课程编号：A073122　　　　　北京理工大学 2010-2011 学年第一学期

# 线性代数 A 试题 A 卷

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | | | | |
| 签名 | | | | | | | | | | | |

一、（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{*}+\boldsymbol{A}^{-1}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$ 。

解：方程两边同时左乘 A，得

$$AX+X=AA^{*}+I$$

即 $(A+I)X=(|A|+1)I$

又 $|A|=-2$，故

$$(A+I)X=-I$$

从而

$$X=-(A+I)^{-1}$$

$$=-\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&\frac{1}{3}&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

二、（10 分）已知方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = p \\ qx_1 + 2x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

有解，且其导出组基础解系有一个向量。（1）求 $p, q$ 的值；（2）求方程组的一般解。（用导出组的基础解系表示通解）

解：用初等行变换将方程组的增广矩阵化为阶梯形：

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & p \\ q & 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{行} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & p-2 \\ 0 & 0 & -4+4q & 2p-1+q(1-p) \end{bmatrix}$$

由方程组有解，且其导出组 $Ax=0$ 的基础解系有一个向量知

$r(A) = r(\tilde{A}) = 2$

得有

$$\begin{cases} -4+4q=0 \\ 2p-1+q(1-p)=0 \end{cases}$$

解得 $q=1, p=0$

此时，

$$\tilde{A} \xrightarrow{行} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{行} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

解得
$$\begin{cases} x_1 = -1 + 4x_3 \\ x_2 = 2 - 5x_3 \\ x_3 = \quad\quad x_3 \end{cases}$$

故通解为 $X=(-1,2,0)^T+k(4,-5,1)^T$，k为任意常数.

三、（10 分）在 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 中，令 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{-1}&\mathbf{-1}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{-1}\\\mathbf{1}&\mathbf{-1}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_4=\begin{bmatrix}\mathbf{-1}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{-1}\end{bmatrix}$.

(1) 证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 为 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的一个基；

(2) 求自然基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的过渡矩阵；

(3) 求 $\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}\\\mathbf{3}&\mathbf{4}\end{bmatrix}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 下的坐标。

(1) 证明：因矩阵空间 $R^{2\times2}$ 的维数为4，要证 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 为 $R^{2\times2}$ 的一个基，只需证其线性无关.

设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3+k_4\beta_4=0$

则有
$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3-k_4=0 \\ k_1+k_2-k_3+k_4=0 \\ k_1-k_2+k_3+k_4=0 \\ k_1-k_2-k_3-k_4=0 \end{cases}$$

方程组只有零解：$k_i=0$, $i=1,2,3,4$.

故 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性无关，为 $R^{2\times2}$ 的一个基.

(2) 解：$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$

$\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4$

$\beta_3 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4$

$\beta_4 = -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4$

则有

$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

故所求过渡矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

(3) 解：法一：

令 $\gamma = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 + x_4\beta_4$

则有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$$

解得 $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = \left(\frac{5}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0\right)^T$

法二：$\gamma$ 在自然基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的坐标为

$$X=(1,\ 2,\ 3,\ 4)^T.$$

于是，由坐标变换公式，$\gamma$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 下的坐标

$$\begin{aligned}
Y &= A^{-1}X \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \\
&= \left(\frac{5}{2},\ -1,\ -\frac{1}{2},\ 0\right)^T.
\end{aligned}$$

四、（10 分）已知 $\boldsymbol{\alpha_1}=(-1,0,1)$，$\boldsymbol{\alpha_2}=(2,2,0)$，$\boldsymbol{\alpha_3}=(0,1,1)$。

(1) 求向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}$ 的一个极大无关组；

(2) 求生成子空间 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3})$ 的一个标准正交基。

解：(1) 将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 作为列构造矩阵，再用初等行变换将其化为阶梯形：

$$[\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T]=\begin{bmatrix}-1&2&0\\0&2&1\\1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}-1&2&0\\0&2&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

由此可知，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩为 2

其中任意两个向量都可作为向量组的一个极大无关组.

