习题 3-8

1. 证：令 $f(x)=\tan x+x-1$，则 $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+1$，则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上大于0恒成立．

则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内递增，又 $f(0)=-1<0$ $f(1)=\tan 1>0$

则 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个根．

即 $\tan x=1-x$ 在 $(0,1)$ 内有根．

2. 证：令 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2-(a+b+c)x$，$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx-(a+b+c)$．

又 $f(0)=0$ $f(1)=a+b+c-(a+b+c)=0$

由罗尔定理，在 $(0,1)$ 区间，必有 $f'(x)=0$ 必有解．

而 $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx-(a+b+c)$

则 $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ 在 $(0,1)$ 内至少有一实根

3. 证：因为 $|f(x)-f(y)|\le(x-y)^2$，则对于任意给定的 y．

则 $0\le\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\le|x-y|$

$\lim\limits_{x\to y}0\le\lim\limits_{x\to y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\le\lim\limits_{x\to y}|x-y|$

因 $\lim\limits_{x\to y}0=0$，$\lim\limits_{x\to y}|x-y|=0$

则 $\lim\limits_{x\to y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}=0$ 则 $\lim\limits_{x\to y}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=0$，即 $f'(y)=0$

因 y 在 $(-\infty,+\infty)$ 是任意的，则对 $\forall x$：有 $f(x)\equiv0$ 即 $f(x)$ 为常数．

4. 证：令 $F(x)=f(x)e^{-\lambda x}$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 上可导，

又 $F'(x)=f'(x)e^{-\lambda x}-\lambda f(x)e^{-\lambda x}=[f'(x)-\lambda f(x)]e^{-\lambda x}$，

由于 $f(a)=f(b)=0$，则 $F(a)=F(b)=0$，由罗尔定理，必 $\exists\xi\in(a,b)$，使：

$F'(\xi)=\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=0$．则 $[f'(\xi)-\lambda f(\xi)]e^{-\lambda x}=0$，即：

$f'(\xi)=\lambda f(\xi)$ 成立

证毕

5. 证：令 $h(x)=f(x)-g(x)$，其中 $g(x)=-x^2+Bx+C$．则 $h(a)=f(a)-g(a)=0$ $h(b)=f(b)-g(b)=0$

又因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 (a,b) 内有一交点，设为 $x=t$．则 $h(t)=0$．由罗尔定理，因 $h(x)$ 在 $[a,t]$ 内连续，(a,t) 内可导，则必 $\exists m\in(a,t)$，使 $h'(m)=0$，同理，$\exists n\in(t,b)$，使 $h'(n)=0$．又 $h'(x)=f'(x)-g'(x)=f'(x)+2x-B$．$h''(x)=f''(x)+2$．又 $h'(x)$ 在 $[m,n]$ 内连续，(m,n) 内可导，则由罗尔定理，$\exists\xi\in(m,n)\subset(a,b)$，使 $h''(\xi)=0$，即

$f''(\xi)=-2$．证毕

6. 证：因$f(x)$在$[0,a]$上满足拉格朗日中值定理条件，故有：$\exists \xi_1 \in (0,a)$使

$f(a)-f(0)=(a-0)f'(\xi_1)$，而$f(0)=0$. 则$f(a)=af'(\xi_1)$

同理 $f(x)$在$[b,a+b]$上满足拉格朗中值定理条件. 则$\exists \xi_2 \in (b,a+b)$使

$f(a+b)-f(b)=a\cdot f'(\xi_2)$

于是：$f(a+b)-f(b)-f(a)=a\left(f'(\xi_2)-f'(\xi_1)\right)$

又 $0<\xi_1<a\leqslant b<\xi_2<a+b<+\infty$ 而$f'(x)$在$[0,+\infty)$上单调减少，

故$f'(\xi_2)-f'(\xi_1)\leqslant 0$，故$a\left(f'(\xi_2)-f'(\xi_1)\right)\leqslant 0$.

则$f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$

证毕

7. 证：要证原等式，即证：

$[f(a)-f(c)]g'(c)=[g(c)-g(b)]\cdot f'(c)$

令$\varphi(x)=[f(a)-f(x)]g'(x)-[g(x)-g(b)]f'(x)$

$=f(a)g'(x)-f(x)g'(x)-g(x)f'(x)+g(b)f'(x)$ (*)

令$F(x)=f(a)g(x)-f(x)g(x)+g(b)f(x)$

则$\varphi(x)=F'(x)$

又因为 $F(a)=f(a)g(b)$ $F(b)=f(a)g(b)$

即$F(a)=F(b)$，由罗尔定理，$\exists c\in(a,b)$，使$F'(c)=0$，即$\varphi(c)=0$

则(*)式$=0$成立.

