

线性代数 B 试题 A 卷

班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、(10 分) 已知 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, 求行列式 $\begin{vmatrix} 0 & A^* \\ 3B & 0 \end{vmatrix}$ 的值。

二、(10 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 矩阵 X 满足 $\frac{1}{3}A^*XA = 2A + XA$, 求 X 。

三、(10 分) 对下列线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$$

试讨论: 当 λ 取何值时, 它有唯一解? 无解? 有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解。
(用导出组的基础解系表示通解)

四、(10 分) 已知

$$\alpha_1 = (-2, 1, 0, 3), \alpha_2 = (1, -3, 2, 4), \alpha_3 = (3, 0, 2, -1), \alpha_4 = (2, -2, 4, 6)$$

- (1) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩和一个极大无关组;
- (2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

五、(10 分) 已知 \mathbf{R}^3 的一个基: $\beta_1 = (0, 1, 1), \beta_2 = (1, 0, 1), \beta_3 = (1, 1, 0)$ 。

- (1) 求 \mathbf{R}^3 的自然基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵;
- (2) 求向量 $\alpha = (2, -1, 3)$ 关于基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的坐标。

六、(10 分) 设 \mathbf{X}_0 是非齐次线性方程组 $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ 的一个特解, $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \Lambda, \mathbf{X}_t$ 是其导出方程组 $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系, 证明: $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \Lambda, \mathbf{X}_t$ 线性无关。

七、(10 分) 已知线性方程组 $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ 的通解为 $k_1(1, 0, 0)^T + k_2(1, 1, 0)^T$, 其中 k_1, k_2 为任意常数, 求此方程组的解空间的一个标准正交基。

八、(10 分) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_2x_3$ 。

- (1) 用正交变换将它化为标准形, 并给出所用的正交变换;
- (2) 判断二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是否正定。

九、（10 分）设 α, β 为 3 元单位列向量，且 $\alpha^T \beta = 0$ ，记 $A = \alpha \alpha^T + \beta \beta^T$ 。证明：

(1) 齐次线性方程组 $AX = 0$ 有非零解；

(2) A 相似于矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。

十、(10 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 都是 3 元向量, 且 α_1, α_2 线性无关, β_1, β_2 线性无关。

(1) 证明: 存在非零向量 γ , 使得 γ 既可由 α_1, α_2 线性表出, 又可由 β_1, β_2 线性表出;

(2) 当 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T, \alpha_2 = (2, 5, 3)^T, \beta_1 = (2, 3, -1)^T, \beta_2 = (-1, 0, 3)^T$ 时, 求出所有既可由 α_1, α_2 线性表出, 又可由 β_1, β_2 线性表出的向量。