# 第一章　　行列式

一. 填空题

1. 四阶行列式中带有负号且包含 $a_{12}$ 和 $a_{21}$ 的项为______.

解. $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 中行标的排列为 1234, 逆序为 0; 列标排列为 2134, 逆序为 1. 该项符号为"－", 所以答案为 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$.

2. 排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 可经______次对换后变为排列 $i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1$.

解. 排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 可经过 $1 + 2 + \cdots + (n-1) = n(n-1)/2$ 次对换后变成排列 $i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1$.

3. 在五阶行列式中 $(-1)^{\tau(15423)+\tau(23145)}a_{12}a_{53}a_{41}a_{24}a_{35} =$______$a_{12}a_{53}a_{41}a_{24}a_{35}$.

解. 15423 的逆序为 5, 23145 的逆序为 2, 所以该项的符号为"－".

4. 在函数

$$f(x)=\begin{vmatrix}2x & 1 & -1\\ -x & -x & x\\ 1 & 2 & x\end{vmatrix}$$ 中, $x^3$ 的系数是______.

解. $x^3$ 的系数只要考察 $2x\begin{vmatrix}-x & -x\\ 2 & x\end{vmatrix} = -2x^3+4x^2$. 所以 $x^3$ 前的系数为 2.

5. 设 $a, b$ 为实数, 则当 $a =$______, 且 $b =$______时, $\begin{vmatrix}a & b & 0\\ -b & a & 0\\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix}=0$.

解. $\begin{vmatrix}a & b & 0\\ -b & a & 0\\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}a & b\\ -b & a\end{vmatrix}=-(a^2+b^2)=0$. 所以 $a = b = 0$.

6. 在 $n$ 阶行列式 $D = |a_{ij}|$中, 当 $i < j$ 时 $a_{ij} = 0$ $(i, j =1, 2, \cdots, n)$, 则 $D =$______.

解. $\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \Lambda & 0\\ a_{21} & a_{22} & \Lambda & 0\\ M & & O & \\ a_{n1} & a_{n2} & \Lambda & 0\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\Lambda\ a_{nn}$

7. 设 $A$ 为 3×3 矩阵, $|A|$ =－2, 把 $A$ 按行分块为 $A=\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\end{bmatrix}$, 其中 $A_j$ $(j = 1, 2, 3)$是 $A$ 的第 $j$ 行, 则行列式

$\begin{vmatrix}A_3-2A_1\\ 3A_2\\ A_1\end{vmatrix}=$______.

解. $\begin{vmatrix}A_3-2A_1\\ 3A_2\\ A_1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}A_3-2A_1\\ A_2\\ A_1\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\end{vmatrix}=-3\,|A|=6$.

二. 计算证明题

1. 设$|A|=\begin{vmatrix}1 & -5 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix}$

计算 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=?$，其中 $A_{4j}$(j= 1, 2, 3, 4)是$|A|$中元素 $a_{4j}$ 的代数余子式.

解. $$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}1 & -5 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -6 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}-6 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$=-1\begin{vmatrix}-6 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=6$$

2. 计算元素为 $a_{ij}=|i-j|$的 $n$ 阶行列式.

解. $$|A|=\begin{vmatrix}0 & 1 & \cdots & n-1\\ 1 & 0 & \cdots & n-2\\ \vdots & & \ddots & \\ n-1 & n-2 & \cdots & 0\end{vmatrix}\underline{\underline{\text{由最后一行起,每行减前一行}}}\begin{vmatrix}0 & 1 & \cdots & n-1\\ 1 & -1 & \cdots & -1\\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & -1\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{每列加第}n\text{列}}}\begin{vmatrix}n-1 & n & \cdots & \cdots & n-1\\ 0 & -2 & \cdots & \cdots & -1\\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots\\ \vdots & \vdots & 0 & -2 & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1)$$

3. 计算 n 阶行列式$D_n=\begin{vmatrix}x_1+1 & x_1+2 & \cdots & x_1+n\\ x_2+1 & x_2+2 & \cdots & x_2+n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_n+1 & x_n+2 & \cdots & x_n+n\end{vmatrix}(n\ge 2)$.

解. 当$n>2$

$$D_n=\begin{vmatrix}x_1 & x_1+2 & \cdots & x_1+n\\ x_2 & x_2+2 & \cdots & x_2+n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_n & x_n+2 & \cdots & x_n+n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & x_1+2 & \cdots & x_1+n\\ 1 & x_2+2 & \cdots & x_2+n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_n+2 & \cdots & x_n+n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x_1 & x_1 & x_1+3 & \cdots & x_1+n\\ x_2 & x_2 & x_2+3 & \cdots & x_2+n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ x_n & x_n & x_n+3 & \cdots & x_n+n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_1 & 2 & x_1+3 & \cdots & x_1+n\\ x_2 & 2 & x_2+3 & \cdots & x_2+n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ x_n & 2 & x_n+3 & \cdots & x_n+n\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1+3 & \Lambda & x_1+n \\ 1 & x_2 & x_2+3 & \Lambda & x_2+n \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} \\ 1 & x_n & x_n+3 & \Lambda & x_n+n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & x_1+3 & \Lambda & x_1+n \\ 1 & 2 & x_2+3 & \Lambda & x_2+n \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} \\ 1 & 2 & x_n+3 & \Lambda & x_n+n \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1+3 & \Lambda & x_1+n \\ 1 & x_2 & x_2+3 & \Lambda & x_2+n \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} \\ 1 & x_n & x_n+3 & \Lambda & x_n+n \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1 & \Lambda & x_1+n \\ 1 & x_2 & x_2 & \Lambda & x_2+n \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} \\ 1 & x_n & x_n & \Lambda & x_n+n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 3 & \Lambda & x_1+n \\ 1 & x_2 & 3 & \Lambda & x_2+n \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} \\ 1 & x_n & 3 & \Lambda & x_n+n \end{vmatrix} = 0$$

当 $n=2$

$$\begin{vmatrix} x_1+1 & x_1+2 \\ x_2+1 & x_2+2 \end{vmatrix} = x_1 - x_2$$

4. 证明:奇数阶反对称矩阵的行列式为零.

证明: $A^T=-A$, $|A|=|A^T|=|-A|=(-1)^n|A|=-|A|$($n$ 为奇数). 所以$|A|=0$.

5. 试证: 如果 $n$ 次多项式 $f(x)=C_0+C_1x+\Lambda\ C_nx^n$ 对 $n+1$ 个不同的 $x$ 值都是零, 则此多项式恒等于零. (提示: 用范德蒙行列式证明)

证明: 假设多项式的 $n+1$ 个不同的零点为 $x_0, x_1, \cdots, x_n$. 将它们代入多项式, 得关于 $C_i$ 方程组

$$C_0+C_1x_0+\Lambda\ C_nx_0^n=0$$

$$C_0+C_1x_1+\Lambda\ C_nx_1^n=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_0+C_1x_n+\Lambda\ C_nx_n^n=0$$

系数行列式为 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的范德蒙行列式, 不为 0. 所以

$$C_0=C_1=\Lambda=C_n=0$$

6. 设 $F(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$, 求$F'(x)$.

解. $F(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 1 & 3x \end{vmatrix} = 2x\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & x & 2x^2 \\ 0 & 1 & 3x \end{vmatrix} = 2x^2\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 1 & 3x \end{vmatrix}$

$$=2x^2\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 2x^3$$

$F'(x)=6x^2$

# 第二章　　矩阵

一. 填空题

1. 设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha, \beta$均为 4 维向量, $A=[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha]$, $B=[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta]$, 且$|A|=2$, $|B|=3$, 则$|A-3B|=$______.

解. $|A-3B|=\begin{vmatrix}-2\alpha_1 & -2\alpha_2 & -2\alpha_3 & \alpha-3\beta\end{vmatrix}=-8\times\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha-3\beta\end{vmatrix}$

$$=-8\times(\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta\end{vmatrix})=-8(|A|-3|B|)=56$$

2. 若对任意 $n\times1$ 矩阵 $X$, 均有 $AX=0$, 则 $A=$______.

解. 假设 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_m\end{bmatrix}$, $\alpha_i$ 是 $A$ 的列向量. 对于 $j=1, 2, \cdots, m$, 令 $X_j=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$, 第 $j$ 个元素不为 0. 所以

$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}=\alpha_j=0\ (j=1, 2, \cdots, m)$. 所以 $A=0$.

3. 设 $A$ 为 $m$ 阶方阵, 存在非零的 $m\times n$ 矩阵 $B$, 使 $AB=0$ 的充分必要条件是______.

解. 由 $AB=0$, 而且 $B$ 为非零矩阵, 所以存在 $B$ 的某个列向量 $b_j$ 为非零列向量, 满足 $Ab_j=0$. 即方程组 $AX=0$ 有非零解. 所以$|A|=0$;

反之: 若$|A|=0$, 则 $AX=0$ 有非零解. 则存在非零矩阵 $B$, 满足 $AB=0$.

所以, $AB=0$ 的充分必要条件是$|A|=0$.

4. 设 $A$ 为 $n$ 阶矩阵, 存在两个不相等的 $n$ 阶矩阵 $B, C$, 使 $AB=AC$ 的充分条件是______.

解. $B\neq C$且$AB=AC \Leftrightarrow A(B-C)=0$且$B-C$非零 $\Leftrightarrow |A|=0$

5. $\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_4\end{bmatrix}=$______.

解. $\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{bmatrix}$

6. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$, $B=A^2-3A+2E$, 则$B^{-1}=$______.

解. $A^2=\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-4\\8&7\end{bmatrix}$

$$B=A^2-3A+2E=\begin{bmatrix}-1&-4\\8&7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&-3\\6&9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-1\\2&0\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{B^*}{|B|}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1\\-2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}\\-1&-1\end{bmatrix}$$

7. 设 $n$ 阶矩阵 $A$ 满足 $A^2+2A+3E=0$, 则$A^{-1}=$______.

解. 由 $A^2+2A+3E=0$, 得 $A(A+2E)=-3E$ . 所以 $|A||A+2E|=|-3E|\neq 0$ , 于是 $A$ 可逆. 由 $A^2+2A+3E=0$,

得 $A+2E+3A^{-1}=0$, $A^{-1}=-\frac{1}{3}(A+2E)$

8. 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, 则$(A+3E)^{-1}(A^2-9E)=$______.

解. $A^2=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&4&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$$A^2-9E=\begin{bmatrix}-8&0&2\\0&-5&0\\0&0&-8\end{bmatrix},\quad A+3E=\begin{bmatrix}4&0&1\\0&5&0\\0&0&4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4&0&1&M&1&0&0\\0&5&0&M&0&1&0\\0&0&4&M&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4&0&1&M&1&0&0\\0&5&0&M&0&1&0\\0&0&1&M&0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4&0&0&M&1&0&-\frac{1}{4}\\0&5&0&M&0&1&0\\0&0&1&M&0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&M&\frac{1}{4}&0&-\frac{1}{16}\\0&1&0&M&0&\frac{1}{5}&0\\0&0&1&M&0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix},\quad (A+3E)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&0&-\frac{1}{16}\\0&\frac{1}{5}&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$(A+3E)^{-1}(A^2-9E)=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&0&-\frac{1}{16}\\0&\frac{1}{5}&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-8&0&2\\0&-5&0\\0&0&-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0&1\\0&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

9. 设 $A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\-2&-1&-2\\4&3&3\end{bmatrix}$, 则$A^{-1}=$_______, $(A^*)^{-1}=$______, $[(-2A)^*]^{-1}=$______.

解. $|A| = -3-12+8+8+6-6=1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & M\,1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & M\,0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & M\,0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & M & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & M & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & M & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & M & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & M & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 7 & -5 & M & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{3} & M & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & M & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & M & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & M & 3 & 9 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & M & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & M & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & M & 3 & 9 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & M & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & M & -2 & -7 & -3 \end{bmatrix} \to$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 4 \\ -2 & -5 & -2 \\ -2 & -7 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}, \quad A^* = |A|A^{-1}, \quad (A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(-2A)^* = |-2A|(-2A)^{-1} = (-2)^3|A|\frac{A^{-1}}{(-2)} = 4A^{-1}$$

$$[(-2A)^*]^{-1} = (4A^{-1})^{-1} = \frac{A}{4} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

10. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, 则 $A$ 的逆矩阵 $A^{-1} =$ ______.

解. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

使用分块求逆公式 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$

$$-\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -30 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$$

所以 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0\\ 19 & -30 & 3 & -5\\ -7 & 11 & -1 & 2\end{bmatrix}$

二. 单项选择题

1. 设 $A$、$B$ 为同阶可逆矩阵, 则

(A) $AB=BA$　　(B) 存在可逆矩阵 $P$, 使 $P^{-1}AP=B$

(C) 存在可逆矩阵 $C$, 使 $C^TAC=B$　　(D) 存在可逆矩阵 $P$ 和 $Q$, 使 $PAQ=B$

解. 因为 $A$ 可逆, 存在可逆 $P_A,Q_A$ 使 $P_AAQ_A=E$.