则原命题得证

8. (1) 由洛比达法则，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-a-2bx}{2x}=2$.

则$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+x}-a-2bx\right)=1-a=0 \Rightarrow a=1$

则原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{(x+1)^2}-2b}{2}=\dfrac{-1-2b}{2}=2 \Rightarrow b=-\frac{5}{2}$.

综上：$a=1$，$b=-\frac{5}{2}$

(2) 用泰勒展开，则 $\cos 2x = 1-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^4}{4}+o(x^4)$

$$\cos 4x = 1-\frac{(4x)^2}{2}+\frac{(4x)^4}{4}+o(x^4)$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1+a(1-2x^2+4x^4+o(x^4))+b(1-8x^2+64x^4+o(x^4))}{x^4}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1+a+b-(2a+8b)x^2+(4a+64b)x^4+o(x^4)}{x^4}$ 存在.

则分子的常数项和 x^2 项系数为 0

$$\begin{cases}1+a+b=0\\2a+8b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{-4}{3}\\b=\frac{1}{3}\end{cases}$$

则原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}(4a+64b)=\frac{8}{3}$

9. (1) $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{1}=0=\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)=g(a)=a$

$\Rightarrow a=0$.

(2) $x\neq 0$ 时，$g'(x)=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$，因 $f(x)$. $f'(x)$ 为连续函数，则 $g'(x)$ 在 $(-\infty,0)$.$(0,+\infty)$ 上连续.

又 $\lim\limits_{x\to 0^+}g'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f''(x)x+f'(x)-f'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}f''(x)=0$

同理 $\lim\limits_{x\to 0^-}g'(x)=0$

则 $g'(x)$ 在 R 上连续.

即 $g(x)$ 具有一阶连续导数

10. (1) $\lim\limits_{x\to\pi}(1-\tan\frac{x}{4})\sec\frac{x}{2}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-\tan\frac{x}{4}}{\cos\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{-\frac{1}{4}\sec^2\frac{x}{4}}{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\times 2=1$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e(e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)}{x}=e\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

$=e\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=e\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1+x)}=\frac{-e}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{n}(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln\frac{1}{n}(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)}$

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1}{n}(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[1+\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i^x-1)]}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i^x-1)}{x}$

$=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\lim\limits_{x\to 0}\frac{a_i^x-1}{x}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln a_i=\frac{1}{n}\ln(a_1a_2\cdots a_n)$

代入原式中得，原极限 $=(a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}.$

(5) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\quad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\qquad x\to0$

$\sqrt{1+x^2}=1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\qquad \cos x^2=1\qquad x\to0$

则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{\sqrt{1+x^2}-\cos x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{1+\frac{1}{2}x^2-1+o(x^2)}=\lim\limits_{x\to0}-1=-1$

(6) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos^2x}-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x}{3x^2}=\frac{1}{3}$

(7) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x}\left(\sqrt{1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}}-1\right)}{x\ln(1+x)-x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}}-1}{x\ln(1+x)-x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\tan x-\sin x)}{2(x\ln(1+x)-x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{2\cdot(x\ln(1+x)-x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{4}\frac{x^2}{\ln(x+1)-x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{4}\frac{2x}{\frac{1}{1+x}-1}=-\frac{1}{2}$

(8) 原式 $=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{\pi x}+\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\pi-\pi x-\sin\pi x}{\sin\pi x\cdot\pi(1-x)}=\frac{1}{\pi}+\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-\pi-\pi\cos\pi x}{\pi\cos\pi x\cdot\pi(1-x)+\sin\pi x(-\pi)}$

$=\frac{1}{\pi}+\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-1-\cos\pi x}{\pi\cos\pi x(1-x)-\sin\pi x}=\frac{1}{\pi}+\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\sin\pi x}{-\pi\sin\pi x\cdot(1-x)-2\cos\pi x}$

$=\frac{1}{\pi}+0=\frac{1}{\pi}.$

(9) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{\cos^2x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x\cos^2x}{x^2\sin^2x}$

