线性代数 A 试题 A 卷

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）已知 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&3&5\\0&0&2\end{pmatrix}$，计算行列式 $\left|\frac{1}{3}A^*+2I\right|$。

二、（10 分） 设 $A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，$AX=A+2X$，求 X。

三、（10 分）已知线性空间 $\boldsymbol{F}[\boldsymbol{x}]_4$ 的自然基为 $1, x, x^2, x^3$ 。

(1) 证明：$1, 1+2x, 1+2x+3x^2, 1+2x+3x^2+4x^3$ 为 $\boldsymbol{F}[\boldsymbol{x}]_4$ 的一个基；

(2) 求自然基 $1, x, x^2, x^3$ 到基 $1, 1+2x, 1+2x+3x^2, 1+2x+3x^2+4x^3$ 的过渡矩阵，以及 $h(x)=1-x-x^2+x^3$ 在后一个基下的坐标。

四、（10 分）已知 $\alpha_1=(1,0,-1)^T$， $\alpha_2=(2,2,0)^T$， $\alpha_3=(0,1,1)^T$ 。

(1) 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个极大无关组；

(2) 求生成子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的一个标准正交基。

五、（10 分）设 **A** 是 5 阶方阵，且已知存在 5 阶可逆矩阵 **P**，使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -1 & 1 & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -2 \end{pmatrix}$$

试写出 **A** 的初等因子，同时判断 **P** 的哪几列是 **A** 的特征向量。

六、（10 分）在多项式空间 $\boldsymbol{R}[\boldsymbol{x}]_4$ 中定义变换 $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\sigma(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)=a_3-a_0+a_2x+(a_0+a_1)x^3$$

（1）证明：$\boldsymbol{\sigma}$ 是 $\boldsymbol{R}[\boldsymbol{x}]_4$ 上的线性变换；

（2）求 $\boldsymbol{\sigma}$ 在 $\boldsymbol{R}[\boldsymbol{x}]_4$ 的自然基 $1,x,x^2,x^3$ 下的矩阵，并判断 $\boldsymbol{\sigma}$ 是否可逆。

七、（10 分）假设 A 是 $m \times n$ 的实矩阵，证明：$秩(A^T A) = 秩(A)$

八　(10 分）已知 $\xi = (1,1,-1)^T$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix}$ 的一个特征向量，

（1）确定参数 a, b 及特征向量 ξ 所对应的特征值；

（2）判断 A 是否可以相似对角化，说明理由。

九、（10 分）已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+ax_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$

（1） 若 f 正定，求 a 的取值范围；

（2） 当 a=2 时，将 f 用正交变换化成标准形，并写出所用正交变换。

十、（10 分）设 A 为三阶矩阵，α_1，α_2，α_3 是 3 个线性无关的向量,满足

$$A\alpha_1=\alpha_1, A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2, A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$$

(1)证明:$|A|$=1;

(2) 证明 A 与 A^{-1} 相似。