线性代数 A 试题 A 卷

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{*}+\boldsymbol{A}^{-1}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$。

二、（10 分）已知方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = p \\ qx_1 + 2x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

有解，且其导出组基础解系有一个向量。（1）求 p,q 的值；（2）求方程组的一般解。（用导出组的基础解系表示通解）

三、（10 分）在 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 中，令 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\beta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $\beta_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\beta_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(1) 证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 为 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的一个基；

(2) 求自然基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 的过渡矩阵；

(3) 求 $\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 下的坐标。

四、（10 分）已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,0,1)$， $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2,0)$， $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)$。

(1) 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大无关组；

(2) 求生成子空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 的一个标准正交基。

五、（10 分）设 5 阶方阵 A 的初等因子为 $\lambda+1,\ (\lambda-2)^2,\ \lambda^2$。

(1) 试写出 A 的 Jordan 标准形；(2) 求 A 的特征值。

六、（10 分）在 $F[x]_4$ 中定义线性变换 σ：$\sigma[f(x)]=f'(x)$。求 σ 在基 $1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3$ 下的矩阵。

七、（10 分）证明：n 阶方阵 A 可相似对角化的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量。

八、（10 分）已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^T AX$ 经过正交变换 $X=QY$ 化为 $y_1^2+2y_2^2$，其中 $X=(x_1,x_2,x_3)^T, Y=(y_1,y_2,y_3)^T$。

(1) 判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是否正定； (2) 求行列式 $|A|$ 的值；

(3) 若 $Q=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，求矩阵 A。

九、（10 分）设 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵，且满足 $a_{ij}=A_{ij}\quad(i,j=1,2,3)$，其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式。证明：A 为正交矩阵。

十、（10 分）已知 A 是 3 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的 3 元列向量组，满足 $A\alpha_1=-\alpha_1-3\alpha_2-3\alpha_3$，$A\alpha_2=4\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_3=-2\alpha_1+3\alpha_3$。

(1) 求矩阵 A 的特征值；(2) 求矩阵 A 的特征向量。