课程编号：A073003　　　　　　北京理工大学 2014-2015 学年第一学期

线性代数 B 试题 A 卷

一、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，求行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 3A^* \\ B & 0 \end{vmatrix}$ 的值。

二、（10 分）设矩阵 X 满足 $XA=B+2X$，其中 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

（1）证明：$A-2I$ 可逆；（2）求 X。

三、（10 分）已知平面上三条直线的方程

$$x-y+a=0,\ 2x+3y-1=0,\ x-ay-\frac{1}{2}=0$$

讨论 a 的取值与这三条直线相互位置之间的关系。

四、（10 分）已知

$\alpha_1=(1,2,3,-4)^T$，$\alpha_2=(2,3,-4,1)^T$，$\alpha_3=(2,-5,8,-3)^T$，$\alpha_4=(3,-4,1,2)^T$

（1）求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩和一个极大无关组;

（2）用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

五、（10 分）已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是向量空间 R^3 的一个基，$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$，$\beta_2=2\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3$，$\beta_3=3\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3$。

(1) 证明 β_1,β_2,β_3 为 R^3 的一个基;

(2) 求基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵;

(3) 求向量 $\gamma=\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3$ 关于基 β_1,β_2,β_3 的坐标。

六、（10 分）已知 $\alpha_1=(1,0,-1)$，$\alpha_2=(2,2,0)$，$\alpha_3=($[illegible]。求生成子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的一个标准正交基。

七、（10 分）设为 $\boldsymbol{A}$ 正交矩阵,且 $|\boldsymbol{A}|=-1$，求证 $\boldsymbol{\lambda}=-1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值。

八、（10 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_1x_2-4x_1x_3+5x_2^2-8x_2x_3+5x_3^2$

（1）用正交变换将它化为标准形并给出所用的正交变换；（2）该二次型是否正定？

九、（10 分）设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}\alpha\\2\gamma_1\\3\gamma_2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\beta\\\gamma_1\\\gamma_2\end{pmatrix}$,其中 $\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2$ 都是三维行向量，且

已知行列式 $|A|=18,|B|=2$，求 $|A-B|$。

十、（10 分）设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=A$, $\mathrm{r}(A)=r\quad(0<r\le n)$。

(1) 试确定 A 的特征值的取值范围；

(2) 证明 A 一定可以相似对角化；

(3) 求行列式 $|A-3I|$ 的值。