习题四

1．用行列式求解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases}3x_1+4x_2=25\\2x_1+3x_2=18;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2x_1+\ \ x_2=33\\4x_1+3x_2=81.\end{cases}$

解 (1) $x_1=\dfrac{\begin{vmatrix}25&4\\18&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&4\\2&3\end{vmatrix}}=\dfrac{3}{1}=3,\ x_2=\dfrac{\begin{vmatrix}3&25\\2&18\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&4\\2&3\end{vmatrix}}=\dfrac{4}{1}=4.$

(2) $x_1=\dfrac{\begin{vmatrix}33&1\\81&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}}=\dfrac{18}{2}=9,\ x_2=\dfrac{\begin{vmatrix}2&33\\4&81\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}}=\dfrac{30}{2}=15.$

2．计算行列式.

(1) $\begin{vmatrix}2&3&1\\1&2&0\\3&4&2\end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix}0&5&1\\4&-3&0\\2&4&1\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix}1&-2&5&0\\2&0&4&1\\3&1&0&7\\0&4&-2&0\end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix}2&3&1\\1&2&0\\3&4&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&0\\2&3&1\\3&4&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&0\\0&-1&1\\0&-2&2\end{vmatrix}=0$;

(2)

$$\begin{vmatrix}0&5&1\\4&-3&0\\2&4&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&4&1\\4&-3&0\\0&5&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&4&1\\0&-11&-2\\0&5&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&4&1\\0&-1&0\\0&5&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&4&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=2$$

(3) $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-2&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-2\end{vmatrix}=-8$.

(4)

$$\begin{vmatrix}1&-2&5&0\\2&0&4&1\\3&1&0&7\\0&4&-2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&5&0\\0&4&-6&1\\0&7&-15&7\\0&4&-2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&5&0\\0&4&-6&1\\0&-1&-3&5\\0&4&-2&0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&-2&5&0\\0&1&3&-5\\0&4&-6&1\\0&4&-2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&5&0\\0&1&3&-5\\0&0&-18&21\\0&0&-14&20\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&-2&5&0\\0&1&-1&-5\\0&0&-6&7\\0&0&0&11/6\end{vmatrix}$$

$=-66.$

3\. 已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, 求$\det(2\boldsymbol{A})$, $\det(-\boldsymbol{A})$.

解 $\det(2\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}2&4\\6&8\end{vmatrix}=-8$, $\det(-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}-1&-2\\-3&-4\end{vmatrix}=-2.$

4\. 已知行列式$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=6$, 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\3a_{31}&3a_{32}&3a_{33}\end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix}a_{11}&3a_{12}&a_{13}+a_{11}\\a_{21}&3a_{22}&a_{23}+a_{21}\\a_{31}&3a_{32}&a_{33}+a_{31}\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix}a_{13}&a_{11}&2a_{12}\\a_{23}&a_{21}&2a_{22}\\a_{33}&a_{31}&2a_{32}\end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}&a_{22}\\a_{11}&a_{13}&a_{12}\\a_{31}&a_{33}&a_{32}\end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\3a_{31}&3a_{32}&3a_{33}\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=18$

(2)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 3a_{12} & a_{13}+a_{11} \\ a_{21} & 3a_{22} & a_{23}+a_{21} \\ a_{31} & 3a_{32} & a_{33}+a_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 3a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 3a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 3a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & 3a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & 3a_{32} & a_{31} \end{vmatrix};$$

$$= 3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 18.$$

(3) $\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} & 2a_{12} \\ a_{23} & a_{21} & 2a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & 2a_{32} \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 12.$

(4) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = 6.$

(5) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 6.$

5. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ a & 2+a & a \\ a & a & 2+a \end{vmatrix}$;　　(6) $\begin{vmatrix} a & -2 & 2 \\ -2 & a-4 & -4 \\ 2 & -4 & a+3 \end{vmatrix}$.

