课程编号：A073122　　　　　　北京理工大学 2010-2011 学年第一学期

线性代数 A 试题 A 卷

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{*}+\boldsymbol{A}^{-1}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{2}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{bmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$ 。

二、（10 分）已知方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = p \\ qx_1 + 2x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

有解，且其导出组基础解系有一个向量。（1）求 p,q 的值；（2）求方程组的一般解。（用导出组的基础解系表示通解）

三、（10 分）在 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 中，令 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(1) 证明 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$ 为 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的一个基；

(2) 求自然基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$ 的过渡矩阵；

(3) 求 $\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$ 下的坐标。

四、（10 分）已知$\boldsymbol{\alpha_1}=(\mathbf{-1,0,1})$，$\boldsymbol{\alpha_2}=(\mathbf{2,2,0})$，$\boldsymbol{\alpha_3}=(\mathbf{0,1,1})$。

(1) 求向量组$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}$的一个极大无关组；

(2) 求生成子空间$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3})$的一个标准正交基。

五、（10 分）设 5 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子为 $\boldsymbol{\lambda+1},\ (\boldsymbol{\lambda-2})^{2},\ \boldsymbol{\lambda}^{2}$。

(1) 试写出 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形；(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

六、（10 分）在 $\boldsymbol{F[x]_4}$ 中定义线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$：$\boldsymbol{\sigma[f(x)]=f'(x)}$。求 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\boldsymbol{1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3}$ 下的矩阵。

七、（10 分）证明：$\boldsymbol{n}$阶方阵$\boldsymbol{A}$可相似对角化的充分必要条件是$\boldsymbol{A}$有$\boldsymbol{n}$个线性无关的特征向量。

八、（10 分）已知实二次型$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$经过正交变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$化为$\boldsymbol{y}_1^2+2\boldsymbol{y}_2^2$，

其中$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)^T,\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{y}_3)^T$。

(1) 判断二次型$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)$是否正定；(2) 求行列式$|\boldsymbol{A}|$的值；

(3) 若$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}&\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\\\mathbf{0}&-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}&\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\end{pmatrix}$，求矩阵$\boldsymbol{A}$。

九、（10 分）设 $\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{a_{ij}}\right)$ 是 3 阶非零矩阵，且满足 $\boldsymbol{a_{ij}}=\boldsymbol{A_{ij}}\quad(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}=1,2,3)$，其中 $\boldsymbol{A_{ij}}$ 为 $\boldsymbol{a_{ij}}$ 的代数余子式。证明：$\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵。

十、（10 分）已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}$ 是线性无关的 3 元列向量组，满足

$\boldsymbol{A\alpha_1}=-\boldsymbol{\alpha_1}-3\boldsymbol{\alpha_2}-3\boldsymbol{\alpha_3}$， $\boldsymbol{A\alpha_2}=4\boldsymbol{\alpha_1}+4\boldsymbol{\alpha_2}+\boldsymbol{\alpha_3}$, $\boldsymbol{A\alpha_3}=-2\boldsymbol{\alpha_1}+3\boldsymbol{\alpha_3}$。

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量。