习题五

1. 求下列方阵的特征值和特征向量:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} 0 & -4 & -6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; (6) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

解 (1) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. 因为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -6 \\ -5 & \lambda-2 \end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda-28=(\lambda-7)(\lambda+4),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=7,\lambda_2=-4$.

当 $\lambda=7$ 时, 因为方程组 $(7\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵的简化阶梯形为 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 所以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是方程组 $(7\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. 因此, $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=7$ 的特征向量为 $k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 k_1 是任意非零常数.

当 $\lambda=-4$ 时, 因为方程组 $(-4\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵的简化阶梯形为 $\begin{pmatrix} 1 & 6/5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 所以 $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ 是方程组 $(-4\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. 因此, $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=-4$ 的特征向量为 $k_2\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$, 其中 k_2 是任意非零常数.

(2) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{pmatrix}$. 因为

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-0.5 & 0.6\\ -0.75 & \lambda-1.1\end{vmatrix}=\lambda^2-1.6\lambda+1$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0.8+0.6\mathrm{i}, \lambda_2=0.8-0.6\mathrm{i}.$

当 $\lambda_1=0.8+0.6\mathrm{i}$ 时，因为方程组 $(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵的简化阶梯形为 $\begin{pmatrix}1 & (2-4i)/5\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，所以 $\begin{pmatrix}-2+4i\\ 5\end{pmatrix}$ 是方程组 $(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系．因此，$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_1 的特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}-2+4i\\ 5\end{pmatrix}$，其中 k_1 是任意非零常数.

当 $\lambda_2=0.8-0.6\mathrm{i}$ 时，因为方程组 $(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵的简化阶梯形为 $\begin{pmatrix}1 & (2+4i)/5\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，所以 $\begin{pmatrix}-2-4i\\ 5\end{pmatrix}$ 是方程组 $(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系．因此，$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_2 的特征向量为 $k_2\begin{pmatrix}-2-4i\\ 5\end{pmatrix}$，其中 k_2 是任意非零常数.

(3) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix}$．因为

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -3\\ -2 & \lambda-1 & -3\\ -3 & -3 & \lambda-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -2 & -3\\ -1-\lambda & \lambda-1 & -3\\ 0 & -3 & \lambda-6\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1 & -2 & -3\\ -1 & \lambda-1 & -3\\ 0 & -3 & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & \lambda-3 & -6\\ 0 & -3 & \lambda-6\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)(\lambda^2-9\lambda)$$

$$=\lambda(\lambda+1)(\lambda-9),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=9.$

当 $\lambda=0$ 时，因为方程组 $-\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵的简化阶梯形为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，所

以$\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$是方程组$-\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系. 因此, $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值$\lambda=0$的特征向量为$k_1\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, 其中$k_1$是任意非零常数;

当 $\lambda=-1$ 时, 因为方程组$(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的系数矩阵的简化阶梯形为$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, 所以$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$是方程组$(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系. 因此, $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值$\lambda=-1$的特征向量为$k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, 其中$k_2$是任意非零常数;

当 $\lambda=9$ 时, 因为方程组$(9\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的系数矩阵的简化阶梯形为$\begin{pmatrix}1&1&-1/2\\0&1&-1/2\\0&0&0\end{pmatrix}$ 所以$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$是方程组$(9\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系. 因此, $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值$\lambda=9$的特征向量为$k_3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$,其中$k_3$是任意非零常数.

(4) 令$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-4&-6\\-1&0&-3\\1&2&5\end{pmatrix}$. 因为

$$
\begin{aligned}
|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|&=\begin{vmatrix}\lambda&4&6\\1&\lambda&3\\-1&-2&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&4&6\\1&\lambda&3\\0&\lambda-2&\lambda-2\end{vmatrix}\\
&=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda&4&6\\1&\lambda&3\\0&1&1\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda&-2&6\\1&\lambda-3&3\\0&0&1\end{vmatrix}\\
&=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda&-2\\1&\lambda-3\end{vmatrix}\\
&=(\lambda-2)(\lambda^2-3\lambda+2)\\
&=(\lambda-2)^2(\lambda-1),
\end{aligned}
$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=1.$

当 $\lambda=2$ 时，因为方程组 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵的简化阶梯形为 $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，所以$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$是方程组$(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系. 因此, $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值$\lambda=2$的特征向量为$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$，其中$k_1,k_2$是不同时为零的常数;

当 $\lambda=1$ 时，因为方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵的简化阶梯形为 $\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，所以$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$是方程组$(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系. 因此, $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值$\lambda=1$的特征向量为$k_3\boldsymbol{\xi}_3$，其中k_3是任意非零常数.

