习题二

1. 已知$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & a & 6\\ 7 & 5 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 6\\ 7 & 5 & 2\end{pmatrix}$，求$a,b$.

解 由矩阵相等的定义可得$a=3,b=2$.

2．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}6 & -3 & 5\\ 5 & 4 & 3\end{pmatrix}$，计算$-2\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$.

解

$$-2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-4 & 0 & -2\\ -6 & -8 & -4\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6 & -3 & 5\\ 5 & 4 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ 6 & 8 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3 & 3\\ -1 & -4 & -1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12 & -6 & 10\\ 10 & 8 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & -6 & 11\\ 13 & 12 & 8\end{pmatrix}.$$

3. 已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 6 & 2 & 5\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 6\\ 2 & 3 & 7\end{pmatrix}$，求满足等式$2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的矩阵$\boldsymbol{X}$.

解 由等式$2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$可得

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}+\frac{3}{4}\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 6 & 2 & 5\end{pmatrix}+\frac{3}{4}\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 6\\ 2 & 3 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 5/2 & 11/4\\ 9/4 & 7/2 & 13/2\\ 9/2 & 13/4 & 31/4\end{pmatrix}.$$

4. 已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，计算$\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{BA}, \boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 17 & 7\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 10\\ 5 & 8\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 17 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 10\\ 5 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -7\\ 12 & -1\end{pmatrix}.$$

5. 计算下列矩阵的乘积:

(1) $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&4\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\\0&1&9\\1&2&0\end{pmatrix}$;　　　　(2) $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&1\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}x_1&x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$;　　　　(4) $\begin{pmatrix}2&1\\2&3\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\2&5\end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}$;　　　　(6) $\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{pmatrix}$.

解

(1) $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&4\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\\0&1&9\\1&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&20\\4&11&27\\2&2&11\end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&5\\16&11\\25&17\end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix}x_1&x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=x_1^2+4x_1x_2+3x_2^2$.

(4) $\begin{pmatrix}2&1\\2&3\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&13\\8&23\\11&32\end{pmatrix}$.

(5) $\begin{pmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_{11}&a_1b_{12}&a_1b_{13}\\a_2b_{21}&a_2b_{22}&a_2b_{23}\\a_3b_{31}&a_3b_{32}&a_3b_{33}\end{pmatrix}$.

(6) $\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_{11}&a_2b_{12}&a_3b_{13}\\a_1b_{21}&a_2b_{22}&a_3b_{23}\\a_1b_{31}&a_2b_{32}&a_3b_{33}\end{pmatrix}$.

6．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3\\-1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&9\\-3&a\end{pmatrix}$，问 a 取什么值时 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$?

解 因为

$$AB=\begin{pmatrix}2&3\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&9\\-3&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&18+3a\\-4&-9+a\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}1&9\\-3&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&12\\-6-a&-9+a\end{pmatrix},$$

所以$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$当且仅当下面两个等式成立：$-6-a=-4$，$18+3a=12$．因此，$a=-2$.

7．已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，求所有使得等式$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$成立的 2 阶矩阵$\boldsymbol{B}$.

解 设$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$．因为

$$AB=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c&b+d\\c&d\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&a+b\\c&c+d\end{pmatrix},$$

所以由$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，可得$a=d,c=0$．因此，所有使得等式$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$成立的 2 阶矩阵为$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$，其中$a,b$为任意常数.

8．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-4\\-1&2\end{pmatrix}$，求所有使得等式$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$成立的 2 阶矩阵$\boldsymbol{B}$.

解 设$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$．因为

$$AB=\begin{pmatrix}2&-4\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a-4c&2b-4d\\-a+2c&-b+2d\end{pmatrix},$$

所以由$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，可得

$$\begin{cases}2a-4c=0\\2b-4d=0\\-a+2c=0\\-b+2d=0.\end{cases}$$

求解这个方程组得到$a=2c,b=2d$．因此，所有使得等式$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$成立的 2 阶矩阵为$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2c&2d\\c&d\end{pmatrix}$，其中$c,d$为任意常数.

