

非线性电路混沌实验

(2023 年)

长期以来，对客观事物运动规律的描述，一直采用确定论和概率论两种体系，确定论的基础是牛顿力学，用以描述事物的确定性运动；而概率论的基础是统计学，用以描述事物的随机运动。确定性运动和随机运动被认为是泾渭分明、毫无关系的两种类型的运动，确定性运动可以用确定性方程所描述，随机运动只能用统计学规律所描述，没有人怀疑它们之间存在由此及彼的关系。直到上世纪 60 年代初，美国气象学家 Lorenz 在对大气对流模型作数值计算时，首先发现了耗散系统中的混沌运动，即发现确定性系统可以产生类似随机的运动，从而使人们有理由认为许多以往被视为随机的运动可能是由确定性系统所产生，确定性运动与随机运动可能存在某种必然的联系，因而混沌运动也被视为上一世纪既相对论和量子力学后的第三大重大发现，Lorenz 也成为第一个针对现实物理系统进行混沌研究的科学家。非线性动力学以及与此相关的分岔与混沌现象的研究是近几十年来科学界研究的热门课题，混沌现象涉及物理学、数学、生物学、电子学、计算机科学和经济学等多领域，应用极为广泛。

一、实验目的

- (1) 了解由非线性元件和 LC 振荡器组成的非线性振荡电路；
- (2) 观察非线性电路中的周期分叉和混沌现象；
- (3) 测量非线性电阻的伏安特性曲线，加深对混沌现象的理解。

二、实验仪器

非线性电路混沌实验仪，数字示波器，电阻箱。

三、实验原理

1. 关于混沌的基本知识

混沌是指确定性动力学系统因对初值敏感而表现出的不可预测的、类似随机性的运动。动力学系统的确定性是指系统在任一时刻的状态被初始状态所决定。虽然根据运动的初始状态数据和运动规律能推算出任一未来时刻的运动状态，但由于初始数据的测定不可能完全精

确，预测的结果必然出现误差，甚至不可预测。20 世纪 70 年代后的研究表明，大量非线性系统中尽管系统是确定性的，却普遍存在着行为表现为不确定、不可重复、不可预测，貌似随机的混沌现象，是系统整体稳定性和局部不稳定性共同作用的结果。

系统的混沌行为是由其内部非线性相互作用造成的。所谓线性是指两个物理量之间成正比关系，在直角坐标系下表现为一条直线。在线性系统中各部分之间无相互作用，是相互独立的，部分之和等于整体。描述线性系统的方程遵从叠加原理，即方程的不同解加起来仍然是方程的解。而非线性则指整体中各部分之间有相互作用，部分之和不等于整体，因此叠加原理失效，非线性方程的两个解之和不再是方程的解。混沌系统就是典型的非线性系统，混沌系统的长期行为是内部非线性耦合反馈作用的直接结果。

混沌的基本特征包括：

(1) 内在随机性：从确定性非线性系统的演化过程看，它们在混沌区的行为都表现出随机不确定性。然而这种不确定性不是来源于外部环境的随机因素对系统运动的影响，而是系统自发产生的。

(2) 初值敏感性：初值敏感性指的是初始条件下微小的变化能带动整个系统长期的巨大连锁反应，即所谓“失之毫厘，谬之千里”。

(3) 非规则的有序：混沌不是纯粹的无序，而是不具备周期性和其他明显对称特征的有序态。确定性的非线性系统的控制参量按一定方向不断变化，当达到某种极限状态时，就会出现混沌这种非周期运动体制。但是非周期运动不是无序运动，而是另一种类型的有序运动。混沌区的系统行为往往体现出无穷嵌套自相似结构，这种不同层次上的结构相似性是标度变换下的不变性，这种不变性体现出混沌运动的规律。

系统在某一参数缓慢变化下，如何由普通稳态运动转变为混沌运动，称为通向混沌的途径，常见的通向混沌的途径有：

(1) 倍周期分岔途径：改变系统的某些参数，使系统的周期不断加倍，系统会逐步丧失周期行为进入混沌，如图 1 所示。这是实验室中研究混沌时经常观察到的、最基本的通向混沌途径。