由泰勒展式: $\sin^2x=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2=\left(x^2+\frac{x^9}{36}-\frac{x^4}{3}+o(x^9)\right)\quad \cos^2x=\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2=\left(1+\frac{x^4}{4}-x^2+o(x^9)\right)$

则 $\sin^2x\cos^2x=x^2+\underbrace{\frac{x^6}{4}-x^4-\frac{x^4}{3}}_{+o(x^6)}=x^2-\frac{4}{3}x^4+o(x^4)$

则 $\frac{x^2-\sin^2x\cos^2x}{x^2\sin^2x}=\frac{\frac{4}{3}x^4+o(x^4)}{x^4}$

则原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{4}{3}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{4}{3}$

11. (1) $f_n'(x)=n(1-x)^{n-1}(1-x-nx)$

因为 $n(1-x)^{n-1}>0$. 所以在 $[0,\frac{1}{n+1}]$ 上 $f_n'(x)>0$. 在 $[\frac{1}{n+1},1]$ 上 $f_n'(x)<0$

则 $f(x)$ 在 $[0,\frac{1}{n+1}]$ 上递增, 在 $[\frac{1}{n+1},1]$ 上递减.

则 $f(x)$ 的最大值为 $f(\frac{1}{n+1})=(\frac{n}{n+1})^{n+1}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}M(n)=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})^{-n-1\cdot(-1)}=e^{-1}$

12. (1) 对方程两边求导:

$2x+2y+2xy'+2yy'-4+2y'=0$

$\Rightarrow y'=\dfrac{4-2x-2y}{2x+2y+2}=\dfrac{2-x-y}{2+x+y}$

$\Rightarrow y''=\dfrac{(-1-y')(2+x+y)-(1+y')(2-x-y)}{(2+x+y)^2}=\dfrac{-4-4y'}{(2+x+y)^2}$

令 $y'=0$, 得 $x=2-y$ 代入原方程 得 $x=1$, $y=1$

当 $x=1$ 时, $y''=\frac{-4}{4^2}=-\frac{1}{4}<0$

则 $f(1)=1$ 为极大值

(2) 对方程两边求导:

$3x^2+3y^2y'-3ay-3axy'=0$

$\Rightarrow y'=\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$

$\Rightarrow y''=\dfrac{(ay'-2x)(y^2-ax)-(ay-x^2)(2yy'-a)}{(y^2-ax)^2}=\dfrac{-ay'y^2+ax^2-a^2xy'-2xy^2+a^2y+2yy'x^2}{(y^2-ax)^2}$

令 $y'=0$. 得 $y=\frac{x^2}{a}$ 代入原方程得: $x=a\sqrt[3]{2}$　$y=a\sqrt[3]{4}$

此时 $y''<0$

则 $f(a\sqrt[3]{2})=a\sqrt[3]{4}$ 是极大值

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{3t^2-3}{3t^2+3}$　　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{d}{dt}\frac{3t^2-3}{3t^2+3}}{dx/dt}=\dfrac{\frac{4t}{(t^2+1)^2}}{3t^2+3}=\dfrac{4t}{3(t^2+1)^3}$

令 $\frac{dy}{dx}=0$, 得 $t=\pm1$, $t=1$ 时 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{6}>0$ 则 $t=1$ 时取极小值

$t=-1$ 时 $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{6}<0$, 则 $t=-1$ 时取极大值.

$t=1$ 时 $x=5$. 极小值为 $y(5)=-1$

$t=-1$ 时, $x=-3$　极大值为 $y(-3)=3$

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{e^{-t}-te^{-t}}{e^t+te^t}=\frac{1-t}{e^{2t}(1+t)}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{1-t}{e^{2t}(1+t)}\right)}{e^t+te^t}=\frac{2t^2-4}{(t+1)^2e^{2t}}$$

令 $\frac{dy}{dx}=0$ 得 $t=1$，此时 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-1}{2e^2}<0$，$x=e$，$y=e^{-1}$

极大值为 $y(e)=e^{-1}$

13. (1) 当 $x<1$ 时，令 $F(x)=\frac{1}{e^x}+x-1$，则 $F'(x)=\frac{-1}{e^x}+1$，

令 $F'(x)>0$ 得 $0<x<1$，令 $F'(x)<0$ 得 $x<0$

则 $F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单减，在 $(0,1)$ 单增，又 $F(0)=0$