因为 $B$ 可逆, 存在可逆 $P_B,Q_B$ 使 $P_BBQ_B=E$.

所以 $P_AAQ_A = P_BBQ_B$. 于是 $P_B^{-1}P_AAQ_AQ_B^{-1}=B$

令 $P=P_B^{-1}P_A$, $Q=Q_AQ_B^{-1}$. (D)是答案.

2. 设 $A$、$B$ 都是 $n$ 阶可逆矩阵, 则 $\left|-2\begin{bmatrix}A^T & 0\\ 0 & B^{-1}\end{bmatrix}\right|$ 等于

(A) $(-2)^{2n}|A||B|^{-1}$　(B) $(-2)^n|A||B|^{-1}$　(C) $-2|A^T||B|$　(D) $-2|A||B|^{-1}$

解. $\left|-2\begin{bmatrix}A^T & 0\\ 0 & B^{-1}\end{bmatrix}\right|=(-2)^{2n}|A||B|^{-1}$. (A)是答案.

3. 设 $A$、$B$ 都是 $n$ 阶方阵, 下面结论正确的是

(A) 若 $A$、$B$ 均可逆, 则 $A+B$ 可逆.　(B) 若 $A$、$B$ 均可逆, 则 $AB$ 可逆.

(C) 若 $A+B$ 可逆, 则 $A-B$ 可逆.　(D) 若 $A+B$ 可逆, 则 $A,B$ 均可逆.

解. 若 $A$、$B$ 均可逆, 则 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. (B)是答案.

4. 设 $n$ 维向量 $\alpha=(\frac{1}{2},0,\Lambda,0,\frac{1}{2})$, 矩阵 $A=E-\alpha^T\alpha$, $B=E+2\alpha^T\alpha$ 其中 $E$ 为 $n$ 阶单位矩阵, 则 $AB=$

(A) 0　(B) $-E$　(C) $E$　(D) $E+\alpha^T\alpha$

解. $AB=(E-\alpha^T\alpha)(E+2\alpha^T\alpha)=E-\alpha^T\alpha+2\alpha^T\alpha-2\alpha^T\alpha\,\alpha^T\alpha$

$=E$. $(\alpha^T\alpha=\frac{1}{2})$ (C)是答案.

5. 设 $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31}-a_{21} & a_{32}-a_{22} & a_{33}-a_{23}\end{bmatrix}$, $P_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, 设有 $P_2P_1A=B$, 则 $P_2=$

(A) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

解. $P_1A$ 表示互换 $A$ 的第一、二行. $B$ 表示 $A$ 先互换第一、二行, 然后将互换后的矩阵的第一行乘以(－1)加到第三行. 所以 $P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$.(B)是答案.

6. 设 $A$ 为 $n$ 阶可逆矩阵, 则$(-A)^*$等于

(A) $-A^*$ (B) $A^*$ (C) $(-1)^nA^*$ (D) $(-1)^{n-1}A^*$

解. $(-A)^*=|-A|(-A)^{-1}=(-1)^n\ |A|\dfrac{1}{(-1)}A^{-1}=(-1)^{n-1}A^*$. (D)是答案.

7. 设 $n$ 阶矩阵 $A$ 非奇异$(n\ge 2)$, $A^*$是 $A$ 的伴随矩阵, 则

(A) $(A^*)^*=|A|^{n-1}A$ (B) $(A^*)^*=|A|^{n+1}A$

(C) $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$ (D) $(A^*)^*=|A|^{n+2}A$

解. $A^*=|A|A^{-1}$

$$(A^*)^*=(|A|A^{-1})^*=||A|A^{-1}|(|A|A^{-1})^{-1}=|A|^n|A|^{-1}|A|^{-1}A=|A|^{n-2}A$$

(C)是答案.

8. 设 $A$ 为 $m\times n$ 矩阵, $C$ 是 $n$ 阶可逆矩阵, 矩阵 $A$ 的秩为 $r_1$, 矩阵 $B=AC$ 的秩为 $r$, 则

(A) $r>r_1$ (B) $r<r_1$ (C) $r=r_1$ (D) $r$ 与 $r_1$ 的关系依 $C$ 而定

解. $B=A_{m\times n}C_{n\times n}$, $r(C)=n$, 所以

$$r=r(AC)\ge r(A)+r(C)-n=r_1$$

又因为 $A=BC^{-1}$, 于是

$$r_1=r(BC^{-1})\ge r(B)+r(C^{-1})-n=r$$

所以 $r_1=r$. (C)是答案.

9. 设 $A$、$B$ 都是 $n$ 阶非零矩阵, 且 $AB=0$, 则 $A$ 和 $B$ 的秩

(A) 必有一个等于零 (B) 都小于 $n$ (C) 一个小于 $n$, 一个等于 $n$ (D) 都等于 $n$

解. 若 $r(A)=n$, 则$A^{-1}$存在. 由 $AB=0$, 得 $B=0$, 矛盾. 所以 $r(A)<n$. 同理 $r(B)<n$. (B)是答案.

三. 计算证明题

1. 设 $A=\begin{bmatrix}3&1&0\\-1&2&1\\3&4&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&-2&5\\3&4&1\end{bmatrix}$. 求: i. AB－BA ii. $A^2-B^2$ iii. $B^TA^T$

解. $AB-BA=\begin{bmatrix}1 & -4 & 6\\ -17 & -17 & 3\\ 9 & -18 & 16\end{bmatrix}$, $A^2-B^2=\begin{bmatrix}9 & 4 & 6\\ -15 & -15 & 9\\ -3 & 26 & -13\end{bmatrix}$

$$B^TA^T=\begin{bmatrix}5 & 6 & 17\\ -5 & 1 & -3\\ 5 & 11 & 22\end{bmatrix}$$

2. 求下列矩阵的逆矩阵

i. $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ ii. $\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

iii. $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ iv. $\begin{bmatrix}5 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

解. i.

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & \mathrm{M} & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1 & -1 & \mathrm{M} & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & -1 & \mathrm{M} & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 1 & \mathrm{M} & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & \mathrm{M} & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -2 & \mathrm{M} & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & -2 & \mathrm{M} & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 0 & \mathrm{M} & -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & \mathrm{M} & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & \mathrm{M} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -2 & -2 & \mathrm{M} & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 0 & \mathrm{M} & -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & \mathrm{M} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & \mathrm{M} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -2 & -2 & \mathrm{M} & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 2 & \mathrm{M} & 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & \mathrm{M} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & \mathrm{M} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & \mathrm{M} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 2 & \mathrm{M} & 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & \mathrm{M} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & \mathrm{M} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & \mathrm{M} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 & \mathrm{M} & 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \vdots & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \vdots & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

ii. $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$. 由矩阵分块求逆公式:

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

得到: $A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

iii. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. 由矩阵分块求逆公式: $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$

所以 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

iv. 由矩阵分块求逆公式:

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

得到: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

3. 已知三阶矩阵 $A$ 满足 $A\alpha_i = i\alpha_i (i = 1,2,3)$. 其中 $\alpha_1 = (1,2,2)^T$, $\alpha_2 = (2,-2,1)^T$, $\alpha_3 = (-2,-1,2)^T$. 试求矩阵 $A$.

解. 由本题的条件知: $A\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 2 & -4 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & \mathrm{M} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & \mathrm{M} & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & \mathrm{M} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & \mathrm{M} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & \mathrm{M} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & \mathrm{M} & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & \mathrm{M} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \mathrm{M} & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 1 & \mathrm{M} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \mathrm{M} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -2 & \mathrm{M} & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -3 & \mathrm{M} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \mathrm{M} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -2 & \mathrm{M} & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{M} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathrm{M} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \mathrm{M} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{M} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix} \to$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 2 & -4 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix}$$

4. $k$ 取什么值时，$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 可逆，并求其逆.

解. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathrm{M} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \mathrm{M} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & \mathrm{M} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathrm{M} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mathrm{M} & 0 & 1/k & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \mathrm{M} & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathrm{M} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mathrm{M} & 0 & 1/k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{M} & -1 & 1/k & 1 \end{bmatrix}$$

所以 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/k & 0 \\ -1 & 1/k & 1 \end{bmatrix}$

5. 设 $A$ 是 $n$ 阶方阵，且有自然数 $m$，使$(E+A)^{m}=0$，则 $A$ 可逆.

解. 因为 $(E+A)^m = \sum_{i=0}^{m} c_m^i A^i = E + \sum_{i=1}^{m} c_m^i A^i = 0$

所以 $A(-\sum_{i=1}^{m} c_m^i A^{i-1}) = E$. 所以 $A$ 可逆.

6. 设 $B$ 为可逆矩阵, $A$ 是与 $B$ 同阶方阵, 且满足 $A^2+AB+B^2=0$, 证明 $A$ 和 $A+B$ 都是可逆矩阵.

解. 因为 $A^2+AB+B^2=0$, 所以 $A(A+B)=-B^2$.

因为 $B$ 可逆, 所以 $|-B^2|=(-1)^n|B|^2\neq 0$

所以 $|A(A+B)|=|-B^2|\neq 0$. 所以 $A$, $A+B$ 都可逆.

7. 若 $A,B$ 都是 $n$ 阶方阵, 且 $E+AB$ 可逆, 则 $E+BA$ 也可逆, 且

$$(E+BA)^{-1}=E-B(E+AB)^{-1}A$$

解. $(E+BA)(E-B(E+AB)^{-1}A)=E+BA-(E+BA)B(E+AB)^{-1}A$

$=E+BA-(B+BAB)(E+AB)^{-1}A=E+BA-B(E+AB)(E+AB)^{-1}A$

$=E+BA-BA=E$

所以 $(E+BA)^{-1}=E-B(E+AB)^{-1}A$.

8. 设 $A,B$ 都是 $n$ 阶方阵, 已知$|B|\neq 0$, $A-E$ 可逆, 且$(A-E)^{-1}=(B-E)^T$, 求证 $A$ 可逆.

解. 因为$(A-E)^{-1}=(B-E)^T$, 所以$(A-E)(B-E)^T=E$

所以 $A(B^T-E)-B^T+E=E$, $A(B^T-E)=B^T$

由 $|B|\neq 0$ 知 $B^{-1}$, $(B^T)^{-1}$ 存在.

所以 $A(B^T-E)(B^T)^{-1}=E$. 所以 $A$ 可逆.

9. 设 $A,B,A+B$ 为 $n$ 阶正交矩阵, 试证: $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$.

解. 因为 $A,B,A+B$ 为正交矩阵, 所以 $(A+B)^T=(A+B)^{-1}$, $A^T=A^{-1}$, $B^T=B^{-1}$

所以 $(A+B)^{-1}=(A+B)^T=A^T+B^T=A^{-1}+B^{-1}$

10. 设 $A,B$ 都是 $n$ 阶方阵, 试证明: $\begin{vmatrix} A & E \\ E & B \end{vmatrix}=|AB-E|$.

解. 因为 $\begin{bmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & -A \\ 0 & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & E \\ E & B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E & B \\ 0 & E-AB \end{bmatrix}$

所以 $\begin{vmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} E & -A \\ 0 & E \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & E \\ E & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} E & B \\ 0 & E-AB \end{vmatrix}$

$$(-1)^{n^2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} A & E \\ E & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} E & B \\ 0 & E-AB \end{vmatrix}=(-1)^n\,|AB-E|$$

因为 $(-1)^{n^2}=(-1)^n$, 所以 $\begin{vmatrix} A & E \\ E & B \end{vmatrix}=|AB-E|$

11. 设 $A$ 为主对角线元素均为零的四阶实对称可逆矩阵, $E$ 为四阶单位矩阵

$$B=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&k&0\\0&0&0&l\end{bmatrix}\quad(k>0,l>0)$$

i. 试计算$|E+AB|$, 并指出 $A$ 中元素满足什么条件时, $E+AB$ 可逆;
ii. 当 $E+AB$ 可逆时, 试证明$(E+AB)^{-1}A$ 为对称矩阵.

