参赛承诺书

提交包含此承诺书的 pdf 文件，表明所有此文件的作者共同承诺：

我们完全清楚，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式，包括电话、电子邮件、“贴吧”、QQ 群、微信群等，与队外的任何人（包括指导教师）交流、讨论与赛题有关的问题；无论主动参与讨论还是被动接收讨论信息都是严重违反竞赛纪律的行为。

我们以中国大学生名誉和诚信郑重承诺，严格遵守竞赛章程和参赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛章程和参赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们授权北京理工大学数学建模竞赛组织方，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

2024.4

探索美债、GDP 及其增长率的动态预测和函数关系

摘要

近年来，美债危机成为当今世界热门话题，美债占 GDP 总额的比值日益增长。为了深入研究美债、GDP 和 GDP 增长率之间的内在联系，本文具体探索了“如何**预测** 2024、2025 年美国 GDP 和美债总额”以及“如何构造每年美债总额变化与美国 GDP、GDP 增长率之间的**函数关系**”这两个问题。在搜集大量官方数据后，我们根据美债和 GDP 不同的内在特性分别利用 **ARIMA 模型**和 **VAR 模型**进行预测，并借助**平稳性检测、残差校验**等进行相应的检验修改。在探究美债、GDP 和 GDP 增长率三者函数关系时，考虑到要素间的复杂性和多维性，我们在预处理的基础上，进行探索性的分析，利用**相关性热力图、R 方检验、残差图检验**等多种方法严谨判断函数关系的线性与非线性。最终利用结果构造相应的回归模型，进行拟合、优化，得出函数表达式，并根据探究结果分析美债危机背后的经济逻辑。

关键词：美债；GDP；ARIMA 预测；VAR 预测；分段多项式回归

探索美债、GDP 及其增长率的动态预测和函数关系

一、问题重述

1.1 问题背景

近年来，随着全球经济一体化的深入发展，各国之间的经济联系日益紧密，而美国作为全球最大的经济体之一，其经济动态对全球经济有着举足轻重的影响。其中，美国政府的债务规模（简称美债）和国内生产总值（GDP）之间的关系更是备受关注。美债作为美国政府融资的主要手段，其规模不断扩大，已经成为全球经济中不可忽视的一部分。然而，随着债务规模的不断攀升，美国政府面临着越来越大的偿债压力[1]。同时，美债的收益率和利率水平也直接影响着全球金融市场的波动和资本流动[2]。另一方面，GDP 作为衡量一个国家经济规模和增长速度的重要指标，其变化直接反映了国家经济的发展状况[3]。当 GDP 增长强劲时，政府财政收入增加，有助于缓解债务压力；而当 GDP 增长放缓或负增长时，政府财政收入减少，债务压力则进一步加大。当前，美国联邦政府债务规模已达惊人的 34.73 万亿美元，占 GDP 的比重超过 120%。这一数据不仅引发了市场对政府偿债能力的担忧，也对全球经济产生了深远的影响。随着债务规模的持续扩大，美国政府需要不断发行新的债务来弥补财政赤字，而这又会导致债务上升和利息成本上升的恶性循环。因此，深入理解和分析美债与 GDP 之间的关系，对于评估美国经济健康状况、预测未来经济走势以及制定相关政策具有重要意义。通过数学建模的方法，我们可以利用历史数据来预测未来的 GDP 和美债总额，并分析它们之间的函数关系，为政策制定者、投资者和公众提供有价值的参考。

1.2 问题提出

在深入探讨美债与美国 GDP 之间的关系时，我们需要构建一个有效的数学模型来预测未来的经济趋势，并分析它们之间的内在关联。

问题一：查找美国历年的 GDP 数据，并根据已得到的美债数据与 GDP 数据构建一个数学模型，准确预测未来 2024 年和 2025 年的美国 GDP 和美债总额。

问题二：设计一个数学模型，用以分析美债总额变化与美国 GDP、GDP 增长率之间的函数关系，并请结合模型预测结果和当前经济形势，提出有关建议措施。

二、问题分析

2.1 问题一的分析

我们基于题目所给的美国历年未偿公共债务总额数据，广泛搜集并分析了美国历年 GDP、政府消费支出及总投资等大量数据[4]，在评估了 GDP 和美债总额与这些经济环节间的密切关联性后，分别采用了不同的预测策略。国内外研究人员对 GDP、国债等经济学的预测已有广泛的研究，其方法主要包括灰色系统理论[5]、人工神经网络[6]和时间序列分析[7]等。本文结合题目中美债总额数据的庞大规模和时间序列的密集性特点，选用了时间序列分析中的 ARIMA 模型（自回归积分滑动平均模型）进行美债总额的预测。目前，杨忠裕[8]等通过构建 ARIMA 模型，对甘肃省未来两年 GDP 进行了预测；李振亮[9]等通过建立 ARIMA 模型,预估出了北京市未来 5 年 GDP。对于 GDP 的预测，鉴于它作为经济活动的总体指标，涵盖了生产、消费、投资和净出口等多个维度，我们对它预测需要考虑众多经济变量和它们之间的相互作用，而且预测 GDP 需要准确把握经济周期的变化及其对经济活动的影响。因此我们选择使用向量自回归模型（VAR 模型）预测 2024、2025 年美国的 GDP。