则 $F(x)\geq 0$ 可得：

$e^x\leq\frac{1}{1-x}$

(2) 设 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$ $(x>0)$

则 $f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})>0$

则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，又 $f(x)>f(0)=0$

则 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$

(3) 当 $x\geq 1$ 时，左边小于等于0，右边大于0，显然成立。

当 $0<x<1$ 时，即证：$e^{-2x}+xe^{-2x}+x-1>0$。

令 $f(x)=e^{-2x}+xe^{-2x}+x-1$，$x\in(0,1)$

$f'(x)=1-(2x+1)\cdot e^{-2x}$，

又 $f''(x)=-2e^{-2x}+(4x+2)e^{-2x}=4xe^{-2x}>0$，则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增，

则 $f'(x)\geq f'(0)=0$ 即 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)$ 为增函数，

则 $f(x)\geq f(0)=0$ 即：$e^{-2x}+xe^{-2x}+x-1>0$，则：

$\frac{1-x}{1+x}<e^{-2x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立。

(4) 设 $f(x)=\ln x$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，则由拉格朗日中值定理，

必存在一点 $c\in(a,b)$ 使得 $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，$f'(x)=\frac{1}{x}$。原题中，$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{2a}{2ab}=\frac{1}{b}=f'(b)$

$\frac{1}{\sqrt{ab}}>\frac{1}{(a^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{a}=f'(a)$，中间部分 $=f'(c)$，则要比较 $f'(a)$ $f'(b)$ $f'(c)$ 的大小。

又 $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$，当 $x>0$ 时 $f''(x)<0$，则 $f'(x)$ 单调递减，因为 $a<c<b$，则 $f'(b)<f'(c)<f'(a)$

从而原不等式成立

14. 构造 $f(x)=\ln x-ax$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}-a$　令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{a}$，且左邻域大于0，右邻域 $f'(x)$ 小于0.

则 $x=\frac{1}{a}$ 为 $f(x)$ 的一个极值点，且 $f'(x)=0$ 只有一个根，所以只有一个极值点，

显然，$f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 上单增，在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上单减，则 $f(x)=f(\frac{1}{a})$ 为极大值

函数只有一个极值点，且易证极大值即最大值点，则 $f(x)$ 的最大值为 $f(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}-1$

若 $f(\frac{1}{a})<0$，则 $f(x)=0$ 无实根

若 $f(\frac{1}{a})=0$　则 $f(x)=0$ 只有一个实根

若 $f(\frac{1}{a})>0$，因 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)<0$　$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)<0$，则有两个实根．

令 $f(\frac{1}{a})=0$　得 $a=\frac{1}{e}$．

综上：当 $a>\frac{1}{e}$ 时．$f(\frac{1}{a})<0$．　$f(x)=0$ 无实根，即 $\ln x=ax$ 无实根．

当 $a=\frac{1}{e}$ 时．$f(\frac{1}{a})=0$　$f(x)=0$ ~~有~~只有一个实根，即 $\ln x=ax$ 只有一个实根．

当 $a<\frac{1}{e}$ 时．$f(\frac{1}{a})>0$　$f(x)=0$ 有两个实根．即 $\ln x=ax$ 有两个实根．

15. 构造 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{100+x}$，则 $f'(x)=\frac{100-x}{(100+x)^2 2\sqrt{x}}$

则 $f'(x)>0$，得 $0<x<100$　　$f'(x)<0$　得 $x>100$　　$f'(x)=0$　得 $x=100$

则 $f(x)$ 在 $(0,100)$ 上单增，在 $(100,+\infty)$ 上单减，

则 $f(x)$ 在 $x=100$ 处取最大值．

即 $a_n=\frac{\sqrt{n}}{100+n}$ 在 $n=100$ 时取最大项 $a_{100}=\frac{1}{20}$

16. 对 $x^2y+\alpha x+\beta y=0$ 两边对 x 求导：

$2xy+x^2y'+\alpha+\beta y'=0 \Rightarrow y'=\frac{-2xy-\alpha}{x^2+\beta}$　　$y''=\frac{2x^2y-2\beta y-2x^3y'-2\beta xy'+2\alpha x}{(x^2+\beta)^2}$

若 $(2,2.5)$ 为其拐点，则有 $y'=\frac{-10-\alpha}{4+\beta}$

$$\begin{cases} 2^2\times 2.5+2\alpha+2.5\beta=0 \\ y''=\frac{2\times 2^2\times 2.5-2\beta\times 2.5-2\times 2^3y'-2\beta\times 2y'+2\alpha\times 2}{(4+\beta)^2}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{-20}{3} \quad \beta=\frac{-4}{3}$$