9．求平方等于零矩阵的所有 2 阶矩阵.

解 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$满足$\boldsymbol{A}^2=\mathbf{0}$．因为

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix},$$

所以由$\boldsymbol{A}^2=\mathbf{0}$，可得

$$\begin{cases} a^2+bc=0 \\ ab+bd=0 \\ ac+cd=0 \\ bc+d^2=0. \end{cases}$$

情况 1 $b=0$．由方程组可得$a=0$且$d=0$．于是满足$\boldsymbol{A}^2=\mathbf{0}$的 2 阶矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$，其中$c$为任意数.

情况 2 $c=0$．由方程组可得$a=0$且$d=0$．于是满足$\boldsymbol{A}^2=\mathbf{0}$的 2 阶矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中$b$为任意数.

情况 3 $b\neq 0$且$c\neq 0$.由方程组可得$c=-\dfrac{a^2}{b}$，$d=-a$．于是使得$\boldsymbol{A}^2=\mathbf{0}$成立的 2 阶矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ -\dfrac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$，其中$a$为任意常数，$b$为任意非零常数.

.

.

10．举例说明下列命题不成立:

(1) 如果$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，那么$\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$或$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$;

(2) 如果$\boldsymbol{A}^2=\mathbf{0}$，那么$\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$;

(3) 如果$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，并且$\boldsymbol{A}\neq\mathbf{0}$，那么$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

解 (1) 取$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，但是$\boldsymbol{A}\neq\mathbf{0}$或$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{I}$.

(2) 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$，但是 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$.

(3) 取 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$，计算可得

$$AB=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix},$$

$$AC=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，并且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$，但是 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$.

11．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, n 为正整数，求 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{BA},(\boldsymbol{AB})^n,(\boldsymbol{BA})^n$.

解 计算可得

$$\boldsymbol{AB}=8,\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\1&2&3\end{pmatrix},(\boldsymbol{AB})^n=8^n,$$

$$(\boldsymbol{BA})^n=\underbrace{(\boldsymbol{BA})(\boldsymbol{BA})\cdots(\boldsymbol{BA})}_{n\text{个括号}}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})^{n-1}\boldsymbol{A}=8^{n-1}\boldsymbol{BA}=8^{n-1}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\1&2&3\end{pmatrix}.$$

12．已知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\varLambda Q}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix},\boldsymbol{\varLambda}=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$;

(2) 验证 $\boldsymbol{QP}=\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{I}_2$;

(3) 对所有的正整数 m，计算 $\boldsymbol{A}^m$.

解 (1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-10\\3&-4\end{pmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{QP}=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{PQ}=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

(3) $\boldsymbol{A}^m=(\boldsymbol{P\varLambda Q})(\boldsymbol{P\varLambda Q})\cdots(\boldsymbol{P\varLambda Q})=\boldsymbol{P\varLambda}(\boldsymbol{QP})\boldsymbol{\varLambda}(\boldsymbol{QP})\cdots(\boldsymbol{QP})\boldsymbol{\varLambda Q}=\boldsymbol{P\varLambda}^m\boldsymbol{Q}$

$$=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}^m\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 2^{m+1}-5&-5\cdot 2^{m+1}+10\\3\cdot 2^m-3&-5\cdot 2^m+6\end{pmatrix}.$$

13．用数学归纳法证明下列结论:

(1) $\begin{pmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a_1^n&0&0\\0&a_2^n&0\\0&0&a_3^n\end{pmatrix}$;

(2) 如果 n 是奇数，那么

$$\begin{pmatrix}0&0&a_1\\0&a_2&0\\a_3&0&0\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}0&0&a_1^{(n+1)/2}a_3^{(n-1)/2}\\0&a_2^n&0\\a_1^{(n-1)/2}a_3^{(n+1)/2}&0&0\end{pmatrix},$$

