课程编号：A073003 北京理工大学 2009-2010 学年第一学期

线性代数(B)试题 B 卷

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{2}&\mathbf{5}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{3}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{3}&\mathbf{1}\\\mathbf{4}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$，求行列式$\begin{vmatrix}\mathbf{0}&\boldsymbol{A}^{T}\\\boldsymbol{B}^{-1}&\mathbf{0}\end{vmatrix}$的值。

二、（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AXA}^* = 2\boldsymbol{XA}^* + 9\boldsymbol{I}$ ，求 $\boldsymbol{X}$。

三、（10 分）对下列线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$$

试讨论：当 a 取何值时，它有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。（用导出组的基础解系表示通解）

四、（10 分）已知

$$\boldsymbol{\alpha_1}=(-2,1,0,3),\ \ \boldsymbol{\alpha_2}=(1,-3,2,4),\ \ \boldsymbol{\alpha_3}=(3,0,2,-1),\ \ \boldsymbol{\alpha_4}=(2,-2,4,6)$$

(1) 求向量组$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\alpha_4}$的秩和一个极大无关组;

(2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

五、（10 分）已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个基，$\boldsymbol{\beta_1}=\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\beta_2}=\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\alpha_2}$，$\boldsymbol{\beta_3}=\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\alpha_2}+\boldsymbol{\alpha_3}$。

(1) 证明$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$为$\boldsymbol{R}^3$的一个基;

(2) 求基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵;

(3) 求向量$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{\alpha_2}+\boldsymbol{\alpha_3}$关于基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的坐标。

六、（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(2) 判断 $\boldsymbol{A}$ 是否可以相似对角化。

七、（10 分）已知向量组：$\boldsymbol{\alpha_1}=(\mathbf{1,0,1})^{\boldsymbol{T}}$，$\boldsymbol{\alpha_2}=(\mathbf{0,1,2})^{\boldsymbol{T}}$，求生成子空间$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$的一个标准正交基。

八、（10 分）已知实二次型$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{AX}$，其中$\boldsymbol{A}$相似于对角矩阵$\mathrm{diag}(\mathbf{1,-2,3})$。

(1) 求二次型$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)$的一个标准形;

(2) 判断二次型$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)$是否正定。

九、（10 分）已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有通解 $\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{k_1\alpha_1}+\boldsymbol{k_2\alpha_2}$，其中 $\boldsymbol{k_1},\boldsymbol{k_2}$ 为任意常数，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量。

十、（10 分）已知 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2}$ 都是 3 元向量，且 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2}$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2}$ 线性无关。

(1) 证明：存在非零的 3 元向量 $\boldsymbol{\gamma}$，它既能由 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2}$ 线性表示，又能由 $\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2}$ 线性表示；

(2) 当 $\boldsymbol{\alpha_1}=(\mathbf{1,1,0})^{\boldsymbol{T}},\boldsymbol{\alpha_2}=(\mathbf{1,-1,1})^{\boldsymbol{T}},\boldsymbol{\beta_1}=(\mathbf{2,1,1})^{\boldsymbol{T}},\boldsymbol{\beta_2}=(\mathbf{-1,2,-1})^{\boldsymbol{T}}$ 时，求(1)中的 $\boldsymbol{\gamma}$。