课程编号：A073003　　　　　　北京理工大学 2014-2015 学年第一学期

线性代数 B 试题 A 卷

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，求行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 3\boldsymbol{A}^* \\ \boldsymbol{B} & 0 \end{vmatrix}$ 的值。

解

$$\begin{vmatrix} & 3A^* \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3\times 3}\left|3A^*\right|\left|B\right| \text{……………………………………5}$$

$$= -3^3\left|A\right|^2\left|B\right| \quad \text{………………………………7}$$

$$= -27\cdot(-1) \text{………………………………9}$$

$$= -27 \text{……………………………………10}$$

二、（10 分）设矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{X}$， 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

（1）证明：$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 可逆；（2）求 X。

解 (1) 由 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{X}$ 得 $X(A-2I)=B$

$$A-2I=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$\left|A-2I\right|=-1$，故 $A-2I$ 可逆。……………………4

(2) $X=B(A-2I)^{-1}$

而 $\qquad (A-2I)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}$

所以

$$X=B(A-2I)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4 & 3\\ 2 & -9 & -6\\ -1 & 8 & 5\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 10$$

三、（10 分）已知平面上三条直线的方程 $x-y+a=0, 2x+3y-1=0, x-ay-\frac{1}{2}=0$

讨论 a 的取值与这三条直线相互位置之间的关系。

解 $\qquad \overline{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -a\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & -a & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -a\\ 0 & 5 & 1+2a\\ 0 & 1-a & \frac{1}{2}+a\end{pmatrix}$

若 a=1, 上述矩阵已经化为阶梯形，此时，方程组无解，三条直线中第一条与第三条平行但不重合，与第二条相交。$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3$

若 $a\neq 1$，继续进行初等行变换，有 $\begin{pmatrix}1 & -1 & -a\\ 0 & 5 & 1+2a\\ 0 & 1-a & \frac{1}{2}+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -a\\ 0 & 5 & 1+2a\\ 0 & 0 & (2a+1)(2a+3)\end{pmatrix}$

当 $a\neq-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}$ 时，方程组无解，此时，三条直线两两相交，但是不交于一点；$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 6$

当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，方程组有唯一解，此时，三条直线交于一点 $(-\frac{1}{2},0)$，且任意两条不重合；$\cdots\cdots 8$

当 $a=-\frac{3}{2}$ 时，方程组有唯一解，此时，三条直线交于一点 $(\frac{11}{10},-\frac{2}{5})$，且后两条重合。$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 10$

四、（10 分）已知

$\alpha_1=(1,2,3,-4)^T$，$\alpha_2=(2,3,-4,1)^T$，$\alpha_3=(2,-5,8,-3)^T$，$\alpha_4=(3,-4,1,2)^T$（1）求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩和一个极大无关组；

（2）用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

解：

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]=\begin{pmatrix}1&2&2&3\\2&3&-5&-4\\3&-4&8&1\\-4&1&-3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ ……………………………5

所以秩为 3，……………………………………………………………………………7

$\alpha_4=-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.……………………………………………………………………10

五、(10 分) 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是向量空间 R^3 的一个基, $\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$， $\beta_2=2\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3$，$\beta_3=3\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3$。

(1) 证明 β_1,β_2,β_3 为 R^3 的一个基;

(2) 求基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵;

(3) 求向量 $\gamma=\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3$ 关于基 β_1,β_2,β_3 的坐标。

解:

（1）

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}$ 可逆，故 β_1,β_2,β_3 为 R^3 的一个基;……………………………………………4

（2）过度矩阵 $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}$ ……………………………………………………7

（3）坐标

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\6.5\\-2\end{bmatrix}$$

……………………………………………………10

六、(10 分) 已知 $\alpha_1=(1,0,-1)$, $\alpha_2=(2,2,0)$, $\alpha_3=(0,1,1)$。求生成子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的一个标准正交基。

