习题六

1. 写出下列二次型的矩阵:

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+3x_2^2+2x_3^2-x_1x_2+8x_2x_3$;

(2) $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4)^2$;

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}3&2&1\\6&5&4\\9&8&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$;

(4) $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$.

解 (1) 根据二次型的系数可知

$$a_{11}=5,\ a_{22}=3,\ a_{33}=2,$$

$$a_{12}=a_{21}=-\frac{1}{2},\ a_{13}=a_{31}=0,\ a_{23}=a_{32}=4.$$

因此, 二次型 f 的矩阵为

$$\begin{pmatrix}5&-1/2&0\\-1/2&3&4\\0&4&2\end{pmatrix}.$$

(2) 首先将二次型写成一般形式:

$$\begin{aligned}f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=&b_1^2x_1^2+b_2^2x_2^2+b_3^2x_3^2+b_4^2x_4^2\\&+2b_1b_2x_1x_2+2b_1b_3x_1x_3+2b_1b_4x_1x_4+2b_2b_3x_2x_3+2b_2b_4x_2x_4+2b_3b_4x_3x_4,\end{aligned}$$

根据二次型的系数可知

$$a_{11}=b_1^2,\ a_{22}=b_2^2,\ a_{33}=b_3^2,a_{44}=b_4^2,$$

$$\begin{aligned}&a_{12}=a_{21}=b_1b_2,\ a_{13}=a_{31}=b_1b_3,a_{14}=a_{41}=b_1b_4,\\&a_{23}=a_{32}=b_2b_3,a_{24}=a_{42}=b_2b_4,a_{34}=a_{43}=b_3b_4.\end{aligned}$$

因此, 二次型 f 的矩阵为

$$\begin{pmatrix}b_1^2&b_1b_2&b_1b_3&b_1b_4\\b_1b_2&b_2^2&b_2b_3&b_2b_4\\b_1b_3&b_2b_3&b_3^2&b_3b_4\\b_1b_4&b_2b_4&b_3b_4&b_4^2\end{pmatrix}.$$

(3) 首先将二次型写成一般形式:

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=3x_1^2+5x_2^2+7x_3^2+8x_1x_2+10x_1x_3+12x_2x_3,$$

根据二次型的系数可知

$$a_{11}=3,\ a_{22}=5,\ a_{33}=7,$$

$$a_{12}=a_{21}=4,\ a_{13}=a_{31}=5, a_{23}=a_{32}=6.$$

因此，二次型 f 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

(4) 根据二次型的系数可知

$$a_{11}=1,\ a_{22}=1,\cdots,a_{nn}=1,$$

$$a_{i(i+1)}=a_{(i+1)i}=\frac{1}{2},\ i=1,2,\cdots,n-1.$$

因此，二次型 f 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 1 & 1/2 & & \\ & 1/2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & 1/2 \\ & & & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$，写出对应的二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$：

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; (2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

解 (1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+5x_3^2.$

(2) $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+10x_1x_2+6x_1x_3+8x_2x_3.$

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵. 如果对任意的 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n$ 都有 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$, 证明 $\boldsymbol{A}$ 为零矩阵.

证明 因为对任意的 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n$ 都有 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$, 所以取

$$\boldsymbol{X}_i=(0,\cdots 0,\underset{i}{1},0,\cdots 0)^{\mathrm{T}}, i=1,2,\cdots,n,$$

可以得到 $a_{ii}=0, i=1,2,\cdots,n$; 再取

$$\boldsymbol{X}_{ij}=(0,\cdots 0,\underset{i}{1},0,\cdots 0,\underset{j}{1},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,n,i\neq j,$$

可以得到$a_{ii}+a_{jj}+a_{ij}+a_{ji}=0$. 因为$a_{ii}=0,a_{jj}=0$, 且$a_{ij}=a_{ji}$，所以对所有的 $i\neq j$，有$a_{ij}=0$. 因此，$\boldsymbol{A}$为零矩阵.

4. 求二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_4)^2+(x_4+x_1)^2$ 的秩.

解 因为

$$\begin{aligned}f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)&=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+x_2^2+x_3^2-2x_2x_3+x_3^2+x_4^2-2x_3x_4+x_4^2+x_1^2+2x_1x_4\\&=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_4^2+2x_1x_2-2x_2x_3-2x_3x_4+2x_1x_4,\end{aligned}$$

所以，二次型f的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0&1\\1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\1&0&-1&2\end{pmatrix}.$$

因为$\boldsymbol{A}$的阶梯形为

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&2&-3\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以二次型的矩阵的秩为 3. 因此，二次型的秩为 3.

5. 用配方法将下列二次型化为标准形，并求出所用的线性替换矩阵:

(1) $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2-6x_2x_3$;

(2) $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$;

(3) $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+4x_2x_3$;

(4) $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.