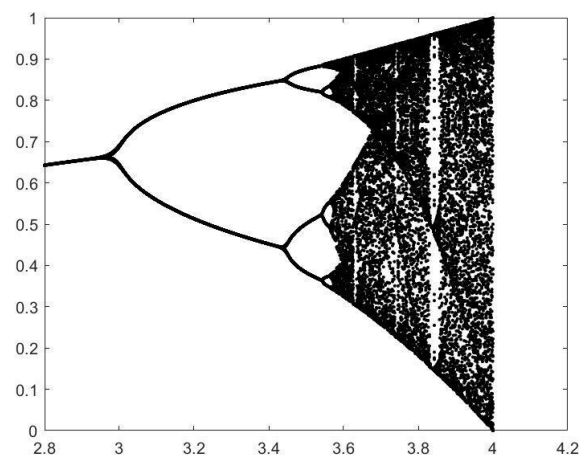


图 1 倍周期分叉通向混沌

(2) 准周期途径：系统的周期运动发生变化，后来的周期并不总是一定要变成原来周期的倍数。特别当非线性扰动中有其它频率的分量时，若干个周期不同的信号便叠加起来。如果这些信号周期的最小公倍数不存在，则叠加后的信号为准周期信号，由于准周期信号不断产生，最终导致混沌。

(3) 阵发混沌途径：阵发是指系统较长时间尺度的规则运动和较短时间尺度的无规则运动的随机交替变化现象。若系统在特定参数下呈现阵发性，随着参数的变化，阵发性中无规则运动突发的越来越频繁，系统由周期运动转化为混沌运动。

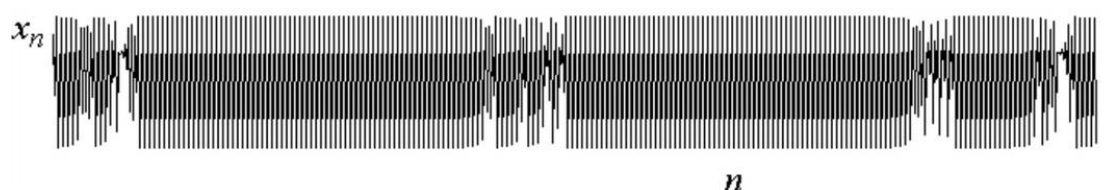


图 2：阵发性混沌

吸引子是混沌理论中的一个重要的组成部分。吸引子是微积分和系统科学论中的一个概念，指的是动力系统长时间演化的极限状态，即在时间趋于无穷时系统状态的归宿。只有耗散系统才有吸引子。吸引子分为平庸吸引子和奇异吸引子。平庸吸引子又称经典吸引子，或者正常吸引子，根据系统最终的状态，在相空间中，有稳定点（平衡）、极限环（周期运动）和极限环面（概周期运动）三种状态。在数学与物理学中，相空间是一个用以表示出一个系统所有可能状态的空间，系统每个可能的状态都有一对应的相空间的点。

下面以单摆为例来说明平庸吸引子的三种状态：

(1) 如果没有外部能量输入，因为阻尼的影响，单摆最终会停下来，系统的最终状态是相空间中的一个点，这是吸引子的稳定点状态，如图 3 (a) 所示。这种状态是一个 0 维空间，是一种平衡的状态。

(2) 如果有固定外部能量输入，单摆最终不停地做重复运动，系统的最终状态是一种环状的周期运动，这是吸引子的极限环状态，如图 3 (b) 所示。这种状态是一个 1 维空间，是一种周期的状态。

(3) 如果现在是两个单摆耦合在一起形成一个“双摆”，系统就具有了两个振动频率，如果这两个频率比值是一个无理数时，两个点的运动轨道最终会被限制在一个面包圈上，且每个点的自身轨迹永远不会重合在一起，系统的最终状态是一种环面的“类周期”运动，这是吸引子的极限环面状态，如图 3 (c) 所示。这种状态是一个 2 维空间，是一种概周期的状态。