17：考虑，$\lim\limits_{h\to 0}\left|\dfrac{f''(a)}{h^2}-\dfrac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^4}\right|$

$=\lim\limits_{h\to 0}\left|\dfrac{f''(a)h^2-f(a+h)-f(a-h)+2f(a)}{h^4}\right|$，（$\frac{0}{0}$ 形，用洛比达法则）

$=\lim\limits_{h\to 0}\left|\dfrac{2f''(a)h-f'(a+h)+f'(a-h)}{4h^3}\right|$

$=\lim\limits_{h\to 0}\left|\dfrac{2f''(a)-f''(a+h)-f''(a-h)}{12h^2}\right|$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{12}\left|\dfrac{-f'''(a+h)+f'''(a-h)}{2h}\right|$

$=\frac{1}{12}\left|f^{(4)}(a)\right|$

因为 $|f^{(4)}(x)|\le M$. 则，对于 $0<h<\delta$，有：

$$\left|\frac{f''(a)}{h^2}-\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^4}\right|\le\frac{1}{12}M$$

$$\Rightarrow\left|f''(a)-\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}\right|\le\frac{Mh^2}{12}$$

18. 我们只考虑 a,b 同号情况. $f(x)$ 与 $\frac{1}{x}$ 在 (a,b) 上满足柯西中值条件和拉格朗日中值条件.

则 $\exists\eta\in(a,b)$，使 $\dfrac{f'(\eta)}{-\frac{1}{\eta^2}}=\dfrac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$ (*) 又由拉格朗日中值定理，

$\exists\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 则 $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)$. 代入(*)式中得：

$f'(\xi)=\dfrac{\eta^2 f'(\eta)}{ab}$ 成立.

19. (1) 记 $g(x)=f(x)+x-1$，则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 内连续，由 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 则 $g(0)=-1$ $g(1)=1$，

由零值定理，必有一点 $c\in(0,1)$. 使 $g(c)=0$，即在 $(0,1)$ 内必有一点 c，使：

$f(c)=1-c$.

(2). $f(x)$ 在 $[0,1]$ 内连续 在 $(0,1)$ 内可导，且在 $(0,1)$ 内存在一点 c 使 $f(c)=1-c$，则由

拉格朗日中值定理，存在一点 $\eta\in(0,c)$ 使 $\dfrac{f(c)-f(0)}{c-0}=\dfrac{1-c}{c}=f'(\eta)$，且

存在一点 $\xi\in(c,1)$. 使 $\dfrac{f(1)-f(c)}{1-c}=\dfrac{1-1+c}{1-c}=\dfrac{c}{1-c}=f'(\xi)$. 则：

$f'(\xi)f'(\eta)=\frac{c}{1-c}\cdot\frac{1-c}{c}=1$

综上 在 $(0,1)$ 内存在不同的点 ξ,η，使 $f'(\xi)f'(\eta)=1$

20. 由泰勒公式展开：$x\to0$时

$$\sqrt{1-2x}=1+\frac{1}{2}(-2x)+\frac{-\frac{1}{4}}{2!}(-2x)^2+o(x^2)=1-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

$$\sqrt[3]{1-3x}=1+\frac{1}{3}(-3x)+\frac{-\frac{2}{9}}{2!}(-3x)^2+o(x^2)=1-x-x^2+o(x^2)$$

则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}}{ax^n}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{ax^n}=1$

$\Rightarrow n=2\quad a=\frac{1}{2}$

21. 由泰勒公式展开，$x\to0$时.

$$x-(a+b\cos x)\sin x=x-\left(a+b\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right)$$

$$=x-\left(ax-\frac{a}{6}x^3+\frac{ax^5}{120}+bx-\frac{b}{6}x^3+\frac{b}{120}x^5-\frac{b}{2}x^3+\frac{bx^5}{12}+\frac{bx^5}{24}+o(x^5)\right)$$

$$=x-(a+b)x+\frac{a+4b}{6}x^3-\frac{a+16b}{120}x^5+o(x^5)$$

$$=(1-a-b)x+\frac{a+4b}{6}x^3-\frac{a+16b}{120}x^5+o(x^5)$$

$$c\left(\sqrt[3]{1+x^5}-1\right)=c\left(1+\frac{1}{3}x^5+o(x^5)-1\right)=\frac{c}{3}x^5+o(x^5)$$

因 $x-(a+b\cos x)\sin x$ 与 $c(\sqrt[3]{1+x^5}-1)$ 为等价无穷小.