解 (1) $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2-6x_2x_3$

$$\begin{aligned}&=(x_1+x_2)^2+x_2^2-6x_2x_3\\&=(x_1+x_2)^2+(x_2-3x_3)^2-9x_3^2.\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 - 3x_3 \\ y_3 = x_3, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - 3y_3 \\ x_2 = y_2 + 3y_3 \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

所以二次型经过非退化线性替换得到的标准形为

$$f = y_1^2 + y_2^2 - 9y_3^2.$$

所用的线性替换矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$

$$= x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 5x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 2(x_2 + x_3)^2 - x_3^2.$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + 3y_3 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

因此，二次型经过非退化线性替换得到的标准形为

$$f = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2,$$

所用的线性替换矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(3) 令

$$\begin{cases} y_1 = x_2\\ y_2 = x_1\\ y_3 = x_3,\end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 + y_3^2 - 2y_1y_2 + 4y_1y_3$$

$$\begin{aligned} &= y_1^2 - 2y_1y_2 + 4y_1y_3 + y_3^2\\ &= (y_1 - y_2 + 2y_3)^2 - y_2^2 - 4y_3^2 + 4y_2y_3 + y_3^2\\ &= (y_1 - y_2 + 2y_3)^2 - (y_2^2 - 4y_2y_3) - 3y_3^2\\ &= (y_1 - y_2 + 2y_3)^2 - (y_2 - 2y_3)^2 + y_3^2.\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - y_2 + 2y_3\\ z_2 = y_2 - 2y_3\\ z_3 = y_3,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases} y_1 = z_1 + z_2\\ y_2 = z_2 + 2z_3\\ y_3 = z_3.\end{cases}$$

因此，二次型经过非退化线性替换

$$\begin{cases} x_1 = z_2 + 2z_3\\ x_2 = z_1 + z_2\\ x_3 = z_3,\end{cases}$$

得到的标准形为

$$f = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2;$$

所用的线性替换矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(4) 令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} f &= y_1^2 - y_2^2 + (y_1 - y_2)y_3 + (y_1 + y_2)y_3 \\ &= (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2. \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = z_3. \end{cases}$$

因此，二次型经过非退化线性替换

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 - z_3 \\ x_2 = z_1 - z_2 - z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$$

得到的标准形为

$$f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

所用的线性替换矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. 对下列矩阵，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

解 (1)

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 5/3 \\ 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 \\ 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，于是

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，于是

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1/2&1/2&0\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1/2&0\\1&1/2&-2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1/2&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

7. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$都是 n 阶对称矩阵，并且$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\simeq\boldsymbol{D}$，判断下列结论是否成立. 如果成立，则给出证明；如果不成立，则举出反例.

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\simeq\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$;

(2) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}$.

解 (1) 错误. 取

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&14\\14&20\end{pmatrix},$$

于是$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\simeq\boldsymbol{D}$. 因为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}9&14\\14&19\end{pmatrix},$$

所以$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}$与$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$不是合同矩阵;

(2) 正确. 因为$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\simeq\boldsymbol{D}$，所以存在可逆矩阵$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B},\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{CQ}=\boldsymbol{D}$，于是

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{Q}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{Q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix},$$

因此

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}.$$

8. 证明如果对所有的$i\in\{1,2,\cdots,s\}$，都有$\boldsymbol{A}_i$与$\boldsymbol{B}_i$是合同的，那么准对角矩阵

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&&&\\&\boldsymbol{A}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{A}_s\end{pmatrix}\text{与}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1&&&\\&\boldsymbol{B}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{B}_s\end{pmatrix}$$

也是合同的.

证明 设对所有的 $i\in\{1,2,\cdots,s\}$，$\boldsymbol{A}_i$ 与 $\boldsymbol{B}_i$ 是合同的，于是存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_i$，使得 $\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{B}_i$. 因为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1 & & & \\ & \boldsymbol{P}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{P}_s\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1 & & & \\ & \boldsymbol{P}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{P}_s\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P}_1 & & & \\ & \boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{P}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{P}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_s\boldsymbol{P}_s\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{B}_s\end{pmatrix}.$$

所以$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{B}_s\end{pmatrix}$是合同的.

9. 用初等变换法将下列二次型化为标准形，并且求出所用的非退化线性替换:

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2-6x_2x_3$;

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+6x_2^2+9x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3+6x_2x_3$;

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=4x_1x_2+2x_1x_3+8x_2x_3$;

(4) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+9x_2^2+3x_3^2+8x_1x_2-4x_1x_3-10x_2x_3$.

解 (1)

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&-3\\0&-3&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&-3\\0&-3&0\\1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-3\\0&-3&0\\1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-3&-9\\1&-1&-3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-9\\1&-1&-3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1&-3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$，那么 $\boldsymbol{P}$ 是非奇异的，并且

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-3&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&-3\\0&-3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-9\end{pmatrix}.$$

因此，经过非退化的线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$，得到的二次型 f 的标准形为

$$f(\boldsymbol{X})=y_1^2+y_2^2-9y_3^2.$$

(2)

$$\begin{pmatrix}2&2&4\\2&6&3\\4&3&9\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&4\\2&4&3\\4&-1&9\\1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&4\\0&4&-1\\4&-1&9\\1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&-1\\4&-1&1\\1&-1&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&-1\\0&-1&1\\1&-1&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&-1&3/4\\1&-1&-9/4\\0&1&1/4\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&3/4\\1&-1&-9/4\\0&1&1/4\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1&-9/4\\0&1&1/4\\0&0&1\end{pmatrix}$，那么 $\boldsymbol{P}$ 是非奇异的，并且