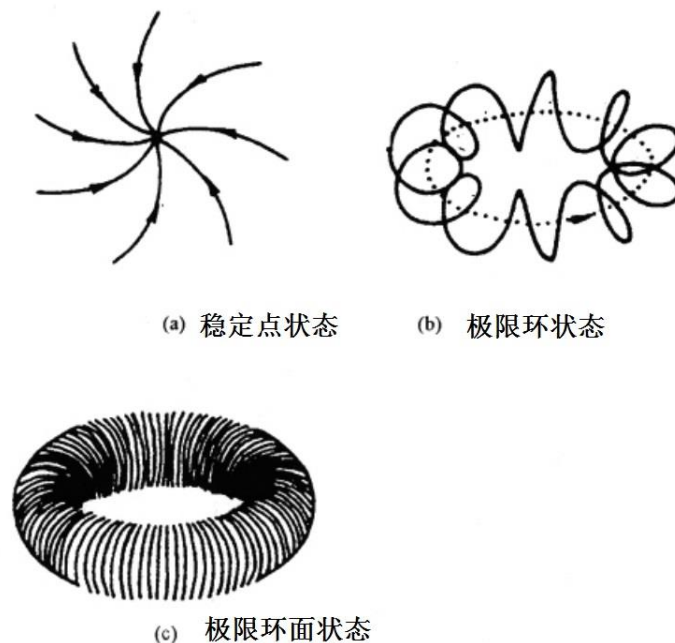


图 3 平庸吸引子的三种状态

而不属于平庸的吸引子的都称为奇异吸引子，它表现了混沌系统中非周期性、无序的系统状态。奇异吸引子一般都具有一个常微分方程，最经典的就是洛伦兹吸引子，其常微分方程如式 (1) 所示：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z \end{cases} \quad (1)$$

这个方程原本是一个天气预报模型，有上百个参数，洛伦兹在研究长期天气预报时最终只

考虑最主要的因素，将其简化为只有 3 个参数的非线性方程。洛伦兹在一次用计算机做计算时偶然发现，对于这样一个天气预报模型，哪怕初始条件的微小改变也会显著影响运算结果，这就是所谓的“蝴蝶效应”，即一只南美洲亚马逊河流域热带雨林中的蝴蝶偶尔扇动几下翅膀，就可能会在两周以后引起美国得克萨斯州的一场龙卷风。洛伦兹方程描述的运动中存在奇异吸引子，即洛伦兹吸引子，它在相空间中的形态如图 4 所示。洛伦兹吸引子由左右两簇构成，各自围绕一个吸引中心（定点），当运动轨道在一个簇中由外向内绕到中心附近后，就随机地跳到另一个簇的外缘继续向内绕，然后在达到中心附近后再突然跳回到原来的那一个簇的外缘，如此构成随机性的来回盘旋。

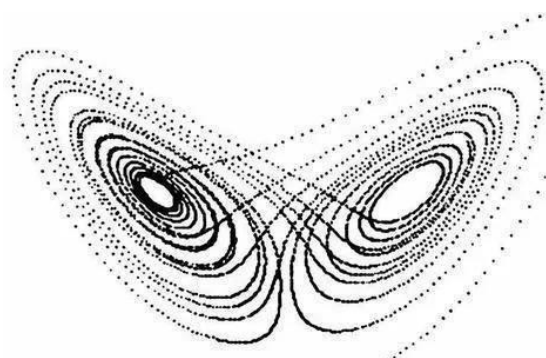


图 4 洛伦兹吸引子

2. 非线性电路实现混沌

非线性电路是指电路系统中至少包含一个非线性元件的电路。由于电学量易于观察和显示，因此非线性电路成为实现和研究混沌的重要途径，其中最著名的电路是美国加州大学伯克利分校的蔡少棠教授 1983 年提出的著名的蔡氏电路。它是历史上第一例用电子电路来证实混沌现象的电路，也是迄今为止在非线性电路中产生复杂动力学行为的最为有效和最为简单的电路之一。蔡氏电路是能产生标准混沌行为的最简单的三阶自治电路，被视为“混沌系统的典范”。通过改变蔡氏电路的结构或参数，可以产生倍周期分岔、三倍周期、单吸引子、双吸引子、多吸引子等十分丰富的混沌现象。

实验电路如图 5 所示，电路中只有一个非线性元件 R_2 ，为有源非线性负阻元件；电感器 L_1 和电容器 C_1 构成一个损耗可以忽略的谐振回路；可变电阻 R_1 和电容器 C_2 串联，将振荡器产生的正弦信号移相输出。本实验中所用的非线性元件 R_2 是一个三段分段线性元件，图 6 所示是该电阻的伏安特性曲线，可以看出加在此非线性元件上的电压与通过它的电流极性是相反的。由于加在元件上的电压增加时，通过它的电流却减小，因而将此元件称为非线性负阻元件。

