一．1. $[2f(a^x)\cdot f'(a^x)a^x\ln a+\dfrac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}]dx$

2. 12　　4

3. $-2^{n-1}\cos(2x+\dfrac{n\pi}{2})$

4. $\dfrac{5}{4\pi}$ m/min

5. -1　　$\dfrac{2}{3}$

二.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}}{\frac{1}{1+t^2}}=\sqrt{1+t^2}$$ ……………………………..(4 分)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{1}{1+t^2}}=t\sqrt{1+t^2}$$ ………………………………..(8 分)

三.

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}})^x=\lim_{x\to\infty}[(1+(\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}-1))^{\frac{1}{\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}-1}}]^{(\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}-1)x}$$ ……………(2 分)

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}-1)x}$$ …………………(4 分)

$$=e^{1+\lim\limits_{x\to\infty}(2^{\frac{1}{x}}-1)x}$$ ………………(6 分)

$$=e^{1+\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{x}\ln 2)\cdot x}=e^{1+\ln 2}=2e$$ …………………(8 分)

四. $$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x^2)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x}=0$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}x^2\sin\frac{1}{x}=0$$

由 $f(0+0)=f(0-0)=f(0)$ 得 $a=0$ …………………(3 分)

当 $x>0$ $f'(x)=\dfrac{\frac{2x}{1+x^2}\cdot x-\ln(1+x^2)}{x^2}=\dfrac{2x^2-(1+x^2)\ln(1+x^2)}{x^2(1+x^2)}$ ……...(2 分)

当 $x<0$ $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}+x^2\cos\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{-1}{x^2}=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$ ………....(7 分)

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\ln(1+x^2)}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}=1$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}x\sin\frac{1}{x}=0$$

$f'(0)$ 不存在 …………………………(9 分)

五. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}e^{\sin x}\dfrac{e^{x-\sin x}-1}{\ln(1+\tan^3 x)}$ ……………………..(1 分)

$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\sin x}\dfrac{e^{x-\sin x}-1}{x^3}$ ……………………..(3 分)

$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ ………………………(5 分)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$ ……………………..(7 分)

$=\dfrac{1}{6}$ ……………………….(8 分)

六. 将 $(1,-1)$ 代入 $y=ax^2+bx$ 得 $a+b=-1$ ………………..(1 分)

$xy^3=2y+1$ 两端对 x 求导得 $y^3+x3y^2\cdot\dfrac{dy}{dx}=2\dfrac{dy}{dx}$ ..……..(3 分)

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y^3}{3xy^2-2}$ $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{(1,-1)}=1$ ……..……..(5 分)

由 $y=ax^2+bx$ 得 $\dfrac{dy}{dx}=2ax+b$ $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{(1,-1)}=2a+b$ …………(6 分)

故 $2a+b=1$ ………………………(7 分)

解得 $a=2$ $b=-3$ ……………………….(9 分)

七. $y_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{27}>y_1$ 设 $y_n>y_{n-1}$

则有 $y_{n+1}-y_n=\frac{1}{3}(y_n^2-y_{n-1}^2)=\frac{1}{3}(y_n+y_{n-1})(y_n-y_{n-1})$

由定义可知 $y_n>0$，故 $y_{n+1}-y_n>0$ 所以 $\{y_n\}$ 单调增加 ……..(3 分)

已知 $0<y_1<1$ 设 $0<y_n<1$

则有 $y_{n+1}=\frac{1}{3}+\frac{y_n^2}{3}<\frac{1}{3}+\frac{1}{3}<1$ 所以 $\{y_n\}$ 有上界

故 $\lim\limits_{x\to\infty}y_n$ 存在 …………………….(6 分)

设 $\lim\limits_{x\to\infty}y_n=A$ 则 $\lim\limits_{x\to\infty}y_{n-1}=A$ 由 $y_n=\frac{1}{3}+\frac{y_{n-1}^2}{3}$ 得 $A=\frac{1}{3}+\frac{A^2}{3}$

解得 $A=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ 由于 $y_n<1$，应有 $A\le 1$ 故 $\lim\limits_{x\to\infty}y_n=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ……….(9 分)