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-9/4&1/4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&4\\2&6&3\\4&3&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-9/4\\0&1&1/4\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&3/4\end{pmatrix}.$$

因此，经过非退化的线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$，得到的二次型 f 的标准形为

$$f(\boldsymbol{X})=2y_1^2+4y_2^2+\frac{3}{4}y_3^2.$$

(3)

$$\begin{pmatrix}0&2&1\\2&0&4\\1&4&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\6&0&4\\1&4&0\\1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&6&1\\6&0&4\\1&4&0\\1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&1\\6&-18&4\\1&1&0\\1&-3&0\\0&1&0\\1&-3&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&0&1\\0&-18&1\\1&1&0\\1&-3&0\\0&1&0\\1&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-18&1\\1&1&-1/2\\1&-3&-1/2\\0&1&0\\1&-3&1/2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-18&1\\0&1&-1/2\\1&-3&-1/2\\0&1&0\\1&-3&1/2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-18&0\\0&1&-4/9\\1&-3&-2/3\\0&1&1/18\\1&-3&1/3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-18&0\\0&0&-4/9\\1&-3&-2/3\\0&1&1/18\\1&-3&1/3\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-3&-2/3\\0&1&1/18\\1&-3&1/3\end{pmatrix}$，那么 $\boldsymbol{P}$ 是非奇异的，并且

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&1\\-3&1&-3\\-2/3&1/18&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&1\\2&0&4\\1&4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3&-2/3\\0&1&1/18\\1&-3&1/3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-18&0\\0&0&-4/9\end{pmatrix}.$$

因此，经过非退化的线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$，得到的二次型 f 的标准形为

$$f(\boldsymbol{X})=2y_1^2-18y_2^2-\frac{4}{9}y_3^2.$$

(4)

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -5 \\ -2 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -5 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，那么 $\boldsymbol{P}$ 是非奇异的，并且

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -5 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，经过非退化的线性替换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{PY}$，得到的二次型 f 的标准形为

$$f(\boldsymbol{X}) = 2y_1^2 + y_2^2.$$

10. 用正交替换法将下列二次型化为标准形，并且求出所用非退化线性替换:

(1) $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;

(2) $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_3x_4$;

(3) $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

(4) $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.

解 (1) 写出二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}.$$

因为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\2&4&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\0&\lambda-1&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\0&1&1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2&-4&2\\-2&\lambda-9&4\\0&0&1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-10),$$

所以矩阵的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=10.$

求$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系. 用初等行变换将$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$化为简化阶梯形

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\-2&-4&4\\2&4&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得到$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

求$(10\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系. 用初等行变换将$10\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$化为简化阶梯形

$$10\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}8&-2&2\\-2&5&4\\2&4&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1/2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得到$(10\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}.$$

用施密特方法将$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$正交化，得到

$$\beta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\beta_2=-\frac{(\beta_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1+\beta_2=\frac{4}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}.$$

将β_1,β_2规范化，得到

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix},$$

将ξ_3规范化，得到$\eta_3=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$.

令

$$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}&2/3\sqrt{5}&1/3\\1/\sqrt{5}&4/3\sqrt{5}&2/3\\0&5/3\sqrt{5}&-2/3\end{pmatrix},$$

那么$\boldsymbol{Q}$为正交矩阵. 对二次型$f(x_1,x_2,x_3)$作正交替换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$，得到的标准形为

$$f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2.$$

(2) 写出二次型$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\1&1&-1&0\\0&-1&1&1\\-1&0&1&1\end{pmatrix}.$$

因为

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0 & 1\\ -1 & \lambda-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \lambda-1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & \lambda-1\\ 0 & 1 & \lambda-1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0 & \lambda-1\\ 0 & 1 & \lambda-1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & \lambda-1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & \lambda-1 & -1\\ 0 & 0 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & \lambda-1 & -1\\ 0 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & \lambda-1 & -2\\ 0 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-3)(\lambda+1),$$

所以矩阵的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=3, \lambda_4=-1.$

$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

$(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

$(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

因为$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_4$是正交的，所以只需将$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_4$规范化，得到

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

令

$$Q=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&0&1/2&1/2\\0&1/\sqrt{2}&1/2&-1/2\\1/\sqrt{2}&0&-1/2&-1/2\\0&1/\sqrt{2}&-1/2&1/2\end{pmatrix},$$

那么$\boldsymbol{Q}$为正交矩阵. 对二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 作正交替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$，得到的标准形为

$$f=y_1^2+y_2^2+3y_3^2-y_4^2.$$

(3) 写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

因为

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|&=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\\lambda-2&\lambda&-1\\\lambda-2&-1&\lambda\end{vmatrix}\\&=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&\lambda&-1\\1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&0&0\\1&\lambda+1&0\\1&0&\lambda+1\end{vmatrix}\\&=(\lambda-2)(\lambda+1)^2,\end{aligned}$$