(5) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$. 因为

$$
\begin{aligned}
|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|&=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&1&1\\-1&1&\lambda-1&1\\-1&1&1&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1&-1\\0&\lambda-2&0&2-\lambda\\0&0&\lambda-2&2-\lambda\\-1&1&1&\lambda-1\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-2&-1\\0&\lambda-2&2-\lambda&2-\lambda\\0&0&0&2-\lambda\\-1&1&\lambda&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-2\\0&1&-1\\-1&1&\lambda\end{vmatrix}\\
&=(\lambda-2)^2\begin{vmatrix}\lambda-1&-3&-2\\0&0&-1\\-1&\lambda+1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2\begin{vmatrix}\lambda-1&-3\\-1&\lambda+1\end{vmatrix}\\
&=(\lambda-2)^2(\lambda^2-4)\\
&=(\lambda-2)^3(\lambda+2),
\end{aligned}
$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2,\lambda_4=-2.$

当 $\lambda=2$ 时，因为方程组 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵的简化阶梯形为 $\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，所以 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ 是方程组 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系．因此，$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3$，其中 k_1,k_2,k_3 是不同时为零的常数;

当 $\lambda=-2$ 时，因为方程组 $(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵的简化阶梯形为 $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，所以 $\xi_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ 是方程组 $(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系．因此，$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=-2$ 的特征向量为 $k_4\boldsymbol{\xi}_4$，其中 k_4 是任意非零常数.

(6) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-3&0&9\\0&3&1&-2\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$．因为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-5&3&0&-9\\0&\lambda-3&-1&2\\0&0&\lambda-2&0\\0&0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-3)(\lambda-5),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=3,\lambda_4=5$.

当 $\lambda=2$ 时，因为方程组 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵的简化阶梯形为 $\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，所以 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix}$ 是方程组 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系．因此，$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$，其中 k_1,k_2 是不同时为零的常数;

当 $\lambda=3$ 时，因为方程组 $(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵的简化阶梯形为

$\begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，所以$\xi_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$是方程组$(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系. 因此, $\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda=3$的特征向量为$k_3\boldsymbol{\xi}_3$，其中k_3是任意非零常数;

当$\lambda=5$时，因为方程组$(5\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的系数矩阵的简化阶梯形为

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，所以$\xi_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$是方程组$(5\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系. 因此, $\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda=5$的特征向量为$k_4\boldsymbol{\xi}_4$，其中k_4是任意非零常数.

2. 设 5 阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-2$，$\lambda_4=2$, $\lambda_5=3$. 求$\boldsymbol{A}$的对角元之和$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{55}$与$\boldsymbol{A}$的行列式$|\boldsymbol{A}|$.

解根据性质 5.1, 得到

$$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{55}=-2-2-2+2+3=-1;$$

$$|\boldsymbol{A}|=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot 2\cdot 3=-48.$$

3. 设 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & a \end{pmatrix}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=3$，$\lambda_3=12$.

(1) 求常数a;　　(2) 求$\boldsymbol{A}$的特征向量.

解 (1) 根据性质 5.1, 得到$7+7+a=3+3+12$, 于是$a=4$.

(2) 当$\lambda=3$时，因为方程组$(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的系数矩阵的简化阶梯形为

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，所以$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$是方程组$(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系. 因此$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda=3$的特征向量为$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$，其中$k_1, k_2$是不同时为零的常数;

当$\lambda=12$时，因为方程组$(12\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的系数矩阵的简化阶梯形为

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，所以$\xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$是方程组$(12\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系．因此，$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda=12$的特征向量为$k_3\xi_3$，其中$k_3$是任意非零常数.