解. i. $A=\begin{bmatrix}0&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{12}&0&a_{23}&a_{24}\\a_{13}&a_{23}&0&a_{34}\\a_{14}&a_{24}&a_{34}&a_{44}\end{bmatrix}$,

$$AB=\begin{bmatrix}0&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{12}&0&a_{23}&a_{24}\\a_{13}&a_{23}&0&a_{34}\\a_{14}&a_{24}&a_{34}&a_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&k&0\\0&0&0&l\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&ka_{13}&la_{14}\\0&0&ka_{23}&la_{24}\\0&0&0&la_{34}\\0&0&ka_{34}&0\end{bmatrix}$$

$$E+AB=\begin{bmatrix}1&0&ka_{13}&la_{14}\\0&1&ka_{23}&la_{24}\\0&0&1&la_{34}\\0&0&ka_{34}&1\end{bmatrix},\quad |E+AB|=1-kla_{34}^2$$

所以当 $\frac{1}{kl}\neq a_{34}^2$ 时, $E+AB$ 可逆.

ii. $(E+AB)^{-1}A=[A^{-1}(E+AB)]^{-1}=(A^{-1}+B)^{-1}$

因为 $A, B$ 为实对称矩阵, 所以 $A^{-1}+B$ 为实对称矩阵, 所以$(E+AB)^{-1}A$ 为对称矩阵.

12. 设 $A=\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\1&\lambda&0\\0&1&\lambda\end{bmatrix}$, 求 $A^n$.

解. 使用数学归纳法.

$$A^2=\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\1&\lambda&0\\0&1&\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\1&\lambda&0\\0&1&\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^2&0&0\\2\lambda&\lambda^2&0\\1&2\lambda&\lambda^2\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}\lambda^2&0&0\\2\lambda&\lambda^2&0\\1&2\lambda&\lambda^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\1&\lambda&0\\0&1&\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^3&0&0\\3\lambda^2&\lambda^3&0\\(1+2)\lambda&3\lambda^2&\lambda^3\end{bmatrix}$$

假设 $A^k=\begin{bmatrix}\lambda^k&0&0\\k\lambda^{k-1}&\lambda^k&0\\(1+\Lambda+k-1)\lambda^{k-2}&k\lambda^{k-1}&\lambda^k\end{bmatrix}$

则 $A^{k+1}=\begin{bmatrix} \lambda^k & 0 & 0 \\ k\lambda^{k-1} & \lambda^k & 0 \\ (1+\Lambda+k-1)\lambda^{k-2} & k\lambda^{k-1} & \lambda^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} \lambda^{k+1} & 0 & 0 \\ (k+1)\lambda^k & \lambda^{k+1} & 0 \\ (1+\Lambda+k)\lambda^{k-1} & (k+1)\lambda^k & \lambda^{k+1} \end{bmatrix}$$

所以 $A^n=\begin{bmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ n\lambda^{n-1} & \lambda^n & 0 \\ (1+\Lambda+n-1)\lambda^{n-2} & n\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ n\lambda^{n-1} & \lambda^n & 0 \\ \dfrac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} & n\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{bmatrix}$

13. $A$ 是 $n$ 阶方阵, 满足 $A^{\mathrm{m}}=E$, 其中 $m$ 是正整数, $E$ 为 $n$ 阶单位矩阵. 今将 $A$ 中 $n^2$ 个元素 $a_{\mathrm{ij}}$ 用其代数余子式 $A_{\mathrm{ij}}$ 代替, 得到的矩阵记为 $A_0$. 证明 $A_0^m=E$.

解. 因为 $A^{\mathrm{m}}=E$, 所以 $|A|^m=1$, 所以 $A$ 可逆.

$$A_0=(A^*)^T=[|A|A^{-1}]^T=|A|(A^T)^{-1}$$

所以 $A_0^m=[|A|(A^T)^{-1}]^m=|A|^m\,[(A^m)^T]^{-1}=|A|^m\,E^{-1}=E$

14. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

i. 证明: $n\ge 3$ 时, $A^n=A^{n-2}+A^2-E$ ($E$ 为三阶单位矩阵)

ii. 求 $A^{100}$.

解. i. $A^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A+A^2-E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}=A^3$$

所以 $A^3=A^{3-2}+A^2-E$

假设 $A^k=A^{k-2}+A^2-E$

则 $A^{k+1}=A^{k-1}+A^3-A=A^{k-1}+A+A^2-E-A=A^{(k+1)-2}+A^2-E$

所以 $A^n = A^{n-2} + A^2 - E$

ii. $A^{100} = A^{98} + A^2 - E = A^{96} + 2A^2 - 2E = \Lambda = 50A^2 - 49E$

$$= \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 50 & 50 & 0 \\ 50 & 0 & 50 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 50 & 1 & 0 \\ 50 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

15. 当 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$时, $A^6 = E$. 求 $A^{11}$.

解. $|A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1$, 所以 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

因为 $A^6 = E$，$A^{11} = A^{12}A^{-1} = EA^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

16. 已知 $A, B$ 是 $n$ 阶方阵, 且满足 $A^2 = A, B^2 = B$, 与$(A-B)^2 = A + B$, 试证: $AB = BA = 0$.

解. 因为$(A-B)^2 = A + B$, 所以 $(A-B)^3 = (A-B)(A+B) = (A+B)(A-B)$

于是 $A^2 - BA + AB - B^2 = A^2 + BA - AB - B^2$, 所以 $AB = BA$

$(A-B)^2 = A + B$, $A^2 - AB - BA + B^2 = A + B$

因为 $A^2 = A, B^2 = B$, 所以 $2AB = 0$, 所以 $AB = BA = 0$.

# 第三章 向量

一. 填空题

1. 设$\alpha_1 = (2,-1,0,5), \alpha_2 = (-4,-2,3,0), \alpha_3 = (-1,0,1,k), \alpha_4 = (-1,0,2,1)$, 则 k = ______时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性相关.

解. 考察行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & k & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -8 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & -10 & k & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -8 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -10 & k & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -8 - 3k + 20 - 10 + 16k + 3 = 13k + 5 = 0. \qquad k = -\frac{5}{13}$$

2. 设$\alpha_1 = (2,-1,3,0), \alpha_2 = (1,2,0,-2), \alpha_3 = (0,-5,3,4), \alpha_4 = (-1,3,t,0)$, 则 $t$ = ______时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性相关.

解. 考察行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & t \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -5 & 5 & -5 & 3 \\ 3 & t & 3 & t \\ 4 & -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 5 & -5 \\ 3 & t & 3 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -20t + 60 + 30 + 20t - 30 - 60 = 0 .$$

所以对任何 $t$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.

3. 当 $k =$ ______时, 向量$\beta = (1, k, 5)$能由向量$\alpha_1 = (2,-3,2)$, $\alpha_2 = (2,-1,1)$, 线性表示.

解. 考察行列式

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ k & -3 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, 得 $k$ =－8. 当 $k$ =－8 时, 三个向量的行列式为 0, 于是$\beta, \alpha_1, \alpha_2$线性相关. 显然$\alpha_1, \alpha_2$线性无关,

所以$\beta$可用$\alpha_1, \alpha_2$线性表示.

4. 已知$\alpha_1 = (1,1,2,2,1)$, $\alpha_2 = (0,2,1,5,-10)$, $\alpha_3 = (2,0,3,-1,3)$, $\alpha_4 = (1,1,0,4,-1)$, 则秩$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) =$ ______.

解. 将$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$表示成矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2/5 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$ 所以 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$

5. 设 $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -9 & 0 \\ -1 & 3 & -16 & -1 \\ 2 & -4 & 22 & 3 \end{bmatrix}$, 则秩(A) = ______.

解. $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -9 & 0 \\ -1 & 3 & -16 & -1 \\ 2 & -4 & 22 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -9 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 7 \\ -1 & 3 & -16 & -1 \\ 2 & -4 & 22 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & 40 & 1 \\ 0 & -11 & 55 & 7 \\ 0 & 5 & -25 & -1 \\ 0 & -8 & 40 & 3 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & -9 & 0\\0 & 1 & -5 & -1/8\\0 & 1 & -5 & -7/11\\0 & 1 & -5 & -1/5\\0 & 1 & -5 & -3/8\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & -9 & 0\\0 & 1 & -5 & -1/8\\0 & 0 & 0 & -45/88\\0 & 0 & 0 & -3/40\\0 & 0 & 0 & -1/4\end{bmatrix}$$

所以　$r(A) = 3$.

6. 已知$\alpha = (1,0,-1,2)^T$, $\beta = (0,1,0,2)$, 矩阵 $A = \alpha \cdot \beta$, 则秩$(A)$ = ______.

$$解.\ A = \alpha\cdot\beta = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & -1 & 0 & -2\\0 & 2 & 0 & 4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

所以　$r(A) = 1$.

7. 已知向量$\alpha_1 = (1,2,3,4), \alpha_2 = (2,3,4,5), \alpha_3 = (3,4,5,6), \alpha_4 = (4,5,6,t)$, 且秩$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$, 则 t = ______.

$$解.\ A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 3 & 4 & 5\\3 & 4 & 5 & 6\\4 & 5 & 6 & t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & 1 & 2 & 3\\0 & -2 & -4 & -6\\0 & -3 & -6 & t-16\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & 1 & 2 & 3\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & t-7\end{bmatrix}$$

所以当 $t = 7$ 时, $r(A) = 2$.

二. 单项选择题

1. 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, 则下列向量组线性相关的是

(A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$　　(B) $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

(C) $\alpha_1-\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3-\alpha_1$　　(D) $\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_2 + \alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1$

解. 由　$k_1(\alpha_1-\alpha_2)+k_2(\alpha_2-\alpha_3)+k_3(\alpha_3-\alpha_1)=0$

得　$(k_1-k_3)\alpha_1+(k_2-k_1)\alpha_2+(k_3-k_2)\alpha_3=0$

因为向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, 所以得关于$k_1, k_2, k_3$的方程组

$$\begin{cases}k_1-k_3=0\\-k_1+k_2=0\\-k_2+k_3=0\end{cases}$$

$k_1, k_2, k_3$的系数行列式为 $\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\-1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\end{vmatrix} = 1-1=0$. 所以$k_1, k_2, k_3$有非零解, 所以$\alpha_1-\alpha_2$, $\alpha_2-\alpha_3$, $\alpha_3-\alpha_1$线性相关. (C)是答案.

2. 设矩阵 $A_{m\times n}$的秩为 $R(A) = m < n$, $E_m$为 $m$ 阶单位矩阵, 下列结论正确的是

(A) $A$ 的任意 $m$ 个列向量必线性无关　(B) $A$ 的任意一个 $m$ 阶子式不等于零

(C) 若矩阵 $B$ 满足 $BA = 0$, 则 $B = 0$　(D) $A$ 通过行初等变换, 必可以化为$(E_m, 0)$的形式

解. (A), (B)都错在"任意"; (D)不正确是因为只通过行初等变换不一定能将 $A$ 变成$(E_m, 0)$的形式; (C)是正确答案. 理由如下:

因为 $BA = 0$, 所以 $0 = r(BA) \ge r(B) + r(A) - m = r(B) + m - m = r(B)$. 所以 $r(B) = 0$. 于是 $B = 0$.

3. 设向量组 (I): $\alpha_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})^T, \alpha_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})^T, \alpha_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})^T$;设向量组 (II):

$\beta_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41})^T, \beta_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42})^T, \beta_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{43})^T$, 则

(A) (I)相关⇒(II)相关　　　　(B) (I)无关⇒(II)无关

(C) (II)无关⇒(I)无关　　　　(B) (I)无关⇔ (II)无关

解. 由定理: 若原向量组线性无关, 则由原向量组加长后的向量组也线性无关. 所以(B)是答案.

4. 设$\beta, \alpha_1, \alpha_2$线性相关, $\beta, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, 则

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关　　　　(B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关

(C) $\alpha_1$可用$\beta, \alpha_2, \alpha_3$线性表示　　　　(D) $\beta$可用$\alpha_1, \alpha_2$ 线性表示

解. 因为$\beta, \alpha_1, \alpha_2$线性相关, 所以$\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关. 又因为$\beta, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, 所以$\alpha_1$可用$\beta, \alpha_2, \alpha_3$线性表示. (C)是答案.

5. 设 $A, B$ 是 $n$ 阶方阵, 且秩($A$) = 秩($B$), 则

(A) 秩$(A-B) = 0$　　　　(B) 秩$(A + B) = 2$ 秩(A)

(C) 秩$(A-B) = 2$ 秩(A)　　　　(D) 秩$(A + B) \le$秩$(A)$ + 秩$(B)$

解. (A) 取 $A \ne B$ 且$|A| \ne 0$, $|B| \ne 0$ 则 $A-B \ne 0$, 则 $r(A-B) \ne 0$. 排除(A);

(B) 取 $A = -B \ne 0$, 则秩$(A + B) \ne 2$ 秩(A); (C) 取 $A = B \ne 0$, 则秩$(A-B) \ne 2$ 秩(A). 有如下定理: 秩$(A + B) \le$秩$(A)$ + 秩$(B)$. 所以(D)是答案.

三. 计算证明题

1. 设有三维向量$\alpha_1 = \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \end{bmatrix}$问 k 取何值时

i. $\beta$可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示, 且表达式唯一;

ii. $\beta$可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示, 但表达式不唯一;

iii. $\beta$不能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示.