所以矩阵的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=2.$

$(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

$(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

用施密特方法将$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$正交化，得到

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=-\frac{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}.$$

将$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$,规范化，得到

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix},$$

将$\boldsymbol{\xi}_3$规范化，得到$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$

令

$$Q=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix},$$

那么$\boldsymbol{Q}$为正交矩阵. 对二次型$f(x_1,x_2,x_3)$作正交替换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$，得到的标准形为

$$f=-y_1^2-y_2^2+2y_3^2.$$

(4) 写出二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-2\\2&4&4\\-2&4&-3\end{pmatrix}.$$

因为

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 2\\ -2 & \lambda-4 & -4\\ 2 & -4 & \lambda+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 2\\ -2 & \lambda-4 & -4\\ 2-2\lambda & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 2\\ -2 & \lambda-4 & -4\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda+4 & -2 & 2\\ -10 & \lambda-4 & -4\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda+4 & -2\\ -10 & \lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-6)(\lambda+6),$$

所以矩阵的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=6,\lambda_3=-6.$

$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

$(6\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$$

$(-6\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系 为

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

将$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$规范化，得到

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},$$

令

$$Q=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6}\\ 0 & 5/\sqrt{30} & -1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{6}\end{pmatrix},$$

那么$\boldsymbol{Q}$为正交矩阵. 对二次型$f(x_1,x_2,x_3)$作正交替换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$，得到的标准形为

$$f=y_1^2+6y_2^2-6y_3^2.$$

11. 用正交替换法将下列方程化为标准方程，并且指出其在直角坐标系中图形的名称:

(1) $5x_1^2+5x_2^2-6x_1x_2=8$;

(2) $2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3=4$.

解 (1) 写出方程左端的二次型$f=5x_1^2+5x_2^2-6x_1x_2$的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}.$$

因为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & 3\\ 3 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-8),$$

所以$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=2$, $\lambda_2=8$.

求$(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系. 用初等行变换将$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$化为简化阶梯形

$$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 3 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

得到$(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

求$(8\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系. 用初等行变换将$8\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$化为简化阶梯形

$$8\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 3 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

得到$(8\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}.$$

将$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$规范化，得到

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

令

$$Q=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix},$$

那么$\boldsymbol{Q}$为正交矩阵. 对二次型作正交替换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$，得到的标准形为

$$f=2y_1^2+8y_2^2\ .$$

因此, 标准方程是

$$\frac{y_1^2}{4}+y_2^2=1,$$

这是平面上的一个椭圆.

(2) 写出方程左端的二次型 $f=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\-2 & 1 & -2\\0 & -2 & 0\end{pmatrix}.$$

因为

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|&=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2 & 0\\2 & \lambda-1 & 2\\0 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0\\2 & 2\end{vmatrix}+\lambda\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2\\2 & \lambda-1\end{vmatrix}\\&=\lambda^3-3\lambda^2-6\lambda+8\\&=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2),\end{aligned}$$

所以矩阵的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=4,\lambda_3=-2.$

求$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系. 用初等行变换将$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$化为简化阶梯形

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\2 & 0 & 2\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1/2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得到$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

求$(4\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系．用初等行变换将$4\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$化为简化阶梯形

$$4\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&3&2\\0&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得到$(4\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

求$(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系．用初等行变换将$-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$化为简化阶梯形

$$-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&3&2\\0&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得到$(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}.$$

将$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$规范化，得到

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}.$$

令

$$Q=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}-2/3&2/3&1/3\\-1/3&-2/3&2/3\\2/3&1/3&2/3\end{pmatrix},$$

那么$\boldsymbol{Q}$为正交矩阵．对二次型f作正交替换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$，得到的标准形为

$$f=y_1^2+4y_2^2-2y_3^2,$$

因此，标准方程是

$$\frac{y_1^2}{4}+y_2^2-\frac{y_3^2}{2}=1,$$

这是一个单叶双曲面.

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个秩为 r 的 n 阶实对称矩阵，证明:

(1) $\boldsymbol{A}\simeq\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_r,0,\cdots,0)$，其中 $d_i\neq 0$，$i=1,2,\cdots,r$;

(2) $\boldsymbol{A}$ 可以表示为 r 个秩为 1 的对称矩阵之和.

证明 (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_1$，使得

$$\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\mathrm{diag}(d_1',d_2',\cdots,d_n'),$$

由于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$，所以 $d_1',d_2',\cdots,d_n'$ 中只有 r 个数不为零，设为 $d_{i_1}',d_{i_2}',\cdots,d_{i_r}'$. 令

$$\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{E}_n(i_1\leftrightarrow 1)\boldsymbol{E}_n(i_2\leftrightarrow 2)\cdots\boldsymbol{E}_n(i_r\leftrightarrow r),$$

于是

$$\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\mathrm{diag}(d_{i_1}',d_{i_2}',\cdots,d_{i_r}',0,\cdots,0),$$

令

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2,\quad d_1=d_{i_1}',d_2=d_{i_2}',\cdots,d_r=d_{i_r}',$$