4. 设ξ_1,ξ_2是方阵$\boldsymbol{A}$的属于不同特征值的特征向量，证明$\xi_1+\xi_2$不是$\boldsymbol{A}$的特征向量.

证明 设λ_1,λ_2是矩阵$\boldsymbol{A}$的两个不同的特征值，ξ_1,ξ_2是矩阵$\boldsymbol{A}$的分别属于λ_1,λ_2的特征向量．用反证法证明结论．假设$\xi_1+\xi_2$是$\boldsymbol{A}$的属于特征值λ的特征向量，那么

$$\boldsymbol{A}(\xi_1+\xi_2)=\lambda(\xi_1+\xi_2)=\lambda\xi_1+\lambda\xi_2. \tag{1}$$

又因为

$$\boldsymbol{A}(\xi_1+\xi_2)=\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2 \tag{2}$$

用等式(1)减去等式(2)，得到

$$(\lambda-\lambda_1)\xi_1+(\lambda-\lambda_2)\xi_2=0. \tag{3}$$

因为$\lambda_1\neq\lambda_2$，所以ξ_1,ξ_2线性无关，于是由等式(3)得到，$\lambda-\lambda_1=\lambda-\lambda_2=0$,从而$\lambda_1=\lambda_2$，与条件矛盾，因此$\xi_1+\xi_2$不是$\boldsymbol{A}$的特征向量.

5. 设λ是方阵$\boldsymbol{A}$的一个特征值，$\boldsymbol{X}$ 是$\boldsymbol{A}$的属于特征值λ的一个特征向量．求$f(\boldsymbol{A})=3\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I}$的一个特征值及相应的一个特征向量.

解 因为

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} &= (3\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I})\boldsymbol{X} \\ &= 3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+4\boldsymbol{X} \\ &= 3\lambda^2\boldsymbol{X}-2\lambda\boldsymbol{X}+4\boldsymbol{X} \\ &= (3\lambda^2-2\lambda+4)\boldsymbol{X}, \end{aligned}$$

所以$f(\boldsymbol{A})$的一个特征值为$f(\lambda)=3\lambda^2-2\lambda+4$，$\boldsymbol{X}$ 是$f(\boldsymbol{A})$的属于特征值$f(\lambda)$的一个特征向量.

6. 设$\boldsymbol{A}$是正交矩阵，并且$|\boldsymbol{A}|=-1$．证明$\lambda=-1$是$\boldsymbol{A}$的一个特征值.

证明 因为

$$|-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=|-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{I})|=|\boldsymbol{A}||(-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}|=-|-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|,$$

所以

$$|-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0.$$

因此，$\lambda=-1$是$\boldsymbol{A}$的一个特征值.

7. 设方阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$.

(1) 确定$\boldsymbol{A}$的特征值的取值范围;

(2) 用(1)的结果证明$3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$是可逆矩阵.

解 (1) 设λ是$\boldsymbol{A}$的一个特征值. 因为$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$，所以$\lambda^2=1$，于是$\lambda=\pm 1$，因此，$\boldsymbol{A}$的特征值的取值范围是$\{-1,1\}$;

(2) 根据(1)的结果，3 不是$\boldsymbol{A}$的特征值，于是$|3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|\neq 0$，因此$3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$是可逆矩阵.

8. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&5&2\\3&6&4\end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$的特征值与特征向量.

解 因为

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|&=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&-1\\-2&\lambda-5&-2\\-3&-6&\lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&-1\\-2\lambda+2&\lambda-1&0\\-3&-6&\lambda-4\end{vmatrix}\\&=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&-1\\-2&1&0\\-3&-6&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-6&-2&-1\\0&1&0\\-15&-6&\lambda-4\end{vmatrix}\\&=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-6&-1\\-15&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-10\lambda+9)\\&=(\lambda-1)^2(\lambda-9),\end{aligned}$$

所以$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=9$.