解: $$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 α_1, α_2 是 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的一个基。……………………………………………4

取

$\beta_1=\alpha_1=(1,0,-1)$

$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,2,1)$ ……………………………………………………………8

单位化

$\gamma_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$

$\gamma_2=\dfrac{1}{2}(1,2,1)$

为成生子空间的一组基。……………………………………………………………10

七、（10 分）设为 A 正交矩阵,且 $|A|=-1$，求证 $\lambda=-1$ 为的 A 一个特征值。

证明：因为

$$|A+I|=|A+AA^T|$$

$$=|A||I+A^T|$$ ……………………………………………4

$$=-|I^T+A^T|$$

$$=-|A+I|,$$

所以

$$|A+I|=0$$ ……………………………………………8

所以 $\lambda=-1$ 为的 A 一个特征值。……………………………………………10

八、

解：$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 2 & 4 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$

所以 $\lambda=1,\lambda=10$ ……………………………………………………………3

对 $\lambda=1$ 特征方程组为

$$\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -4 & 4\\ 2 & 4 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

解之得 $X_1=(-2,1,0)^T,X_2=(2,0,1)^T$

正交单位化

$\xi_1=(-2,1,0)^T,\xi_2=(\frac{2}{5},\frac{4}{5},1)^T$

$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)^T,\xi_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}(2,4,5)^T$

对 $\lambda=10$ 特征方程组为

$$\begin{pmatrix}8&-2&2\\-2&5&4\\2&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

解之得 $X_3=(1,2,-2)^T$

单位化 $\eta_3=\frac{1}{3}(1,2,-2)^T$ ……………………………………………………………………6

令

$$Q=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{2}{3\sqrt{5}}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{3\sqrt{5}}&\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3\sqrt{5}}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

则 $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$ ……………………………………………………………………………8

(2)由于特征值全部大于零，所以二次型正定。……………………………………………10

九、（10 分）设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}\alpha\\2\gamma_1\\3\gamma_2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}\beta\\\gamma_1\\\gamma_2\end{pmatrix}$，其中 $\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2$ 都是三维行向量，且已知行列式 $|A|=18,|B|=2$，求 $|A-B|$。

解：

$$|A-B|=\begin{vmatrix}\alpha-\beta\\\gamma_1\\2\gamma_2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}\alpha-\beta\\\gamma_1\\\gamma_2\end{vmatrix}$$ ……………………………………4

所以

$$|A-B|=2\begin{vmatrix}\alpha\\\gamma_1\\\gamma_2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}\beta\\\gamma_1\\\gamma_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha\\2\gamma_1\\\gamma_2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}\beta\\\gamma_1\\\gamma_2\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}\alpha\\2\gamma_1\\3\gamma_2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}\beta\\\gamma_1\\\gamma_2\end{vmatrix}=2$$ ……………………………………10

十、（10 分）设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=A,\quad r(A)=r\quad(0<r\le n)$。

(1) 试确定 A 的特征值的取值范围；

(2) 证明 A 一定可以相似对角化；

(3) 求行列式$\left|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}\right|$的值。

解：（1）设 A 的特征值为λ，由$A^2=A$，得$\lambda^2-\lambda=0$，所以λ=1 或λ=0……………3

(2)由 $\mathrm{r}(A)=r$，得$\lambda=0$的几何重数为$n-r$.

又由$A^2=A$，即$-A(I-A)=0$，得$r(A)+r(I-A)\le n$

再由$A+(I-A)=I$，得$r(A)+r(I-A)\ge n$

所以$r(A)+r(I-A)=n$，因此得$\lambda=1$的几何重数为r.

矩阵 A 的两个互异特征值的几何重数之和等于 n，所以 A 可以对角化。…………………7

(3) $\left|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}\right|=(0-3)^{n-r}\cdot(1-3)^{r}=(-3)^{n-r}\cdot(-2)^{r}$ ……………………………………………10