线性代数 B 期末试题 A 卷

（试题共 2 页，八道大题，**请将答案写到答题纸上，解答题必须有解题过程**）

一、　填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，若 $r(\boldsymbol{A})=2$，且 1 和 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $\left|\boldsymbol{A}^2+2I\right|=$______.

2、已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+ax_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3$ 为正定二次型，则 a 的取值范围是____________.

3、计算 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^3=$____________.

4、已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,2)^{\boldsymbol{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,1)^{\boldsymbol{T}}$，若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2{}^{\boldsymbol{T}}$，则 $\boldsymbol{A}^{2022}-\boldsymbol{A}^{2021}=$____________.

5、已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1&-2\\0&0&1&1\\5&2&0&0\\2&1&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$____________.

二(10 分)、已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$，且矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $2\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+\boldsymbol{I}$，其中 $\boldsymbol{I}$ 为 3 阶单位矩阵，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

三(10 分)、已知 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个基为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\boldsymbol{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,0)^{\boldsymbol{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,2)^{\boldsymbol{T}}$，并且由 $\boldsymbol{R}^3$ 的另一个基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&1&8\\0&1&1\\1&0&3\end{pmatrix}.$$

（1）　求基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$；

（2）　若向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $(1,2,1)^T$，求 $\boldsymbol{\gamma}$ 在 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标.

四(10 分)、已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - k_1 x_4 = k_2 \end{cases}$$

讨论方程组中参数 k_1, k_2 的取值与方程组解的关系，并且在方程组有无穷多解时，求出它的通解(用导出方程组的基础解系表示).

五(10 分)、已知 $\boldsymbol{R}^4$ 中的向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1,0)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,-4,1,5)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,-2,1,2)^T, \boldsymbol{\alpha}_4 = (2,-2,2,6)^T.$$

（1）求生成子空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$ 的维数和一个基；

（2）用(1)中所求得的基线性表出 $\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$.

六(15 分)、已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

(1) 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{X}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$；

(2) 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的正惯性指数；

(3) 求正交替换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$，将二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形，其中 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵.

七(15 分)、已知 -2 是矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & a & 3 & b \\ 0 & -5 & -5 & -7 \end{pmatrix}$ 的二重特征值. 问 a, b 取何值时，$\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化？并且当 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化时，求出相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角形矩阵.

八(10 分)、已知 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 元列向量。若 $\boldsymbol{\alpha}_3 \neq \boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}$，则证明下列结论：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；

（2）$\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角形矩阵.