解 (1)

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \quad \underline{\text{将第 2 , 3 行加到第 1 行上}}$$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \quad \underline{\text{提出第 1 行的公因子}}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

将第 1 行的 $(-2b)$ 倍加到第 2 行，将第 1 行的 $(-2c)$ 倍加到第 3 行

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -b-c-a & 0 \\ 0 & 0 & -c-a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)^3.$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$$

将第 2 列的 (-1) 倍加到第 1 列，第 4 列的 (-1) 倍加到第 3 列

$$=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ a & 1-a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & b & 1-b \end{vmatrix}$$

提出第 1 列的公因子 a，第 3 列的公因子 b

$$=ab\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1-a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$$

将第 1 列的 (-1) 倍加到第 2 列和第 4 列，第 3 列的 (-1) 倍加到第 4 列

$$=ab\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -b \end{vmatrix}=a^2b^2.$$

(3)

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$$

将第 1 列的 (-1) 倍分别加到第 2 列和第 3 列

$$=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 \end{vmatrix}$$

将第 2 列的 (-2) 倍加到第 3 列,并提出第 3 列的公因子 2

$$=2\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 1 \\ b^2 & 2b+1 & 1 \\ c^2 & 2c+1 & 1 \end{vmatrix}$$

将第 3 列的 (-1) 倍加到第 2 列,并提出第 2 列的公因子 2

$$= 4\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$$

<u>3 阶范德蒙德行列式</u>

$$= 4(a-b)(a-c)(b-c).$$

(4)

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & d & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -ad\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + bc\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= -ad(ad-bc) + bc(ad-bc)$$

$$= -(ad-bc)^2.$$

(5) $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ a & 2+a & a \\ a & a & 2+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+2a & a & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4(1+2a)$.

(6)

$$\begin{vmatrix} a & -2 & 2 \\ -2 & a-4 & -4 \\ 2 & -4 & a+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -2 & 2 \\ 0 & a-8 & a-1 \\ 2 & -4 & a+3 \end{vmatrix} = (a-8)\begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & a+3 \end{vmatrix} - (a-1)\begin{vmatrix} a & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= (a-8)[a(a+3)-4] - (a-1)(-4a+4)$$

$$= a^3 - a^2 - 36a + 36$$

$$= (a-1)(a-6)(a+6).$$

6. 计算行列式.

(1) $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$;

(2) $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

(3) $D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

(4) $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$;

(5) $D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n \\ a^2 & (a-1)^2 & (a-2)^2 & \cdots & (a-n)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}$.

解 (1)

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

<u>将第 1 行的 (-1) 倍分别加到第 2 行,第 3 行, …,第 n 行</u>

$$=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

<u>将第 2 列,第 3 列,…,第 n 列加到第 1 列</u>

$$
=\begin{vmatrix} 1+a_1+a_2+\cdots+a_n & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
=1+a_1+a_2+\cdots+a_n.
$$

(2)

$$
D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}
$$

将第 2 行,第 3 行,…,第 n 行加到第 1 行, 并提出公因子 $n-1$

$$
=(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}
$$

将第 1 行的 (-1) 倍分别加到第 2 行,第 3 行, …,第 n 行,

$$
=(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}
$$

$$
=(-1)^{n-1}(n-1).
$$

(3) 根据例 4.22 的结果, 得到

$$
D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}, \qquad (1)
$$

等式(1)可以写为

$$
D_n-D_{n-1}=D_{n-1}-D_{n-2},
$$

于是

$$
D_n-D_{n-1}=D_{n-1}-D_{n-2}=D_{n-2}-D_{n-3}=\cdots=D_2-D_1=1.
$$

因此,

$$
D_n=D_{n-1}+1=D_{n-2}+1+1=\cdots=D_1+(n-1)=n+1.
$$

(4)

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

将第 2 列,第 3 列,…,第 n 列加到第 1 列，然后将第 1 列的公因子 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 提出

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

将第 $i-1$ 行的 (-1) 倍加到第 i 行， $i=n,n-1,\cdots,2$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

按照第 1 列展开

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

将第 2, 3, $\cdots,n-1$ 列都加到第 1 列上

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ -1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

将第 1 行的 (-1) 倍分别加到第 2 行,第 3 行, …,第 n 行,

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ -1 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

按照第 $n-1$ 行展开

$$=\frac{n(n+1)}{2}\cdot(-1)^{n+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ -n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\cdot(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}\cdot(-n)^{n-2}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}.$$

(5)

