线性代数 A 试题 A 卷

班级 ________ 学号 ________ 姓名 ________ 成绩 ________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）已知矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$，且 $AXA^{-1} = XA^{-1} + 3I$，求 X。

$$A^*AXA^{-1}A = A^*XA^{-1}A + 3A^*A$$

$$|A|X = A^*X + 3|A|I$$

由于 $|A^*| = |A|^{n-1}$，这里 $n=4$，故 $|A| = 2$

于是上式变为

$$2X = A^*X + 6I$$

$$(2I - A^*)X = 6I$$

$$X = 6(2I - A^*)^{-1}$$

$$= 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

二、（10 分）对下面线性方程组

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + \quad 2x_2 - \quad 2x_3 = 1 \\ \quad 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - \quad 4x_3 = 2 \\ \quad -2x_1 - \quad 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = -\lambda - 1 \end{cases}$$

试讨论：当 λ 取何值时，它有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。

（用导出组的基础解系表示通解）

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ -2 & -4 & 5-\lambda & -\lambda-1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & \lambda-5 & \lambda+1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & -\lambda+1 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-10) & (\lambda-1)(\lambda-4) \end{array}\right]$$

$\lambda=1$ 时无穷多解． $\lambda\neq1$ 且 $\lambda=10$ 时无解；$\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq10$ 时唯一解

$\lambda=1$ 代入原方程．求得其一个基础解系（导出组的基础解系）

$[-2,1,0]^T$，$[2,0,1]^T$．

一个特解为 $[1,0,0]^T$． 故其通解表达式为 $[1,0,0]^T+k_1[-2,1,0]^T$
$+k_2[2,0,1]^T$

三、（10 分）求矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

的列向量组的秩和一个极大无关组，并把其余列向量用极大无关组线性表示。

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{变换}]{\text{初等行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r(A)=3.$$

故矩阵 A 的列向量组的极大无关组为 $\underset{\alpha_1}{\begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\end{bmatrix}}$，$\underset{\alpha_2}{\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}}$，$\underset{\alpha_3}{\begin{bmatrix}2\\1\\3\\0\end{bmatrix}}$．

$$\begin{bmatrix}2\\5\\-1\\4\end{bmatrix}=\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$$

$$\begin{bmatrix}1\\-1\\3\\-1\end{bmatrix}=-\alpha_2+\alpha_3$$

四、（10分）在$\mathbf{R}^{2\times 2}$中，令$\alpha_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$,

$\beta_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$, $\beta_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$, $\beta_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

（1）证明$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$是$\mathbf{R}^{2\times 2}$的一组基；

（2）求基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的过渡矩阵；

（3）求$\gamma=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$下的坐标。

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]A.$$

A可逆，A称为过渡矩阵，所以$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$也是$\mathbf{R}^{2\times 2}$的一组基

$\gamma=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下坐标为$[1,-1,-1,1]^T$.

于是γ在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$下的坐标为

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\2\end{bmatrix}$$

五、（10分）设6阶方阵A的初等因子为 $\lambda-1, (\lambda-2)^2, \lambda^3$。

(1) 试写出A的Jordan标准形；　　(2) 求A的特征值。

A的Jordan标准形为

$$J_A=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&2&1&0&0&0\\0&0&2&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

A与J_A相似，所以A与J_A有相同的特征值，从而A的特征值为

1, 2(二重), 0(三重)

六、(10分) 函数集合 $V=\{(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)e^x \mid a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbf{R}\}$ 对于函数的线性运算构成线性空间，在 V 中取一组基

$$f_1(x)=x^3e^x, f_2(x)=x^2e^x, f_3(x)=xe^x, f_4(x)=e^x$$

求微分运算 $D(f(x))=f'(x)$ 在这组基下的矩阵，并判断该线性变换是否可逆。

$D(f_1(x)) = 3x^2e^x + x^3e^x$. $D(f_2(x)) = 2xe^x + x^2e^x$

$D(f_3(x)) = e^x + xe^x$ $D(f_4(x)) = e^x$

$$D[x^3e^x, x^2e^x, xe^x, e^x] = [x^3e^x, x^2e^x, xe^x, e^x]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 即为微分运算在这组基下的矩阵.

由于A可逆，所以D也可逆.

七、(10分) 求下列实系数齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=0 \end{cases}$ 的解空间的一标准正交基。

以齐次线性方程组的系数矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

选取 x_1, x_2 为基本未知量.
选取 x_3, x_4 为自由未知量.