如果 n 是偶数，那么

$$\begin{pmatrix}0&0&a_1\\0&a_2&0\\a_3&0&0\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a_1^{n/2}a_3^{n/2}&0&0\\0&a_2^n&0\\0&0&a_1^{n/2}a_3^{n/2}\end{pmatrix}.$$

证明 (1) 对 n 用数学归纳法．当 $n=1$ 时，结论显然成立．设 $n\geq 2$，并且当 $n=k$ 时，结论成立，即

$$\begin{pmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}a_1^k&0&0\\0&a_2^k&0\\0&0&a_3^k\end{pmatrix}.$$

下面证明结论当 $n=k+1$ 时也成立．因为

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{pmatrix}^{k+1}&=\begin{pmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a_1^k&0&0\\0&a_2^k&0\\0&0&a_3^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a_1^{k+1}&0&0\\0&a_2^{k+1}&0\\0&0&a_3^{k+1}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

所以对任意的正整数 n，都有

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_1^n & 0 & 0 \\ 0 & a_2^n & 0 \\ 0 & 0 & a_3^n \end{pmatrix}.$$

(2) **情况 1** $n=2t-1$为奇数. 对 t 用数学归纳法. 当$t=1$时, 结论显然成立. 设$t\geq 2$, 并且当$t=k$时结论成立, 即

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1^k a_3^{k-1} \\ 0 & a_2^{2k-1} & 0 \\ a_1^{k-1} a_3^k & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

下面证明结论当$t=k+1$时也成立. 因为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2(k+1)-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2k-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1^k a_3^{k-1} \\ 0 & a_2^{2k-1} & 0 \\ a_1^{k-1} a_3^k & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 a_3 & & \\ & a_2^2 & \\ & & a_3 a_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1^{k+1} a_3^k \\ 0 & a_2^{2k+1} & 0 \\ a_1^k a_3^{k+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

根据归纳法原理, 结论对任意奇数都成立.

情况 2 $n=2t$ 为偶数. 对 t 用数学归纳法. 当 $t=1$ 时, 因为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a_1 a_3 & & \\ & a_2^2 & \\ & & a_3 a_1 \end{pmatrix}$, 所以结论成立. 设$t\geq 2$, 并且当$t=k$时结论成立, 即

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2k} = \begin{pmatrix} a_1^k a_3^k & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{2k} & 0 \\ 0 & 0 & a_1^k a_3^k \end{pmatrix}.$$

下面证明结论当$t=k+1$时也成立. 因为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2k} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^k a_3^k & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{2k} & 0 \\ 0 & 0 & a_1^k a_3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 a_3 & & \\ & a_2^2 & \\ & & a_3 a_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^{k+1} a_3^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{2(k+2)} & 0 \\ 0 & 0 & a_1^{k+1} a_3^{k+1} \end{pmatrix},$$

根据归纳法原理，结论对任意偶数都成立.

综上可得结论成立.

14．设 $f(x) = x^2 - 2x - 3, \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(1) 求 $f(\boldsymbol{A})$;

(2) 验证 $f(\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})$.

解 (1) $f(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{A})$.

15．已知矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

分别计算 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_3$.

解 计算可得:

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{AP}_1=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a_{11}&a_{12}&a_{13}\\2a_{21}&a_{22}&a_{23}\\2a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\3a_{11}+a_{21}&3a_{12}+a_{22}&3a_{13}+a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{AP}_2=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+3a_{12}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}+3a_{22}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}+3a_{32}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{AP}_3=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{33}&a_{32}&a_{31}\end{pmatrix}.$$

16. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_1&b_3&b_2\\a_1&a_3&a_2\\c_1+a_1&c_3+a_3&c_2+a_2\end{pmatrix}$，将 $\boldsymbol{B}$ 表示为在 $\boldsymbol{A}$ 的两边乘以初等矩阵.