解. $\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2k^2 - 2k = 2k(k-1)$

i. $k \ne 0$且$k \ne 1$时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, 四个三维向量一定线性相关, 所以$\beta$可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示, 由克莱姆法则知表达式唯一;

ii. 当 $k = 1$ 时

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots 1 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots 0 \end{bmatrix}$. 系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩为 2. 所以所以$\beta$可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示, 但表示不惟一;

iii. 当$k = 0$时

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \vdots 1 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots 0 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots 1 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots -1 \end{bmatrix}$.系数矩阵的秩等于 2, 增广矩阵的秩为 3, 所以所以$\beta$不能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示.

2. 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关, 向量组$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关, 问

i. $\alpha_1$能否由$\alpha_2, \alpha_3$线性表出？证明你的结论;
ii. $\alpha_4$能否由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表出？证明你的结论

解. i. $\alpha_1$不一定能由$\alpha_2, \alpha_3$线性表出. 反例: $\alpha_1 = (1,1)^T$, $\alpha_2 = (1,0)^T$, $\alpha_3 = (2,0)^T$. 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关, 但$\alpha_1$不能由$\alpha_2, \alpha_3$线性表出;

ii. $\alpha_4$不一定能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表出. 反例: $\alpha_1 = (2,0,0)^T$, $\alpha_2 = (1,0,0)^T$, $\alpha_3 = (0,1,0)^T$, $\alpha_4 = (0,0,1)^T$. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关, $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关, $\alpha_4$不能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表出.

3. 已知 $m$ 个向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots\alpha_m$线性相关, 但其中任意 $m-1$ 个都线性无关, 证明:
i. 如果存在等式

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

则这些系数 $k_1, k_2, \cdots k_m$或者全为零, 或者全不为零;
ii. 如果存在两个等式

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$
$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_m\alpha_m = 0$$

其中 $l_1 \neq 0$, 则$\dfrac{k_1}{l_1} = \dfrac{k_2}{l_2} = \Lambda = \dfrac{k_m}{l_m}$.

解. i. 假设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$, 如果某个 $k_i = 0$. 则

$$k_1\alpha_1 +\cdots+ k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

因为任意 $m-1$ 个都线性无关, 所以 $k_1, k_2, \cdots k_{i-1}, k_{i+1}, \cdots, k_m$都等于 0, 即这些系数 $k_1, k_2, \cdots k_m$或者全为零, 或者全不为零;

ii. 因为 $l_1 \neq 0$, 所以 $l_1, l_2, \cdots l_m$全不为零. 所以 $\alpha_1 = -\dfrac{l_2}{l_1}\alpha_2 - \Lambda - \dfrac{l_m}{l_1}\alpha_m$.

代入第一式得: $k_1(-\dfrac{l_2}{l_1}\alpha_2 - \Lambda - \dfrac{l_m}{l_1}\alpha_m) + k_2\alpha_2 + \Lambda + k_m\alpha_m = 0$

即 $$(-\frac{l_2}{l_1}k_1 + k_2)\alpha_2 + \Lambda + (-\frac{l_m}{l_1}k_1 + k_m)\alpha_m = 0$$

所以 $$-\frac{l_2}{l_1}k_1 + k_2 = 0, \cdots, -\frac{l_m}{l_1}k_1 + k_m = 0$$

即 $$\frac{k_1}{l_1} = \frac{k_2}{l_2} = \Lambda = \frac{k_m}{l_m}$$

4. 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, 问常数 $a, b, c$ 满足什么条件 $a\alpha_1-\alpha_2, b\alpha_2-\alpha_3, c\alpha_3-\alpha_1$线性相关.

解. 假设 $$k_1(a\alpha_1 - \alpha_2) + k_2(b\alpha_2 - \alpha_3) + k_3(c\alpha_3 - \alpha_1) = 0$$

得 $$(k_1a - k_3)\alpha_1 + (k_2b - k_1)\alpha_2 + (k_3c - k_2)\alpha_3 = 0$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, 得方程组 $$\begin{cases} ak_1 - k_3 = 0 \\ -k_1 + bk_2 = 0 \\ -k_2 + ck_3 = 0 \end{cases}$$

当行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & b & 0 \\ 0 & -1 & c \end{vmatrix} = 0$ 时, $k_1, k_2 k_3$ 有非零解. 所以 $abc = 1$ 时, $a\alpha_1 - \alpha_2, b\alpha_2 - \alpha_3, c\alpha_3 - \alpha_1$ 线性相关.

5. 设 $A$ 是 $n$ 阶矩阵, 若存在正整数 $k$, 使线性方程组 $A^k x = 0$ 有解向量$\alpha$, 且 $A^{k-1}\alpha \neq 0$, 证明: 向量组$\alpha, A\alpha, \ldots, A^{k-1}\alpha$是线性无关的.

解. 假设 $a_0\alpha + a_1 A\alpha + \Lambda + a_{k-1}A^{k-1}\alpha = 0$. 二边乘以 $A^{k-1}$ 得

$$a_0 A^{k-1}\alpha = 0, \qquad a_0 = 0$$

由 $a_1 A\alpha + \Lambda + a_{k-1}A^{k-1}\alpha = 0$. 二边乘以 $A^{k-1}$ 得

$$a_1 A^{k-1}\alpha = 0, \qquad a_1 = 0$$

……………………………

最后可得 $a_{k-1}A^{k-1}\alpha = 0, \qquad a_{k-1} = 0$

所以向量组$\alpha, A\alpha, \ldots, A^{k-1}\alpha$是线性无关.

6. 求下列向量组的一个极大线性无关组, 并把其余向量用极大线性无关组线性表示.

i. $\alpha_1 = (1,2,1,3), \alpha_2 = (4,-1,-5,-6), \alpha_3 = (-1,-3,-4,-7), \alpha_4 = (2,1,2,3)$.

ii. $\alpha_1 = (1,-1,2,4), \alpha_2 = (0,3,1,2), \alpha_3 = (3,0,7,14), \alpha_4 = (1,-2,2,0), \alpha_5 = (2,1,5,10)$.

解. 解. i. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -5 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & -7 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & -1 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & 0 \\ 0 & -18 & -4 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是极大线性无关组. 由 $\alpha_4 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$ 得方程组

$$\begin{cases} k_1 + 4k_2 - k_3 = 2 \\ 9k_2 + k_3 = 3 \\ 2k_3 = -3 \end{cases} \qquad \text{解得} \quad k_1 = k_3 = -\frac{3}{2}, \qquad k_2 = \frac{1}{2}$$

所以 $\alpha_4 = -\dfrac{3}{2}\alpha_1 + \dfrac{1}{2}\alpha_2 - \dfrac{3}{2}\alpha_3$

ii. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&-4&0\end{bmatrix}$$

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是极大线性无关组. 由 $\alpha_5=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_4$ 得方程组

$$\begin{cases}k_1+k_3=2\\k_2=1\\-k_3=0\\-4k_3=0\end{cases}\quad 解得\quad k_1=2,\quad k_2=1,\quad k_3=0$$

所以 $\alpha_5=2\alpha_1+\alpha_2+0\alpha_4$

由 $\alpha_3=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_4$ 得方程组

$$\begin{cases}k_1+k_3=3\\k_2=1\\-k_3=0\\-4k_3=0\end{cases}\quad 解得\quad k_1=3,\quad k_2=1,\quad k_3=0$$

所以 $\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2+0\alpha_4$

7. 已知三阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}x&y&y\\y&x&y\\y&y&x\end{bmatrix}$, 讨论秩(A)的情形.

解. i. $x=y=0$, $r(A)=0$

ii. $x=0,y\neq 0$或$x\neq 0,y=0$, $r(A)=3$

iii. $x=y\neq 0$, $r(A)=1$

iv. $x=-y\neq 0$, $r(A)=3$

iv. $x\neq 0,y\neq 0,x\neq\pm y$

$$A=\begin{bmatrix}x&y&y\\y&x&y\\y&y&x\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}xy&y^2&y^2\\xy&x^2&xy\\xy&xy&x^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}xy&y^2&y^2\\0&x^2-y^2&xy-y^2\\0&xy-y^2&x^2-y^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}x&y&y\\0&x+y&y\\0&y&x+y\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}x&y&y\\0&x+y&y\\0&0&x(x+2y)\end{bmatrix}$$

所以, 当 $x=-2y$ 时, $r(A)=2$; 当 $x\neq -2y$ 时, $r(A)=3$

8. 设三阶矩阵 $A$ 满足 $A^2=E$(E 为单位矩阵), 但 $A\neq\pm E$, 试证明:

$(\text{秩}(A-E)-1)(\text{秩}(A+E)-1)=0$

解. 由第十一题知

$$r(A+E)+r(A-E)=3$$

又因为 $A\neq\pm E$, 所以 $r(A+E)\neq 0$, $r(A-E)\neq 0$

所以 $r(A+E)$, $r(A-E)$ 中有一个为 1

所以 $(\text{秩}(A-E)-1)(\text{秩}(A+E)-1)=0$

9. 设 $A$ 为 $n$ 阶方阵, 且 $A^2=A$, 证明: 若 $A$ 的秩为 $r$, 则 $A-E$ 的秩为 $n-r$, 其中 $E$ 是 $n$ 阶单位矩阵.

解. 因为 $A^2=A$, 所以 $A(A-E)=0$

所以 $0=r(A(A-E))\geq r(A)+r(A-E)-n$

所以 $r(A)+r(A-E)\leq n$

又因为 $r(A)+r(A-E)=r(A)+r(E-A)\geq r(A+E-A)=r(E)=n$

所以 $r(A)+r(A-E)=n$. 所以 $r(A-E)=n-r$

10. 设 $A$ 为 $n$ 阶方阵, 证明: 如果 $A^2=E$, 则秩$(A+E)$+ 秩$(A-E)$ = n.

解. 因为 $A^2=E$, 所以 $0=(A-E)(A+E)$

所以 $0=r((A+E)(A-E))\geq r(A+E)+r(A-E)-n$

所以 $r(A+E)+r(A-E)\leq n$

又因为 $r(A+E)+r(A-E)=r(A+E)+r(E-A)\geq r(A+E+E-A)=r(2E)=n$

所以 $r(A+E)+r(A-E)=n$.

# 第四章　　线性方程组

一. 填空题

1. 在齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$ 中, 若秩(A) = k 且 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$ 是它的一个基础解系, 则 r = _____; 当 k = ______时, 此方程组只有零解.

解. $r=n-k$, 当 $k=n$ 时, 方程组只有零解.

2. 若 n 元线性方程组有解, 且其系数矩阵的秩为 r, 则当______时, 方程组有唯一解; 当______时, 方程组有无穷多解.

解. 假设该方程组为 $A_{m\times n}x=b$, 矩阵的秩 $r(A)=r$.

当 $r=n$, 方程组有惟一解; 当 $r<n$, 方程组有无穷多解.

3. 齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+kx_2+x_3=0\\2x_1+x_2+x_3=0\\kx_2+3x_3=0\end{cases}$ 只有零解, 则 k 应满足的条件是______.

解. $\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & k & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, $3+2k-k-6k \neq 0$, $k \neq \frac{3}{5}$ 时, 方程组只有零解.

4. 设 A 为四阶方阵, 且秩(A) = 2, 则齐次线性方程组 $A^*x = 0$($A^*$是 A 的伴随矩阵)的基础解系所包含的解向量的个数为______.

解. 因为矩阵 A 的秩 $r(A) = 2 < n-1 = 4-1 = 3$, 所以 $r(A^*) = 0$, $A^*x = 0$ 的基础解系所含解向量的个数为 4－0 = 4.

5. 设 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $Ax = 0$ 的通解为______.

解. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$r(A) = 2$, 基础解系所含解向量个数为 3－2=1.

$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$, 取 $x_3 = 1$, 则 $x_2 = x_1 = 1$. 基础解系为 $(1,\ 1,\ 1)^T$.

$Ax = 0$ 的通解为 $k(1,\ 1,\ 1)^T$, $k$ 为任意常数.

6. 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解, 若 $C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + \cdots + C_s\alpha_s$ 也是 $Ax = b$ 的一个解, 则 $C_1 + C_2 + \cdots + C_s =$ ______.

解. 因为 $A\alpha_i = b$, 且 $A(C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + \cdots + C_s\alpha_s) = b$, 所以 $(C_1 + \Lambda + C_s)b = b$, $C_1 + \Lambda + C_s = 1$.

7. 方程组 $Ax = 0$ 以 $\eta_1 = (1,0,2)^T$, $\eta_2 = (0,1,-1)^T$ 为其基础解系,则该方程的系数矩阵为___.