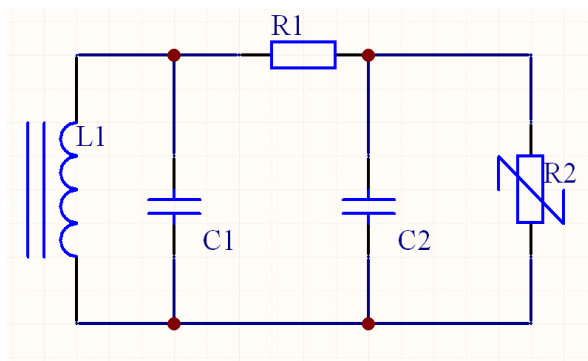


图 5 非线性电路原理图

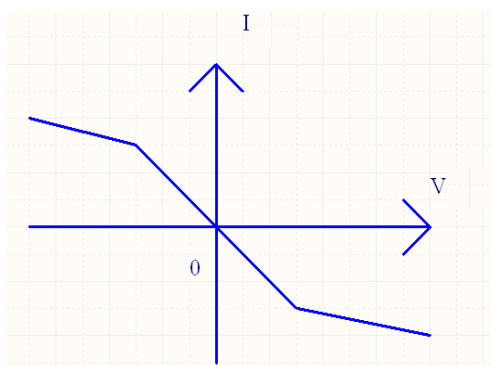


图 6 非线性元件 R_2 的伏安特性曲线

电路的非线性动力学方程为：

$$\begin{cases} C_2 \frac{dU_{C_2}}{dt} = G(U_{C_1} - U_{C_2}) - gU_{C_2} \\ C_1 \frac{dU_{C_1}}{dt} = G(U_{C_2} - U_{C_1}) + i_L \\ L \frac{di_L}{dt} = -U_{C_1} \end{cases} \quad (2)$$

式中， U_{C_1} 、 U_{C_2} 是 C_1 、 C_2 上的电压， i_L 是电感 L_1 上的电流， $G=1/R_1$ 是电导， g 为 R_2 的伏安特性函数。如果 R_2 是线性的，则 g 为常数，电路就是一般的振荡电路，得到的解是正弦函数，电阻 R_1 作用是调节 C_1 和 C_2 的位相差，把 C_1 和 C_2 两端的电压分别输入到示波器的 X、Y 轴，显示的图形是椭圆。

如果 R_2 是非线性的，比如是图 6 所示的伏安特性行为，由于 g 总体是非线性函数，三元非线性方程组 (2) 没有解析解，当取适当电路参数时，可将示波器设置为 X-Y 模式，在显示屏上观察到混沌现象。

3. 有源非线性负阻元件的实现

有源非线性负阻元件实现的方法有多种，这里使用的是一种较简单的电路，采用 2 个运

算放大器（一个双运放 TL072）和 6 个电阻来实现，其电路如图 7 所示，它的伏安特性曲线如图 8 所示。本实验所要研究的是该非线性元件对整个电路的影响，而非线性负阻元件的作用是使振动周期产生分岔和混沌等一系列非线性现象。实际实现混沌现象的非线性电路如图 9 所示。

