课程编号：A073003　　　　北京理工大学 2009-2010 学年第一学期

线性代数(B)试题 A 卷

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$，求行列式$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}^* & 0 \\ 0 & 2\boldsymbol{B} \end{vmatrix}$的值。

$\begin{vmatrix} A^* & 0 \\ 0 & 2B \end{vmatrix} = |A^*|\,|2B|$. $|A^*| = |A|^{3-1} = |A|^2$, $|A| = (-1)^{2\times1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} |-1|$

$|2B| = 2^2 |B|$

二、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & -5 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^{-1}XA=2A+XA$，求 X。

$\Downarrow$

$A^{-1}X=2I+X$

$\Rightarrow\ X=2A+AX$

三、（10 分）对下列线性方程组

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=1\\ x_1+ax_2+x_3=a\\ x_1+x_2+ax_3=a^2\end{cases}$$

试讨论：当 a 取何值时，它有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。（用导出组的基础解系表示通解）

$Ax=b$. $|A|\neq 0$ 唯一解. $|A|=0$, $(A,b)\to$

四、（10 分）已知

$$\alpha_1=(1,1,1),\ \ \alpha_2=(1,1,0),\ \ \alpha_3=(1,0,0),\ \ \alpha_4=(1,2,-3)$$

(1) 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩和一个极大无关组;

(2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

五、（10 分）已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是向量空间 R^3 的一个基, $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_3=\alpha_3$。

(1) 证明 β_1,β_2,β_3 为 R^3 的一个基;

(2) 求基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵;

(3) 求向量 $\gamma=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$ 关于基 β_1,β_2,β_3 的坐标。

(1).(2). $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}}_{P}$.

(3). $\gamma=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)X$

$\quad\| \ =(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)PX \quad \Rightarrow PX=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow X=P^{-1}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$(P,I)\rightarrow(I,P^{-1})$.

六、（10 分）设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是欧氏空间 V 的一个正交向量组，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关。

$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0$.

$k_1(\alpha_1,\alpha_1)+\cdots+k_m(\alpha_1,\alpha_m)=0$

$\Rightarrow k_1(\alpha_1,\alpha_1)=0$. $(\alpha_1,\alpha_1)>0 \Rightarrow k_1=0$

同理可证 $k_2=\cdots=k_m=0$.

七、（10 分）已知线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $k_1(1,0,0)^T+k_2(2,1,0)^T$，其中 k_1,k_2 为任意常数，求此方程组的解空间的一个标准正交基。

$(1,0,0)^T$, $(2,1,0)^T$ 为解空间 $N(A)=\{X \mid AX=0\}$ 的基.

令 $\alpha_1=(1,0,0)^T$, $\alpha_2=(2,1,0)^T$.

令 $\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(2,1,0)^T-\dfrac{2}{1}(1,0,0)^T$

$=(2,1,0)^T-(2,0,0)^T$

$=(0,1,0)^T$.

于是 β_1,β_2 为解空间的一个标准正交基.

八、（10 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$。

(1) 用正交变换将它化为标准形，并给出所用的正交变换;

(2) 判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是否正定。

$f=X^TAX.$ $|\lambda I-A|=0 \Rightarrow \lambda_i \Rightarrow X_i$

$\downarrow$

β_i $\quad Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$

$\downarrow \gamma_i$

$X=QY$

$\Rightarrow$

$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2$

九、（10 分）已知 A 相似于对角矩阵 $\mathrm{diag}(1,-1,0)$。

(1) 求 A^2-I 的所有特征值；

(2) 证明 A^2-I 为不可逆矩阵。

A 特征值为 $1,-1,0$.

A^2-I 特征值为 $1^2-1,(-1)^2-1,0^2-1$，即 $0,0,-1$.

$$|A^2-I|=0\times0\times(-1)=0.$$

十、（10 分）设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=A$，$r(A)=r\quad(0<r\leq n)$。

(1) 试确定 A 的特征值的取值范围；

(2) 证明 A 一定可以相似对角化；

(3) 求行列式 $|A-2I|$ 的值。

(1) $A^2=A \Rightarrow \lambda^2=\lambda \Rightarrow \lambda=1$ (r 重)，$\lambda=0$ ($n-r$ 重).

$$A^2=A \Rightarrow A(A-I)=0 \Rightarrow r(A)+r(A-I)\leq n$$

而 $$n=r(-I)=r(A-I-A)\leq r(A-I)+r(-A)=r(A-I)+r(A)$$

$$\Rightarrow r(A)+r(A-I)=n.$$

(2) $\underbrace{n-r(0I-A)}+\underbrace{n-r(I-A)}$ （属于0的线性无关的特征向量个数＋属于1的线性无关的特征向量个数，它们线性无关）

$$=2n-(r(A)+r(I-A))$$
$$=2n-(r(A)+r(A-I))$$
$$=2n-n$$
$$=n.$$

即 A 有 n 个线性无关的特征向量，则 A 相似于对角阵 $\begin{pmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&1&&\\&&&0&\\&&&&\ddots\\&&&&&0\end{pmatrix}$ $\}r$

(3) $$|A-2I|=\underbrace{(1-2)\cdots(1-2)}_{r}\underbrace{(0-2)\cdots(0-2)}_{n-r}=(-1)^r(-2)^{n-r}=(-1)^r\cdot(-1)^{n-r}2^{n-r}=(-1)^n2^{n-r}.$$