线性代数 A 试题 A 卷

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{AXA}^{-1} = \boldsymbol{XA}^{-1} + 3\boldsymbol{I}$，求 $\boldsymbol{X}$。

二、（10 分）对下面线性方程组

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + \quad 2x_2 - \quad 2x_3 = 1 \\ \quad 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - \quad 4x_3 = 2 \\ -2x_1 - \quad 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = -\lambda - 1 \end{cases}$$

试讨论：当λ取何值时，它有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。（用导出组的基础解系表示通解）

三、（10 分）求矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

的列向量组的秩和一个极大无关组，并把其余列向量用极大无关组线性表示。

四、（10 分）在 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 中，令 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

（1）证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 是 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的一组基；

（2）求基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的过渡矩阵；

（3）求 $\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 下的坐标。

五、（10 分）设 6 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子为 $\lambda-1,\ (\lambda-2)^2,\ \lambda^3$。

(1) 试写出 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形；　　　(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

六、（10 分）函数集合$V=\{(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)e^x \mid a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbf{R}\}$对于函数的线性运算构成线性空间，在$V$中取一组基

$$f_1(x)=x^3e^x,\ f_2(x)=x^2e^x,\ f_3(x)=xe^x,\ f_4(x)=e^x$$

求微分运算$D\big(f(x)\big)=f'(x)$在这组基下的矩阵，并判断该线性变换是否可逆。

七、（10 分）求下列实系数齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=0 \end{cases}$的解空间的一标准正交基。

八、（10 分） 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=tx_1^2+tx_2^2+tx_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$

(1) 判断当 t 取何值时，二次型正定；

(2) 当 t=0 时，求一正交变换 $X=QY$ ，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形。

九、（10 分）设 $A=I-ee^T$ ，其中 I 为 n 阶方阵， e 为 n 维非零列向量，证明

（1） $A=A^2$ 的充分必要条件为 e 为单位向量，即 $e^Te=1$；

（2）当 $e^Te=1$ 时, A 不可逆。

十、（10 分）设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$, $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的特征向量。令 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^5 - 4\boldsymbol{A}^3 + \boldsymbol{I}$

(1) 验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量；

(2) 求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值和特征向量；

(3) 求 $\boldsymbol{B}$ 。