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=n-m$，证明$\boldsymbol{B}$的列构成的向量组是齐次方程组$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$的一个基础解系.

证明 将$\boldsymbol{B}$按列分块，记作$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-m})$. 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-m})\\&=(\boldsymbol{A\beta}_1,\boldsymbol{A\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{A\beta}_{n-m})\\&=\mathbf{0},\end{aligned}$$

所以$\boldsymbol{A\beta}_1=\boldsymbol{A\beta}_2=\cdots\boldsymbol{A\beta}_{n-m}=\mathbf{0}$. 因此$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-m}$都是方程组$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$的解.

因为

$$\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,...,\boldsymbol{\beta}_{n-m})=n-m,$$

所以$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-m}$是线性无关的.

因为$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=m$，所以$n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-m$. 因此，$\boldsymbol{B}$的列构成的向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-m}$是线性方程组$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$的一个基础解系.

37. 设$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的解向量，$k_1,k_2,\cdots,k_s$是常

数，满足$k_1+k_2+\cdots+k_s=1$. 证明$\boldsymbol{\eta}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的解向量.

证明 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A\eta}&=k_1\boldsymbol{A\eta}_1+k_2\boldsymbol{A\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{A\eta}_s\\&=k_1\boldsymbol{\beta}+k_2\boldsymbol{\beta}+\cdots+k_s\boldsymbol{\beta}\\&=(k_1+k_2+\cdots+k_s)\boldsymbol{\beta}\\&=\boldsymbol{\beta},\end{aligned}$$

所以$\boldsymbol{\eta}$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的解向量.

38. 已知$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$是 4 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$是线性无关的，并且$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$. 求方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的通解.

解 因为$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$是线性无关的，并且$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，所以$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$. 因此根据定理 3.10，维$N(\boldsymbol{A})=1$. 因为$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$可以写为$\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，所以

$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$是方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的导出方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个解，也是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系. 又因为$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，所以

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}.$$

于是$\gamma_0=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$是方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的一个特解. 因此，方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的通解为

$\gamma_0+c\boldsymbol{\xi}$，其中$c$为任意常数.

39．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，并且线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 存在两个不同解.

(1) 求 λ,a；

(2) 求 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解 (1) 因为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有两个不同的解，所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})<3$．对方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的增广矩阵作初等行变换，得到

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ \lambda & 1 & 1 & a\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & a-\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a+1-\lambda\end{pmatrix}.$$

因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})<3$，所以

$$\begin{cases}1-\lambda^2=0\\ a+1-\lambda=0\\ \lambda-1\neq 0,\end{cases}\tag{1}$$

求解方程组(1)，得到 $\lambda=-1,a=-2$.

(2) 当 $\lambda=-1,\quad a=-2$ 时，因为

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 3/2\\ 0 & 1 & 0 & -1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}3/2\\-1/2\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$c$ 为任意常数.

40. 求一个齐次线性方程组，使 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix}$ 是这个齐次方程组的一个

基础解系.

解 令

$$B=\begin{pmatrix}\xi_1^{\mathrm T}\\ \xi_2^{\mathrm T}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\3&2&1&0\end{pmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol B$ 的简化阶梯形为

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$是齐次方程组 $\boldsymbol BY=\boldsymbol 0$ 的一个基础解系. 令 $\boldsymbol A=\begin{pmatrix}\boldsymbol\alpha_1^{\mathrm T}\\ \boldsymbol\alpha_2^{\mathrm T}\end{pmatrix}$,

那么 $\mathrm r(\boldsymbol A)=2$, 并且 $\boldsymbol A\boldsymbol\xi_1=\boldsymbol 0,\boldsymbol A\boldsymbol\xi_2=\boldsymbol 0$. 因此, $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol 0$ 是一个以 $\boldsymbol\xi_1,\boldsymbol\xi_2$ 为基础解系的齐次方程组.

41. 设 $\boldsymbol\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol\beta=\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol\gamma=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\4\end{pmatrix}$是 $\mathbf R^4$ 中的三个向量, 求

$$(\boldsymbol\alpha,\boldsymbol\beta),\ (\boldsymbol\alpha,\boldsymbol\beta+\boldsymbol\gamma),\ |\boldsymbol\alpha|,\ |\boldsymbol\beta|,\ \langle\boldsymbol\alpha,\boldsymbol\beta\rangle,\ \langle\boldsymbol\beta,\boldsymbol\gamma\rangle.$$

解 $(\boldsymbol\alpha,\boldsymbol\beta)=1\times4+2\times3+0\times2+1\times1=11,$

$$(\boldsymbol\alpha,\boldsymbol\beta+\boldsymbol\gamma)=1\times(4-2)+2\times(3+3)+0\times(2+1)+1\times(1+4)=19,$$

$$|\boldsymbol\alpha|=\sqrt{1^2+2^2+0^2+1^2}=\sqrt6,$$

$$|\boldsymbol\beta|=\sqrt{30},$$

$$\langle\boldsymbol\alpha,\boldsymbol\beta\rangle=\arccos\frac{(\boldsymbol\alpha,\boldsymbol\beta)}{|\boldsymbol\alpha||\boldsymbol\beta|}=\arccos\frac{11\sqrt5}{30},$$

$$\langle\boldsymbol\beta,\boldsymbol\gamma\rangle=\arccos\frac{(\boldsymbol\beta,\boldsymbol\gamma)}{|\boldsymbol\beta||\boldsymbol\gamma|}=\arccos\frac{7}{30}.$$