解. 方程组 $Ax = 0$ 的基础解系为 $\eta_1 = (1,0,2)^T$, $\eta_2 = (0,1,-1)^T$, 所以 $n - r(A) = 2$, 即 $3 - r(A) = 2$, $r(A) = 1$.

所以 $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ k_1\alpha_1 \\ k_2\alpha_2 \end{bmatrix}$, 假设 $\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$.

由 $A\eta_1 = 0$, 得 $(a_{11}, a_{12}, a_{13})\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = a_{11} + 2a_{13} = 0$

由 $A\eta_2 = 0$, 得 $(a_{11}, a_{12}, a_{13})\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = a_{12} - a_{13} = 0$

取 $a_{13} = 0$, 得 $a_{12} = 1, a_{11} = -2$. 所以 $\alpha_1 = (-2, 1, 1)$, $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ k_1\alpha_1 \\ k_2\alpha_2 \end{bmatrix}$ (其中 $k_1$, $k_2$ 为任意常数).

8. 设 A$x$ = b, 其中 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\2&-1&1\end{bmatrix}$, 则使方程组有解的所有 b 是______.

解. $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\2&-1&1\end{bmatrix}$, $\quad |A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&2\\2&-1&1\end{vmatrix}=5\neq 0$, 所以 $r(A)=3$.

因为 A$x$ = b 有解, 所以 $r\left(\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\2&-1&1\end{bmatrix}\right)=r\left(\begin{bmatrix}1&2&3&\vdots\\0&1&2&\vdots\ b\\2&-1&1&\vdots\end{bmatrix}\right)$

所以 $\quad b=k_1\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$, 其中 $k_1,k_2,k_3$ 为任意常数.

9. 设 A, B 为三阶方阵, 其中 $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\-1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4&-1&3\\2&k&0\\2&-1&1\end{bmatrix}$, 且已知存在三阶方阵 $X$, 使得 $AX=B$, 则 k = __________.

解. 由题设 $\quad A_{3\times3}X_{3\times3}=B$, 又因为 $|A|=\begin{vmatrix}1&1&2\\-1&2&1\\0&1&1\end{vmatrix}=0$,

所以 $|B|=|A||X|=0$, $\quad$ 即 $\begin{vmatrix}4&-1&3\\2&k&0\\2&-1&1\end{vmatrix}=4k-6-6k+2=0$, $k=-2$.

二. 单项选择题

1. 要使 $\xi_1=(1,0,1)^T$, $\xi_2=(-2,0,1)^T$ 都是线性方程组 $Ax=0$ 的解, 只要系数矩阵 A 为

(A) $\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&1&1\end{bmatrix}$ $\qquad$ (B) $\begin{bmatrix}-1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$ $\qquad$ (C) $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&2&0\\3&2&1\end{bmatrix}$ $\qquad$ (D) $\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&2&0\end{bmatrix}$

解. 因为 $\xi_1,\xi_2$ 的对应分量不成比例, 所以 $\xi_1,\xi_2$ 线性无关. 所以方程组 $Ax=0$ 的基础解系所含解向量个数大于 2.

(A) $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&1&1\end{bmatrix}$, $|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&1&1\end{vmatrix}\neq 0$, $r(A)=3$. 因为 A 是三阶矩阵, 所以 $Ax=0$ 只有零解, 排除(A);

(B) $A=\begin{bmatrix}-1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$, $r(A)=2$. 所以方程组 $Ax=0$ 的基础解系所含解向量个数:

$3-r(A)=1$. 排除(B);

(C) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$, $r(A)=2$.所以方程组$Ax=0$的基础解系所含解向量个数:

$3-r(A)=1$. 排除(C);

(D) $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$, $r(A)=1$.所以方程组$Ax=0$的基础解系所含解向量个数:

$3-r(A)=2$, (D)是答案.

2. 设$\xi_1,\xi_2,\xi_3$是$Ax=0$的基础解系, 则该方程组的基础解系还可以表成

(A) $\xi_1,\xi_2,\xi_3$的一个等阶向量组 (B) $\xi_1,\xi_2,\xi_3$的一个等秩向量组

(C) $\xi_1,\xi_1+\xi_2,\xi_1+\xi_2+\xi_3$ (C) $\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$

解. 由 $k_1\xi_1+k_2(\xi_1+\xi_2)+k_3(\xi_1+\xi_2+\xi_3)=0$, 得

$(k_1+k_2+k_3)\xi_1+(k_2+k_3)\xi_2+\xi_3k_3=0$. 因为$\xi_1,\xi_2,\xi_3$是$Ax=0$的基础解系, 所以$\xi_1,\xi_2,\xi_3$线性无关. 于是

$\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0\\ k_2+k_3=0\\ k_3=0\end{cases}$, 所以$k_1=k_2=k_3=0$, 则$\xi_1,\xi_1+\xi_2,\xi_1+\xi_2+\xi_3$线性无关. 它也可以是方程组的基础解系. (C)是答案.

(A) 不是答案. 例如$\xi_1,\xi_2,\xi_3$和$\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_1+\xi_2$等价, 但$\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_1+\xi_2$不是基础解系.

3. n阶矩阵A可逆的充分必要条件是

(A) 任一行向量都是非零向量 (B) 任一列向量都是非零向量

(C) $Ax=b$有解 (D) 当$x\neq 0$时, $Ax\neq 0$, 其中$x=(x_1,\Lambda\ ,x_n)^T$

解. 对(A), (B): 反例 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, 不可逆;

对于(C) 假设A为n×n矩阵, $\overline{A}$为A的增广矩阵. 当$r(A)=r(\overline{A})<n$时, $Ax=b$有无穷多解, 但A不可逆;

(D) 是答案, 证明如下: 当$x\neq 0$时, $Ax\neq 0$, 说明$Ax=0$只有零解. 所以$|A|\neq 0$, $A^{-1}$存在.

4. 设n元齐次线性方程组$Ax=0$的系数矩阵A的秩为r, 则$Ax=0$有非零解的充分必要条件是

(A) $r=n$ (B) $r\geq n$ (C) $r<n$ (D) $r>n$

解. (C)为答案.

5. 设$A$为$m\times n$矩阵, $B$为$n\times m$矩阵, 则线性方程组$(AB)x=0$

(A) 当$n>m$时仅有零解. (B) 当$n>m$时必有非零解.

(C) 当$m>n$时仅有零解. (D) 当$m>n$时必有非零解.

解. 因为$AB$矩阵为$m\times m$方阵, 所以未知数个数为 m 个. 又因为$r(AB)\leq r(A)\leq n$, 所以, 当$m>n$时,

$r(AB) \le r(A) \le n < m$，即系数矩阵的秩小于未知数个数，所以方程组有非零解.(D)为答案.

6. 设n阶矩阵A的伴随矩阵 $A^* \ne 0$，若 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的互不相等的解，则对应的齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系

(A) 不存在　　　　　　　　　　(B) 仅含一个非零解向量

(C) 含有二个线性无关解向量　　　(D) 含有三个线性无关解向量

解. 因为 $$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases}$$

因为 $A^* \ne 0$，所以 $r(A) \ge n-1$；又因为 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的互不相等的解，所以 $Ax = b$ 的解不唯一，所以 $r(A) \le n-1$，所以 $r(A) = n-1$. 于是:

基础解系所含解向量个数 $= n - r(A) = n - (n-1) = 1$

(B)为答案.

三. 计算证明题

1. 求方程组 $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -5 \\ -x_1 - 9x_2 - 4x_4 = 17 \end{cases}$ 的通解，并求满足方程组及条件 $5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1$ 的全部解.

解. 将条件方程与原方程组构成矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & \vdots & 11 \\ -3 & 1 & -4 & 2 & \vdots & -5 \\ -1 & -9 & 0 & -4 & \vdots & 17 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & \vdots & 11 \\ 0 & -14 & 2 & -7 & \vdots & 28 \\ 0 & -14 & 2 & -7 & \vdots & 28 \\ 0 & 28 & -4 & 14 & \vdots & 56 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & \vdots & 11 \\ 0 & -14 & 2 & -7 & \vdots & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 & 4 & \vdots & -17 \\ 0 & -14 & 2 & -7 & \vdots & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

i. 条件方程与原方程组兼容，即加上条件后的方程组与原方程组有相同的通解;

ii. $r(A) = r(\overline{A}) = 2$，方程组有解. 齐次方程组的基础解系含解向量的个数为 $4 - r(A) = 2$；

iii. 齐次方程的基础解系: $\begin{cases} x_1 + 9x_2 + 4x_4 = 0 \\ -14x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$

令 $x_2 = 0,\ x_4 = 1$ 得 $x_1 = -4, x_3 = \dfrac{7}{2}$

令 $x_2 = 1,\ x_4 = 0$ 得 $x_1 = -9, x_3 = 7$

基础解系为: $(-4, 0, \dfrac{7}{2}, 1)^T$，$(-9, 1, 7, 0)^T$

iv. 非齐次方程的通解: $\begin{cases} x_1+9x_2+4x_4=-17 \\ -14x_2+2x_3-7x_4=28 \end{cases}$

令 $x_3=0,\ x_4=0$ 得$x_1=1, x_2=-2$

所以全部解为: $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

2. 设有线性方程组$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=0 \\ 3x_1+2x_2+3x_3=-1 \\ -x_1+4x_2+mx_3=k \end{cases}$, 问 m, k 为何值时, 方程组有惟一解? 有无穷多组解? 有无穷多组解时, 求出一般解.

解. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 0 \\ 3 & 2 & 3 & \vdots & -1 \\ -1 & 4 & m & \vdots & k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & -7 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 7 & m+1 & \vdots & k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & -7 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & m+1 & \vdots & k-1 \end{bmatrix}$

i. 当$m\neq -1$时, $r(A)=r(\overline{A})=3$, 方程组有惟一解;

ii. 当$m=-1,\ k\neq 1$时, $r(A)\neq r(\overline{A})$, 方程组无解;

iii. 当$m=-1,\ k=1$时, $r(A)=r(\overline{A})=2<3$, 方程组有无穷多解. 此时基础解系含解向量个数为$3-r(A)=1$

齐次方程组: $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=0 \\ 7x_2=0 \end{cases}$, 所以$x_2=0$.

令 $x_3=1$, 得$x_1=-1$. 基础解系解向量为: $(-1,0,1)^T$.

非齐次方程组: $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=0 \\ 7x_2=1 \end{cases}$, 所以$x_2=\frac{1}{7}$.

令 $x_3=0$, 得$x_1=-\frac{3}{7}$. 非齐次方程特解为: $(-\frac{3}{7},\frac{1}{7},0)^T$.

通解为: $x=\begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 0 \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. 问 λ 为何值时, 线性方程组$\begin{cases} x_1+x_3=\lambda \\ 4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2 \\ 6x_1+x_2+4x_3=2\lambda+3 \end{cases}$ 有解, 并求出解的一般形式.

解. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & M & \lambda \\ 4 & 1 & 2 & M & \lambda+2 \\ 6 & 1 & 4 & M & 2\lambda+3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & M & \lambda \\ 0 & 1 & -2 & M & -3\lambda+2 \\ 0 & 1 & -2 & M & -4\lambda+3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & M & \lambda \\ 0 & 1 & -2 & M & -3\lambda+2 \\ 0 & 0 & 0 & M & -\lambda+1\end{bmatrix}$

iii. 当$-\lambda+1=0, \lambda=1$时, $r(A)=r(\overline{A})=2<3$, 方程组有无穷多解. 此时基础解系含解向量个数为$3-r(A)=1$

齐次方程组: $\begin{cases}x_1+x_3=0 \\ x_2-2x_3=0\end{cases}$,

令 $x_3=1$, 得$x_2=1$, $x_1=0$. 基础解系解向量为: $(-1,2,1)^T$.

非齐次方程组: $\begin{cases}x_1+x_3=1 \\ x_2-2x_3=-1\end{cases}$,

令 $x_3=0$, 得$x_1=1$, $x_2=-1$. 非齐次方程特解为: $(1,-1,0)^T$.

通解为: $x=\begin{bmatrix}1 \\ -1 \\ 0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-1 \\ 2 \\ 1\end{bmatrix}$

4. 已知$\alpha_1=(1,2,0)$, $\alpha_2=(1,a+2,-3a)$, $\alpha_3=(-1,b+2,a+2b)$及$\beta=(1,3,-3)$.

i. a, b 为何值时, β不能表示成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合.

ii. a, b 为何值时, β有$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的惟一线性表示, 并写出该表示式.