2.2 问题二的分析

该问题直接点明了建模的目标是确定每年美债总额变化与美国 GDP、GDP 增长率之间的函数关系，经过对曲远源所写的《美国国债的可持续性研究》[14]、姚玉辰所写的《影响 GDP 增长的经济因素分析》[19]等大量相关文献阅读和分析，我们发现美债总额变化与美国 GDP 及其增长率之间的关系是复杂且多维的，涉及经济政策、市场动态和历史趋势等多重因素。为了彻底分析清楚这一复杂关系，我们首先收集整理历史数据，对数据做预处理——处理缺失值、异常值，进行必要的数据转换以减少偏度，得到适合计算分析的全新数据集。接着进行探索性的分析根据绘制的时序图和散点图大致了解三者关系。为了确定构造函数的相关形式，判断函数关系的线性与非线性，我们利用相关性热力图、R 方检验、残差图检验等多种方法严谨判断。之后利用结果构造相应的回归模型进行拟合、参数估计、评估、诊断、优化等标准步骤，最终结合题目一预测分析美债总额的变化趋势，验证模型的准确性。

本文的研究路径如图 1 所示：

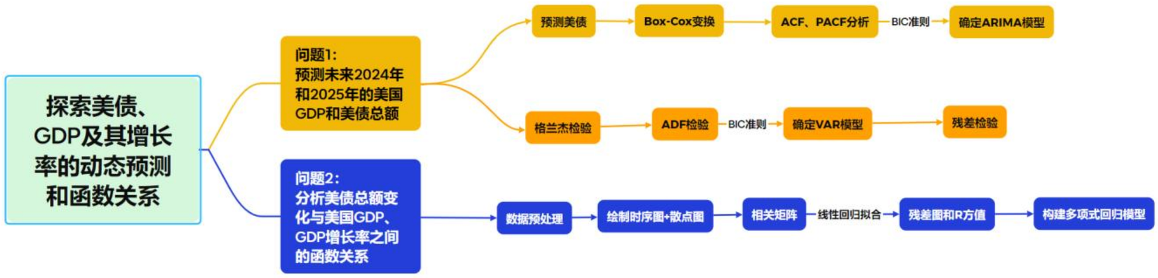


图 1 研究路径

三、模型假设

1. 不考虑短期预测出现极端特殊的情况。
2. 假设数据处理中不存在滞后阶数之外的前置效应。
3. 假设观测值之间相互独立，误差项独立同分布。

四、符号说明

符号	含义
Y_{t}	时间序列数据
$\nabla^{\mathrm{d}} X_t$	相应 d 阶差分
$\rho(k)$	自相关函数 ACF
$\varphi(k)$	偏自相关函数 PACF
SS_{tot}	总平方和
SS_{res}	残差平方和
Debt	美债
Growth	美国 GDP 增长率

注：本文 GDP 指美国国内生产总值。

五、模型构建与求解

5.1 问题 1——预测 2024、2025 年美国 GDP 和美债总额

5.1.1 分析 ARIMA 模型

ARIMA 模型即自回归差分移动平均模型（Autoregressive Integrated Moving Average Model），主要由三部分构成:自回归模型（AR）、差分过程（I）和移动平均模型（MA）。

ARIMA 模型的核心思想在于借助数据的历史记录来洞察并预测其未来的演变趋势。该模型不仅考虑了过往一段时间内数据点（标签值）之间的内在联系和相互依赖性，还捕捉了可能存在的偶然事件对数据序列的潜在影响[7]。简而言之，ARIMA 模型通过深入剖析数据的自相关性和差分特性，揭示潜藏在数据背后的时间序列结构，进而运用这些揭示出的规律来预测未来的数据动态。

在针对 2024、2025 年美债总额进行预测的分析中，鉴于预测的时间跨度相对较短，我们无需过度担忧长期预测可能带来的过拟合风险。因此，我们选择 ARIMA 模型作为分析工具，它能够有效地从丰富的历史数据中提取关键的自相关信息，并通过差分处理来优化数据特征，从而提供一个较为理想且精确的预测框架，以展望未来的美债总额走势。

