

**线性代数 B 试题 A 卷**

班级 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_ 成绩 \_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、(10 分) 设  $A$  是三阶矩阵,  $A^*$  是其伴随矩阵, 已知  $|A| = \frac{1}{2}$ , 求行列式  $|(3A)^{-1} - 2A^*|$  的值。

二、(10 分) 设  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $AB = A + 2B$ , 求  $B$ 。

三、(10 分) 设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (\lambda + 2)x_3 = 3 \\ x_1 + \lambda x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

问： $\lambda$  取何值时，此方程组有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时求通解。

(用导出组的基础解系表示通解)

四、(10 分) 已知  $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4), \alpha_2 = (2, 3, 4, 5), \alpha_3 = (3, 4, 5, 6), \alpha_4 = (4, 5, 6, 7)$ 。

(1) 求向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的秩和一个极大无关组;

(2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

五、(10 分) 已知  $\mathbf{R}^3$  的两组基:

$$\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \quad \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \quad \alpha_3 = (0, 0, 1)^T,$$

$$\beta_1 = (1, 0, 1)^T, \quad \beta_2 = (0, 0, -1)^T, \quad \beta_3 = (1, 2, 0)^T,$$

(1) 求  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  到  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  的过渡矩阵;

(2) 求  $\alpha = (3, 2, 1)^T$  关于基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的坐标。

六、(10 分) 设矩阵  $A \sim B$ ，其中  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix}$ ， $B = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & b \end{pmatrix}$ ，求  $a, b$  的值。

七、(10 分) 已知向量组： $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$ ， $\alpha_2 = (0, 1, 2)^T$ ，求生成子空间  $L(\alpha_1, \alpha_2)$  的一个标准正交基。

八、(10 分) 已知实二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 。

(1) 求一正交变换  $\mathbf{X} = \mathbf{QY}$ ，将二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  化为标准形；

(2) 判断二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  是否正定。

九、(10 分) 设  $\mathbf{X}_0$  是非齐次线性方程组  $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$  的一个特解， $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \Lambda, \mathbf{X}_t$  是其导出方程组  $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$  的一个基础解系，证明： $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \Lambda, \mathbf{X}_t$  线性无关。

十、(10 分) 设三阶矩阵  $A$  的各行元素之和均为  $3$ ，向量  $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T$ ， $\alpha_2 = (0, -1, 1)^T$  是线性方程组  $AX = 0$  的两个解。

(1) 求  $A$  的特征值与特征向量；

(2) 证明：存在可逆矩阵  $P$  和对角矩阵  $\Lambda$ ，使得  $P^{-1}AP = \Lambda$ ；

(3) 求  $(A - \frac{3}{2}E)^6$ ，其中  $E$  为三阶单位矩阵。