2012 年线性代数 A 期末考试答案

一 解

$$\left|\frac{1}{3}A^* + 2I\right| = \left|\frac{1}{3}|A|A^{-1} + 2AA^{-1}\right| \text{..4分}$$

$$= \left|2A^{-1} + 2AA^{-1}\right| \text{...6分}$$

$$= 2^3\left|A^{-1}\right|\left|I + A\right| \text{..8分}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 2\cdot 4\cdot 3$$

$$= 32 \text{...10分}$$

二、由 $AX = A + 2X$ 得

$$X = 2(I - A)^{-1}A \text{ ....4 分}$$

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ ....6 分}$$

所以

$$X = \begin{pmatrix} -6 & 10 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \\ -4 & 10 & 0 \end{pmatrix} \text{ ....10 分}$$

三 解

（1）令 $k_1 + k_2(1+2x) + k_3(1+2x+3x^2) + k_4(1+2x+3x^2+4x^3) = 0$

可得

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) + 2(k_2 + k_3 + k_4)x + 3(k_3 + k_4)x^2 + (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)x^3 = 0$$

从而 $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0, k_4 = 0$ ....4 分

(2)过渡矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ....7 分

(3) $\boldsymbol{h(x) = 1 - x - x^2 + x^3}$ 在后一个基下的坐标为

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&3&3&3\\0&0&0&4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{4}\\1&0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{6}\\-\frac{7}{12}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$ ………………..10 分

四　解

$$\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3,\quad \alpha_1,\alpha_2$是一个极大无关组………………….…...5 分

取

$\beta_1=\alpha_1,$

$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}=(1,2,1)^T$

则

$\eta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T,$

$\eta_2=\dfrac{1}{2}(1,2,1)^T$

为一组标准正交基……......................................……………….…..10 分

五、解

(1) A 的初等因子为

$$\left(\lambda+1\right)^2,(\lambda-1),\quad \lambda+2$$ ……………………………………..4 分

设 $P=[X_1,X_2,X_3,X_4]$则 $AP=P\Lambda$

即

$$[AX_1, AX_2, AX_3, AX_4] = [X_1, X_2, X_3, X_4]\begin{pmatrix} -1 & 1 & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -2 \end{pmatrix}$$

$$AX_1 = (-1)X_1, AX_2 = X_1 - X_2, AX_3 = X_3, AX_4 = -2X_4$$

所以 X_1, X_3, X_4 为 A 的特征向量 ……………………………………….…….10 分

六、(1) 设有多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$, 则

$$\begin{aligned}
\sigma\left(k_1 f(x) + k_2 g(x)\right) &= \sigma\left(\left(k_1a_0 + k_2b_0\right) + (k_1a_1 + k_2b_1)x + (k_1a_2 + k_2b_2)x^2 + (k_1a_3 + k_2b_3)x^3\right) \\
&= (k_1a_3 + k_2b_3) - \left(k_1a_0 + k_2b_0\right) + (k_1a_2 + k_2b_2)x + \left(k_1a_0 + k_2b_0 + k_1a_1 + k_2b_1\right)x^3 \\
&= k_1(a_3 - a_0) + k_2(b_3 - b_0) + k_1a_2x + k_2b_2x + k_1(a_0 + a_1)x^3 + k_2\left(b_0 + b_1\right)x^3 \\
&= k_1[a_3 - a_0 + a_2x + (a_0 + a_1)x^3] + k_2[b_3 - b_0 + k_2b_2x + k_2\left(b_0 + b_1\right)x^3] \\
&= k_1\sigma\left(f(x)\right) + k_2\sigma\left(g(x)\right)
\end{aligned}$$

.............................……………………4 分

(2)由于

$$\sigma(1) = -1 + x^3, \sigma(x) = x^3, \sigma\left(x^2\right) = x, \sigma\left(x^3\right) = 1$$

故矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ……………………………......………7 分

由于 $|A| = 0$，故 σ 不可逆。…………………………………………...….…...…10 分

七、

证 只需证明：$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$

考虑齐次线性方程组

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0} \qquad ①$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0} \qquad ②$$

任取方程组①的一个解 $\boldsymbol{X}_1$，则 $\boldsymbol{AX}_1=\boldsymbol{0}$. 此式两边同时左乘 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}_1=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$$

所以，$\boldsymbol{X}_1$ 也是方程组②的解. 反之，任取方程组②的一个解 $\boldsymbol{X}_2$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}_2=\boldsymbol{0}$. 此式两边同时左乘 $\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}$，得

$$\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}_2=(\boldsymbol{AX}_2)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AX}_2)=\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$$

根据例 1.1.20，可得 $\boldsymbol{AX}_2=\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{X}_2$ 也是方程组①的解. ……………6 分

综上所述，方程组①与方程组②同解. 若方程组①、②都只有零解，则显然 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=n$. 否则，两个齐次方程组有相同的基础解系. 根据定理 2.3.2，可得

$$n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$$

于是，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$. ……………10 分

八、解：设λ为对应的特征值$A\xi=\lambda\xi$，即

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & b & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

所以$\lambda=-1,a=-3,b=0$……………………………………………………………………………………4 分

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -5 & \lambda+3 & -3\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3$$

所以$\lambda=-1$是三重特征值，但$r(\lambda I-A)\neq 0$，故 A 不可对角化。……….10 分

九　解

（1）$A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$　$\Delta_1=a, \Delta_2=\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}=a^2-1, \Delta_3=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+2)(a-1)$

$\Delta_2>0 \Rightarrow a<-1$,或　$a>1$,　　$\Delta_3>0 \Rightarrow$　$a>1$，或　$a<-2$，

所以 A 正定的范围是 $a>1$，或　$a<-2$。

（2）　$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)$

特征值为 $\lambda_1=1$（二重），$\lambda_2=4$。……………………………………………4 分

当 $\lambda_1=1$ 时，$(\lambda I-A)=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

相应的特征向量为 $\alpha_1=(-1,1,0)$, $\alpha_2=(-1,0,1)$

正交化得 $\beta_1=(-1, 1, 0)$，$\beta_2=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}, 1\right)$,

单位化 $\gamma_1=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$，$\gamma_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

$\lambda=4$ 时，$(\lambda I-A)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

特征向量为 $\alpha_3=(1,1,1)$，单位化为 $\gamma_3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$………………8 分

所以取 $Q=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

令 $X=QY$, 二次型化为 $f=y_1^2+y_2^2+4y_3^2$……………………………….……..10 分

十 令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，显然$P$可逆。记$\Lambda=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则依题意有 $AP=P\Lambda$。

于是有$A=P\Lambda P^{-1}$，从而可得$|A|=1$,即A可逆。…………………………4 分

由$A\alpha_1=\alpha_1, A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2, A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$ 知

$$A^{-1}\alpha_1=\alpha_1, A^{-1}(\alpha_1-\alpha_2)=2\alpha_1-\alpha_2,\quad A^{-1}\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3.$$

则$A^{-1}(\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3)\Lambda$,令$Q=(\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3)$则$|Q|$=-$|\mathrm{P}|\neq 0$，从而其可逆且

$$A^{-1}=Q\Lambda Q^{-1}$$ …………………………………....8 分

故A与A^{-1}均与Λ相似，……………………………………………………10 分