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n\\ a^2 & (a-1)^2 & (a-2)^2 & \cdots & (a-n)^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \cdots & (a-n)^n\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{0\le i<j\le n}\{[a-(j-1)]-[a-(i-1)]\}$$

$$=\prod_{0\le i<j\le n}(i-j)$$

$$=(-1)^n n!(-1)^{n-1}(n-1)!\cdots(-1)1$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}n!(n-1)!\cdots 1.$$

7. 判断下列命题真假，并且说明理由:

(1) 如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 的某一行的倍数加到另一行得到方阵 $\boldsymbol{B}$, 那么 $\det\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{B}$;

(2) 如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 的某一行乘以常数 k 得到方阵 $\boldsymbol{B}$, 那么 $\det\boldsymbol{A}=k\det\boldsymbol{B}$;

(3) 如果对方阵 $\boldsymbol{A}$ 连续作两次行的交换得到方阵 $\boldsymbol{B}$, 那么 $\det\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{B}$;

(4) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是 2 阶矩阵，并且 $\det\boldsymbol{A}=0$，那么 $\boldsymbol{A}$ 的一行是另一行的倍数;

(5) 如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行构成的向量组是线性相关的，那么 $\det\boldsymbol{A}=0$.

解 (1) 正确. 这是性质 4.9 的结论.

(2) 正确. 这是 4.7 的结论.

(3) 正确. 这是 4.6 的结论.

(4) 正确. 但是这个结论只对 2 阶矩阵成立.

(5) 正确. 这是定理 4.1 的结论.

8. 证明下列等式:

(1) $$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{n-i-1};$$

(2) $$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1 b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2 b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1} b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n+1} a_i^n \prod_{1 \le i < j \le n+1} \left(\frac{b_j}{a_j} - \frac{b_i}{a_i} \right),$$

其中 $a_i \neq 0,\ b_i \neq 0,\ i = 1, 2, \cdots, n+1.$

证明 (1) 首先将行列式的第 i 行乘以 x 加到第 $i+1$ 行，$i = 1, 2, \cdots, n-1,$ 其次将得到的行列式按照第 n 行展开，那么

$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 + a_0 x & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 + a_1 x + a_0 x^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} + \cdots + a_1 x^{n-3} + a_0 x^{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ a_{n-1} + a_{n-2} x + \cdots + a_1 x^{n-2} + a_0 x^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{n-i-1} \right) (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{n-i-1} \right) (-1)^{n+1} (-1)^{n-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{n-i-1}.$$

(2) 将行列式的第 i 行的公因子 a_i^n 提出来，$i = 1, 2, \cdots, n+1$，化为范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1 b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2 b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1} b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n+1}a_i^n\begin{vmatrix}1 & \frac{b_1}{a_1} & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{n}\\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^{n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^{n}\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n+1}a_i^n\prod_{1\le i<j\le n+1}\left(\frac{b_j}{a_j}-\frac{b_i}{a_i}\right).$$

9. 用分块方法计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix}1&2&0&0&0\\3&4&0&0&0\\5&6&1&2&1\\7&8&1&4&3\\9&10&2&-3&1\end{vmatrix}$;　　　(2) $\begin{vmatrix}0&0&0&1&2\\0&0&0&3&4\\3&4&1&0&0\\4&4&5&0&0\\1&2&3&0&0\end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix}1&2&0&0&0\\3&4&0&0&0\\5&6&1&2&1\\7&8&1&4&3\\9&10&2&-3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&2&1\\1&4&3\\2&-3&1\end{vmatrix}=-2\cdot 12=-24$.

(2) $\begin{vmatrix}0&0&0&1&2\\0&0&0&3&4\\3&4&1&0&0\\4&4&5&0&0\\1&2&3&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{2\times 3}\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}3&4&1\\4&4&5\\1&2&3\end{vmatrix}=-2\cdot(-18)=36.$

10. 已知 4 阶行列式的值为 92, 第 2 行的元素依次为$1, 0, a+3, 2$,并且第 2 行元素的余子式分别为$1, 3, -5, 2$　求a的值.

解 将行列式按第 2 行展开, 得到

$$(-1)^{2+1}\cdot 1\cdot 1+(-1)^{2+2}\cdot 0\cdot 3+(-1)^{2+3}\cdot(a+3)\cdot(-5)+(-1)^{2+4}2\cdot 2=92,$$

即 $5a=74$, 因此, $a=\frac{74}{5}$.

11. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_2 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_2 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_6 & a_7 \end{pmatrix}$，求 $A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}$的值，其中 A_{13} 为 $\boldsymbol{A}$ 中 $(i,3)-$元的代数余子式，$i=1,2,3,4.$

解 将 $A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}$写成

$$A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}=1\cdot A_{13}+1\cdot A_{23}+1\cdot A_{33}+1\cdot A_{43}, \qquad (1)$$

等式(1)的右端等于将矩阵$\boldsymbol{A}$的第 3 列全部换成常数 1 得到的矩阵的行列式，因此

$$A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 & a_4 \\ a_2 & a_2 & 1 & a_5 \\ a_3 & a_2 & 1 & a_6 \\ a_4 & a_2 & 1 & a_7 \end{vmatrix}=0.$$

12. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$，求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 和 $A_{44}+A_{45}$，其中 A_{4j} 为 $\boldsymbol{A}$ 中 $(4,\ j)-$元的代数余子式，$i=1,2,3,4,5.$

解 因为

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}=1\cdot A_{41}+1\cdot A_{42}+1\cdot A_{43}+0\cdot A_{44}+0\cdot A_{45},$$

所以

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}=-9,$$

. 这是

同理可以得到

$$A_{44}+A_{45}=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&2&1&1\\3&1&2&4&5\\0&0&0&1&1\\4&3&1&5&0\end{vmatrix}=18.$$

13. 讨论 a 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+ax_2-x_3=1\\ax_1-\ x_2+\ x_3=2\\4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$$

有唯一解？有无穷多个解？无解？在有解时，求出全部解.

解 考虑方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&a&-1\\a&-1&1\\4&5&-5\end{vmatrix}=(5a+4)(a-1).$$

讨论:

情况 1 $D\neq 0$，即 $a\neq 1,a\neq -\frac{4}{5}$. 此时，方程组有唯一解:

$$x_1=\frac{9}{5a+4},x_2=\frac{6}{5a+4},x_1=\frac{a+14}{5a+4};$$

情况 2 $a=-\frac{4}{5}$. 将方程组的增广矩阵为阶梯形:

$$\begin{pmatrix}2&-4/5&-1&1\\-4/5&-1&1&2\\4&5&-5&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-4/5&-1&1\\-4&-5&5&10\\4&5&-5&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&-4/5&-1&1\\0&-33/5&3&12\\0&0&0&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2/5&-1/2&1/2\\0&1&-5/11&-20/11\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

因为方程组的增广矩阵的秩等于 4，大于系数矩阵的秩，所以方程组无解.

情况 3 $a=1$. 将方程组的增广矩阵化为简化阶梯形

$$\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\1&-1&1&2\\4&5&-5&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

因为方程组的增广矩阵的秩等于 2，等于系数矩阵的秩，小于未知数的个数，所以方程组有无穷多个解. 在方程组中令自由未知数 $x_3=0$，得到 $\gamma_0=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ 是方程

组的一个特解．在方程组的导出方程组中令 $x_3=1$, 得到 $x_1=0, x_2=1$. 于是 $\xi=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 是方程组的导出方程组得基础解系．因此，方程组的通解为 $\gamma=\gamma_0+c\xi$，其中 c 为任意常数.

14. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$，其中 $\boldsymbol{I}$ 为 3 阶单位矩阵. 如果 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$，求 $\det\boldsymbol{B}$.

解: 根据等式 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$，可以得到

$$(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}. \tag{1}$$

因为 $\det(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=18$ 所以 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 可逆．在等式(1)的两边同时右乘矩阵 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}$，得到

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}.$$

于是

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}.$$

因此,

$$\det\boldsymbol{B}=\det[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}]=[\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})]^{-1}=-1.$$

$\frac{1}{2}$

15. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=-2, |\boldsymbol{B}|=3$，求

(1) $|-2\boldsymbol{A}|$; (2) $|\boldsymbol{A}^{-1}|$; (3) $|\boldsymbol{A}^*|$; (4) $|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}|$;

(5) $\left|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{AB}\right)^{-1}-\frac{1}{3}(\boldsymbol{AB})^*\right|$; (6) $|\boldsymbol{B}^5|$.