则 $\begin{cases}1-a-b=0\\ \frac{4b+a}{6}=0\\ \frac{-a-16b}{120}=\frac{c}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{4}{3}\\ b=-\frac{1}{3}\\ c=\frac{1}{10}\end{cases}$

22、因为$f(x)$在$[a,b]$满足拉格朗日中值定理的条件，则$\exists\xi\in(a,b)$，使

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$. 又$f''(x)>0$. 则$f'(x)$在$(a,b)$上递增.

即 $f'(a)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(b)$. 又$b-a>0$

则 $(b-a)f'(a)<f(b)-f(a)<f'(b)$.

23. 因为$f'(x)$在$(0,+\infty)$内单调增加，则在$(0,+\infty)$内，$f''(x)>0$，又对于$\frac{f(x)}{x}$有：

$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$，令$g(x)=f'(x)x-f(x)$，则$g'(x)=f''(x)x+f'(x)-f'(x)=f''(x)x$

则$g'(x)$在$(0,+\infty)$内大于0. 又$g(0)=0$. 则$g(x)$在$(0,+\infty)$内大于0. 则$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'$在

$(0,+\infty)$内于0. 即$\frac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$内单调增加

24. 设 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，则：

$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$.

$f''(x)=12ax^2+6bx+2c$.

因为有两个拐点 $(2,16)$ $(0,0)$，又在 $(2,16)$ 处切线平行于 x 轴，

建立方程组：

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} 12a\times4+6b\times2+2c=0 \\ 2c=0 \end{array}\right\}\text{两个拐点} \\ 4a\times2^3+2b\times2^2+2c\times2+d=0 \quad \text{切线平行}x\text{轴} \\ \left.\begin{array}{l} a2^4+b2^3+c2^2+d2+e=16 \\ e=0 \end{array}\right\}\text{过}(2,16)\text{、}(0,0)\text{两点} \end{cases}$$

$\Rightarrow a=1 \quad b=-4 \quad c=0 \quad d=16 \quad e=0$

则 $f(x)=x^4-4x^3+16x$

25. 对 $x_0\in(0,1)$ 是 $f(x)$ 的最小值点，则它局部是极小值点，故 $f'(x_0)=0$，且 $f(x_0)=-1$.

又对 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处做泰勒展开，得：

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2=-1+\frac{f''(\xi)}{2}\cdot(x-x_0)^2$.

分别令 $x=0$ 与 $x=1$，则有，

$0=f(0)=-1+\frac{f''(\xi_1)}{2}x_0^2 \Rightarrow f''(\xi_1)=\frac{2}{x_0^2}$，其中 ξ_1 在 $(0,x_0)$ 之间，

$0=f(1)=-1+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2 \Rightarrow f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-x_0)^2}$，其中 ξ_2 在 $(x_0,1)$ 之间.

记 $f''(\xi_0)=\max\{f''(\xi_1),f''(\xi_2)\}$，那么当 $0<x_0\le\frac{1}{2}$ 时，$f''(\xi_0)=f''(\xi_1)=\frac{2}{x_0^2}\ge8$.

当 $\frac{1}{2}\le x_0<1$ 时，$f''(\xi_0)=f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-x_0)^2}\ge8$.

综上所述：$f''(\xi_0)\ge8$ 成立.

26. $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$，令 $f'(x)>0$，得 $0<x<e$，令 $f'(x)<0$ 得 $x>e$.

则 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上递增，在 $(e,+\infty)$ 内递减，

又 $\lim\limits_{x\to0}(\ln x-\frac{x}{e}+k)<0$ $\quad f(e)=1-1+k>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty<0$

则 $f(x)$ 在 $(0,e)$、$(e,+\infty)$ 内各有一个实根，共2个实根

27. 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 满足 Lagrange 中值定理，

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(x-1)}{x-(x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e$

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}\cdot\frac{2cx}{x-c}}=e^{2c}$

则 $e^{2c}=e$

$\Rightarrow c=\frac{1}{2}$.

28. (1) $f(x)=\begin{cases}x^2-x & x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)\\ -x^2+x & x\in[0,1]\end{cases}$，$f(x)$ 在 R 上连续.