当$\lambda=1$时，因为方程组$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的系数矩阵的简化阶梯形为$\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

所以 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ 是方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. 因此, ξ_1,ξ_2 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=1$ 的两个线性无关的特征向量;

当 $\lambda=9$ 时, 因为方程组 $(9\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵的简化阶梯形为 $\begin{pmatrix}1&0&-1/3\\0&1&-2/3\\0&0&0\end{pmatrix}$, 所以 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ 是方程组 $(9\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. 因此 ξ_3 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=9$ 的一个特征向量;

因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=9$, 所以 $|\boldsymbol{A}|=9$ 于是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值为 $\lambda_1^*=\lambda_2^*=9,\lambda_3^*=1$. $\boldsymbol{A}^*$ 的属于特征值 9 的特征向量为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$, 其中 k_1,k_2 为不同时为零的数, $\boldsymbol{A}^*$ 的属于特征值 1 的特征向量为 $k_3\xi_3$, 其中 k_3 为任意非零常数.

9. 证明奇数阶反对称矩阵必有零特征值.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $2t+1$ 阶反对称矩阵. 因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$, 所以

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|-\boldsymbol{A}|=(-1)^{2t+1}|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|.$$

于是, $|\boldsymbol{A}|=0$, 因此, 矩阵必有零特征值.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 判断下列命题的真假, 并且说明理由:

(1) 如果对某个向量有 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$, 那么 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不可逆的充分必要条件是零为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值;

(3) 常数 c 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的充分必要条件是 $(c\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 有非零解;

(4) 如果存在常数 λ, 使得 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$, 那么 $\boldsymbol{X}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量;

(5) 如果 ξ_1,ξ_2 是 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量, 那么它们一定属于 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值;

(6) 如果 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$, 那么 $\boldsymbol{A}$ 只有零特征值.

解 (1) 错误. 结论成立需有 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 的条件.

(2) 正确. $\boldsymbol{A}$ 不可逆当且仅当 $|\boldsymbol{A}|=0$, 当且仅当零是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

(3) 正确. 这是特征值的等价命题.

(4) 错误. 结论成立需有 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 的条件.

(5) 错误. 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&5&2\\3&6&4\end{pmatrix}$, 那么 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量.

(6) 正确.

11. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}7&2\\-4&1\end{pmatrix},\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$.

(1) 证明 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}5&0\\0&3\end{pmatrix}$;

(2) 对正整数 n, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

解 (1) 因为 $\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$, 所以

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&2\\-4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0\\0&3\end{pmatrix}.$$

(2) 因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}5&0\\0&3\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$, 所以

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0\\0&3\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot5^n-3^n&5^n-3^n\\-2\cdot5^n+2\cdot3^n&-5^n+2\cdot3^n\end{pmatrix}.$$

12. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. 当 a, b 满足什么条件时, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似?

解 如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 那么 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 一定有相同的特征值. 因为 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 2, 1, 0, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也一定是 2, 1, 0. 因此

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{vmatrix}=0,\tag{1}$$

并且

$$|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&-a&-1\\-a&0&-b\\-1&-b&0\end{vmatrix}=0.\tag{2}$$

由等式(1)解得 $a=b$. 将 $a=b$ 代入等式(2)，得到 $a=0$. 因此，当 $a=b=0$ 时 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

14. 判断下列矩阵中，哪些可以相似对角化，并且对可以相似对角化的矩阵，求出相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 以及相似对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

解 (1) 根据 1（1）, 因为矩阵的特征值为 $\lambda_1=7,\lambda_2=-4$, 所以矩阵可以相似对角化. 矩阵的属于特征值 $\lambda_1=7$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，属于特征值 $\lambda_2=-4$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$，令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(7,4)$，那么 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

(2) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 因为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^3$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$. 因为 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$， 所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\neq 0$，于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda=1$ 的几何重数 $3-\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})<3$. 因此， $\boldsymbol{A}$ 不可以相似对角化.

(3) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. 因为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -4 & -3 \\ 4 & \lambda+6 & 3 \\ -3 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda+2 & \lambda+2 & 0 \\ 4 & \lambda+6 & 3 \\ -3 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 4 & \lambda+6 & 3\\ -3 & -3 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 4 & \lambda+6 & 3\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}\\
&=(\lambda-1)(\lambda+2)^2,
\end{aligned}
$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=1$.