解. 假设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$, 求解方程组, 求$x_1, x_2, x_3$.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & M & 1 \\ 2 & a+2 & b+2 & M & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & M & -3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & M & 1 \\ 0 & a & b+4 & M & 1 \\ 0 & -3a & a+2b & M & -3\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & M & 1 \\ 0 & a & b+4 & M & 1 \\ 0 & 0 & a+5b+12 & M & -3\end{pmatrix}$$

i. $a=0, b\neq -4$时, $r(A)=2<r(\overline{A})=3$, 方程组无解, 即β不能表示成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合;

$a=0, b=-\frac{12}{5}$时, $r(A)=2=r(\overline{A})$, 方程组有无穷多解, 即β有无穷多种方法可表示成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合.

ii. $a\neq 0, a+5b+12\neq 0$时, $r(A)=3=r(\overline{A})$, 方程组有惟一解, 即β能表示成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合, 且表示法惟一.

此时得方程组$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1 \\ ax_2+(b+4)x_3=1 \\ (a+5b+12)x_3=0\end{cases}$,

解得: $x_3=0$, $x_2=\frac{1}{a}$, $x_1=1-\frac{1}{a}$, 表示式为: $\beta=(1-\frac{1}{a})\alpha_1+\frac{1}{a}\alpha_2+0\alpha_3$.

5. 知方程组$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + bx_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + cx_4 = 1 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$

同解, 试确定 a, b, c.

解. 在第二个方程组中求一组特解. 令 $x_3 = 1, 解得 x_4 = -1,\ x_2 = 1,\ x_1 = 0$. 将该组特解代入第一个方程组中得:

$a = 2, b = 4, c = 4$.

6. 已知下列非齐次线性方程组(Ⅰ)、(Ⅱ)

(Ⅰ) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$ (Ⅱ) $\begin{cases} x_1 + mx_2 - x_3 - x_4 = -5 \\ nx_2 - x_3 - 2x_4 = -11 \\ x_3 - 2x_4 = -t + 1 \end{cases}$

i. 求解方程组(Ⅰ), 用其导出组的基础解系表示通解;
ii. 当方程组(Ⅱ)中的参数 m, n, t 为何值时, 方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)同解.
解. i. 由第一个方程组:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & M & -6 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & M & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & M & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & M & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 7 & M & 25 \\ 0 & -4 & -1 & 6 & M & 21 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & M & -6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} & M & -5 \\ 0 & -4 & -1 & 6 & M & 21 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & M & -6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} & M & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & M & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & M & -6 \\ 0 & 5 & 1 & -7 & M & -25 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & M & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & M & -6 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & M & -20 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & M & 5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & M & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & M & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & M & 5 \end{pmatrix}$$

$r(A) = r(\overline{A}) = 3$, 齐次方程基础解系所含解向量个数为: $4 - r(A) = 1$.

齐次方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ -x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$. 令 $x_4 = 1, 解得 x_3 = 2,\ x_2 = 1,\ x_1 = 1$.

基础解系为: $(1,1,2,1)^T$.

非齐次方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6 \\ x_2 - x_4 = -4 \\ -x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$. 令 $x_4 = 0, 解得 x_3 = -5,\ x_2 = -4,\ x_1 = -2$.

所以第一个方程组的通解为: $x=\begin{bmatrix}-2\\-4\\-5\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\1\\2\\1\end{bmatrix}$

ii. 将$\begin{bmatrix}-2\\-4\\-5\\0\end{bmatrix}$代入第二个方程组:

$$\begin{cases}-2-4m+5=-5 & m=2\\ -4n+5=-11 & n=4\\ -5=-t+1 & t=6\end{cases}.$$

7. 设 A 是 m×n 矩阵, R 是 m×n 矩阵, x =$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ , B 是 m×m 矩阵, 求证: 若 B 可逆且 BA 的行向量都是方程组 $Rx=0$ 的解, 则 A 的每个行向量也都是该方程组的解.

解. 假设$B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1m}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2m}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mm}\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_m\end{bmatrix}$, 其中$\alpha_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$为 A 的行向量.

$$BA=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1m}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2m}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}\alpha_1+\cdots+b_{1m}\alpha_m\\b_{21}\alpha_1+\cdots+b_{2m}\alpha_m\\\vdots\\b_{m1}\alpha_1+\cdots+b_{mm}\alpha_m\end{bmatrix}$$

因为 $BA$ 的行向量都是方程组 $Rx=0$ 的解, 所以: $R(\sum_{k=1}^{m}b_{ik}\alpha_k)^T=0,\quad (i=1,2,\cdots,m)$.

所以: $\sum_{k=1}^{m}b_{ik}R\alpha_k{}^T=0,\quad (i=1,2,\cdots,m)$, 即 $B(R\alpha_i{}^T)=0,\ (i=1,2,\cdots,m)$.

因为 $B$ 可逆, 所以 $R\alpha_i{}^T=0,\ (i=1,2,\cdots,m)$. 即 $A$ 的每个行向量为 $Rx=0$ 的解.

8. $A$ 是 $n$ 阶矩阵, 且 $A\neq 0$. 证明:存在一个 $n$ 阶非零矩阵 $B$, 使 $AB=0$ 的充分必要条件是$|A|=0$.

解. 必要性:

(反证法) 反设$|A|\neq 0$, 则 $A^{-1}$ 存在. 所以当 $AB=0$ 时, 二边右乘 $A^{-1}$ 得 $B=0$, 和存在一个 $n$ 阶非零矩阵 $B$, 使 $AB=0$ 矛盾. 所以$|A|=0$;

充分性:

设 $|A|=0$, 则方程组 $Ax=0$ 有非零解 $x=(b_{1,}b_2,\cdots b_n)$. 构造矩阵

$$B=\begin{bmatrix} b_1 & 0 & \Lambda & 0 \\ b_2 & 0 & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ b_n & 0 & \Lambda & 0 \end{bmatrix}$$

则 $B\neq 0$，且 $AB=0$.

9. 假设 $A$ 是 $m\times n$ 阶矩阵,若对任意 $n$ 维向量 $x$，都有 $Ax=0$，则 $A=0$.

解. 假设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_n)$，$\alpha_i$ 为 $A$ 的列向量 $(i=1,2,\Lambda\ ,n)$. 取 $\beta_i=(0,\Lambda\ ,1,\Lambda\ ,0)^T$ $(i=1,2,\Lambda\ ,n)$，只有第 $i$ 个分量为 1，其余都为 0. 则

$$A\beta_i=A\begin{pmatrix}0\\ M\\ 1\\ M\\ 0\end{pmatrix}=\alpha_i=0,\quad (i=1,2,\Lambda\ ,n)$$

所以 $A=0$.

10. 假设 $A=\begin{bmatrix}2&1&1&2\\0&1&3&1\\1&a&c&1\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\eta=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$. 如果η是方程组 $Ax=b$ 的一个解，试求 $Ax=b$ 的通解.

解. 将 $\eta=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$ 代入 $Ax=b$，得到 $1-a+c-1=0,\ \ a=c$.

$$\begin{bmatrix}2&1&1&2&M\,0\\0&1&3&1&M\,1\\1&a&a&1&M\,0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2&1&1&2&M\,0\\0&1&3&1&M\,1\\0&a-\frac{1}{2}&a-\frac{1}{2}&0&M\,0\end{bmatrix}$$

i. $a=c=\dfrac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix}2&1&1&2&M\,0\\0&1&3&1&M\,1\\1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&M\,0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2&1&1&2&M\,0\\0&1&3&1&M\,1\\0&0&0&0&M\,0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2&0&-2&1&M-1\\0&1&3&1&M\ \ 1\\0&0&0&0&M\ \ 0\end{bmatrix}$$

于是 $r(A)=r(\overline{A})=2$，基础解系所含解向量个数为：$4-r(A)=2$.

齐次方程：$\begin{cases}2x_1-2x_3+x_4=0\\ x_2+3x_3+x_4=0\end{cases}$，

令 $x_3=1,\ x_4=0$，解得 $x_2=-3,\ x_1=1$，解向量为：$(1,-3,1,0)^T$

令 $x_3=0,\ x_4=2$，解得 $x_2=-2,\ x_1=-1$，解向量为：$(1,-2,0,2)^T$

所以通解为: $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\-3\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\2\end{bmatrix}$

i. $a=c\neq\frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix}2&1&1&2&\vdots&0\\0&1&3&1&\vdots&1\\1&a&a&1&\vdots&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&1&2&\vdots&0\\0&1&3&1&\vdots&1\\0&a-\frac{1}{2}&a-\frac{1}{2}&0&\vdots&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}2&0&-2&1&\vdots&-1\\0&1&3&1&\vdots&1\\0&0&1-a&\frac{1}{2}-a&\vdots&\frac{1}{2}-a\end{bmatrix}$$

于是 $r(A)=r(\overline{A})=3$, 基础解系所含解向量个数为: $4-r(A)=1$.

齐次方程: $\begin{cases}2x_1-2x_3+x_4=0\\x_2+3x_3+x_4=0\\(1-a)x_3+(\frac{1}{2}-a)x_4=0\end{cases}$,

令 $x_4=2$, 解得 $x_3=-1, x_2=1, x_1=-2$, 解向量为: $(-2,1,-1,2)^T$

所以通解为: $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-2\\1\\-1\\2\end{bmatrix}$

11. 假设 $A=\begin{bmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&4\\1&-2\\-2&-2\end{bmatrix}$. 如果矩阵方程 $AX=B$ 有解, 但解不惟一, 试确定参数 $a$.

解. $\begin{bmatrix}1&1&a&\vdots&1&4\\1&a&1&\vdots&1&-2\\a&1&1&\vdots&-2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&a&\vdots&1&4\\0&a-1&1-a&\vdots&0&-6\\0&1-a&1-a^2&\vdots&-2-a&-2-4a\end{bmatrix}$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&a&\vdots&1&4\\0&a-1&1-a&\vdots&0&-6\\0&0&(1-a)(2+a)&\vdots&-2-a&-8-4a\end{bmatrix}$$

当 $a=-2$ 时, 对于 B 的任一列向量, 都有 $r(A)=r(\overline{A})=2<3$, 所以矩阵方程 $AX=B$ 有解, 但解不惟一.

# 第五章　　特征值和特征向量

一. 填空题

1. 设 A 是 n 阶方阵, $A^*$ 为 A 的伴随矩阵, $|A| = 5$, 则方阵 $B = AA^*$ 的特征值是______, 特征向量是______.

解. 因为 $AA^* = A^*A = |A|E$, 所以对于任意 $n$ 维向量 $\alpha$ 有 $AA^*\alpha = |A|E\alpha = |A|\alpha$. 所以$|A| = 5$ 是 $B = AA^*$ 的特征值, 任意 $n$ 维向量α 为对应的特征向量.

2. 三阶方阵 A 的特征值为 1, －1, 2, 则 $B = 2A^3 - 3A^2$ 的特征值为_______.

解. $B = 2A^3 - 3A^2$ 的特征值为:

$$2\cdot 1^3 - 3\cdot 1^2 = -1,\ 2\cdot(-1)^3 - 3\cdot(-1)^2 = -5,\ 2\cdot 2^3 - 3\cdot 2^2 = 4$$

3. 设 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 且 A 的特征值为 2 和 1(二重), 那么 B 的特征值为_______.

解. $A, A^T$ 具有相同的特征值. $B = A^T$, 所以 $B$ 和 $A$ 具有相同的特征值. $B$ 的特征值为: 2 和 1(二重).

4. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 相似, 则 x = _____, y = ______.

解. 因为 $A, B$ 相似, 所以 $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = -2 = |B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2y,\quad y = 1$.

相似矩阵的迹相等: $tr(A) = 2 + x = tr(B) = 2 + y - 1 = 2$. 于是 $x = 0$.

5. 设 $A, B$ 为 $n$ 阶方阵, 且 $|A| \neq 0$, 则 $AB$ 与 $BA$ 相似, 这是因为存在可逆矩阵 P = ______, 使得 $P^{-1}ABP = BA$.

解. 因为 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆. 令 $P = A$, 则 $P^{-1}ABP = A^{-1}ABA = BA$. 即 $AB$ 与 $BA$ 相似.

二. 单项选择题

1. 零为矩阵 $A$ 的特征值是 $A$ 为不可逆的

(A) 充分条件　(B) 必要条件　(C)充要条件　(D) 非充分、非必要条件

解. 假设 $\lambda_1, \lambda_2, \Lambda, \lambda_n$ 为 $A$ 的所有特征值, 则 $|A| = \lambda_1\lambda_2\Lambda\ \lambda_n$. 所以:

　　0 为 $A$ 的特征值 $\Leftrightarrow A$ 可逆

(C)为答案.

2. 设 $\lambda_1, \lambda_2$ 是矩阵 $A$ 的两个不同的特征值, $\xi, \eta$ 是 A 的分别属于 $\lambda_1, \lambda_2$ 的特征向量, 则

(A) 对任意 $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$, $k_1\xi + k_2\eta$ 都是 $A$ 的特征向量.

(B) 存在常数$k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$, $k_1\xi + k_2\eta$ 是 $A$ 的特征向量.