于是

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_r,0,\cdots,0);$$

(2) 因为

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_r,0,\cdots,0),$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_r,0,\cdots,0)\boldsymbol{P}^{-1}\\&=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{diag}(d_1,0,0,\cdots,0)\boldsymbol{P}^{-1}+\cdots+(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{diag}(0,0,\cdots,d_r,0,\cdots,0)\boldsymbol{P}^{-1}\\&=(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(d_1,0,0,\cdots,0)\boldsymbol{P}^{-1}+\cdots+(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(0,0,\cdots,d_r,0,\cdots,0)\boldsymbol{P}^{-1}.\end{aligned}$$

对所有的 $i\in\{1,2,\cdots,r\}$，$\mathrm{diag}(0,0,\cdots,d_i,0,\cdots,0)$ 的秩为 1，于是 $(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(0,\cdots,d_i,0,\cdots,0)\boldsymbol{P}^{-1}$ 是秩为 1 的对称矩阵. 因此，$\boldsymbol{A}$ 可以表示为 r 个

秩为 1 的对称矩阵之和.

13. 如果实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 能够分解成为两个实的一次齐次式的乘积, 即 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)(b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n)$, 证明 f 的秩为 1, 或者 f 的秩为 2, 正惯性指数为 1.

证明 设二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)(b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n).$$

因为 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$ 是一次齐次式, 所以 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为零.

下面分两种情况讨论.

情况 1 向量 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 与 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是线性相关的. 于是存在非零常数 k 使得

$$(b_1,b_2,\cdots,b_n,)^{\mathrm{T}}=k(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}},$$

于是

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^2,$$

假设 a_i 是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中第一个不为零的数, 作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1=x_1 \\ \quad\vdots \\ y_{i-1}=x_{i-1} \\ y_i=a_ix_i+\cdots+a_nx_n \\ y_{i+1}=x_{i+1} \\ \quad\vdots \\ y_n=x_n, \end{cases}$$

于是二次型化为

$$f=ky_i^2,$$

因此, f 的秩为 1.

情况 2 向量 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 与 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是线性无关的, 假设 a_i,a_j 与 b_i,b_j 不成比例(不妨假设 $i<j$). 于是作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ \quad\vdots \\ y_i = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \\ \quad\vdots \\ y_j = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n \\ \quad\vdots \\ y_n = x_n, \end{cases}$$

于是二次型化为

$$f = y_i y_j.$$

令

$$\begin{cases} y_1 = z_1 \\ \quad\vdots \\ y_i = z_i + z_j \\ \quad\vdots \\ y_j = z_i - z_j \\ \quad\vdots \\ y_n = z_n, \end{cases}$$

于是得到二次型的规范形

$$f = z_i^2 - z_j^2,$$

因此, f 的秩为 2, 正惯性指数为 1.

14. 将第 9 题中的二次型在复数集上化为规范形, 并且求出所用的非退化线性替换.

解 (1) 根据第 9 题的(1), 取

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3i \end{pmatrix}.$$

令

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1/3i \end{pmatrix},$$

作线性替换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{PZ}$, 得到二次型 f 在复数集上的规范形为

$$f(\boldsymbol{X}) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2.$$

(2) 根据第 9 题的(2), 取

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & -9/4\\ 0 & 1 & 1/4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 2/\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

令

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1 & -1 & -9/4\\ 0 & 1 & 1/4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 2/\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/2 & -9/2\sqrt{3}\\ 0 & 1/2 & 1/2\sqrt{3}\\ 0 & 0 & 2/\sqrt{3}\end{pmatrix},$$

作线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PZ}$，得到二次型 f 在复数集上的规范形为

$$f(\boldsymbol{X})=z_1^2+z_2^2+z_3^2.$$

(3) 根据第 9 题的(3)，取

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1 & -3 & -2/3\\ 0 & 1 & 1/18\\ 1 & -3 & 1/3\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{18}i & 0\\ 0 & 0 & 3/2i\end{pmatrix}.$$

令

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1 & -3 & -2/3\\ 0 & 1 & 1/18\\ 1 & -3 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{18}i & 0\\ 0 & 0 & 3/2i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -3/\sqrt{18}i & i\\ 0 & 1/\sqrt{18}i & 1/12i\\ 1/\sqrt{2} & -3/\sqrt{18}i & 1/2i\end{pmatrix},$$

作线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PZ}$，得到二次型 f 在复数集上的规范形为

$$f(\boldsymbol{X})=z_1^2+z_2^2+z_3^2.$$

(4) 根据第 9 题的(4)，取

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

令

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

作线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PZ}$，得到二次型 f 在复数集上的规范形为

$$f(\boldsymbol{X})=z_1^2+z_2^2.$$

15. 将第 10 题中的二次型在实数集上化为规范形，并且求出所用的非退化

线性替换.