当 $\lambda_2=-2$ 时，因为 $-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的简化阶梯形是 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，所以 $\mathrm{r}(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=2$，

于是特征值 $\lambda=-2$ 的几何重数 $3-\mathrm{r}(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})<2$．因此，$\boldsymbol{A}$ 不可以相似对角化.

(4) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ -3 & -5 & -3\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}$．因为

$$
\begin{aligned}
|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|&=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -3 & -3\\ 3 & \lambda+5 & 3\\ -3 & -3 & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+2 & \lambda+2 & 0\\ 3 & \lambda+5 & 3\\ -3 & -3 & \lambda-1\end{vmatrix}\\
&=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & \lambda+5 & 3\\ -3 & -3 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & \lambda+5 & 3\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}\\
&=(\lambda-1)(\lambda+2)^2,
\end{aligned}
$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=1$.

当 $\lambda_2=-2$ 时，因为 $-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的简化阶梯形是 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，所以 $\mathrm{r}(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=1$，

于是特征值 $\lambda=-2$ 的几何重数等于 1．因此，$\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化.

进一步可以求得 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=-2$ 的两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，属于特征值 $\lambda=1$ 的一个特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$．令

$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\boldsymbol{\varLambda}=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & -2 & \\ & & 1\end{pmatrix}$，那么 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\varLambda}$.

14. 已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\a&1&0&0\\2&b&2&0\\2&3&c&2\end{pmatrix}$，确定 a, b, c 的值，使得$\boldsymbol{A}$可以相似对角化.

解 因为$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0&0\\-a&\lambda-1&0&0\\-2&-b&\lambda-2&0\\-2&-3&-c&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$,所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=\lambda_4=2$. 当且仅当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的几何重数等于它们的代数重数，即

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-a&0&0&0\\-2&-b&-1&0\\-2&-3&-c&-1\end{pmatrix}=2 \qquad (1)$$

和

$$\mathrm{r}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-a&1&0&0\\-2&-b&0&0\\-2&-3&-c&0\end{pmatrix}=2 \qquad (2)$$

同时成立时，$\boldsymbol{A}$可以相似对角化. 因为等式(1)(2)成立当且仅当$a=c=0$，所以当$a=c=0$，b为任意常数时，矩阵$\boldsymbol{A}$可以相似对角化.

15. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&5\\0&1&2\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&1&0\\7&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，证明$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$是不相似的.

证明 因为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&0\\-7&\lambda-3&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda-2),$$

所以$\lambda=1$是矩阵$\boldsymbol{B}$的一个特征值. 因为

$$|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&-2&-5\\0&-1&-1\end{vmatrix}\neq 0,$$

所以$\lambda=1$不是矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值. 因此$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$是不相似的.

16. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&-6&2\end{pmatrix}$.

(1) 证明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都可以相似对角化, 并且相似于同一个对角矩阵;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

解 (1) 因为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda&-1\\0&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1),$$

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=-1, \lambda_3=2$. 因为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda+1&0\\0&6&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1),$$

所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=-1, \lambda_3=2$.

因为矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 有 3 个互不相等的特征值, 所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都可以相似对角化. 因为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的特征值相同, 所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似于同一个对角矩阵 $\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}$.

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $\lambda_1=1, \lambda_2=-1, \lambda_3=2$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$, 于是 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{AP}_1=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}$.

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的分别属于特征值 $\lambda_1=1, \lambda_2=-1, \lambda_3=2$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

令 $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}$．于是，令

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\1&1&0\\1&-1&0\end{pmatrix},$$

因此 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

17. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 2 阶实矩阵．如果 $\boldsymbol{A}$ 的行列式小于零，证明：$\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值为 λ_1,λ_2．因为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式小于零，所以 $\lambda_1\lambda_2<0$，于是 $\lambda_1\neq\lambda_2$．因此，根据定理 5. 3 的推论，$\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化.

18. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&&\\&y&\\&&-1\end{pmatrix}$ 是相似的.

(1) 求 x,y 的值;

(2) 求行列式 $|2\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{I}|$ 的值.

解：(1) 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的行列式和特征值．因为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{vmatrix}=-2,\quad |\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}2&&\\&y&\\&&-1\end{vmatrix}=-2y,$$

所以 $-2y=-2$，即 $y=1$．根据特征 5.1，可得，$2+x=2+1-1$，于是 $x=0$．因此，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似时，$x=0,y=1$.