不妨取 $\alpha_1,\alpha_2$.

(2) 由(1)可知，$\alpha_1,\alpha_2$ 为 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的一个基.

只需要将其正交化、单位化即可.

正交化：令 $\beta_1=\alpha_1$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\alpha_2+\beta_1$$

$$=(1,2,1)$$

单位化：令 $\eta_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\left(-\frac{1}{\sqrt2},0,\frac{1}{\sqrt2}\right)$

$$\eta_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6}\right)$$

$\eta_1,\eta_2$ 为 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的一个标准正交基.

五、（10 分）设 5 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子为 $\boldsymbol{\lambda+1},\ (\boldsymbol{\lambda-2})^{2},\ \boldsymbol{\lambda}^{2}$。

(1) 试写出 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形；(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

解：(1) 初等因子 $\lambda+1$，$(\lambda-2)^2$，$\lambda^2$ 对应的 Jordan 块分别为

$$J_1=\begin{bmatrix}-1\end{bmatrix},\quad J_2=\begin{bmatrix}2 & 1\\ & 2\end{bmatrix},\quad J_3=\begin{bmatrix}0 & 1\\ & 0\end{bmatrix}$$

于是，A 的 Jordan 标准形

$J=\mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3,$ [redacted] $)$

(2) 由 $A\sim J$ 知，A 与 J 有相同的特征值，

$$J=\begin{bmatrix}-1 & & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 0 & 1\\ & & & & 0\end{bmatrix}$$

为上三角矩阵，它的对角元就是其全部特征值，

故 A 的特征值为 $-1, 2, 2, 0, 0$.

六、（10 分）在 $F[x]_4$ 中定义线性变换 $\sigma$ ：$\sigma[f(x)] = f'(x)$ 。求 $\sigma$ 在基 $1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3$ 下的矩阵。

解：根据定义，

$$\sigma(1) = 0$$

$$\sigma(1+x) = 1$$

$$\sigma(1+x+x^2) = 1+2x$$

$$\sigma(1+x+x^2+x^3) = 1+2x+3x^2$$

故有

$$[\sigma(1), \sigma(1+x), \sigma(1+x+x^2), \sigma(1+x+x^2+x^3)]$$

$$= [1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3]\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

即 $\sigma$ 在该基下的矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

法二：$\sigma$ 在自然基下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

又自然基到基 $1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3$ 的过渡矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故 $\sigma$ 在基 $1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3$ 下的矩阵为

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

七、（10 分）证明：***n***阶方阵***A***可相似对角化的充分必要条件是***A***有***n***个线性无关的特征向量。

证明：若n阶矩阵A可相似对角化，则存在可逆矩阵P，使

$$P^{-1}AP=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

或 $AP=P\,diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$

将P按列分块：$P=[X_1,X_2,\cdots,X_n]$

并代入上式，得

$$A[X_1,X_2,\cdots,X_n]=[X_1,X_2,\cdots,X_n]diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda$$

即 $[AX_1,AX_2,\cdots,AX_n]=[\lambda_1X_1,\lambda_2X_2,\cdots,\lambda_nX_n]$

从而有 $AX_i=\lambda_iX_i\ ,\ i=1,2,\cdots,n.$

由P可逆知，$X_i\neq\theta\ (i=1,2,\cdots,n)$，且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 线性无关.

从而 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是A的n个线性无关的特征向量，

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是A的n个特征值.

反之，若n阶矩阵A有n个线性无关的特征向量，不妨设为

$X_1,X_2,\cdots,X_n$，则存在相应的特征值，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$，使得

$$AX_i=\lambda_iX_i\ ,\ i=1,2,\cdots,n.$$

此时，令 $P=[X_1,X_2,\cdots,X_n]$

P可逆，且有 $P^{-1}AP=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$

即A可相似对角化.