解 (1) 根据第 10 题的(1), 取

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3\\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3\\ 0 & 5/3\sqrt{5} & -2/3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1/\sqrt{10}\end{pmatrix}.$$

令

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3\\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3\\ 0 & 5/3\sqrt{5} & -2/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1/\sqrt{10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3\sqrt{10}\\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3\sqrt{10}\\ 0 & 5/3\sqrt{5} & -2/3\sqrt{10}\end{pmatrix},$$

作线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}$, 得到二次型 f 在实数集上的规范形为

$$f(\boldsymbol{X})=z_1^2+z_2^2+z_3^2.$$

(2) 根据第 10 题的(2), 取

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2\\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/2 & -1/2\\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

令

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2\\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/2 & -1/2\\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & 1/2\sqrt{3} & 1/2\\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/2\sqrt{3} & -1/2\\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/2\sqrt{3} & -1/2\\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/2\sqrt{3} & 1/2\end{pmatrix},$$

作线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}$, 得到二次型 f 在实数集上的规范形为

$$f(\boldsymbol{X})=z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_4^2.$$

(3) 根据第 10 题的(3), 取

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

令

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 0\end{pmatrix},$$

作线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PZ}$，得到二次型 f 在实数集上的规范形为

$$f(\boldsymbol{X})=z_1^2-z_2^2-z_3^2.$$

(4) 根据第 10 题的(4)，取

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6}\\ 0 & 5/\sqrt{30} & -1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{6}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{6} & 0\\ 0 & 0 & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}.$$

令

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6}\\ 0 & 5/\sqrt{30} & -1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{6} & 0\\ 0 & 0 & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5} & 1/6\sqrt{5} & 1/6\\ 0 & 5/6\sqrt{5} & -1/6\\ 1/\sqrt{5} & 1/3\sqrt{5} & 1/3\end{pmatrix},$$

作线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PZ}$，得到二次型 f 在实数集上的规范形为

$$f(\boldsymbol{X})=z_1^2+z_2^2-z_3^2.$$

16. 证明所有的 n 阶实对称矩阵按合同分类，共有 $\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 类.

证明 n 阶实对称矩阵合同的充分必要条件是它们有相同的秩和正惯性指数，于是可以按照秩和正惯性指数将矩阵进行分类.

当矩阵的秩为 0 时，正惯性指数只有 1 种可能：$p=0$;

当矩阵的秩为 1 时，正惯性指数有 2 种可能：$p=0, p=1$;

当矩阵的秩为 2 时，正惯性指数有 3 种可能：$p=0, p=1, p=2$;

......

当矩阵的秩为n时，正惯性指数有$n+1$种可能：$p=0, p=1, \cdots, p=n.$

因此，n阶实对称矩阵按合同分类，共有$1+2+\cdots+n+1=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$类.

17. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(1) $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$在复数集上是否合同？$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{C}$在复数集上是否合同？说明理由；

(2) $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$在实数集上是否合同？$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{C}$在实数集上是否合同？说明理由.

解 (1) 因为$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3, \mathrm{r}(\boldsymbol{B})=3, \mathrm{r}(\boldsymbol{C})=2$，所以$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$，因此$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$在复数集上是合同的；因为$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\neq\mathrm{r}(\boldsymbol{C})$，所以$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{C}$在复数集上不是合同的.

(2) 因为$\boldsymbol{A}$的特征值为$1,2,3$，$\boldsymbol{B}$的特征值$1,-2,3$，所以$\boldsymbol{A}$的正惯性指数等于 3，$\boldsymbol{B}$的正惯性指数等于 2，因此$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$在实数集上不是合同的；因为$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\neq\mathrm{r}(\boldsymbol{C})$，所以$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{C}$在实数集上不是合同的.

19. 已知实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$在正交替换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$下的标准型为$6y_3^2$，并且$\boldsymbol{Q}$的第 3 列为$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}$. 求二次型$f(x_1,x_2,x_3)$.

解 因为二次型经过正交替换得到的标准形为$6y_3^2$，所以$\lambda=0$是二次型的矩阵$\boldsymbol{A}$的二重特征值. 设$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda=0$的特征向量为$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则$\boldsymbol{Q}$的第 3 列与$\boldsymbol{X}$是正交的，即

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x_1+\frac{1}{\sqrt{3}}x_2+\frac{1}{\sqrt{3}}x_3=0. \tag{1}$$

方程组(1)的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

用施密特方法将$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$正交化，得到

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=-\frac{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}.$$

将$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$规范化，得到

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

令

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix},$$

则$\boldsymbol{Q}$为正交矩阵，且$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&6\end{pmatrix}$，因此

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\mathrm{diag}\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&6\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}.$$

19. 设实二次型$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$的正、负惯性指数都不为零. 证明存在非零向量$\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$，$\boldsymbol{X}_3$，使得$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1>0,\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_2=0,\boldsymbol{X}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_3<0.$

证明 设二次型的秩为r. 因为实二次型$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$的正、负惯性指数都不为零，

所以 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 可以经过非退化线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 化为规范形

$$f=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP})\boldsymbol{Y}=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2,$$

其中 $p\geq 1, r-p\geq 1$. 分别取

$$\boldsymbol{Y}_1=(1,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{Y}_2=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{r个},0\cdots,0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{Y}_3=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{p个},0\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

于是

$$\boldsymbol{Y}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP})\boldsymbol{Y}_1>0,$$
$$\boldsymbol{Y}_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP})\boldsymbol{Y}_2=0,$$
$$\boldsymbol{Y}_3^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP})\boldsymbol{Y}_3<0.$$

令

$$\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{PY}_1,\ \boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{PY}_2,\ \boldsymbol{X}_3=\boldsymbol{PY}_3,$$

因为 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵, $\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{Y}_3$ 是非零向量, 所以 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$ 是非零向量, 并且满足

$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}_1>0,\ \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}_2=0,\ \boldsymbol{X}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}_3<0.$$

20. 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3-2ax_1x_3$ 的正、负惯性指数都为 1, 求参数 a.