(C) 当$k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$时, $k_1\xi + k_2\eta$ 不可能是 $A$ 的特征向量.

(D) 存在惟一的一组常数$k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$, 使$k_1\xi + k_2\eta$ 是 $A$ 的特征向量.

解. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为 $A$ 的二个相异的特征值, 所以存在非零向量$\xi, \eta$, 满足$A\xi = \lambda_1\xi$, $A\eta = \lambda_2\eta$. 而且$\xi, \eta$线性无关.

假设存在 λ 满足: $A(k_1\xi + k_2\eta) = \lambda(k_1\xi + k_2\eta)$

所以 $\lambda_1 k_1\xi + \lambda_2 k_2\eta = \lambda k_1\xi + \lambda k_2\eta$, 即 $(\lambda_1 k_1 - \lambda k_1)\xi + (\lambda_2 k_2 - \lambda k_2)\eta = 0$

因为 $\xi, \eta$ 线性无关, 所以 $\lambda_1 k_1 - \lambda k_1 = 0,\quad \lambda = \lambda_1$; $\lambda_1 k_2 - \lambda k_2 = 0,\quad \lambda = \lambda_2$.

和$\lambda_1 \neq \lambda_2$矛盾. 所以(C)为答案.

3. 设$\lambda_0$是 $n$ 阶矩阵 $A$ 的特征值, 且齐次线性方程组$(\lambda_0 E - A)x = 0$的基础解系为$\eta_1$和$\eta_2$, 则 $A$ 的属于$\lambda_0$的全部特征向量是

(A) $\eta_1$和$\eta_2$ (B) $\eta_1$或$\eta_2$

(C) $C_1\eta_1 + C_2\eta_2$($C_1, C_2$为任意常数) (D) $C_1\eta_1 + C_2\eta_2$($C_1, C_2$为不全为零的任意常数)

解. 因为齐次线性方程组$(\lambda_0 E - A)x = 0$的基础解系为$\eta_1$和$\eta_2$, 所以方程组$(\lambda_0 E - A)x = 0$的全部解为$C_1\eta_1 + C_2\eta_2$($C_1, C_2$为任意常数). 但特征向量不能为零, 则 $A$ 的属于$\lambda_0$的全部特征向量是: $C_1\eta_1 + C_2\eta_2$($C_1, C_2$为不全为零的任意常数), (D)为答案.

4. 设$\lambda_1, \lambda_2$是矩阵 $A$ 的两个不同的特征值, $\alpha$与$\beta$ 是 $A$ 的分别属于$\lambda_1, \lambda_2$的特征向量, 则有$\alpha$与$\beta$ 是

(A) 线性相关 (B) 线性无关 (C) 对应分量成比例 (D) 可能有零向量

解. (B)是答案.

5. 与 $n$ 阶单位矩阵 E 相似的矩阵是

(A) 数量矩阵$kE(k \neq 1)$ (B) 对角矩阵$D$(主对角元素不为 1)

(C) 单位矩阵$E$ (D) 任意 $n$ 阶矩阵 $A$

解. 令$P = E$, 则$P^{-1} = E$. 所以$P^{-1}EP = EEE = E$. 所以(C)是答案.

6. $A, B$是 $n$ 阶方阵, 且$A \sim B$, 则

(A) $A, B$的特征矩阵相同 (B) $A, B$的特征方程相同

(C) $A, B$相似于同一个对角阵 (D) 存在正交矩阵 T, 使得$T^{-1}AT = B$

解. $A \sim B$, 则存在可逆方阵 $P$, 使得$P^{-1}AP = B$. 所以

$$|\lambda E - B| = |\lambda E - P^{-1}AP| = |P^{-1}||\lambda E - A||P| = |\lambda E - A|$$

所以$A, B$的有相同的特征方程, (B)是答案.

三. 计算证明题

1. 设 $\lambda=1$ 是矩阵 $A=\begin{bmatrix}-3 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 4\\ t & 0 & 1\end{bmatrix}$ 的特征值, 求: i. $t$ 的值; ii. 对应于 $\lambda=1$ 的所有特征向量.

解. $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-3-\lambda & -1 & 2\\ 0 & -1-\lambda & 4\\ t & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(3+\lambda)(1-\lambda^2)-4t+2t(1+\lambda)=0$

当 $\lambda=1$ 时, $-4t+4t=0$. 所以 $t$ 为任意实数.

i. $t\neq 0,\ \lambda=1$ 时

$$A-\lambda E=\begin{bmatrix}-4 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 4\\ t & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-4 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 4\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 4\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

所以 $r(A-\lambda E)=2$. 方程组 $(A-\lambda E)x=0$ 基础解系所含解向量个数为

$$3-r(A-\lambda E)=3-2=1$$

相应的方程组为 $\begin{cases}x_2-2x_3=0\\ x_1=0\end{cases}$. 取 $x_3=1$, 得 $x_2=2$. 所以解向量为 $\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$, 对应于 $\lambda=1$ 的全部特征向量为 $k\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$;

ii. $t=0,\ \lambda=1$ 时

$$A-\lambda E=\begin{bmatrix}-4 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

所以 $r(A-\lambda E)=2$. 方程组 $(A-\lambda E)x=0$ 基础解系所含解向量个数为

$$3-r(A-\lambda E)=3-2=1$$

相应的方程组为 $\begin{cases}x_1=0\\ x_2-2x_3=0\end{cases}$. 取 $x_3=1$, 得 $x_2=2$. 所以解向量为 $\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$, 对应于 $\lambda=1$ 的全部特征向量为 $k\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$.

2. 求 n 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \mathrm{O} & \mathrm{O} & & \\ & & & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \\ & & & & 0 & 1\\ & & & & & 0\end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解. $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & & & \\ & -\lambda & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -\lambda & 1 \\ & & & & & -\lambda \end{vmatrix}=(-\lambda)^n=0,\ \ \lambda=0$

$$A-\lambda E=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix},\qquad r(A-\lambda E)=n-1$$

所以方程组 $(A-\lambda E)x=Ax=0$ 的基础解系所含解向量个数为 $n-(n-1)=1$.

相应的方程组为 $\begin{cases} x_2=0 \\ x_3=0 \\ \cdots\cdots \\ x_n=0 \end{cases}$，令 $x_1=1$，得解向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

于是对应于 $\lambda=0$ 的全部特征向量为 $k\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ($k\neq 0$).

3. 假定 n 阶矩阵 A 的任意一行中, n 个元素的和都是 $a$, 试证 $\lambda=a$ 是 A 的特征值, 且$(1, 1, \cdots, 1)^T$是对应于 $\lambda=a$ 的特征向量, 又问此时 $A^{-1}$ 的每行元素之和为多少?

解. 假设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，且 $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}=a\ \ (i=1,2,\cdots,n)$

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

所以 $\lambda=a$ 为 $A$ 的特征值, 对应的特征向量为$(1, 1, \cdots, 1)^T$.

因为 $A$ 可逆，所以 $\frac{1}{a}$ 为 $A^{-1}$ 的特征值，对应的特征向量也是$(1, 1, \cdots, 1)^T$.

即 $\quad A^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\dfrac{1}{a}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$. 所以 $A^{-1}$ 的每行和为 $\dfrac{1}{a}$.

4. 设 $A,B$ 均是 n 阶方阵, 且 $r(A)+r(B)<n$, 证明 $A,B$ 有公共的特征向量.

解. 考察方程组 $\begin{cases}Ax=0\\Bx=0\end{cases}$. $r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\le r(A)+r(B)<n$. 所以方程组有非零解 α

则解向量α为 $A,B$ 的公共特征向量, 对应的特征值为 $\lambda=0$.

5. 设三阶矩阵 $A$ 满足 $A\alpha_i=i\alpha_i(i=1,2,3)$, 其中列向量 $\alpha_1=(1,2,2)^T$, $\alpha_2=(2,-2,1)^T$, $\alpha_3=(-2,-1,2)^T$, 试求矩阵 $A$.

解. 矩阵 $P=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-2&1&0&0\\2&-2&-1&0&1&0\\2&1&2&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-2&1&0&0\\0&-6&3&-2&1&0\\0&-3&6&-2&0&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-2&1&0&0\\0&-3&6&-2&0&1\\0&0&-9&2&1&-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-2&1&0&0\\0&1&-2&\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{3}\\0&0&1&-\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&-\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}\\0&1&-2&\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{3}\\0&0&1&-\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\\0&1&0&\frac{2}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\0&0&1&-\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\end{array}\right]$$

所以 $\quad P^{-1}=\dfrac{1}{9}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{bmatrix}$, $\quad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

所以 $\quad A=P\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}P^{-1}=\dfrac{1}{9}\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{bmatrix}$

$$=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\4&-4&2\\-6&-3&6\end{bmatrix}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}21&0&-6\\0&15&-6\\-6&-6&18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{3}&0&-\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&2\end{bmatrix}$$

6. 设矩阵 $A$ 与 $B$ 相似, 其中 $A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & x\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}y & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$,

i. 求 $x$ 和 $y$ 的值; ii. 求可逆矩阵 $P$, 使得 $P^{-1}AP=B$.

解. 因为 $A$ 相似于 $B$, 所以$|A|=|B|$, 所以 $-x=y$; 且 $tr(A)=tr(B)$, 所以 $x=y+2$.

得 $x=1,\ y=-1$.

由 $B$ 的表达式知: A 的二个特征值为 $\lambda=\pm 1$

i. $\lambda=-1$

$$(A+E)x=0,\ \text{即}\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}x=0,$$

$$\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad r(A+E)=2$$

方程组 $(A+E)x=0$ 的基础解系只有一个解向量.

相应的方程组为 $\begin{cases}x_2=0\\ x_3=0\end{cases}$, 取 $x_1=1$

得特征向量: $\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$

ii. $\lambda=1$

$$(A-E)x=0,\ \text{即}\begin{bmatrix}-2 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}x=0,\quad r(A+E)=1,$$

方程组 $(A+E)x=0$ 的基础解系有二个解向量.

相应的方程组为 $x_1+x_2-x_3=0$,

取 $x_1=1,\ x_2=0,\ \text{得}x_3=1$, 取 $x_1=0,\ x_2=1,\ \text{得}x_3=1$

得二个线性无关的特征向量: $\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$.

所以矩阵 $P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

7. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$, 矩阵 $B=(kE+A)^2$, 其中 $k$ 为实数, $E$ 为单位矩阵, 求对角矩阵$\Lambda$, 使得 $B$ 与$\Lambda$相似, 并求 $k$ 为何值时, $B$ 为正定矩阵.

解. $B=(kE+A)^2=\begin{bmatrix}k+1&0&1\\0&k+2&0\\1&0&k+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k+1&0&1\\0&k+2&0\\1&0&k+1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}(k+1)^2+1&0&2k+2\\0&(k+2)^2&0\\2k+2&0&(k+1)^2+1\end{bmatrix}$$

$$|B-\lambda E|=\begin{vmatrix}(k+1)^2+1-\lambda&0&2k+2\\0&(k+2)^2-\lambda&0\\2k+2&0&(k+1)^2+1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=[(k+1)^2+1-\lambda]^2[(k+2)^2-\lambda]-4(k+1)^2[(k+2)^2-\lambda]=0$$

解得 $\lambda_1=k^2$, $\lambda_{2,3}=(k+2)^2$. 其中 $\lambda_{2,3}=(k+2)^2$ 为二重根.

当 $\lambda=(k+2)^2$ 时, $(k+1)^2+1-\lambda=k^2+2k+1+1-k^2-4k-4=-2k-2$

$$B-\lambda E=\begin{bmatrix}(k+1)^2+1-\lambda&0&2k+2\\0&(k+2)^2-\lambda&0\\2k+2&0&(k+1)^2+1-\lambda\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2k-2&0&2k+2\\0&0&0\\2k+2&0&-2k-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2k-2&0&2k+2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$r(B-\lambda E)=1$, 所以方程组 $(B-\lambda E)x=0$ 的基础解系有二个解向量, 所以 $B$ 可以对角化. 即 B 相似于对角矩阵:

$$\begin{bmatrix}(k+2)^2&0&0\\0&(k+2)^2&0\\0&0&k^2\end{bmatrix}.$$

$k\neq 2$, $k\neq 0$ 时, $B$ 的特征值都为正, 此时, $B$ 为正定阵.

8. 设 $n$ 阶矩阵 $A$ 的特征值为 1, 2, $\cdots$, $n$, 试求$|2A+E|$.

解. 因为 $A$ 的特征值为 1, 2, $\cdots$, $n$, 所以 $2A+E$ 的特征值为 $2i+1$ $(i=1,2,\Lambda,n)$. 所以$|2A+E|=\prod_{i=1}^{n}(2i+1)$.