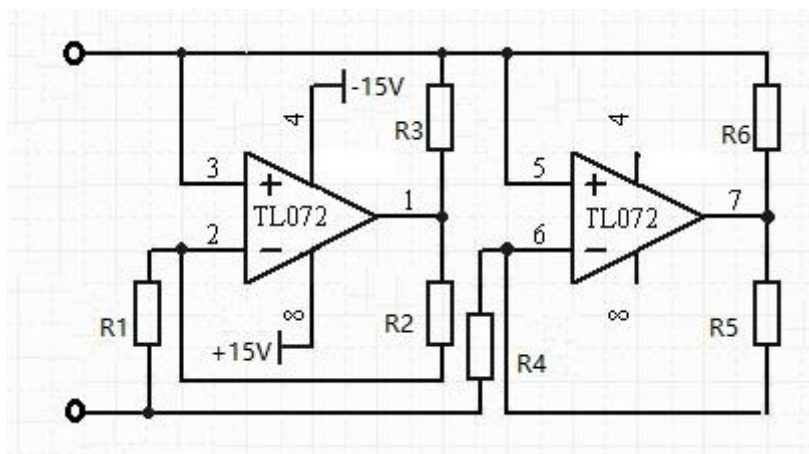


图 7 有源非线性负阻元件电路图

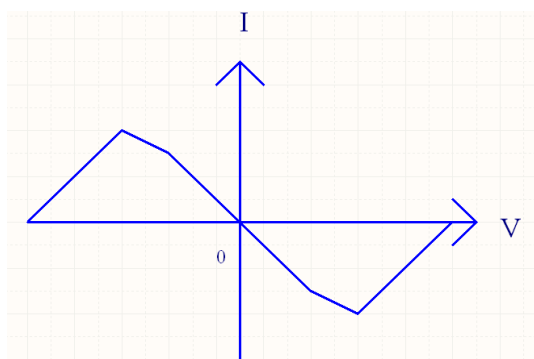


图 8 双运放有源非线性负阻元件的伏安特性曲线

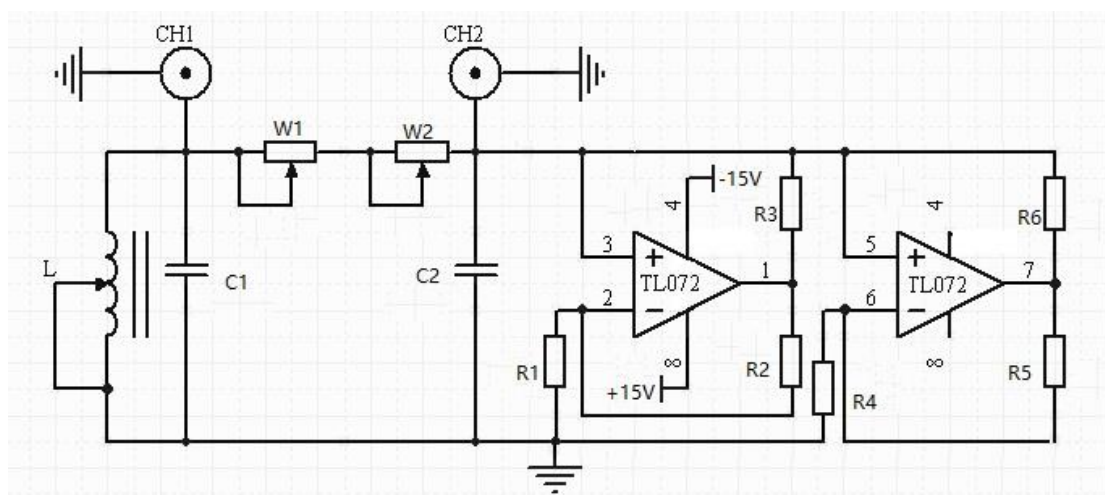
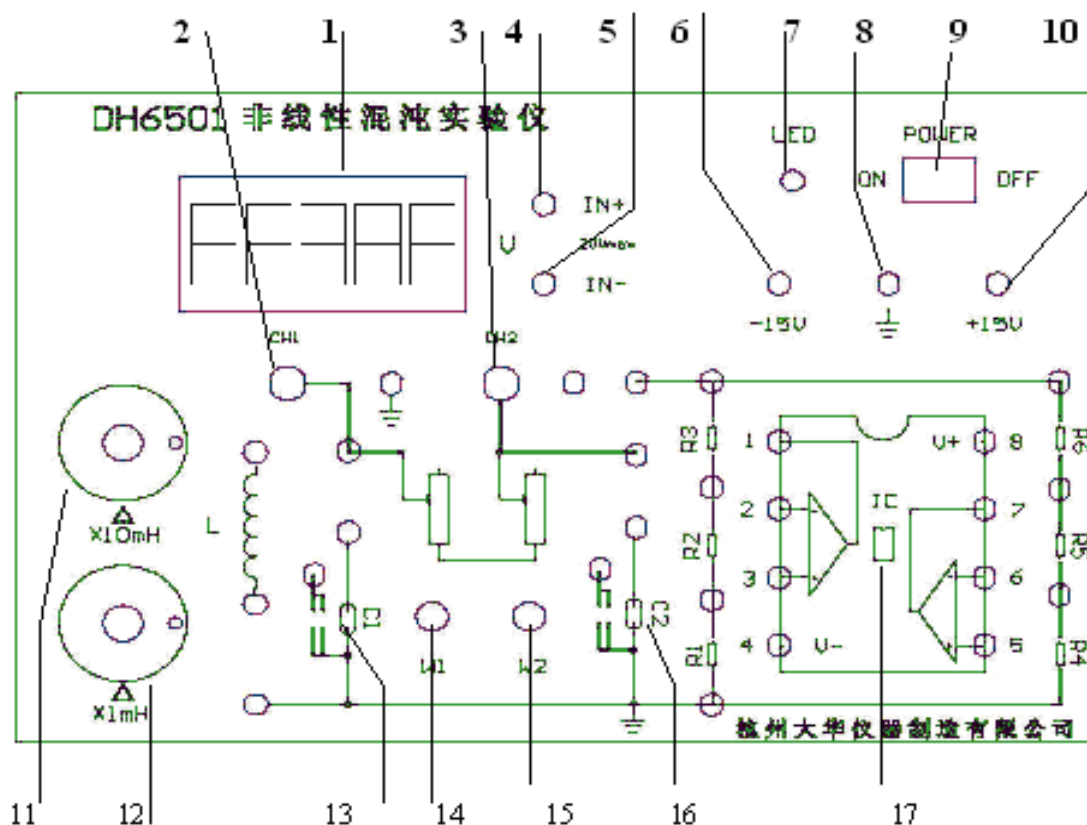