解 二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-a\\1&a&-1\\-a&-1&1\end{pmatrix}.$$

对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换

$$\begin{pmatrix}1&1&-a\\1&a&-1\\-a&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-a\\0&a-1&-1+a\\0&-1+a&1-a^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-a\\0&a-1&-1+a\\0&0&-(a-1)^2(a+2)\end{pmatrix},$$

因为二次型的正、负惯性指数都为 1, 所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$. 因此, $a=-2$.

21. 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2bx_2x_3+2x_1x_3$ 经过正交

替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$ 化成 $y_1^2+2y_3^2$，其中 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的向量，$\boldsymbol{Q}$ 是 3 阶正交矩阵，求常数 a, b.

解　记正交替换前后二次型的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & b\\ 1 & b & 1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是合同的. 因为 0, 1, 2 为 $\boldsymbol{B}$ 的特征值，所以 0, 1, 2 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & -1\\ -a & \lambda-1 & -b\\ -1 & -b & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda^2+(2-a^2-b^2)\lambda+(a-b)^2=0, \qquad (1)$$

将 $\lambda=0$ 代入(1)式，得到 $a=b$. 将 $\lambda=1$ 代入(1)式，得到 $a=0$. 因此，$a=b=0$.

22. 判断下列二次型是否正定:

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=6x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3$;

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-x_3^2+12x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$;

(3) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$.

解 (1) 二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6 & -2 & 2\\ -2 & 5 & 0\\ 2 & 0 & 7\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式为

$$\Delta_1=a_{11}=6,$$

$$\Delta_2=\det\begin{pmatrix}6 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}=26,$$

$$\Delta_3=\det\begin{pmatrix}6 & -2 & 2\\ -2 & 5 & 0\\ 2 & 0 & 7\end{pmatrix}=162.$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式全部大于零，所以二次型是正定的.

(2) 二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 6 & -2\\ 6 & 2 & -4\\ -2 & -4 & -1\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式为

$$\Delta_1=a_{11}=1,$$

$$\Delta_2=\det\begin{pmatrix}1 & 6\\ 6 & 2\end{pmatrix}=-34,$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 的 2 阶顺序主子式小于零，所以二次型不是正定的;

(3) 二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 1 & 1/2 & & \\ & 1/2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & 1/2\\ & & & 1/2 & 1\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式为

$$\Delta_1=a_{11}=1,$$

$$\Delta_2=\det\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}=\frac{3}{4},$$

利用数学归纳法可以证明

$$\Delta_n=\det\begin{pmatrix}1 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 1 & 1/2 & & \\ & 1/2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & 1/2\\ & & & 1/2 & 1\end{pmatrix}=\frac{n+1}{2^n}.$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式全部大于零，所以二次型是正定的.

23. 判断下列矩阵是否正定:

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 3 & 26 & 0\\ 4 & 0 & 26\end{pmatrix}$; (2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 3 & 5 & 7\\ 5 & 7 & 9\end{pmatrix}$.

解 (1) $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式为

$$\Delta_1=a_{11}=1,$$

$$\Delta_2=\det\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 26\end{pmatrix}=17,$$

$$\Delta_3 = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 26 & 0 \\ 4 & 0 & 26 \end{pmatrix} = 26.$$

顺序主子式全部大于零，所以 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

(2) $\boldsymbol{B}$ 的顺序主子式为

$$\Delta_1 = a_{11} = 1,$$

$$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = -4,$$

因为 $\boldsymbol{B}$ 的 2 阶顺序主子式小于零，所以 $\boldsymbol{B}$ 不是正定矩阵.

24. 确定参数 a 的取值范围，使得下列二次型是正定的:

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 8x_1x_3 + ax_2^2 + ax_3^2$;

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

解 (1) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & a & 0 \\ 4 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式为

$$\Delta_1 = a_{11} = 1,$$

$$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & a \end{pmatrix} = a - 9,$$

$$\Delta_3 = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & a & 0 \\ 4 & 0 & a \end{pmatrix} = a^2 - 25a.$$

由 $\Delta_2 > 0$ 可得 $a > 9$；由 $\Delta_3 > 0$ 可得 $a > 25$或$a < 0$. 于是 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵的充分必要条件 $a > 25$.

因此，当 $a > 25$ 时，$f(x_1, x_2, x_3)$ 为正定二次型.