$f'(x)=\begin{cases}2x-1 & x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)\\ \text{不存在} & x=0\text{ 或 }1.\\ -2x+1 & x\in(0,1)\end{cases}$

$f''(x)=\begin{cases}2 & x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)\\ -2 & x\in(0,1)\end{cases}$

因在 $x=0$ 的左边某邻域内 $f'(x)<0$ 右边邻域 $f'(x)>0$

则 $x=0$ 是极值点.

又在 $(-\infty,0)$ 内 $f''(x)>0$，$f(x)$ 为凹弧，在 $(0,1)$ 内 $f''(x)<0$ 为凸弧.

则 $(0,0)$ 是拐点.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=-1$，则 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=0$，即 $f'(a)=0$.

又 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{1}=-1$，则 $f''(a)=-1<0$

则 $f(a)$ 是极大值，$(a,f(a))$ 不是拐点.

29. 由已知 $h\to0$ 时，$af(h)+bf(2h)-f(0)$ 是 h 的高阶无穷小，有：

$\lim\limits_{h\to0}\frac{[af(h)+bf(2h)-f(0)]}{h}=0$，则 $\lim\limits_{h\to0}\frac{af(h)-af(0)+bf(2h)-bf(0)+(a+b)f(0)-f(0)}{h}=0$

则 $\lim\limits_{h\to0}\left[\frac{a(f(h)-f(0))}{h}+\frac{2b\cdot[f(2h)-f(0)]}{2h}+\frac{(a+b-1)f(0)}{h}\right]=0$

则 $(a+2b)f'(0)+\lim\limits_{h\to0}\frac{(a+b-1)f(0)}{h}=0$，又 $f(x)$ 在 $x=0$ 邻域连续可导，因此 $f'(0)$ 有界.

$\lim\limits_{h\to0}\frac{(a+b-1)f(0)}{h}$ 中 $f(0)\neq0$. 因此 $a+b-1=0$ ①，则 $\lim\limits_{h\to0}\frac{(a+b-1)f(0)}{h}=0\Rightarrow(a+2b)f'(0)=0$

又 $f'(0)\neq0$. 则 $a+2b=0$ ②　由①②得 $a=2$　$b=-1$.

30. 要使$f(x)$在$x=0$处连续，则：

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=\lim_{x\to0^-}\frac{ax^3}{x-\arcsin x}\xrightarrow{\text{洛比达}}\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2}{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}},\quad 令\ x=\sin t,\ t\to0^-$$

$$上述极限=\lim_{t\to0^-}\frac{3a(\sin t)^2}{1-\frac{1}{\cos t}}=\lim_{t\to0^-}\frac{3a\cos t\cdot\sin^2 t}{\cos t-1}=\lim_{t\to0^-}\frac{3a\sin^2 t}{-\frac{1}{2}t^2}=-6a$$

$$又\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}=\lim_{x\to0^+}\frac{ae^{ax}+2x-a}{(x\cdot\frac{x}{4})'}=\lim_{x\to0^+}\frac{ae^{ax}+2x-a}{\frac{1}{2}x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{a^2e^{ax}+2}{\frac{1}{2}}=2a^2+4.$$

则须$\begin{cases}-6a=6\\2a^2+4=6\end{cases}\Rightarrow a=-1$，此$f(x)$在$x=0$处连续.

若$\begin{cases}-6a=2a^2+4\\-6a\neq6\end{cases}\Rightarrow a=-2$ 则，$x=0$是可去间断点

31. 问题等价于讨论方程$\ln^4x-4\ln x+4x-k=0$的实根个数.

设$\varphi(x)=\ln^4(x)-4\ln x+4x-k$，则有：

$\varphi'(x)=\dfrac{4(\ln^3x-1-x)}{x}$. $\Rightarrow x=1$是$\varphi(x)$的驻点.

当$0<x<1$时. $\varphi'(x)<0$. 即$\varphi(x)$单减.

当$x>1$时. $\varphi'(x)>0$. 即$\varphi(x)$单增，

故$\varphi(1)=4-k$为$\varphi(x)$的最小值.

当$k<4$，即$4-k>0$时，$\varphi(x)=0$无实根，两曲线无交点.

当$k=4$. 即$4-k=0$时，$\varphi(x)=0$有唯一实根，两曲线有个交点.