解 (1) (1) $|-2\boldsymbol{A}|=(-2)^3|\boldsymbol{A}|=(-2)^3(-2)=16$.

(2) $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}=-\frac{1}{2}$.

(3) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{3-1}=4$.

(4) $|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}^*||\boldsymbol{B}|=12$.

(5)

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{AB}\right)^{-1}-\frac{1}{3}(\boldsymbol{AB})^{*}\right|\\
&=\left|2\left(\boldsymbol{AB}\right)^{-1}-\frac{1}{3}|\boldsymbol{AB}|(\boldsymbol{AB})^{-1}\right|\\
&=|2\left(\boldsymbol{AB}\right)^{-1}+2(\boldsymbol{AB})^{-1}|\\
&=|4\left(\boldsymbol{AB}\right)^{-1}|\\
&=4^{3}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\\
&=-\frac{32}{3}.
\end{aligned}
$$

(6) $|\boldsymbol{B}^5|=|\boldsymbol{B}|^5=3^5=243.$

16. 利用行列式, 判断下列矩阵是否可逆:

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -7 & 3 & -7 \\ 9 & -5 & 5 \end{pmatrix}$; (2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & -8 & 0 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

解 (1) 因为

$$\det\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -7 & 3 & -7 \\ 9 & -5 & 5 \end{vmatrix}=0,$$

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

(2) 因为

$$\det\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-36,$$

所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可逆

17. 利用行列式判断下列向量组是否线性无关:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3\\5\\-6\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-6\\0\\7\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-2\\4\\3\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\3\end{pmatrix}$.

解 (1) 令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$. 因为

$$\det\boldsymbol{A}=\det\begin{pmatrix}4&-7&-3\\6&0&-5\\-7&2&6\end{pmatrix}=11\neq 0,$$

所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是线性无关的.

(2) 令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$. 因为

$$\det\boldsymbol{A}=\det\begin{pmatrix}3&2&-2&0\\5&-6&-1&0\\-6&0&3&0\\4&7&0&3\end{pmatrix}=0,$$

所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$是线性相关的.

18. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$都是$\mathbf{F}^4$中的向量, 并且$\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)=a$, $\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)=b$, 求 4 阶行列式$\det(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)$的值.

解

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)&=\det(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1)+\det(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2)\\&=-\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)-\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)\\&=-a-b\end{aligned}$$

19. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\2\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\\3\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$是 3 阶矩阵, 并且$|\boldsymbol{A}|=18$, $|\boldsymbol{B}|=2$, 求$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$.

解 根据性质 4.7 和性质 4.8, 可以得到

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\2\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\\3\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\\2\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\2\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\2\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\\3\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}|\boldsymbol{A}|-2|\boldsymbol{B}|$$
$$=2.$$

20. 设$n\geq 2$是正整数，$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵. 证明:

(1) 如果$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$，那么$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=n$;

(2) 如果$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$，那么$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=1$;

(3) 如果$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n-1$，那么$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=0$.

解 (1) 如果$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$，那么$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，于是$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\neq 0$，因此$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=n$.

(2) 如果$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$，那么$|\boldsymbol{A}|=0$，而且 $\boldsymbol{A}$ 至少有一个$n-1$阶子式不为零. 于是 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{0}$，从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)\geq 1$. 另一方面，因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|A|I=\boldsymbol{0}$ 所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)(\leq n)$ 于是$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)\leq 1$. 因此，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=1$.

(3) 如果$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n-1$，那么 $\boldsymbol{A}$ 的所有$n-1$阶子式全部为零，于是$\boldsymbol{A}^*=0$. 因此$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=0$.

21. 设

$$\begin{cases}x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3\\x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3\\x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3\\x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3\end{cases}$$

是$\mathbf{F}$上的4×3线性方程组.

(1) 证明如果a_1,a_2,a_3,a_4两两不相等，那么此方程组无解;

(2) 设$a_1=a_3=k$，$a_2=a_4=-k$，$k\neq 0$, 并且$\gamma_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\gamma_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$是方程组的两个解，求此方程组的通解.

解 (1) 因为方程组得增广矩阵的行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3\\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3\\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3\\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3\end{vmatrix}$$

为范德蒙德行列式，所以当a_1,a_2,a_3,a_4两两不相等时，$D\neq 0$，于是方程组增广矩阵的秩$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=4$. 因为系数矩阵的秩$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leq\min(3,4)<4$，所以方程组无解.