解 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 经过 3 次初等行变换得到的：首先将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行加到第 3 行上，然后互换矩阵第 1 行与第 2 行，最后互换矩阵的第 2 列和第 3 列. 令

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

于是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{AP}_3$.

17. 证明下列结论:

(1) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵, 那么 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是可逆矩阵, 并且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$;

(2) 如果 k 是非零常数，$\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，那么 $k\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，并且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

(3) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵, 那么 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是可逆矩阵, 并且 $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$;

(4) 如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同阶可逆矩阵, 那么 $\boldsymbol{AB}$ 是可逆矩阵, 并且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

证明 (1) 记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$，那么 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{I}$．根据定义 $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，并且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}$.

(2) 因为 $(k\boldsymbol{A})(k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})=(kk^{-1})(\boldsymbol{AA}^{-1})=\boldsymbol{I}$，$(k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})(k\boldsymbol{A})=(k^{-1}k)(\boldsymbol{AA}^{-1})=\boldsymbol{I}$,所以 $k\boldsymbol{A}$是可逆矩阵，并且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

(3) 因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$，$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{AA}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$,所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是可逆矩阵，并且 $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$.

(4) 因为

$$(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BB}^{-1})\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{I},$$

$$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I},$$

所以 $\boldsymbol{AB}$ 是可逆矩阵，并且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

18．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，证明当 $ad-bc\neq 0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，并且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

证明 当 $ad-bc\neq 0$ 时， 因为

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left[\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right] \\
=&\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
=&\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\
=&\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\
&=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

所以$\boldsymbol{A}$是可逆矩阵，并且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

19．求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

解 (1) 因为

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -20 & 15 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -4 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

(2) 因为

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 12/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & -1/5 \\ 2 & 12/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

(3) 因为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

(4) 因为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

20．设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，判断下列命题的真假，并且说明理由:

(1) 如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是不可逆矩阵，那么 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是不可逆矩阵;

(2) 如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵，那么 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是可逆矩阵;

(3) 如果 $\boldsymbol{AB}$ 是不可逆矩阵，那么 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是不可逆矩阵;

(4) 如果 $\boldsymbol{AB}$ 是可逆矩阵，那么 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵.

解 (1) 错误. 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是不可逆矩阵，但是 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$ 是可逆矩阵.

(2) 错误. 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵，但是 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$ 是不可逆矩阵.

(3) 错误. 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 是不可逆矩阵，但是 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵.

(4) 正确. 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，所以 $\boldsymbol{AB}$ 是可逆矩阵当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵.

21．设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足等式 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$. 证明矩阵 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 是可逆的，并且求 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}$.

证明 因为 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{I}$，于是矩阵 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 是可逆的，并且 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}=\boldsymbol{A}$.

22．已知方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足等式 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$. 证明矩阵 $2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 最多有一个矩阵是可逆的.

证明 因为

$$(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0},$$

所以矩阵 $2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 最多有一个矩阵是可逆的.

23．求满足以下等式的矩阵 $\boldsymbol{X}$:

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\3 & 2 & -4\\2 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\3 & 2 & 4\\1 & 3 & 5\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 1 & -2\\2 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\1 & 2 & 0\\-1 & 2 & -2\end{pmatrix}$.

解 (1)

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\-3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -5\\3/2 & 1/2 & 4\end{pmatrix}.$$

(2)

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\3 & 2 & 4\\1 & 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\3 & 2 & -4\\2 & -1 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\3 & 2 & 4\\1 & 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 3 & -2\\-8 & 6 & -5\\-7 & 5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20 & 15 & -12\\-56 & 41 & -32\\-63 & 46 & -37\end{pmatrix}.$$

(3)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\1 & 2 & 0\\-1 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 1 & -2\\2 & -2 & 1\end{pmatrix}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\1 & 2 & 0\\-1 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/9 & 2/9 & 2/9\\2/9 & 1/9 & -2/9\\2/9 & -2/9 & 1/9\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1/9 & 5/9 & -1/9\\2/3 & 0 & 2/3\\-1/9 & 4/9 & -8/9\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

24．已知矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\1 & 1 & 0\\-1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{X}$.

