北京理工大学 2020-2021 学年第一学期

线性代数 B 期末试题 A 卷

座号____________班级__________学号__________姓名____________

（试卷共 6 页，八道大题.解答题必须有解题过程,试卷后空白页撕下做稿纸,试卷不得拆散）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
签名									

得分	

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、已知方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$，则 $(\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{I})^{-1}=$______________。

2、设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&5\\2&a&7\\1&3&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$，且 $r(\boldsymbol{AB})=2$，则 $a=$____________ 。

3、已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，$\boldsymbol{A}^T$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵。若 $|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{4}$，则 $\left|\left(\dfrac{1}{4}\boldsymbol{A}\right)^{-1}-4\boldsymbol{A}^*\right|=$

_______________。

4、设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得到矩阵 $\boldsymbol{C}$，则满足 $\boldsymbol{AD}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{D}=$______________。

5、已知行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1&1&4\\-1&2&3\\1&5&5\end{vmatrix}$，则 $A_{31}+A_{32}-2A_{33}=$__________，其中 $A_{3j}\ (j=1,2,3)$ 为代数余子式。

得分	

二(10分)、设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$，求 $\boldsymbol{B}$ 。

得分	

三(10分)、设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的两个基：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^T;$$

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,-1,1)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(1,1,0)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(0,-1,1)^T.$$

（1） 求基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$ ；

（2） 求在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下有相同坐标的全体向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 。

得分	

四(10 分)、设 $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$，求 A 的列向量组的秩和一个极大无关组，并将不在极大无关组中的向量用极大无关组线性表出。

得分	

五(10 分)、设有非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + ax_4 = a \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 \end{cases}$，试讨论 a 的取值与该方程组解的关系；并在有解时，求其通解。

得分	

六(15 分)、已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{I}$。问 $\boldsymbol{B}$ 能否相似于对角矩阵？若能相似于对角矩阵，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\Lambda$。

得分	

七(15 分)、二次型 $f\left(x_1, x_2, x_3\right)=sx_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2tx_1x_3 \quad (t>0)$，已知二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1，特征值之积为-12。

(1)求 s,t 的值；

(2)写出利用正交替换 $X=QY$ 化一般形为标准形所用的正交矩阵 Q；

(3)判断此二次型是否正定。

得分	

八(10分)、

设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\ldots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$是$\boldsymbol{n}$元非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的$\boldsymbol{n-r+1}$个线性无关的解，且$\boldsymbol{r}\left(\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{r}$。

证明：$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的任意一个解均可表示为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{\eta}_2+\ldots+\boldsymbol{k}_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$$

其中常数$\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\ldots,\boldsymbol{k}_{n-r+1}$满足$\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2+\ldots+\boldsymbol{k}_{n-r+1}=\boldsymbol{1}$。