

线性代数 B 试题 A 卷

班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、(10 分) 已知 4 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 计算行列式 $|3A^* - 2I|$, 其中 A^* 是 A 的伴随矩。

二、(10 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 和 X 满足 $2XA^{-1} = -BA^{-1} + X$,

求 X 。

三、(10 分) 设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (\lambda + 2)x_3 = 3 \\ x_1 + \lambda x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

问: λ 取何值时, 此方程组 (1) 有唯一解; (2) 无解; (3) 有无穷解? 并在有无穷多解时求通解。

四、(10 分) 已知

$$\alpha_1 = (-2, 1, 0, 3)^T, \quad \alpha_2 = (1, -3, 2, 4)^T, \quad \alpha_3 = (3, 0, 2, -1)^T, \quad \alpha_4 = (2, -2, 4, 6)^T$$

- (1) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩和一个极大无关组;
- (2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

五、(10 分) 已知 \mathbf{R}^3 的两个基: $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 0, 1)^T, \alpha_3 = (0, 1, 1)^T$,

$$\beta_1 = (1, 2, 3)^T, \quad \beta_2 = (2, 3, 4)^T, \quad \beta_3 = (3, 4, 3)^T。$$

- (1) 求基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵;
- (2) 求向量 $\alpha = (2, 0, 0)^T$ 关于基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的坐标。

六、(10 分) 已知 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (1, -1, 1)^T$, 把 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 化为欧氏空间 \mathbf{R}^3 的标准正交基。

七、(10 分) 证明：实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量是正交的。

八、(10 分) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_3$

(1) 用正交变换将它化为标准形并给出所用的正交变换; (2) 该二次型是否正定?

九、(10 分) 设方程组
$$\begin{cases} x_1 + a_1x_2 + a_1^2x_3 = a_1^3 \\ x_1 + a_2x_2 + a_2^2x_3 = a_2^3 \\ x_1 + a_3x_2 + a_3^2x_3 = a_3^3 \\ x_1 + a_4x_2 + a_4^2x_3 = a_4^3 \end{cases}$$

(1) 证明: 若 a_1, a_2, a_3, a_4 两两不相等, 则此方程组无解;

(2) 设 $a_1 = a_3 = k, a_2 = a_4 = -k (k \neq 0)$, 且已知 β_1, β_2 是方程组的两个解, 其中

$\beta_1 = [-1, 1, 1]^T, \beta_2 = [1, 1, -1]^T$, 写出此方程组的通解。

十、(10 分) α 为 3 维实单位列向量, I 为三阶单位矩阵, 令 $B = \alpha\alpha^T$

(1) 证明: $B \neq 0$;

(2) 求 B^2 ;

(3) 求 B 的相似对角矩阵;

(4) 求 $I - B$ 的秩。