图 9 非线性电路混沌实验电路图

四、仪器介绍

非线性混沌电路实验的主要实验装置包括非线性电路混沌实验仪、数字示波器、电阻箱和若干连接线。

非线性电路混沌实验仪的面板如图 10 所示。电感可以 $\times 10\text{mH}$ 档波段和 $\times 1\text{mH}$ 档波段调节，电容 C1 的大小是 0.1 uF ，C2 的大小是 0.01 uF 。可调电位器 W1 的大小是 $2.2\text{K } \Omega$ ，W2 的大小是 $220\text{ } \Omega$ 。直流稳压电源输出可为运算放大器提供 $\pm 15\text{V}$ 的工作电压。



- 1、20V 数字电压表 2、示波器 CH1 通道输入 3、示波器 CH2 通道输入 4、20V 数字电压正向输入端 5、20V 数字电压反向输入端 6、-15V 电源输出 7、电源指示灯 8、±15V 电源地 9、电源开关 10、+15V 电压输出 11、电感“×10mH”档波段开关 12、电感“×1mH”档波段开关 13、LC 振荡电容 14、移相可调电阻 W1 15、移相可调电阻 W2 16、RC 移相电容 17、双运算放大器 TL072

图 10 非线性电路混沌实验仪面板示意图

五、实验内容与步骤

1. 测量前准备

(1) 根据图 9 实验电路原理图，按照图 11 所示将实验仪面板接线连好，注意运算放大器的电源极性不要接反。

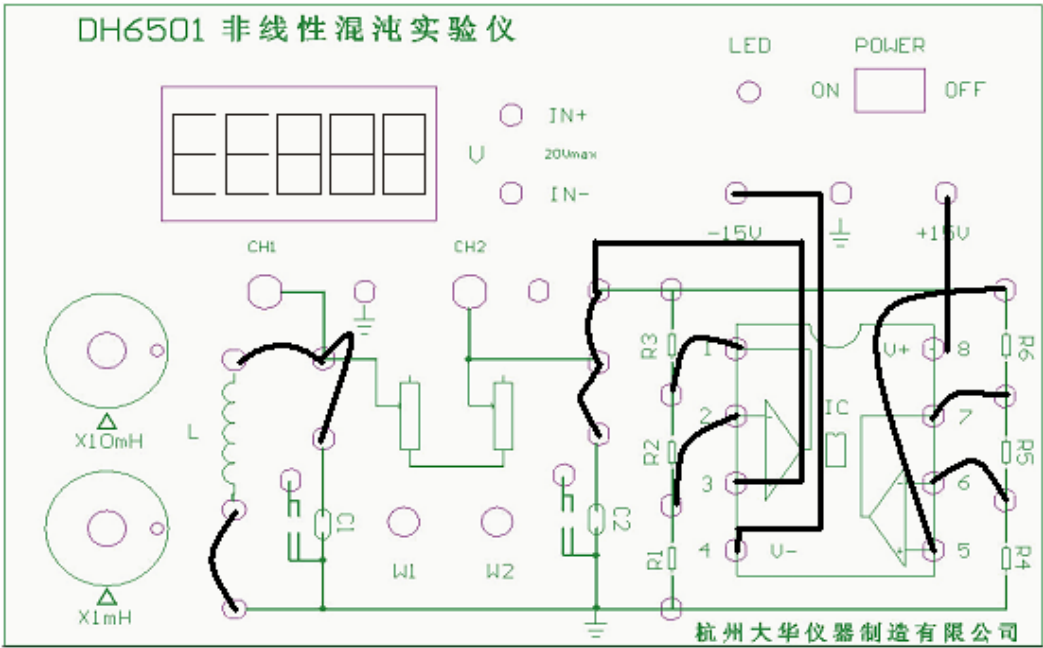


图 11 非线性电路混沌实验仪面板连线示意图

(2) 用同轴电缆将 Q9 插座 CH1 连接示波器 CH1 道（即 X 轴输入），Q9 插座 CH2 连接示波器 CH2 通道（即 Y 轴输入）；也可以交换 X、Y 输入，使显示的图形相差 90°。