解 由 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{X}$ 得 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{B}$. 因为

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I},I)=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\-1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3\\0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3\\0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4\end{pmatrix},$$

所以$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$是可逆矩阵，并且$\left(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}$. 因此，

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4 & 3\\ 2 & -9 & -6\\ -1 & 8 & 5\end{pmatrix}.$$

25. 设$\boldsymbol{A}$是幂零矩阵(即存在正整数 m，使得$\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{0}$). 证明$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$是可逆矩阵，并且$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{m-1}$.

解 因为

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{m-1})=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{I},$$

所以$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$是可逆矩阵，并且

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{m-1}.$$

26．设$\boldsymbol{A}$是幂等矩阵(即$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$). 并且$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{I}$. 证明$\boldsymbol{A}$是不可逆矩阵.

证明 反证法. 假设$\boldsymbol{A}$是可逆矩阵，在等式$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$两边左乘$\boldsymbol{A}^{-1}$, 得到

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I},$$

与已知条件矛盾. 因此$\boldsymbol{A}$是不可逆矩阵.

27．已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$，利用分块矩阵计算$\boldsymbol{AB}$.

解 令$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{B}_3\end{pmatrix}.$$

于是

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & 0\\ \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{B}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 & 0\\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_3\end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&3\\11&7\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&0\\11&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_3\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}.$$

因此,

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}5&3&0\\11&7&0\\10&0&5\\11&0&4\end{pmatrix}.$$

28. 设$\boldsymbol{A}$是m阶可逆矩阵，$\boldsymbol{D}$是n阶可逆矩阵．证明$\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{D}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$是可逆矩阵．并且

$$\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{D}&\mathbf{0}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\boldsymbol{D}^{-1}\\\boldsymbol{A}^{-1}&\mathbf{0}\end{pmatrix}.$$

证明 因为$\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{D}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\boldsymbol{D}^{-1}\\\boldsymbol{A}^{-1}&\mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}$，所以$\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{D}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$是可逆矩阵，并且

$$\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{D}&\mathbf{0}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\boldsymbol{D}^{-1}\\\boldsymbol{A}^{-1}&\mathbf{0}\end{pmatrix}.$$

29．利用分块矩阵求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix}5&0&0\\0&1&2\\0&3&4\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}0&0&0&2&1\\0&0&0&5&3\\3&-1&0&0&0\\-2&1&1&0&0\\2&-1&4&0&0\end{pmatrix}$.

解 (1) 令$\boldsymbol{A}=(5),\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，则$\begin{pmatrix}5&0&0\\0&1&2\\0&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$．而

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix},$$

因为$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{5},\boldsymbol{B}^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}$，所以

$$\begin{pmatrix}5&0&0\\0&1&2\\0&3&4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1/5&0&0\\0&-2&1\\0&3/2&-1/2\end{pmatrix}.$$

(2) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&-1&0\\-2&1&1\\-2&-1&4\end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix}0&0&0&2&1\\0&0&0&5&3\\3&-1&0&0&0\\-2&1&1&0&0\\2&-1&4&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\mathbf{0}\end{pmatrix}.$$

由 28 题结论可知 $\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\mathbf{0}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{A}^{-1}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$. 因为

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix},\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}1&4/5&-1/5\\2&12/5&-3/5\\0&1/5&1/5\end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix}0&0&0&2&1\\0&0&0&5&3\\3&-1&0&0&0\\-2&1&1&0&0\\2&-1&4&0&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&4/5&-1/5\\0&0&2&12/5&-3/5\\0&0&0&1/5&1/5\\3&-1&0&0&0\\-5&2&0&0&0\end{pmatrix}.$$

30．设 $\boldsymbol{A}_{11}$ 是可逆矩阵. 求使等式

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\boldsymbol{X}&\boldsymbol{I}&\mathbf{0}\\\boldsymbol{Y}&\mathbf{0}&\boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}\\\boldsymbol{A}_{31}&\boldsymbol{A}_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{B}_{12}\\\mathbf{0}&\boldsymbol{B}_{22}\\\mathbf{0}&\boldsymbol{B}_{32}\end{pmatrix}$$

成立的矩阵 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$，并且计算 $\boldsymbol{B}_{22}$.