(2) 因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,1,-1$，所以

$$|2\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{I}|=|2\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{-1}(2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})|=|\boldsymbol{A}^{-1}||2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}|=-\frac{1}{2}\cdot 12=-6.$$

19. 已知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$．求 $\boldsymbol{A}$ 以及 $\boldsymbol{A}^6$.

解 因为 $|\boldsymbol{P}|=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$，所以 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵．因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$，所以

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$，于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}.$$

并且

$$\boldsymbol{A}^6=\boldsymbol{PB}^6\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\-2&1&1\end{pmatrix}.$$

20. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathbf{F}$ 上的 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\mathbf{F}^n$ 中的线性无关的向量组，满足

$$\boldsymbol{A\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A\alpha}_2=4\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A\alpha}_3=-2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量(表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合).

解 根据条件 $\boldsymbol{A\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A\alpha}_2=4\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A\alpha}_3=-2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_3$,我们得到

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}-1&4&-2\\-3&4&0\\-3&1&3\end{pmatrix},$$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&4&-2\\-3&4&0\\-3&1&3\end{pmatrix}$. 那么 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵，并且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}.. \qquad (1)$$

因此， $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是相似的.

(1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是相似的，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值. 又因为

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -4 & 2\\ 3 & \lambda-4 & 0\\ 3 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1),$$

所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 1,2,3. 因此，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,2,3.

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 λ 的一个特征向量，那么 $\boldsymbol{B\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$. 因为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，所以

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha},$$

即

$$\boldsymbol{AP\alpha}=\lambda\boldsymbol{P\alpha}.$$

因为 $\boldsymbol{P\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{P\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量.

当 $\lambda=1$ 时，求解方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得到矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 1 一个特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{P\xi}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的一个特征向量.

当 $\lambda=2$ 时，求解方程组 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得到矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 2 一个特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{P\xi}_2=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}=2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 2 的一个特征向量.

当 $\lambda=3$ 时，求解方程组 $(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得到矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 3 一个特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}.$$

于是$\boldsymbol{\eta}_3=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\xi}_3=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$是$\boldsymbol{A}$的属于特征值 3 的一个特征向量.

因此, 矩阵$\boldsymbol{A}$的属于特征值1的全部特征向量为$k_1\boldsymbol{\eta}_1=k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$, 其中$k_1$是任意非零常数;属于特征值 2 的全部特征向量为$k_2\boldsymbol{\eta}_2=k_2(2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3)$, 其中$k_2$是任意非零常数;属于特征值$3$的全部特征向量为$k_3\boldsymbol{\eta}_3=k_3(\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3)$, 其中$k_3$是任意非零常数.

21. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&2\\a&1&a-2\\-3&0&4\end{pmatrix}$有 3 个线性无关的特征向量.

(1) 求a的值;

(2) 求$\boldsymbol{A}^n$.

解 (1) 因为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1&0&-2\\-a&\lambda-1&2-a\\3&0&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2),$$

所以$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2.$

当$\lambda=1$时, 方程组$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的系数矩阵为$\begin{pmatrix}2&0&-2\\-a&0&2-a\\-3&0&-3\end{pmatrix}$. 因为$\boldsymbol{A}$有三个线性无关的特征向量, 所以$\boldsymbol{A}$可以对角化, 于是, $\mathrm{r}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right)=1$, 因此$a=1$.

(2) 计算可得$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$是$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda=1$的两个线性无关的特

征向量，$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$是属于特征值$\lambda=2$的一个特征向量．令$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&-1\\0&1&3\end{pmatrix}$，那么$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$．因此

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2^n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}3-2^{n+1}&0&-1+2^{n+1}\\-1+2^n&1&1-2^n\\3-3\cdot2^n&0&-1+3\cdot2^n\end{pmatrix}.$$

22. 对下列实对称矩阵，求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$为对角矩阵.

(1) $\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\1&1&-1&0\\0&-1&1&1\\-1&0&1&1\end{pmatrix}$.

