2014-2015-第一学期　　**工科数学分析期中试题解答（2014.11）**

一．1.　$\frac{1}{2}$,　　5

2.　$\frac{15}{4\sqrt{\pi}}$ cm^3/sec

3.　$\frac{1}{1+\sqrt{2}}$

4.　$-\frac{3}{2}$

5.　16

二．

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-2x}+x^2+2x-1}{x\ln(1+\frac{x}{4})}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-2x}+x^2+2x-1}{\frac{x^2}{4}}\quad\text{..........................(2 分)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2e^{-2x}+2x+2}{\frac{x}{2}}\quad\text{......................(4 分)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4e^{-2x}+2}{\frac{1}{2}}\quad\text{......................(6 分)}$$

$$=12\quad\text{......................(8 分)}$$

三．

$$x>0\qquad f'(x)=2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\quad\text{...............(3 分)}$$

$$x<0\qquad f'(x)=\frac{1}{1+\tan^2 x}2\tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=2\tan x\quad\text{...............(6 分)}$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}x\cos\frac{1}{x}=0\quad\text{............(7 分)}$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+\tan^2 x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan^2 x}{x}=0\quad\text{..................(8 分)}$$

$$f'(0)=0\quad\text{................(9 分)}$$

四．

$$e^{x+y}(1+\frac{dy}{dx})=\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^2}=\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{x^2+y^2}\quad\text{............(左 3+右 4=7 分)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-(x^2+y^2)e^{x+y}}{x+(x^2+y^2)e^{x+y}}\quad\text{...............(9 分)}$$

五. $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{\frac{-2t}{1-t^2}}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{-2t}$$ ……………..(1+2+1=4 分)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{\sqrt{1-t^2}}{-2t})}{\frac{dx}{dt}}$$ ……………………..(5 分)

$$=\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}t-\sqrt{1-t^2}}{t^2}}{\frac{-2t}{1-t^2}}$$ …………………….(8 分)

$$=-\frac{\sqrt{1-t^2}}{4t^3}$$ ……………………..(9 分)

六. $$y'=2k(x^2-3)2x=4k(x^3-3x)$$ ………………..(2 分)

$$y''=4k(3x^2-3)$$ ……...……..(3 分)

令 $y''=0$ 得 $x=1$ ……..……….(4 分)

此时 $y=4k$, $y'=-8k$ ……..………(6 分)

法线 $$y-4k=\frac{1}{8k}(x-1)$$ ………………(7 分)

把(0,0)代入得 $-4k=-\frac{1}{8k}$ $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$ ………………(9 分)

七. 设 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$ …………..(1 分)

$$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\mathbf{\ln(x+\sqrt{1+x^2})>0}$$ ……..(6 分)

$f(x)$ 单调增，又由于 $f(0)=0$ 所以 $f(x)>0$

即 $$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}>0$$

$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$$ ……...……(9 分)

八 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}}\right]^{\frac{2cx}{x-c}}$$ ……………………(3 分)

$$=e^{2c}$$ ……………(4 分)

设 $y=x^{\frac{1}{x}}$ $\quad \ln y=\frac{\ln x}{x}$ ……………(5 分)

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$ ……………(7 分)

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$$ ……………(8 分)

$e^{2c}=3$ $\quad c=\frac{1}{2}\ln 3$ ……………(9 分)

九. $\lim_{x\to 1}y=\infty$ 有垂直渐近线 $x=1$ …………(1 分)

$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=-1$ $\quad \lim_{x\to\infty}(y+x)=-2$ 有斜渐近线 $y=-x-2$ …..….(3 分)

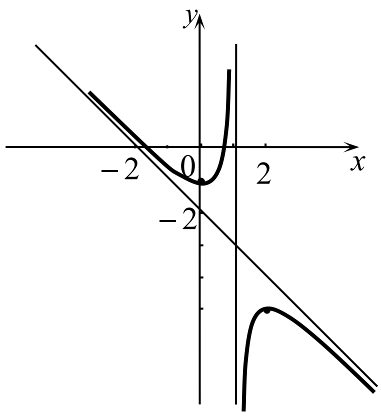
$$y'=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$$ ……………..(4 分)

令 $y'=0$ 得 $x=0$ $\quad x=2$ ………………(6 分)

$$y''=\frac{-2}{(x-1)^3}$$ ……………(7 分)

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
y''	$+$		$+$		$-$		$-$
y		极小值 -1		间断		极大值 -5	

………………(10 分)



……………………(12 分)

十. 不妨设底边及侧壁每单位费用为 1, 矩形的宽度为 t，建造费用为 y,

$$\frac{1}{2}\pi(\frac{x}{2})^2+xt=a$$ ……………(1 分)

$$y=\frac{3}{2}\cdot\pi\frac{x}{2}+x+2t=\frac{\pi}{2}x+x+\frac{2a}{x}$$ ……………(3 分)

$$y'=\frac{\pi}{2}+1-\frac{2a}{x^2}$$ ……………(6 分)

令 $y'=0$ 得 $x=2\sqrt{\frac{a}{\pi+2}}$ ……………(8 分)

由问题的实际意义, …., 故当 $x=2\sqrt{\frac{a}{\pi+2}}$ m 时建造费用最省 ……….(9 分)

十一. 令 $F(x)=f(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ …………………(1 分)

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导

由题设 $f(0)=0$ ……………(2 分)

$f(1)=\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$ ……………(4 分)

故 $F(0)=F(1)=0$

根据拉格朗日中值定理, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使 $F'(\xi)=0$ …………(6 分)

即 $f'(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}}+f(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}}(-\xi)=0$

$e^{-\frac{\xi^2}{2}}\neq0$ $\therefore f'(\xi)=\xi f(\xi)$ …………………(7 分)