则解空间的一个基(即基础解系)为

$X_1 = [1, -2, 1, 0]^T$. $X_2 = [2, -3, 0, 1]^T$

$\beta_1 = X_1$

$\beta_2 = X_2 - \frac{(X_2, X_1)}{(X_1, X_1)} X_1 = X_2 - \frac{8}{6} X_1 = [\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, 1]^T$

$\eta_1 = [\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, 0]^T$

$\eta_2 = [\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{-4}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}]^T$

八、（10 分） 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=tx_1^2+tx_2^2+tx_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$

(1) 判断当 t 取何值时，二次型正定；

(2) 当 $t=0$ 时，求一正交变换 $X=QY$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形。

① $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$. $A=\begin{bmatrix} t & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & t & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & t \end{bmatrix}$ A正定 ⇔ A顺序主子式均大于零.

$$\left.\begin{array}{l} t>0.\ t^2-1/4>0 \\ t^3-3t/4-1/4>0 \end{array}\right\} \Rightarrow t>1 \text{ 时 } f(x_1,x_2,x_3) \text{ 正定}.$$

② $t=0$ 时 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$ $\lambda_1=1.\ \lambda_2=\lambda_3=-1/2$

$(\lambda_1I-A)X=0 \longrightarrow X_1=[1.1.1]^T \rightarrow$ 单位化 $\eta_1=[\sqrt{3}/3.\ \sqrt{3}/3.\ \sqrt{3}/3]^T$.

$(\lambda_2I-A)X=0 \longrightarrow X_2=[-1.1.0]^T.\ X_3=[-1,0,1]^T$

$\eta_2=[-\sqrt{2}/2.\ \sqrt{2}/2.\ 0]^T.\ \eta_3=[-\sqrt{6}/6.\ -\sqrt{6}/6,\ \frac{\sqrt{6}}{3}]^T$

$Q=[\eta_1.\eta_2.\eta_3]$ 即为所求正交矩阵.

九、（10 分）设 $A=I-ee^T$，其中 I 为 n 阶方阵，e 为 n 维非零列向量，证明

（1）$A=A^2$ 的充分必要条件为 e 为单位向量，即 $e^Te=1$；

（2）当 $e^Te=1$ 时，A 不可逆。

(1) "⇒" $A=A^2$. $(I-ee^T)(I-ee^T)=I-ee^T \Rightarrow ee^T=ee^Tee^T$

注意 e^Te 为一个一阶矩阵，记为 k. $ee^T=kee^T$

$(k-1)ee^T=\theta$. 而 ee^T 为一个非零矩阵. 从而 $k=1$

"⇐" 若 $e^Te=1$. 那么 $(I-ee^T)(I-ee^T)=I-2ee^T+ee^Tee^T$

$=I-ee^T$ 即 $A^2=A$

(2) 当 $e^Te=1$ 时. 有 $A=A^2 \Rightarrow A(A-I)=\theta$.

若 A可逆. 则 $A-I=\theta \Rightarrow A=I \Rightarrow A=I-ee^T=I$

$\Rightarrow ee^T=\theta$. $\Rightarrow$ e为零向量. 矛盾

十、(10分)设3阶实对称矩阵A的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2,\ \alpha_1=(1,-1,1)^T$是$A$的属于$\lambda_1$的特征向量。令$B=A^5-4A^3+I$

(1) 验证α_1也是B的特征向量;

(2) 求B的全部特征值和特征向量;

(3) 求B。

(1) $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$ $\quad A^5\alpha_1=\lambda_1^5\alpha_1$ $\quad -4A^3\alpha_1=-4\lambda_1^3\alpha_1$,

$I\alpha_1=1\cdot\alpha_1 \Rightarrow (A^5-4A^3+I)\alpha_1=(\lambda_1^5-4\lambda_1^3+1)\alpha_1$

这表明α_1也是矩阵$B=A^5-4A^3+I$的特征向量.

(2) $B=A^5-4A^3+I$的全部特征值为 $\lambda_1^5-4\lambda_1^3+1=-2$,

$\lambda_2^5-4\lambda_2^3+1=1$, $\quad \lambda_3^5-4\lambda_3^3+1=1$.

B的全部特征向量即为A的特征向量. 只需求出A的特征向量即可. 设A的属于特征值2的特征向量为$X=[x_1,x_2,x_3]^T$ 则α_1与X正交. 于是得到 $x_1-x_2+x_3=0$. 其两个线性无关解为 $X_1=[1,1,0]^T$, $X_2=[-1,0,1]$. 取其中之一作为2的特征向量, 不妨取$X_1=[1,1,0]^T$作为2的特征向量. 于是再设$\lambda_3=-2$的特征向量为$Y=[y_1,y_2,y_3]^T$. 又可得(正交)

$$\begin{cases} y_1-y_2+y_3=0 \\ y_1+y_2=0 \end{cases} \Rightarrow Y=[1,-1,-2]^T \text{为其线性无关解}$$

从而B的全部特征向量为 $k_1\alpha_1\ (k_1\neq0)$, $k_2[1,1,0]^T\ (k_2\neq0)$, $k_3[1,-1,-2]^T\ (k_3\neq0)$.

(3) 由(2)可知存在可逆矩阵P s.t. $P^{-1}AP=\mathrm{diag}\{1,2,-2\}$.

其中 $P=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&1&-1\\1&0&-2\end{bmatrix}$ $\Rightarrow A=P\,\mathrm{diag}\{1,2,-2\}P^{-1}$

$$B=P\left(\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&-2\end{bmatrix}^5-\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&-2\end{bmatrix}^3+\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\right)P^{-1}=\begin{bmatrix}9&16&8\\16&9&-8\\8&-8&-15\end{bmatrix}$$