八. 设运费为 y $y=(b-a\cdot c\tan\varphi)q+\sqrt{a^2+a^2\cdot c\tan^2\varphi}\,p$

$$=bq-aq\cdot c\tan\varphi+\frac{ap}{\sin\varphi} \quad ……………………….(3 分)$$

$$\frac{dy}{d\varphi}=aq\frac{1}{\sin^2\varphi}-ap\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \quad …………….(6 分)$$

令 $\frac{dy}{d\varphi}=0$ 得 $\varphi=\arccos\frac{q}{p}$ ……………….(8 分)

由问题的实际意义, …., 故当 $\varphi=\arccos\frac{q}{p}$ 时最经济 ………(9 分)

九 证明 1 设 $f(x)=x+\ln(1-x)-x\ln(1-x)$ …………………….(1 分)

$f'(x)=1+\frac{-1}{1-x}-\ln(1-x)+\frac{x}{1-x}=-\ln(1-x)$ ………………..(3 分)

令 $f'(x)=0$ 得 $x=0$ ………………..(4 分)

$f''(x)=\frac{1}{1-x}$ $f''(0)=1>0$ 故 $f(0)$ 是极小值也是最小值………..(7 分)

又 $f(0)=0$ 故 当 $x<1$ $f(x)\ge 0$

即 $x+\ln(1-x)-x\ln(1-x)\ge 0$

$$x+\ln(1-x)\geq x\ln(1-x)$$ …………………(9 分)

证明 2　设　$f(x)=x+\ln(1-x)-x\ln(1-x)$ …………………(1 分)

$$f'(x)=1+\frac{-1}{1-x}-\ln(1-x)+\frac{x}{1-x}=-\ln(1-x)$$ ………………..(3 分)

当 $0<x<1$　$f'(x)>0$　　故 $f'(x)$ 单调增加,

又　$f(0)=0$　故　$f(x)>0$ ………………..(6 分)

当 $x<0$　$f'(x)<0$　　因此 $f(x)$ 单调减少,

又 $f(0)=0$　$f(x)>0$ …………………….(8 分)

因此当 $x<1$　有　$f(x)\geq 0$

即　　$x+\ln(1-x)-x\ln(1-x)\geq 0$

$$x+\ln(1-x)\geq x\ln(1-x)$$ ……………(9 分)

十.　$\lim\limits_{x\to 1}y=\infty$　$\lim\limits_{x\to -1}y=\infty$　有垂直渐近线 $x=1$，$x=-1$ …………(1 分)

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1$　　$\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=0$　有斜渐近线　$y=x$ ……………(3 分)

$$y'=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$ ……………..(4 分)

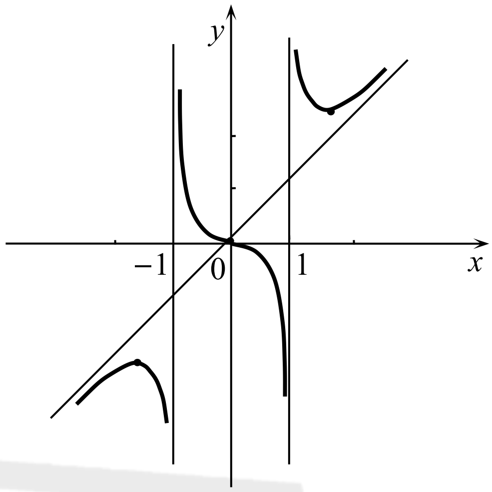
令 $y'=0$　得　$x=0$　$x=\pm\sqrt{3}$ ………………(6 分)

$$y''=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

令 $y''=0$　得　$x=0$ ……………(8 分)

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y'	+	0	−		−	0	−		−	0	+
y''	−		−		+	0	−		+		+
y		极大值 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$		间断		拐点 $(0,0)$		间断		极小值 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$	

………………(11 分)



…………………..(13 分)

十一. 令 $F(x)=x^2 f(x)$ ……………………(2 分)

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，

由于 $F(1)=f(1)=1>0$ $F(2)=4f(2)=-4<0$

根据零值定理，存在 $c\in(1,2)$，使 $F(c)=0$ ………………(5 分)

又 $F(0)=0$ 根据罗尔定理，$\exists\xi\in(0,c)\subset(0,2)$ 使 $F'(\xi)=0$

即 $2\xi f(\xi)+\xi^2 f'(\xi)=0$

$$f'(\xi)=-\frac{2f(\xi)}{\xi}.$$ ……………………(8 分)