

# 工科数学分析期中试题（信二学习部整理）

班级\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_

(本试卷共 7 页, 十一个大题. 解答题必须有解题过程. 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												

一. 填空题（每小题 2 分, 共 10 分）

1. 设  $y = f^2(a^x) + \arcsin g(x)$ ,  $f, g$  是可导函数, 则  $dy =$ \_\_\_\_\_.

2. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{f(x)}{\sin x}} - 1}{x^2 \arctan x} = 4$ , 且当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) \sim cx^k$ , 则  $c =$ \_\_\_\_\_,  $k =$ \_\_\_\_\_.

3. 设  $y = \sin^2 x$ , 则当  $n \geq 1$ ,  $y^{(n)} =$ \_\_\_\_\_.

4. 一个圆锥形的蓄水池, 高为 10m, 底半径为 4m, 水以  $5\text{m}^3/\text{min}$  的速率流进水池, 当水深为 5m 时, 水面上升的速率为\_\_\_\_\_.

5. 已知  $xe^{-x} - \sin x = ax^2 + bx^3 + o(x^3)$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_,  $b =$ \_\_\_\_\_.

二. (8 分) 设  $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \end{cases}$ , 求  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ .

三. (8 分) 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} + 2^{\frac{1}{x}} \right)^x$ .

信息与电子二学部学生会  
学习部

四. (9 分) 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x} & x > 0 \\ a & x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$  是连续函数, 求  $a$  的值, 并求  $f'(x)$ .

五. (8 分) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{\ln(1 + \tan^3 x)}$ .

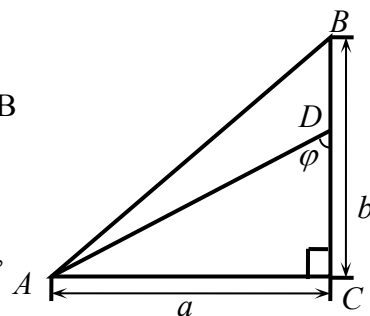
信息与电子二学部学生会  
学习部

六. (9 分) 已知曲线  $xy^3 = 2y + 1$  与  $y = ax^2 + bx$  在点  $(1, -1)$  相切，试确定  $a$  和  $b$  的值.

七. (9 分) 设  $y_1 = \frac{1}{3}, y_n = \frac{1}{3} + \frac{y_{n-1}^2}{3} \quad (n \geq 2)$ ，证明数列  $\{y_n\}$  有极限，并求此极限.

信息与电子二学部学生会  
学习部

八. (9 分) 如图, 从南至北的铁路经过 B 城, 某工厂 A 距此铁路的最短距离 AC 为  $a$ (千米), BC 为  $b$ (千米)( $b \neq 0$ ), 为了从 A 到 B 运输货物最经济, 要从工厂修一条侧轨 AD, 若每吨货物运输价格沿侧轨为  $p$ (元/千米), 而沿主轨为  $q$ (元/千米), 且( $p > q$ ), 问侧轨的角度  $\varphi$  ( $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 为多少时最经济. (用微积分的方法)



九. (9 分) 证明不等式  $x + \ln(1-x) \geq x \ln(1-x)$  ( $x < 1$ ).

十. (13 分) 设  $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ ，研究函数的性态，并作出函数的图形.



信息与电子二学部学生会  
学习部

十一. (8 分) 设  $f(x)$  在区间  $[0,2]$  上连续, 在  $(0,2)$  内可导, 且  $f(1)=1, f(2)=-1$ , 证明在  $(0,2)$

内存在  $\xi$ , 使得  $f'(\xi) = -\frac{2f(\xi)}{\xi}$ .



信息与电子二学部学生会  
学习部