(3) 将示波器工作模式设为 X-Y 模式，即 CH1 输入的大小反映在示波器的水平方向，CH2 输入的大小反映在示波器的垂直方向。

(4) CH1输入和CH2输入可放在DC态或AC态，并适当调节输入增益V/DIV波段开关，使示波器显示大小合适、稳定的图象。

(5) 检查接线无误后即可打开电源开关，电源指示灯点亮，此时电压表不需要接入电路。

2. 观察非线性电路混沌现象

(1) 首先把电感L的值调到20mH或21mH。

(2) 右旋细调电位器W2到底，左旋或右旋W1粗调多圈电位器，使示波器出现一个略斜向近似椭圆的圆圈，如图12(a)所示。此时电压和电流开始周期性地回到同一个值，电路产生了振荡，我们观察到的是一个单周期吸引子，它的频率决定于电感与非线性电阻组成的回路的特性。

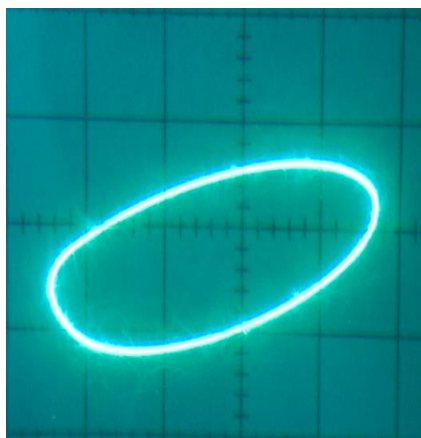
(3) 左旋多圈细调电位器W2少许，电流与电压的振荡周期变成了原来的二倍，示波器会出现二倍周期分岔，如图12(b)所示；

(4) 再左旋多圈细调电位器W2少许，振荡周期变成了原来的四倍，示波器会出现四倍周期分岔，如图12(c)所示；

(5) 继续左旋多圈细调电位器W2少许，如果精度足够，可以观察到多倍周期。

(6) 再左旋多圈细调电位器W2少许，示波器会出现振发混沌、单吸引子混沌和双吸引子混沌现象，如图12(d)、(e)、(f)所示。

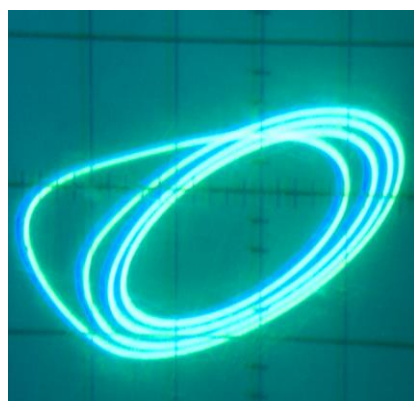
(7) 观测的同时可以改变示波器显示模式，来观测不同状态下，X轴输入或Y轴输入的相位、幅度和跳变情况。