(2) 设$a_1=a_3=k,\ a_2=a_4=-k,\ k\neq 0$. 此时，方程组等价于

$$\begin{cases}x_1+kx_2+k^2x_3=k^3\\ x_1-kx_2+k^2x_3=-k^3\end{cases}$$

因为方程组系数矩阵的秩为 2，所以方程组的导出方程阻的基础解系中只包含一个解向量. 令$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$，那么$\boldsymbol{\xi}$是方程组的导出方程组的一个基础解系.

因此方程组的通解为$\boldsymbol{\gamma}_1+c\boldsymbol{\xi}$,其中$c$为任意常数.

22. 已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$，求行列式$\begin{vmatrix}\boldsymbol{0} & 3\boldsymbol{A}^*\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\end{vmatrix}$的值.

解 利用行列式的性质，得到

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}\boldsymbol{0} & 3\boldsymbol{A}^*\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\end{vmatrix}&=(-1)^{3\times 2}\,|3\boldsymbol{A}^*\|\boldsymbol{B}|\\ &=3^3\,|\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{B}|\\ &=27\cdot(-1)^2\cdot 1\\ &=27.\end{aligned}$$

23. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$都是可逆矩阵，证明$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$也是可逆矩阵.

证明 因为$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$都是可逆矩阵，所以

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}|&=|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{B}^{-1}|\\ &=|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}|\\ &=|\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1})|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1})| \\
&= |\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}^{-1}| \\
&= |\boldsymbol{A}^{-1}|\cdot|(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})|\cdot|\boldsymbol{B}^{-1}|.
\end{aligned}
$$

又因为$\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{-1}$都是可逆矩阵，所以$|\boldsymbol{A}^{-1}|\neq 0,|\boldsymbol{B}^{-1}|\neq 0,|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\neq 0$，于是

$$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}|\neq 0,$$

因此，$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$是可逆矩阵.

24. 设$\boldsymbol{A}$是n阶正交矩阵，$|\boldsymbol{A}|<0$，求$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|$.

解 因为

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}| &= |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})| \\
&= |\boldsymbol{A}|\cdot|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})| = |\boldsymbol{A}|\cdot|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}| \\
&= |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|,
\end{aligned}
$$

所以

$$(1-|\boldsymbol{A}|)|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|=0,$$

因此$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|=0$.

25. 计算顶点为$A(-2,-2), B(0,3), C(4,-1), D(6,4)$的平行四边形$ABCD$的面积.

解 先将这个平行四边形平移，使得原点作为它的一个顶点的情形. 为此，将四个点分别向下、向右平移2个单位，得到的点记为$A'(0,0)$，B'，$C'(2,5)$，D'，因为$\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C'}$，所以$A',B',C',D'$四点构成一个以$\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}$为邻边的平行四边形，而且平行四边形$A'B'C'D'$的面积等于平行四边形$ABCD$的面积. 因为平行四边形$A'B'C'D'$的面积为

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = -28$$

的绝对值，所以平行四边形$ABCD$的面积等于28.

31. 求一个顶点在原点O，与原点相邻的顶点为$A(1,0,-2), B(1,2,4), C(7,1,0)$的平行六面体的体积.

解 因为

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = 22,$$

所以平行六面体的体积为 22.

32. 设三角形的 3 个顶点坐标为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$，证明三角形 ABC 的面积为 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ 的绝对值.

证明 首先将三角形 ABC 平移，使得原点作为它的一个顶点. 为此，我们将三个顶点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 都减去点 (x_1, y_1)，得到的点记为

$$A'(0,0), B'(x_2 - x_1, y_2 - y_1), C'(x_3 - x_1, y_3 - y_1).$$

于是三角形 ABC 的面积等于三角形 $A'B'C'$ 的面积，等于以 $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}$ 为邻边的平行四边形的面积的一半.以 $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}$ 为邻边的平行四边形的面积四边形的面积等于

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

的绝对值.

将行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ 按照第三列展开，整理可得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\ &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) - (x_1 y_3 - x_3 y_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ &= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \\ &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

因此，三角形 ABC 的面积等于 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ 的绝对值.