课程编号: A073003

线性代数(B)试题 A 卷

班级 ______ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

题 号	_	1 1	111	四	五.	六	七	八	九	+	总分
得 分											
签 名											

一、(10分) 已知
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, 求行列式 $\begin{vmatrix} A^* & 0 \\ 0 & 2B \end{vmatrix}$ 的值。

二、(10 分) 已知矩阵
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
, 矩阵 X 满足 $A^{-1}XA = 2A + XA$, 求 X 。

三、(10分)对下列线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$$

试讨论: 当a取何值时,它有唯一解?无解?有无穷多解?并在有无穷多解时求其通解。 (用导出组的基础解系表示通解)

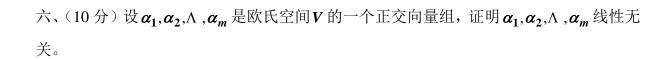
四、(10分)已知

$$\alpha_1=(1,1,1), \ \alpha_2=(1,1,0), \ \alpha_3=(1,0,0), \ \alpha_4=(1,2,-3)$$

- (1) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩和一个极大无关组;
- (2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

五、(10 分)已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是向量空间 R^3 的一个基, $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_3=\alpha_3$ 。

- (1) 证明 β_1 , β_2 , β_3 为 R^3 的一个基;
- (2) 求基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵;
- (3) 求向量 $\gamma = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3$ 关于基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的坐标。



七、 $(10 \, \text{分})$ 已知线性方程组AX = 0 的通解为 $k_1(1,0,0)^T + k_2(2,1,0)^T$,其中 k_1,k_2 为任意常数,求此方程组的解空间的一个标准正交基。

八、(10分) 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 。

- (1) 用正交变换将它化为标准形,并给出所用的正交变换;
- (2) 判断二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是否正定。

九、(10 分) 已知 \boldsymbol{A} 相似于对角矩阵 $\operatorname{diag}(\boldsymbol{1},-\boldsymbol{1},\boldsymbol{0})$ 。

- (1) 求 $A^2 I$ 的所有特征值;
- (2) 证明 $A^2 I$ 为不可逆矩阵。

十、(10分)设n阶矩阵A满足 $A^2 = A$, r(A) = r ($0 < r \le n$)。

- (1) 试确定A的特征值的取值范围;
- (2) 证明 A 一定可以相似对角化;
- (3) 求行列式|A-2I|的值。