42. 设 $\boldsymbol\alpha,\boldsymbol\beta$ 是 $\mathbf R^n$ 中的两个向量, 证明

$$|\boldsymbol\alpha+\boldsymbol\beta|^2+|\boldsymbol\alpha-\boldsymbol\beta|^2=2|\boldsymbol\alpha|^2+2|\boldsymbol\beta|^2.$$

证明 因为

$$|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=|\boldsymbol{\alpha}|^2+|\boldsymbol{\beta}|^2+2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),$$
$$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2=(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=|\boldsymbol{\alpha}|^2+|\boldsymbol{\beta}|^2-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),$$

所以

$$|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2+|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2=2|\boldsymbol{\alpha}|^2+2|\boldsymbol{\beta}|^2 .$$

43. 在$\mathbf{R}^4$中求一个单位向量，使它与$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\3\end{pmatrix}$都正交.

解解 设与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$都正交的向量为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$，则

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3+\ \ x_4=0\\x_1-x_2-x_3+\ \ x_4=0\\2x_1+x_2+x_3+3x_4=0.\end{cases}\qquad(1)$$

求解齐次方程组(1)得到$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}4\\0\\1\\-3\end{pmatrix}$是它的一个基础解系. 将$\boldsymbol{\xi}$单位化，得到

$\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}4\\0\\1\\-3\end{pmatrix}$，因此$\boldsymbol{\alpha}$是与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$都正交的单位向量.

44. 用施密特正交规范化方法将下列线性无关向量组正交规范化:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$.

解 (1) 首先将向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$正交化，得到

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},$$

$$\beta_2=-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1+\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\beta_3=-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2+\alpha_3=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

然后将β_1,β_2,β_3规范化，得到

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\eta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\eta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

因此，η_1,η_2,η_3是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的正交规范化.

(2) 首先将向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$正交化，得到

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},$$

$$\beta_2=-\frac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1+\alpha_2=-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$\beta_3=-\frac{(\beta_1,\alpha_3)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\alpha_3)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2+\alpha_3=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}+\frac{2}{15}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix}.$$

然后将β_1,β_2,β_3规范化，得到

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\eta_2=\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix},\eta_3=\frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix},$$

因此η_1,η_2,η_3是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的正交规范化.

45. 实数 a, b, c 分别取何值时，下列矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为正交矩阵?

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ a & 0 & c\\ b & 0 & 1/2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & 2c\end{pmatrix}.$$

解 因为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ a & 0 & c\\ b & 0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a & b\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & c & 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a^2+c^2 & ab+c/2\\ 0 & ab+c/2 & b^2+1/4\end{pmatrix},$$

所以由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$ 得到

$$\begin{cases}a^2+\ c^2=1\\ ab+c/2=0\\ b^2+1/4=1,\end{cases}\qquad (1)$$

求解方程组(1)，得到

$$\begin{cases}a=\pm\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ c=\mp\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ a=\pm\dfrac{1}{2},\ b=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ c=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$$

因为

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & 2c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ b & 2c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+b^2 & ac+2bc\\ ac+2bc & 5c^2\end{pmatrix},$$

所以由 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$ 得到

$$\begin{cases}a^2+\ b^2\ =1\\ ac+2bc=0\\ 5c^2\qquad =1,\end{cases}\qquad (2)$$

求解方程组(2)，得到

$$\begin{cases}a=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ b=\mp\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ c=\mp\dfrac{1}{\sqrt{5}}\\ a=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ b=\mp\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ c=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}.\end{cases}$$

46. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的单位列向量. 证明 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是正交矩阵.

证明 因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的单位列向量，所以 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$. 于是

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} &= (\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \\
&= (\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) \\
&= \boldsymbol{I}-4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \\
&= \boldsymbol{I}-4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+4\alpha(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \\
&= \boldsymbol{I}-4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \\
&= \boldsymbol{I}.
\end{aligned}
$$

因此，$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是正交矩阵.

47. 用最小二乘法求直线方程 $y=kx+b$，拟合下列数据点

$$(2, 1), (5, 2), (7, 3), (8, 3).$$

解 将拟合数据代入直线方程，得

$$
\begin{cases}
2k+b=1 \\
5k+b=2 \\
7k+b=3 \\
8k+b=3.
\end{cases} \tag{1}
$$

令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \\ 7 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} k \\ b \end{pmatrix}$, 那么方程组(1)可以表示为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$. 因为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 142 & 22 \\ 22 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} 57 \\ 9 \end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的最小二乘解 $\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix} 5/14 \\ 2/7 \end{pmatrix}$. 因此直线方程为 $y=\dfrac{5}{14}x+\dfrac{2}{7}$.