

工科数学分析期中试题 (信二学习部整理)

班级_____ 学号_____ 姓名_____

(本试卷共 6 页, 十一个大题. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸, 试卷背面也可做草稿纸. 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												

一. 填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. 已知 f 是可导函数, $y = e^{f^2(x)} + f(\arcsin x^2)$, 则

$$dy = \underline{\hspace{10cm}}.$$

2. 已知 $y = ax$ 是 $y = \ln x$ 的一条切线, 则切点坐标为_____.

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{(e^{x^2} - 1) \cdot \arctan x} = \underline{\hspace{10cm}}.$$

$$4. \text{ 设 } \begin{cases} x = \ln \sqrt{1+t^2} \\ y = \arctan t \end{cases}, \text{ 则 } \frac{d^2 y}{dx^2} = \underline{\hspace{10cm}}.$$

 5. 函数 $f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$ 的第一类间断点为_____, 第二类间断点为_____.

 二. (8 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

三. (8 分) 已知方程 $e^y \cos x + x + y = 1$ 确定函数 $y = y(x)$, 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0}$.

四. (9 分) 设 $a_1 = 0$, $a_n = \frac{a_{n-1} + 3}{4}$ ($n = 2, 3, \dots$), 证明数列 $\{a_n\}$ 有极限, 并求此极限.

信息与电子二学部学生会
学习部

五. (9 分) 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ a & x = 0 \\ \frac{1+b \cos x^2}{x} & x < 0 \end{cases}$ 是连续函数, 求 a, b 的值, 并求 $f'(x)$.



六. (9 分) 一开口容器上部分是圆柱体, 底部为半球形, 当容积为常数 a 时, 球的半径为多少时所使用的材料最少? 此时圆柱体的高为多少? (要求用微积分的方法).

信息与电子二学部学生会

学习部

七. (12 分) 设 $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$ ，研究函数的性态，并作出函数的图形.



信息与电子二学部学生会
学习部

八. (9 分) 证明不等式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{\ln(1-x)} < 1 \quad (x < 0)$.

九. (10 分) (1) 已知当 $x \rightarrow 0$ 时， $\tan x - \sin x$ 与 ax^k 是等价无穷小，求 a 与 k 的值；

(2) 设当 $x \rightarrow 0$ 时， $f(x)$ 与 $\tan x - \sin x$ 是等价无穷小，求 $f(x)$ 的 3 阶麦克劳林公式(带佩亚诺余项)，并求 $f'''(0)$.

信息与电子二学部学生会
学习部

十. (7 分) 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{\ln(1+x)} = -1$, 证明 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

十一. (9 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = 1$, 证明:

(1) $\exists \eta \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使 $f(\eta) = \eta$; (2) $\exists \xi \in (0, \eta)$, 使 $f'(\xi) - 1 + f(\xi) - \xi = 0$.

信息与电子二学部学生会

学习部