北京理工大学 2014-2015 学年第一学期

工科数学分析期中试题

班级________________ 学号__________________ 姓名___________________

(本试卷共 6 页，十一个大题. 解答题必须有解题过程. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸，试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												

一. 填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设当 $x \to 0$ 时，$\sqrt{1+\tan^5 x}-1$ 与 cx^k 是等价无穷小，则 $c=$_________，$k=$___________.

2. 一金属球受热膨胀，已知当球的表面积为 25 cm^2 时，表面积的增长率为 $3\text{cm}^2/\text{sec}$，此时球的体积的增长率为______________________.

3. 已知 $y=f(x)$ 是单调可导函数，$x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，又知 $f(5)=7$，

   $f'(5)=1+\sqrt{2}$，则 $\varphi'(7)=$____________________.

4. 已知 $f(1)=0$，$f'(1)=3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\sin^2 x)}{e^{2x^2}-1}=$____________________.

5. 已知 $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+bx+3b}{x+4}=8$，则 $b=$_____________.

二. (8 分) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}+x^2+2x-1}{x\ln(1+\dfrac{x}{4})}$.

三. (9 分) 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x} & x>0 \\ \ln(1+\tan^2 x) & x\le 0 \end{cases}$ ，求 $f'(x)$.

四. (9 分) 设 $e^{x+y}=\arctan\dfrac{x}{y}$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

五. (9 分) 设$\begin{cases} x = \ln(1-t^2) \\ y = \arcsin t \end{cases}$，求$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

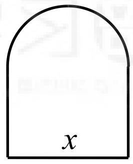
六. (9 分)试确定 $y = k(x^2-3)^2 \quad (x>0)$ 中 k 的值，使此曲线的拐点处的法线经过原点.

七. (9 分)证明 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2} \quad (x>0)$.

八. (9 分) 已知 $c\neq 0$, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+c}{x-c})^x = 3\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$, 求 c 的值.

九. (12 分) 设 $y=\dfrac{x^2+x-1}{1-x}$，研究函数的性态，并作出函数的图形.

十. (9 分) 某隧道的截面拟建成矩形加半圆的形状(如图), 已知截面面积为常数 a(m^2), 拱形部分每单位的费用是底边及侧壁每单位费用的1.5 倍, 问底边长 x 为多少时能使建造的费用最省(要求使用微积分的方法).



十一. (7 分) 设 $f(x)$ 是可导函数, 曲线 $y=f(x)$ 过原点, 且 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=6$, 证明在 $(0,1)$ 内存在 ξ, 使得 $f'(\xi)=\xi f(\xi)$.