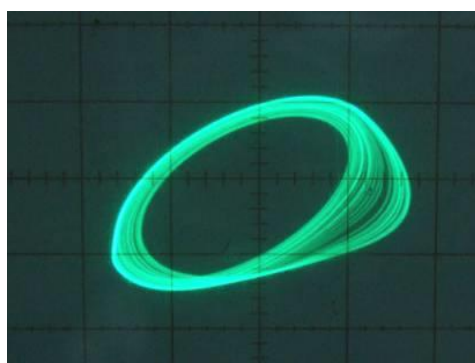
(a) 单倍周期



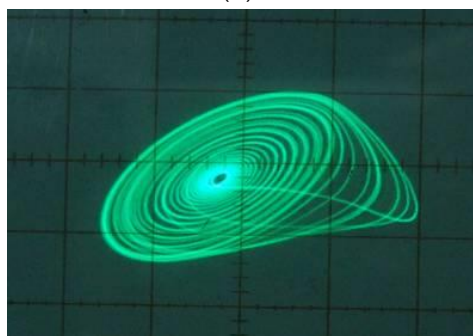
(b) 二倍周期分岔



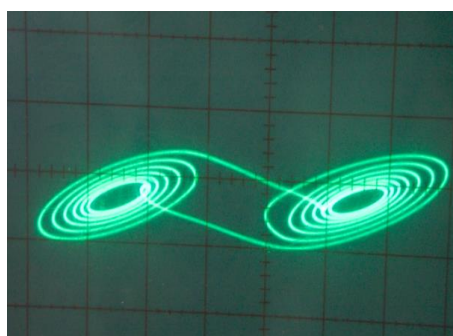
(c) 四倍周期分岔



(d) 振发混沌



(e) 单吸引子混沌



(f) 双吸引子混沌

图12 观察到的各种混沌现象

3. 有源非线性电阻伏安特性的测量

按照图 13 连线图所示，将电阻箱连接到有源非线性电阻两端，将 20V 数字电压表与电阻箱并联，电压表的示数给出了电阻箱和有源非线性电阻两端的电压，将电压数值除以电阻箱阻值即可得到此时流过有源非线性电阻的电流大小。将电阻箱电阻由 $99999.9\ \Omega$ 起由大到小调节，选择数量足够的若干个合适的阻值，使得电压示数以近似等间隔均匀地减小到接近为零，将电阻箱的电阻和数字电压表的示数填入表 1 中。

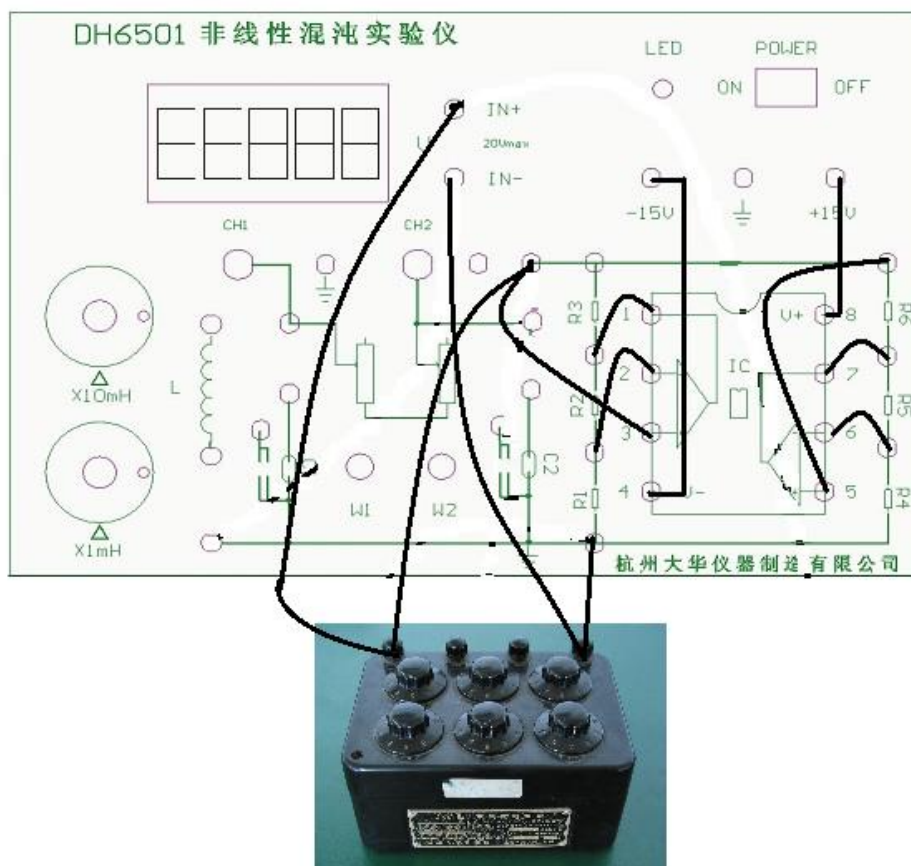


图 13 有源非线性电阻伏安特性测量连线图

表 1 有源非线性电阻伏安特性测量数据记录表

R/ Ω	99999.9	...						
U/V								

六、数据处理与分析

由表 1 算得流过有源非线性电阻的电流大小 I ，做有源非线性电阻的伏安特性曲线 $I-U$ 图。

七、注意事项

1. 双运算放大器的正负极不能接反
2. 关掉电源以后，才能拆实验仪面板上的接线。
3. 使用前仪器先预热 10~15 分钟。

八、思考题

1. 试解释非线性负阻元件在本实验中的作用是什么？
2. 为什么要采用 RC 移相器，并且用相图来观测倍周期分岔等现象？如果不用移相器，可用哪些仪器或方法？