当$k>4$. 即$4-k<0$时，由于

$$\lim_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim_{x\to0^+}[\ln x(\ln^3x-4)+4x-k]=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}(\ln x(\ln^3x-4)+4x-k)=+\infty$$

故$\varphi(x)=0$有两个实根，两曲线有两交点.

32. 对$y=1-xe^y$两边关于y求导：

$$1=-x'e^y-xe^y \Rightarrow x'=\frac{-xe^y-1}{e^y}$$，在$y=1$处，$x=0$. 则$x'=-\frac{1}{e}$. 又$x''=\frac{(x-x')e^y+1-xe^y}{e^y}$

则 $x=x(1)+x'(y-1)+R_1(\xi)$ 又

$$=-\frac{1}{e}(y-1)+\frac{3e^{-\xi}-\xi e^{-\xi}}{2}(y-1)^2 \quad \xi\in(y,1)$$

33. 令$g(x)=f(x)-x$，则$g(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且；

$g(0)=f(0)-0=0 \quad g(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \quad g(1)=f(1)-1=-1$.

则由零值定理，$\exists c\in(\frac{1}{2},1)$，使$g(c)=0$，

又由罗尔中值定理，从$\exists\xi\in(0,c)$，使：$g'(\xi)=0$. 即.

$f'(\xi)=1$. 成立.

34. 解：用泰勒展开式：

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{1}{2}f''(a)\cdot(0-x)^2$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{1}{2}f''(b)\cdot(1-x)^2$$

两式相减，得 $|f'(x)|=\left|f(1)-f(0)+\frac{1}{2}f''(a)x^2-\frac{1}{2}f''(b)\cdot(1-x)^2\right|$

$$=\left|\frac{1}{2}f''(a)x^2-\frac{1}{2}f''(b)(1-x)^2\right|\le\left|\frac{1}{2}f''(a)x^2\right|+\left|\frac{1}{2}f''(b)(1-x)^2\right|$$

$$\le\frac{A}{2}\left|x^2+(1-x)^2\right|$$

又$x^2+(1-x)^2$在$[0,1]$上最大值为1.

则$|f'(x)|\le\frac{A}{2}$.

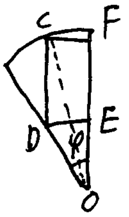
35. 易得矩形的边长为$x-\frac{1}{x}$，宽为$\frac{x}{1+x^2}$. $(x>0)$，由于$y=\frac{x}{1+x^2}$为关于原点对称，则仅考虑$x>0$处.

则圆柱体体积为 $V=\pi(\frac{x}{1+x^2})^2\cdot(x-\frac{1}{x})=\frac{\pi x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$.

则$V'=\frac{-\pi x^4+6\pi x^2-\pi}{(x^2+1)^3}$，令$V'=0$，得$x=\sqrt{3\pm2\sqrt{2}}$，又$V'$在$(0,\sqrt{3-2\sqrt{2}})$小于0，在$(\sqrt{3-2\sqrt{2}},\sqrt{3+2\sqrt{2}})$大于0

在$(\sqrt{3+2\sqrt{2}},+\infty)$小于0. 则$V$在$x=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$处取最大为$\frac{\pi}{4}$

36、先考虑如下图形：



设 $\angle COF=x$. 则 $CF=R\sin x$

在 $\triangle CDO$ 中, $\dfrac{CD}{\sin(\varphi-x)}=\dfrac{R}{\sin(180^\circ-\varphi)}$

$\therefore CD=\dfrac{R\sin(\varphi-x)\sin x}{\sin\varphi}$

$\therefore S_{CDEF}=\dfrac{R^2\sin(\varphi-x)\sin x}{\sin\varphi}=\dfrac{R^2}{2\sin\varphi}\left[\cos(2x-\varphi)-\cos(\varphi)\right]\le\dfrac{R^2}{2\sin\varphi}\left[1-\cos\varphi\right]=\dfrac{1}{2}R^2\tan\dfrac{\varphi}{2}$

当且仅当 $x=\dfrac{\varphi}{2}$ 时,取最大值. 故图中面积最大值为 $\dfrac{1}{2}R^2\tan\dfrac{\varphi}{2}$

原题中图可拆分成为两个上图, 则面积最大值为 $R^2\tan\dfrac{\varphi}{2}$, 此时, $\theta=\dfrac{\varphi}{2}$. (即图中 $x=\dfrac{\varphi}{2}$).