解 因为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\boldsymbol{X}&\boldsymbol{I}&\mathbf{0}\\\boldsymbol{Y}&\mathbf{0}&\boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}\\\boldsymbol{A}_{31}&\boldsymbol{A}_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{A}_{22}\\\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{A}_{31}&\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{A}_{32}\end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{A}_{22} \\ \boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{A}_{31} & \boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{A}_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_{22} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_{32} \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{A}_{21} &= 0, \\ \boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{A}_{31} &= 0, \\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{A}_{22} &= \boldsymbol{B}_{22}, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X} &= -\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}, \\ \boldsymbol{Y} &= -\boldsymbol{A}_{31}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}, \\ \boldsymbol{B}_{22} &= -\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{A}_{22}. \end{aligned}$$

31．设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶对称矩阵. 证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$ 也是对称矩阵.

证明 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶对称矩阵，所以

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},$$

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}.$$

因此 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵.

32．证明：如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶对称矩阵，那么 $\boldsymbol{AB}$ 为对称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

证明 必要性 设 $\boldsymbol{AB}$ 为对称矩阵，那么 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{AB}$. 另一方面，因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶对称矩阵，所以 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}$. 因此 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

充分性 设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. 因为 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}$, 所以 $\boldsymbol{AB}$ 为对称矩阵.

33．设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，并且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$. 证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

证明 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶实对称矩阵，那么对于任意的 $i, j \in \{1,2,\cdots,n\}$，都有 $a_{ij}=a_{ji}$. 对于任意的 i Î $\{1,2,\cdots,n\}$，因为 $\boldsymbol{A}^2$ 的 (i,i)- 元满足

$$(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}=(a_{i1})^2+(a_{i2})^2+\cdots+(a_{in})^2=0,$$

并且$a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$都是实数，所以

$$a_{i1}=a_{i2}=\cdots=a_{in}=0 .$$

因此$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

34．证明主对角元全为 1 的上(下) 三角矩阵的逆矩阵仍然是主对角元全为 1 的上(下) 三角矩阵.

证明 设$\boldsymbol{A}$是主对角元全为 1 的上三角矩阵. 因为$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$，所以$\boldsymbol{A}$是可逆矩阵. 对$\boldsymbol{A}$的阶数 n 用数学归纳法证明它的逆矩阵仍然是主对角元全为 1 的上三角矩阵. 当$n=1$时，结论显然成立. 设$n\ge 2$，并且结论对$n-1$阶主对角元全为 1 的上三角矩阵成立，下面证明结论对n阶主对角元全为 1 的上三角矩阵也成立.

将矩阵$\boldsymbol{A}$按如下方式分块

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{(n-1)n} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{(n-1)n} \end{pmatrix}.$$

因为$n-1$阶主对角元全为 1 的上三角矩阵$\boldsymbol{A}_1$是可逆的，所以根据归纳假设，$\boldsymbol{A}_1$的逆矩阵$\boldsymbol{A}_1^{-1}$是主对角元全为 1 的上三角矩阵.

令

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & -\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

那么$\boldsymbol{B}$是主对角元全为 1 的上三角可逆矩阵，并且

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{AB} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & -\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{n-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{I}_n .
\end{aligned}
$$

因此，主对角元全为 1 的上三角矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

因为主对角元全为 1 的上三角矩阵的转置是主对角元全为 1 的下三角矩阵，并且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$，所以结论关于主对角元全为 1 的下三角矩阵也成立.