2010-2011-第一学期　**工科数学分析期中试题解答（信二学习部整理）**

一. **1.** $[e^{f^2(x)}2f(x)f'(x)+f'(\arcsin x^2)\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}]dx$

2. $(e,1)$

3. $\dfrac{1}{6}$

4. $-\dfrac{1+t^2}{t^3}$

5. $x=1,\quad x=0$

二. $$\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(1+\frac{\sin x-x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$$ …………………(2 分)

$$=\lim_{x\to 0}[(1+\frac{\sin x-x}{x})^{\frac{x}{\sin x-x}}]^{\frac{\sin x-x}{x^3}}$$ …………………….(4 分)

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$$ …………………(8 分)

三. $$e^y\frac{dy}{dx}\cdot\cos x-e^y\sin x+1+\frac{dy}{dx}=0$$ …………………..(4 分)

解得 $$\frac{dy}{dx}=\frac{e^y\sin x-1}{e^y\cos x+1}$$ …………………..(5 分)

在已知方程中令 $x=0$，得 $e^y+y=1,\quad y=0$ ……………………(7 分)

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=\frac{e^y\sin x-1}{e^y\cos x+1}\Big|_{x=0,y=0}=-\frac{1}{2}$$ …………………..(8 分)

四. $$a_2=\frac{a_1+3}{4}=\frac{3}{4}>a_1$$

设 $a_n>a_{n-1}$，则有 $\dfrac{a_n+3}{4}>\dfrac{a_{n-1}+3}{4}$，即 $a_{n+1}>a_n$

故 $\{a_n\}$ 单调增加, …………………(3 分)

又 $a_1<1$，设 $a_n<1$，则有 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+3}{4}<\dfrac{1+3}{4}=1$

即 $\{a_n\}$ 有上界，因此 $\{a_n\}$ 有极限. …………………..(6 分)

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则有 $A=\dfrac{A+3}{4}$，解得 $A=1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$ ……………(9 分)

五. 由 $f(0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$ 得 $a=0$ ……………….(1 分)

由 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1+b\cos x^2}{x}=f(0)=0$

得 $\lim\limits_{x\to0^-}(1+b\cos x^2)=0$，$\therefore b=-1$ ……………….(3 分)

当 $x>0$, $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$ ………………..(5 分)

当 $x<0$, $f'(x)=2\sin x^2-\dfrac{1}{x^2}(1-\cos x^2)$ ………………..(7 分)

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

$f'_-(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\frac{1}{2}x^4}{x^2}=0$

$\therefore f'(0)=0$ …………………..(9 分)

六. $V=\dfrac{2}{3}\pi r^3+\pi r^2h=a$ $h=\dfrac{a-\frac{2}{3}\pi r^3}{\pi r^2}$

$S=2\pi r^2+2\pi rh=\dfrac{2}{3}\pi r^2+\dfrac{2a}{r}$ ……………….(4 分)

令 $\dfrac{dS}{dr}=\dfrac{4}{3}\pi r-\dfrac{2a}{r^2}=0$ 得 $r=\sqrt[3]{\dfrac{3a}{2\pi}}$

由问题的实际意义, …, 故当 $r=\sqrt[3]{\dfrac{3a}{2\pi}}$ 时，所用材料最少，此时 $h=0$. ……(9 分)

七. 定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to-1}y=\infty$ 有垂直渐近线 $x=-1$ ……………..(1 分)

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{(1+x)^3}=1$

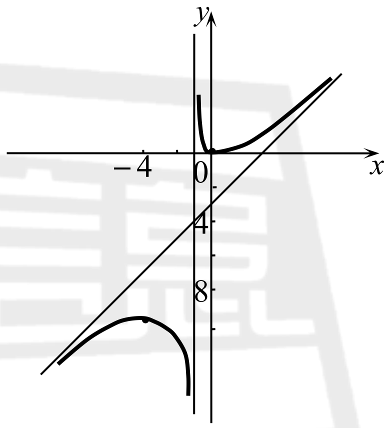
$\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^3}{(1+x)^3}-x)=-3$ 有斜渐近线 $y=x-3$ …………..(3 分)

$y'=\dfrac{x^4+4x^3}{(1+x)^4}$ 令 $y'=0$，得 $x=0$, $x=-4$ …………..(5 分)

$$y''=\frac{12x^2}{(1+x)^5}$$ …………………(6 分)

x	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	+	0	−		−	0	+
y''	−		−		+		+
y		极大值 $-\frac{256}{27}$		间断		极小值 0	

……………………..(10 分)



……………………(12 分)

八. 令 $f(x)=\ln(1-x)+x-x\ln(1-x)$ ………………(2 分)

$$f'(x)=\frac{-1}{1-x}+1-\ln(1-x)+\frac{x}{1-x}=-\ln(1-x)$$ ………………(5 分)

当 $x<0$， $f'(x)<0$， 故 $f(x)$ 单调减少 ………………(7 分)

又 $f(0)=0$，所以当 $x<0,\ f(x)>0$

即 $\ln(1-x)+x-x\ln(1-x)>0$

由此得 $$\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln(1-x)}<1$$ …………………(9 分)

九. （1）由 $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{ax^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{ax^k}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{ax^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{ax^k}=1$$ ……………………..(3 分)

得 $a=\frac{1}{2}\quad k=3$ …………………....(5 分)

（2） 由 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{f(x)}=1$ …………………..(7 分)

得 $f(x)=\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$ …………………….(8 分)

由 $\frac{1}{2}=\frac{f'''(0)}{3!}$ 得 $f'''(0)=3$ …………………….(10 分)

十． 由 $\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x}=-1$

得 $f''(0)=\lim_{x\to 0}f''(x)=0$ …………………….(3 分)

且在 $x=0$ 的某去心邻域内有 $\frac{f''(x)}{x}<0$ …………………….(5 分)

故在此邻域内当 $x<0, f''(x)>0$，当 $x>0, f''(x)<0$

因此 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点 …………………….(7 分)

十一． (1) 令 $F(x)=f(x)-x$, …………………….(1 分)

则 $F(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 连续,

$F(\frac{1}{2})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0\quad F(1)=-1<0$

根据介值定理，$\exists\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使 $F(\eta)=0$，即 $f(\eta)=\eta$; …………(4 分)

(2) 令 $G(x)=(f(x)-x)e^x$, …………………….(6 分)

则 $G(x)$ 在 $[0,\eta]$ 连续，在 $(0,\eta)$ 可导,

且 $G(0)=0$，$G(\eta)=0$,

根据罗尔定理，$\exists\xi\in(0,\eta)$，使

$G'(\xi)=0$，即 $(f'(\xi)-1)e^{\xi}+(f(\xi)-\xi)e^{\xi}=0$

由于 $e^{\xi}\neq 0$，有 $f'(\xi)-1+f(\xi)-\xi=0$ ……………….(9 分)