解 (1) 令$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$．因为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\2&4&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\0&\lambda-1&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\0&1&1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2&-4&2\\-2&\lambda-9&4\\0&0&1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-10),$$

所以$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=10$.

当$\lambda=1$时，因为$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\-2&-4&4\\2&4&-4\end{pmatrix}$的简化阶梯形为$\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，所以

$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$是方程组$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系.

当$\lambda=10$时，因为$10\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}8&-2&2\\-2&5&4\\2&4&5\end{pmatrix}$的简化阶梯形为$\begin{pmatrix}1&0&1/2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，所以$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$是方程组$(10\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系.

将$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$正交化，得到

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=-\frac{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2=\frac{4}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}.$$

将$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\xi}_3$规范化，得到

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}.$$

令

$$Q=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}&2/3\sqrt{5}&1/3\\1/\sqrt{5}&4/3\sqrt{5}&2/3\\0&5/3\sqrt{5}&-2/3\end{pmatrix},$$

那么

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&10\end{pmatrix}.$$

(2) 令$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}$. 因为

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-4 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-6 & -1 & -1\\ \lambda-6 & \lambda-4 & -1\\ \lambda-6 & -1 & \lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-6)\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & \lambda-4 & -1\\ 1 & -1 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-6)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & \lambda-3 & 0\\ 1 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-6)(\lambda-3)^2,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=6$.

当 $\lambda=3$ 时，因为 $3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ 的简化阶梯形为 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，所以

$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ 是 $(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

当 $\lambda=6$ 时，因为 $6\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ 的简化阶梯形为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，所以

$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ 是 $(6\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 正交化，得到

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=-\frac{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\ -1/2\\ 1\end{pmatrix}.$$

将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 规范化，得到

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 2\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

令

$$Q=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix},$$

那么

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & 6\end{pmatrix}.$$

(3) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$. 因为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-1 & 2\\ 0 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}+\lambda\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2\\ 2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$
$$=\lambda^3-3\lambda^2-6\lambda+8$$
$$=(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-4),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2,\lambda=4$.

当 $\lambda=1$ 时，因为 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 的简化阶梯形为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1/2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，所以

$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$ 是 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

当 $\lambda=-2$ 时，因为 $-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 0\\ 2 & -3 & 2\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}$ 的简化阶梯形为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

所以 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$ 是 $(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

当 $\lambda=4$ 时，因为 $4\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$ 的简化阶梯形为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，所以

$\boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$是$(4\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系.

将$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$规范化，得到

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

令

$$Q = (\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3) = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

那么

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}.$$

(4) 令$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 因为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-3)(\lambda+1),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=3,\lambda_4=-1$.

当 $\lambda=1$ 时，因为 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&0&1\\-1&0&1&0\\0&1&0&-1\\1&0&-1&0\end{pmatrix}$ 的简化阶梯形为 $\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

所以 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ 是 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

当 $\lambda=3$ 时，因为 $3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&0&1\\-1&2&1&0\\0&1&2&-1\\1&0&-1&2\end{pmatrix}$ 的简化阶梯形为 $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

所以 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ 是 $(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

当 $\lambda=-1$ 时，因为 $-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&-1&0\\-1&-2&1\\0&1&-\ 2-\\1&0&-\ 1-\end{pmatrix}$ 的简化阶梯形为

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1-\\0&0&0\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{\xi}_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ 是 $(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_4$ 规范化，得到

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

令

$$Q=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2\\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/2 & -1/2\\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/2\end{pmatrix},$$

那么

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 3 & \\ & & & -1\end{pmatrix}.$$

23. 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶实对称矩阵，其特征值为 $1, 0, -2$，$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 和 -2 的特征向量分别是 $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}$.

(1) 求 a 的值;

(2) 求方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

解 因为 $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}$ 是3阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 1 和 -2 的特征向量，所以正交，于是 $1-2+a=0$，因此 $a=1$;

(2) 由特征值的定义，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解就是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=0$ 的全部特征向量. 设 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=0$ 的特征向量为 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则有

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0\\ x_1-\ x_2+x_3=0.\end{cases}\qquad(1)$$

$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ 是方程组(1)的一个基础解系，因此，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $c\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，其中 c 为任意常数.