9. 某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计, 然后将$\frac{1}{6}$熟练工支援其它生产部门, 其缺额由招收新的非熟练工补齐. 新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有$\frac{2}{5}$成为熟练工, 设第 $n$ 年一月份统计的熟练工和非熟

练工所占百分比分别为$x_n$和$y_n$，记成向量$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$

i. 求$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$的关系式并写出矩阵形式: $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$;

ii. 验证$\eta_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\eta_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$是 A 的两个线形无关的特征向量, 并求出相应的特征值;

iii. 当$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$时, 求$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$.

解. i. 由题设可得以下递推关系:

第 $n$ 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为$x_n$和$y_n$，熟练工的$\frac{1}{6}$, 即$\frac{1}{6}x_n$支援其它生产部门, 缺额招收新的非熟练工, 所以总的非熟练工为$\frac{1}{6}x_n + y_n$.到第 n + 1 年, 其中的$\frac{2}{5}$成为熟练工, $\frac{3}{5}$还是非熟练工. 所以得到

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{5}{6}x_n + \frac{2}{5}(\frac{1}{6}x_n + y_n) \\ y_{n+1} = \frac{3}{5}(\frac{1}{6}x_n + y_n) \end{cases}, \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_{n+1} = \frac{9}{10}x_n + \frac{2}{5}y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{10}x_n + \frac{3}{5}y_n \end{cases}$$

所以 $$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

ii. $\eta_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\eta_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A\eta_1 = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, 所以$\eta_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$是 A 的特征向量, 相应的特征值为$\lambda_1 = 1$;

$A\eta_2 = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 所以$\eta_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$是 A 的特征向量, 相应的特征值为$\lambda_2 = \frac{1}{2}$.

iii. 假设$P = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $\qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

所以$A^n = P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^n P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4+(\frac{1}{2})^n & 4-4(\frac{1}{2})^n \\ 1-(\frac{1}{2})^n & 1+4(\frac{1}{2})^n \end{bmatrix}$

所以 $$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = A^2\begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \Lambda = A^n\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = A^n\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4+(\frac{1}{2})^n & 4-4(\frac{1}{2})^n \\ 1-(\frac{1}{2})^n & 1+4(\frac{1}{2})^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}8-3(\frac{1}{2})^n \\ 2+3(\frac{1}{2})^n\end{bmatrix}$$

12. 设$\lambda_1,\lambda_2$是方阵 A 的两个不同的特征值，$\eta_1,\cdots,\eta_r$是 A 的对应于$\lambda_1$的线性无关的特征向量，$\xi_1,\cdots,\xi_s$是 A 的对应于$\lambda_2$的线性无关的特征向量，证明$\eta_1,\cdots,\eta_r,\xi_1,\cdots,\xi_s$线性无关.

解. 由题设知: $A\eta_i=\lambda_1\eta_i \quad (i=1,2,\cdots,r)$；$A\xi_j=\lambda_2\xi_j \quad (j=1,2,\cdots,s)$

假设 $k_1\eta_1+\cdots+k_r\eta_r+k_{r+1}\xi_1+\cdots+k_{r+s}\xi_s=0$，

所以 $A(k_1\eta_1+\cdots+k_r\eta_r)+A(k_{r+1}\xi_1+\cdots+k_{r+s}\xi_s)=0$

于是 $\lambda_1(k_1\eta_1+\cdots+k_r\eta_r)+\lambda_2(k_{r+1}\xi_1+\cdots+k_{r+s}\xi_s)=0$

所以 $\lambda_1(k_1\eta_1+\cdots+k_r\eta_r)-\lambda_2(k_1\eta_1+\cdots+k_r\eta_r)=0$

所以 $(\lambda_1-\lambda_2)(k_1\eta_1+\cdots+k_r\eta_r)=0$

因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$， 所以$k_1\eta_1+\cdots+k_r\eta_r=0$

因为 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$线性无关， 所以 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$

所以 $k_{r+1}\xi_1+\cdots+k_{r+s}\xi_s=0$

因为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$线性无关， 所以 $k_{r+1}=k_{r+2}=\cdots=k_{r+s}=0$

即 $\eta_1,\cdots,\eta_r,\xi_1,\cdots,\xi_s$线性无关.

# 第六章　　二次型

一. 填空题

1. 二次型$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_2x_3$的矩阵是______.

解. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

2. 矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 3\end{bmatrix}$对应的二次型是________.

解. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3-2x_2x_3$

3. 当______时, 实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 是正定的.

解. $A=\begin{bmatrix}1 & t & -1\\ t & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{bmatrix}$, $\quad \begin{vmatrix}1 & t\\ t & 1\end{vmatrix}=1-t^2>0$, 所以 $\quad |t|<1$

且 $\quad \begin{vmatrix}1 & t & -1\\ t & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{vmatrix}=-4t-5t^2>0,\quad 5t^2+4t<0,\ -\dfrac{4}{5}<t<0$

所以, 当 $\quad -\dfrac{4}{5}<t<0$ 时, 二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$$

是正定的.

4. 设 $A$ 是实对称可逆矩阵, 则将 $f=x^TAx$ 化为 $f=y^TA^{-1}y$ 的线性变换为______.

解. 假设 $\quad x=A^{-1}y$, 则 $x^T=y^T(A^{-1})^T=y^T(A^T)^{-1}=y^TA^{-1}$

所以 $\quad f=x^TAx=y^TA^{-1}AA^{-1}y=y^TA^{-1}y$

5. 设 $n$ 阶实对称矩阵 $A$ 的特征值分别为 1, 2, ⋯, $n$, 则当 $t$ ______ 时, $tE-A$ 是正定的.

解. $tE-A$ 的特征值为 $t-1,t-2,\Lambda\ ,t-n$. 若 $tE-A$ 是正定的, 则

$$t-1>0,t-2>0,\Lambda\ ,t-n>0$$

所以 $\quad t>n$ 时, $tE-A$ 是正定的.

二. 单项选择题

1. 设 $A,B$ 均为 $n$ 阶方阵, $x=(x_1,x_2,\Lambda\ ,x_n)^T$, 且 $x^TAx=x^TBx$, 当(　　)时, $A=B$

(A) 秩($A$) = 秩($B$)　　(B) $A^T=A$　　(C) $B^T=B$　　(D) $A^T=A$ 且 $B^T=B$

解. 可以证明 $A$ 为实对称矩阵时, 若对任何向量 $x$ $\ x^TAx=0$, 则 $A=0$.

证明:令 $x=(0,\Lambda\ ,0,1,\Lambda\ ,1,0,\Lambda\ ,0)^T$ (只有第 $i,j$ 位置的元素为 1, 其余都是 0). 则 $x^TAx=2a_{ij}=0$,对任何 $i,j$ 成立.

所以 $A=0$.

所以当 $A^T=A$ 且 $B^T=B$ 时, $(A-B)^T=A^T-B^T=A-B$, $A-B$ 为实对称矩阵.

若对任何向量 $x$, $\quad x^TAx=x^TBx$, 则 $x^T(A-B)x=0$, 所以 $\ A-B=0$, 即 $A=B$.

(D)是答案.

对于(A): 令 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, 则 $A\neq B, r(A)=r(B)$. 但是, 对于任何三维向量 $\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$,

$x^T Ax = x^T Bx = x_1x_2$, (A)不是答案;

对于(B): 取反例 $A=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

对于 C): 取反例 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

2. 下列矩阵为正定的是

(A) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 5\end{bmatrix}$

解. (D)是答案. 一阶主行列式为 2, 二阶主行列式为$\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2$, 三阶主行列式为$\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 5\end{vmatrix}=10-8=2$.

3. 设 $A, B$ 均为 $n$ 阶正定矩阵, 则(　　)是正定矩阵.

(A) $A^*+B^*$ (B) $A^*-B^*$ (C) $A^*B^*$ (D) $k_1A^*+k_2B^*$

解. 因为 $A, B$ 均为 $n$ 阶正定矩阵, 则 $A^*, B^*$ 均为 $n$ 阶正定矩阵, 所以 $A^*+B^*$ 为 $n$ 阶正定矩阵. (A)是答案.

三．计算证明题

1. 用配方法将下列二次型化为标准形

$$f(x_1, x_2, \Lambda, x_{2n}) = x_1x_{2n} + x_2x_{2n-1} + \Lambda + x_nx_{n+1}$$

解. 令$\begin{cases}x_1 = y_1 - y_{2n},\ x_2 = y_2 - y_{2n-1},\ \Lambda,\ x_n = y_n - y_{n-1}\\ x_{2n} = y_1 + y_{2n}, x_{2n-1} = y_2 + y_{2n-1}, \Lambda,\ x_{n+1} = y_n + y_{n+1}\end{cases}$

则 $f(x_1, x_2, \Lambda, x_{2n}) = x_1x_{2n} + x_2x_{2n-1} + \Lambda + x_nx_{n+1}$

$= (y_1 - y_{2n})(y_1 + y_{2n}) + (y_2 - y_{2n-1})(y_2 + y_{2n-1}) + \Lambda + (y_n - y_{n+1})(y_n + y_{n+1})$

$= y_1{}^2 + \Lambda + y_n{}^2 - y_{n+1}{}^2 - \Lambda - y_{2n}{}^2$

2. 用正交变换将下列实二次型化为标准形

i. $f(x_1, x_2, x_3) = 11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$

ii. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$

解. i. $A=\begin{bmatrix}11 & 8 & 2\\ 8 & 5 & -10\\ 2 & -10 & 2\end{bmatrix}$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}11-\lambda & 8 & 2\\ 8 & 5-\lambda & -10\\ 2 & -10 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+18\lambda^2+81\lambda-1458=0$$

解得: $\lambda_1=9,\ \lambda_2=18,\ \lambda_3=-9$

所以可用正交变换将原二次型化成以下标准型:

$$f(y_1,y_2,y_3)=9{y_1}^2+18{y_2}^2-9{y_3}^2$$

ii. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 1-\lambda & 2\\ 2 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^3-12(1-\lambda)+16=0$$

解得: $\lambda_{1,2}=-1,\ \lambda_3=5$

所以可用正交变换将原二次型化成以下标准型:

$$f(y_1,y_2,y_3)=-{y_1}^2-{y_2}^2+5{y_3}^2$$

3. 设 $A$ 为 $n$ 阶实对称矩阵, 且满足 $A^3+A^2+A=3E$, 证明 $A$ 是正定矩阵.

解. 假设 λ 为 $A$ 的特征值, 因为 $A^3+A^2+A=3E$, 所以 $\lambda^3+\lambda^2+\lambda-3=0$. 解得, $\lambda=1$, $\lambda=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-12}}{2}=-1\pm2\sqrt{2}i$. 因为 $A$ 为实对称矩阵, 所以只能 $\lambda=1$. 所以 $A$ 为正定矩阵.

4. 设实对称矩阵 $A$ 的特征值全大于 $a$, 实对称矩阵 $B$ 的特征值全大于 $b$, 证明 $A+B$ 的特征值全大于 $a+b$.
解. 因为实对称矩阵 $A$ 的特征值全大于 $a$, 所以 $A-aE$ 为正定阵; 因为实对称矩阵 $B$ 的特征值全大于 $b$, 所以 $A-bE$ 为正定阵. 所以 $(A-aE)+(A-bE)$ 为正定阵.

假设λ 为 $A+B$ 的特征值, 相应的特征向量为 $x$, 即 $(A+B)x=\lambda x$.

于是 $[(A-aE)+(B-bE)]x=(A+B)x-(a+b)Ex=(\lambda-(a+b))x$

所以 $\lambda-(a+b)$ 为 $(A-aE)+(A-bE)$ 的特征值. 又因为 $(A-aE)+(A-bE)$ 为正定阵, 所以 $\lambda-(a+b)>0$, 即 $\lambda>a+b$.

5. 设 $A$ 为 $n$ 阶实对称矩阵, 证明: 秩$(A)=n$ 的充分必要条件为存在一个 $n$ 阶实矩阵 $B$, 使 $AB+B^TA$ 是正定矩阵.

解. “充分性” (反证法)

反设 $r(A)<n$, 则 $|A|=0$. 于是 $\lambda=0$ 是 $A$ 的特征值, 假设相应的特征向量为 $x$, 即 $Ax=0\ (x\neq0)$, 所以

$x^T A^T = 0$.

所以 $x^T(AB + B^T A)x = x^T ABx + x^T B^T Ax = 0$，和 $AB + B^T A$ 是正定矩阵矛盾;

“必要性”

因为 $r(A) = n$，所以 $A$ 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \Lambda, \lambda_n$ 全不为 0.

取 $B = A$，则 $AB + B^T A = AA + AA = 2A^2$，它的特征值为 $2\lambda_1{}^2, 2\lambda_2{}^2, \Lambda, 2\lambda_n{}^2$ 全部为正，所以 $AB + B^T A$ 是正定矩阵.