

线性代数(B)试题 A 卷

班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、(10 分) 已知 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, 求行列式 $\begin{vmatrix} A^* & 0 \\ 0 & 2B \end{vmatrix}$ 的值。

二、(10 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 矩阵 X 满足 $A^{-1}XA = 2A + XA$, 求 X 。

三、(10 分) 对下列线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$$

试讨论: 当 a 取何值时, 它有唯一解? 无解? 有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解。
(用导出组的基础解系表示通解)

四、(10 分) 已知

$$\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (1, 1, 0), \alpha_3 = (1, 0, 0), \alpha_4 = (1, 2, -3)$$

- (1) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩和一个极大无关组;
- (2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

五、(10 分) 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是向量空间 R^3 的一个基, $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3$ 。

- (1) 证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为 R^3 的一个基;
- (2) 求基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵;
- (3) 求向量 $\gamma = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$ 关于基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的坐标。

六、(10 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是欧氏空间 V 的一个正交向量组, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

七、(10 分) 已知线性方程组 $AX = 0$ 的通解为 $k_1(1, 0, 0)^T + k_2(2, 1, 0)^T$, 其中 k_1, k_2 为任意常数, 求此方程组的解空间的一个标准正交基。

八、(10 分) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 。

(1) 用正交变换将它化为标准形，并给出所用的正交变换；

(2) 判断二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是否正定。

九、(10 分) 已知 \mathbf{A} 相似于对角矩阵 $\text{diag}(\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{0})$ 。

- (1) 求 $\mathbf{A}^2 - \mathbf{I}$ 的所有特征值;
- (2) 证明 $\mathbf{A}^2 - \mathbf{I}$ 为不可逆矩阵。

十、(10 分) 设 n 阶矩阵 \mathbf{A} 满足 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, $r(\mathbf{A}) = r$ ($0 < r \leq n$)。

- (1) 试确定 \mathbf{A} 的特征值的取值范围;
- (2) 证明 \mathbf{A} 一定可以相似对角化;
- (3) 求行列式 $|\mathbf{A} - 2\mathbf{I}|$ 的值。