2009级《微积分A》第一学期期末试题

参考答案（A卷）

2010年1月29日

一、 填空（每小题4分，共28分）

1. 2;　　　　　2. $dy=-\dfrac{f'(\frac{1}{x})}{x^2}e^{f(\frac{1}{x})}dx;$

3. $2\sqrt{1+\tan x}+C,$　　　2;

4. $\dfrac{dy}{dx}=e^{(y+x)^2}-1,$　　$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=e-1;$

5. $y=\dfrac{1}{2}+Ce^{-2x^2}$;

6. 切线：$x-ey-e=0,$　　法线：$ex+y+1=0$;

7. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

二、(10分)（1）当$-1\le x<0$时，有

$$\boldsymbol{F(x)=\int_{-1}^{x}(t+1)dt=\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}.}$$

当$0\le x\le 1$时，有

$$F(x)=\int_{-1}^{0}(t+1)dt+\int_{0}^{x}\arctan t\,dt$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{1}{2} & x\in[-1,0)\\ x\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+\dfrac{1}{2} & x\in[0,1]\end{cases}$$

（2）只需讨论$F(x)$在$x=0$处的可导性和连续性，

连续性：$F(0+)=F(0-)=F(0)=\frac{1}{2}$，$\therefore F(x)$在$x=0$处连续.

可导性：$F'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x}=1$

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x}=0$$

$F'_-(0)\neq F'_+(0)$，$\therefore F(x)$在$x=0$处不可导.

三、（9 分）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{t+4}}dt}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{\sqrt{x+4}}}{1-\cos x}$

$=1$

$$\therefore \lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-ax-b)=1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-ax-b}{x}=0$$

$$\Rightarrow a=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=1$$

$$b=\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x)-1=\lim_{x\to +\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}-1=-\frac{1}{2}.$$

（注：若思路正确，可适当给分）

四、（9 分）$y'=\frac{1}{x}, y''=-\frac{1}{x^2}$

曲率：$K=\dfrac{|y''|}{[1+y'^2]^{3/2}}=\dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$，　　$(x>0)$

$K'_x=\dfrac{1-2x^2}{(1+x^2)^{5/2}}$，

令$K'_x=0$, 得唯一驻点$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

又当$0<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$K'_x>0$; 当$x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$K'_x<0$;

$\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$是$K$的极大值点，又因为驻点唯一，

所以$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$是K的最大值点.

所以曲线$y=\ln x$上曲率最大的点的坐标为$(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2})=(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{2}\ln 2)$.

$K_{最大}=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

（注：若导数求错，但解题思路正确，可适当给分；对求出的驻点不加判断，直接说是最大值点，扣 2 分）

五、（10 分）（1）由对称性，$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t dt$$

$$=6$$

（2）$V=2\int_0^1 \pi y^2(x)dx$

$$=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\cos^2 t dt$$

$$=\frac{96\pi}{315}.$$

六、（10 分）特征方程：$r^2-3r+2=0$

特征根：$r_1=1, r_2=2$

对应齐次方程通解为：$Y(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}$

设非齐次方程的特解为：$y^*=Axe^x$

代入原方程，得 $A=-2, \quad y^*=-2xe^x$

非齐次方程的通解为：$y(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}-2xe^x$

由题意，有如下初始条件：$y(0)=1, y'(0)=(2x-1)\big|_{x=0}=-1$

代入通解得：$C_1=1, C_2=0,$

所以 $\quad y(x)=e^x-2xe^x(1-2x)e^x.$

七、（9 分） 证明：$\int_0^{2a} f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_a^{2a} f(x)dx$

在$\int_a^{2a} f(x)dx$中，做定积分换元，令$x=2a-t,$有

$$\int_a^{2a} f(x)dx=\int_a^0 f(2a-t)(-dt)$$

$$=\int_0^a f(2a-t)dt=\int_0^a f(2a-x)dx$$

$$\therefore \int_0^{2a} f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_a^{2a} f(x)dx$$

$$=\int_0^a [f(x)+f(2a-x)]dx.$$

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}+\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{\sqrt{1+\cos^2(\pi-x)}}]dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi d\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$$

$$=-\pi\ln|\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\pi\ln(1+\sqrt{2}).$$

八、(9 分) 设 t 时刻容器内溶液的含盐量为 $m(t)$.

考虑时间间隔 $[t,t+dt]$ 内，含盐量的改变量，得

$dm=0-\dfrac{m}{10+t}2dt$，初始含盐量为: $m(0)=100g$.

分离变量，解方程，得 $m(t)=\dfrac{C}{(10+t)^2}$，

由初始条件 $m(0)=100g$.得 $C=10^4$

所以 $m(t)=\dfrac{10^4}{(10+t)^2}$， $m(30)=\dfrac{10^4}{(10+30)^2}=6.25g$.

九、(6 分) 由 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2+f(x))}{x-1}=0,\quad \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\ln(2+f(x))=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}(1+f(x))=0,\quad \Rightarrow f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-1.$

又 $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+1}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2+f(x))}{x-1}\frac{f(x)+1}{\ln(2+f(x))}=0$$

(**或: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2+f(x))}{x-1}=0,\quad \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{2+f(x)}=0$， $\Rightarrow f'(1)=0$**)

法 1: 又因为 $f(0)=\int_0^1 f(x)dx$，由积分中值定理知，存在 $\eta\in(0,1)$，使得

$f(0)=f(\eta)$， $f(x)$在区间$[0,\eta]$上满足罗尔定理的条件，有

存在$\tau\in(0,\eta)\subset(0,1)$，使得 $f'(\tau)=0$.

构造辅助函数: $F(x)=f'(x)e^{x}$,

$F(x)$在$[\tau,1]$上连续, 在$(\tau,1)$内可导, 且$F(\tau)=F(1)=0$,

由罗尔定理,有存在$\xi\in(\tau,1)\subset(0,2)$, 使得 $F'(\xi)=0$

即 $F'(\xi)=e^{\xi}[f'(\xi)+f''(\xi)]=0$, 又$e^{\xi}\neq 0$

所以 $f'(\xi)+f''(\xi)=0$

法 2: 构造辅助函数: $F(x)=\int_0^x f(t)dt+f(x)$, 则$F'(x)=f(x)+f'(x)$,

$F''(x)=f'(x)+f''(x)$, 由题设条件$f(0)=\int_0^1 f(t)dt$, 得

$F'(1)=f(1)+f'(1)=f(1)$

$F(0)=f(0)$, $F(1)=\int_0^1 f(t)dt+f(1)=f(0)+f(1)$,

则对$F(x)$在区间$[0,1]$上使用拉格朗日中值定理: $\exists\tau\in(0,1)$, 使得

$F'(\tau)=F(1)-F(0)=f(1)$

对$F'(x)$在区间$[\tau,1]$上使用拉格朗日中值定理: $\exists\xi\in(\tau,1)\subset(0,2)$, 使得

$F''(\xi)=0$, 即 $f'(\xi)+f''(\xi)=0$