八、（10 分）已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$ 经过正交变换 $X=QY$ 化为 $y_1^2+2y_2^2$，其中 $X=(x_1,x_2,x_3)^T, Y=(y_1,y_2,y_3)^T$。

(1) 判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是否正定； (2) 求行列式 $|A|$ 的值；

(3) 若 $Q=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，求矩阵 $A$。

解：(1) 法一：由 $f$ 的标准形可知，其正惯性指数为 2，

故 $f$ 不正定.

法二：由已知条件知道，$A$ 的特征值为 $1, 2, 0$.

故 $f$ 不正定

(2) 由已知条件知道，$A$ 的特征值为 $1, 2, 0$，

故 $|A| = 1\times 2\times 0 = 0$ ------ 6

(3) 由已知条件知道，

$Q^TAQ = diag(1,2,0)$.

得

$$A = Q\,diag(1,2,0)\,Q^T$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$ ------ 10

九、（10 分）设 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵，且满足 $a_{ij}=A_{ij}\quad(i,j=1,2,3)$，其中 $A_{ij}$ 为 $a_{ij}$ 的代数余子式。证明：$A$ 为正交矩阵。

九、(10分)

证明：由 $a_{ij}=A_{ij}$ 及伴随矩阵定义知 $A^T=A^*$，则有

$$|A|=|A^T|=|A^*|=|A|^2,$$

于有 $|A|(|A|-1)=0$

又因 $A\neq 0$，不妨设 $a_{11}\neq 0$，则有

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$
$$=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2>0$$

故 $|A|=1$.

得 $AA^T=AA^*=|A|I=I$

即 $A$ 为正交矩阵.

十、（10 分）已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}$ 是线性无关的 3 元列向量组，满足 $\boldsymbol{A\alpha_1}=-\boldsymbol{\alpha_1}-3\boldsymbol{\alpha_2}-3\boldsymbol{\alpha_3}$， $\boldsymbol{A\alpha_2}=4\boldsymbol{\alpha_1}+4\boldsymbol{\alpha_2}+\boldsymbol{\alpha_3}$，$\boldsymbol{A\alpha_3}=-2\boldsymbol{\alpha_1}+3\boldsymbol{\alpha_3}$。

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量。

解：(1) 根据条件，有

$$A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3]$$
$$=[-\alpha_1-3\alpha_2-3\alpha_3,\ 4\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3,\ -2\alpha_1+3\alpha_3]$$
$$=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}-1 & 4 & -2\\ -3 & 4 & 0\\ -3 & 1 & 3\end{bmatrix}$$ ······

记 $B=\begin{bmatrix}-1 & 4 & -2\\ -3 & 4 & 0\\ -3 & 1 & 3\end{bmatrix}$，$P_1=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，

则由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关知 $P_1$ 可逆，且

$P_1^{-1}AP_1=B$ 即 $A\sim B$.

求B的特征值：

$$|\lambda I-B|=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

故 B 的特征值为 1, 2, 3，从而 A 的特征值也为 1, 2, 3. ·······6

(2). 由 $(1I-B)X=0$ 解得基础解系 $x_1=(1,1,1)^T$，
由 $(2I-B)X=0$ 解得基础解系 $x_2=(2,3,3)^T$，
由 $(3I-B)X=0$ 解得基础解系 $x_3=(1,3,4)^T$.

即特征值 1,2,3 对应的特征向量分别为 $x_1, x_2, x_3$.

令 $P_2=[x_1, x_2, x_3]$，则有

$$P_2^{-1}BP_2=diag(1,2,3),$$

现令

$$P=P_1P_2=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}1&2&1\\1&3&3\\1&3&4\end{bmatrix}$$

$$=[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ 2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3,\ \alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3]$$

则有

$$P^{-1}AP=(P_1P_2)^{-1}A(P_1P_2)=P_2^{-1}BP_2=diag(1,2,3).$$

所以，矩阵 $A$ 属于特征值 1, 2, 3 的特征向量分别为

$k_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$，$k_2(2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3)$，

$k_3(\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3)$，$k_i\neq 0, i=1,2,3.$