(2) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式为

$$\Delta_1 = a_{11} = 1,$$

$$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = 1 - a^2,$$

$$\Delta_3 = \det\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = -5a^2 - 4a\,.$$

由 $\Delta_2 > 0$ 可得 $-1 < a < 1$；由 $\Delta_3 > 0$ 可得 $-\dfrac{4}{5} < a < 0$. 于是 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵的充分必要条件是 $-\dfrac{4}{5} < a < 0$.

因此，当 $-\dfrac{4}{5} < a < 0$ 时，$f(x_1, x_2, x_3)$ 为正定二次型.

25. 设

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1 + a_1 x_2)^2 + (x_2 + a_2 x_3)^2 + (x_{n-1} + a_{n-1} x_n)^2 + (x_n + a_n x_1)^2$$

是 n 元二次型，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为实数. 当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足什么条件时，$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为正定二次型?

解　因为对任意不全为零的实数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，都有 $f(k_1, k_2, \cdots, k_n) \geq 0$，所以二次型正定的充分必要条件是齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 = 0 \\ x_2 + a_2 x_3 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} + a_{n-1} x_n = 0 \\ x_n + a_n x_1 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

只有零解. 因为方程组(1)有解的充分必要条件是方程组(1)的系数矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

即 $1 + (-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$，所以，当 $1 + (-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$ 时，$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为正定二次型.

26. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$为 2 阶实矩阵，并且$\det\boldsymbol{A}\neq 0$, $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$. 证明:

(1) 如果$\det\boldsymbol{A}>0$，并且$a>0$，那么 f 是正定的;

(2) 如果$\det\boldsymbol{A}>0$，并且$a<0$，那么 f 是负定的;

(3) 如果$\det\boldsymbol{A}<0$，那么 f 是不定的.

证明 (1) 因为 2 阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$的各阶顺序主子式

$$\Delta_1=a,\qquad \Delta_2=\det A$$

都是大于零的，所以矩阵$\boldsymbol{A}$正定的. 因此，二次型 f 是正定的;

(2) 因为$\det\boldsymbol{A}=ad-b^2>0$,并且$a<0$，所以$d<0$. 设$\lambda_1,\lambda_2$是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，由特征值的性质，有

$$\lambda_1+\lambda_2=a+d<0,$$
$$\lambda_1\lambda_2=ad-b^2>0,$$

于是$\lambda_1<0,\lambda_2<0$，所以二次型 f 的负惯性指数为 2. 因此，f 是负定的.

(3) 因为$\det\boldsymbol{A}<0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值的乘积$\lambda_1\lambda_2<0$，即λ_1,λ_2是一正一负，因而二次型 f 的正、负惯性指数都为 1，所以 f 是不定的.

27. 设$\boldsymbol{A}$是正定矩阵. 证明:

(1) $\boldsymbol{A}^{-1}$是正定矩阵;

(2) $\boldsymbol{A}$的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$是正定矩阵;

(3) $\boldsymbol{A}^k$是正定矩阵, k为正整数.

证明 因为$\boldsymbol{A}$是正定矩阵，所以$|\boldsymbol{A}|>0$，并且$\boldsymbol{A}$的特征值λ_i全部大于零，$i=1,2,\cdots,n$. 于是$\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值为λ_i^{-1}全部大于零，$i=1,2,\cdots,n$；$\boldsymbol{A}^*$的特征值为$|\boldsymbol{A}|\lambda_i^{-1}$全部大于零，$i=1,2,\cdots,n$；$\boldsymbol{A}^k$的特征值为$\lambda_i^k$全部大于零，$i=1,2,\cdots,n$. 因此$\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{A}^k$是正定矩阵.

28. 设 s 与 t 是正数，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵．证明 $s\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵. 31题的方法

证明 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值 λ_i,μ_i 全部大于零，$i=1,2,\cdots,n$．当 s,t 为正数时，$s\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{B}$ 的特征值 $s\lambda_i+t\mu_i$ 也全部大于零，$i=1,2,\cdots,n$．因此，$s\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵.

29. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵．证明 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为正定矩阵充分必要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=m$.

证明 必要性 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为正定矩阵．因为对 $\mathbf{R}^m$ 中任意向量 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 都有 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X}>0$，即 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}>0$，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，于是齐次方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，因此，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=m$.

充分性 设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=m$．显然 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为对称矩阵．因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=m$，所以齐次方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 只有零解．于是当 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 时，一定有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，从而对 $\mathbf{R}^m$ 中任意向量 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，有

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}>0,$$

因此，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为正定矩阵.

30. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，并且 $\boldsymbol{A}^3-6\boldsymbol{A}^2+11\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$．证明 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ，则 λ 满足

$$\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0,$$

即

$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0,$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda\in\{1,2,3\}$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全部大于零，所以 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

31. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位矩阵．证明如果 $a>0$，那么 $a\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

证明 因为

$$(a\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=(a\boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=a\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},$$

所以$a\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$是对称矩阵.

对于$\mathbf{R}^n$中任意向量$\boldsymbol{X}\neq\mathbf{0}$，因为

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(a\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=a\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=a\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}>0,$$

所以$a\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$是正定的.