ARIMA 模型中的自回归（AR）模块，捕捉了时间序列数据中固有的记忆性特征，即当前观测值不仅受即时因素影响，还显著地依赖于过去多个时间点的观测结果。该模块有效地模拟了数据序列内部的动态依赖性，使得模型能够深刻理解并反映时间序列的自相关性模式。差分整合（I）部分是 ARIMA 模型处理非平稳时间序列数据的关键所在。通过执行一阶、二阶或更高阶的差分操作，该模块能够巧妙地消除数据中的趋势项和季节性波动，从而将原本杂乱无章的非平稳序列转化为便于分析的平稳序列。移动平均（MA）模块，则专注于处理时间序列中的随机误差和短期波动。它通过对过去预测误差的加权平均，有效地削弱了噪声对当前观测值的影响。结合这三部分，ARIMA 模型既可以实现对时间序列数据趋势变化的精准捕捉，又能较好应对数据中的临时性、突发性变化以及高噪声干扰。

根据 AR 模型和 MA 模型的数学表达式：

$$AR: Y_{\mathrm{t}} = c + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \ldots + \varphi_p Y_{t-p} + \zeta_t \tag{1}$$

$$MA：\ Y_{\mathrm{t}}=\mu+\varepsilon_{t}+\theta_{1}\varepsilon_{t-1}+\theta_{2}\varepsilon_{t-2}+\ldots+\theta_{q}\varepsilon_{t-q} \tag{2}$$

在不考虑差分（d=0）的基础上，ARIMA 模型即是 AR 模型和 MA 模型的直接结合：

$$Y_{\mathrm{t}}=c+\varphi_{1}Y_{t-1}+\varphi_{2}Y_{t-2}+\ldots+\varphi_{p}Y_{t-p}+\theta_{1}\varepsilon_{\mathrm{t-1}}+\theta_{2}\varepsilon 2+\ldots+\theta_{q}\varepsilon_{\mathrm{t-q}}+\varepsilon_{\mathrm{t}} \tag{3}$$

其中，Y_{t} 是时间序列数据；φ_p 是 AR 模型的参数，表示当前值与过去 p 个时间点值的关系；θ_q 是 MA 模型的参数，表示当前值与过去 q 个时间点误差的关系；ε_t 是在 t 时间点的误差项；c 是常数项。AR 部分代表当前值 Y_{t} 与它的过去值有关，MA 部分表示当前值 Y_{t} 与它过去误差项有关。值得注意的是，MA 模型中代表长期趋势的均值 μ 并不存在于 ARIMA 模型的数学表达式当中，因为 ARIMA 模型中“预测长期趋势”这部分功能由 AR 模型来执行，因此 AR 模型替代了原本的 μ。

这个公式的基础是时间序列数据需呈现平稳性特征[7]。若时间序列是平稳的，即可直接运用 AR 与 MA 模型进行剖析；若时间序列是非平稳的，则需要考虑 ARIMA 模型中的 I 部分——差分处理。在时间序列分析中，“差分”常用于将非平稳序列转化为清晰可辨的平稳序列，从而削弱时间序列中固有的趋势与季节性波动，差分的阶数代表需要进行多少次差分操作才能得到平稳序列。而“滞后”量化了时间序列数据点之间的时间差，在 ARIMA 模型中需要计算滞后 d 期的时间序列数据，以全面捕捉数据间的动态关系。滞后差分（Lag Differences）作为差分操作的一种特殊形式，不是简单地使用相邻观测值进行相减，而是选取相隔一定滞后量的观测值进行差分运算。相应 d 阶差分计算公式如下：

$$\nabla^{\mathrm{d}}X_{t}=\nabla^{\mathrm{d\text{-}1}}X_{t-1}-\nabla^{\mathrm{d\text{-}1}}X_{t-1} \tag{4}$$

在解决问题时，可以根据数据的特性，选择合适的滞后阶数，来对数据进行滞后差分操作，从而把一个非平稳的时间序列转换成平稳的时间序列，更好地进行进一步的时间序列分析或预测。

综上所述，ARIMA 模型可以通过对时间序列历史数据的分析和拟合,建立一个能够描述数据特征的模型，并用该模型去预测数据未来的变化趋势，进而预测某个产业或事物的未来发展。具体可归纳为 ARIMA（p,d,q）:

$$(1-\sum_{i=1}^{p}\varphi_{i}L^{i})(1-L)^{d}X_{t}=(1+\sum_{i=1}^{q}\theta_{i}L^{i})\varepsilon_{t} \tag{5}$$

其中，p 代表自回归部分，q 代表移动平均部分，d 代表差分的阶数，L 为滞后算子。

5.1.2 利用 ARIMA 模型预测 2024、2025 美债总额

首先，对题目所给的历年美债总额数据表绘制时间序列图，直观观察美债历年来的变化总体大趋势，对后续的预测分析有一个大致的走势印象。由下图得可，历年来美债总体成明显的上升趋势，且随着时间发展，变化趋势更加波折，总体走势的平稳性变差。

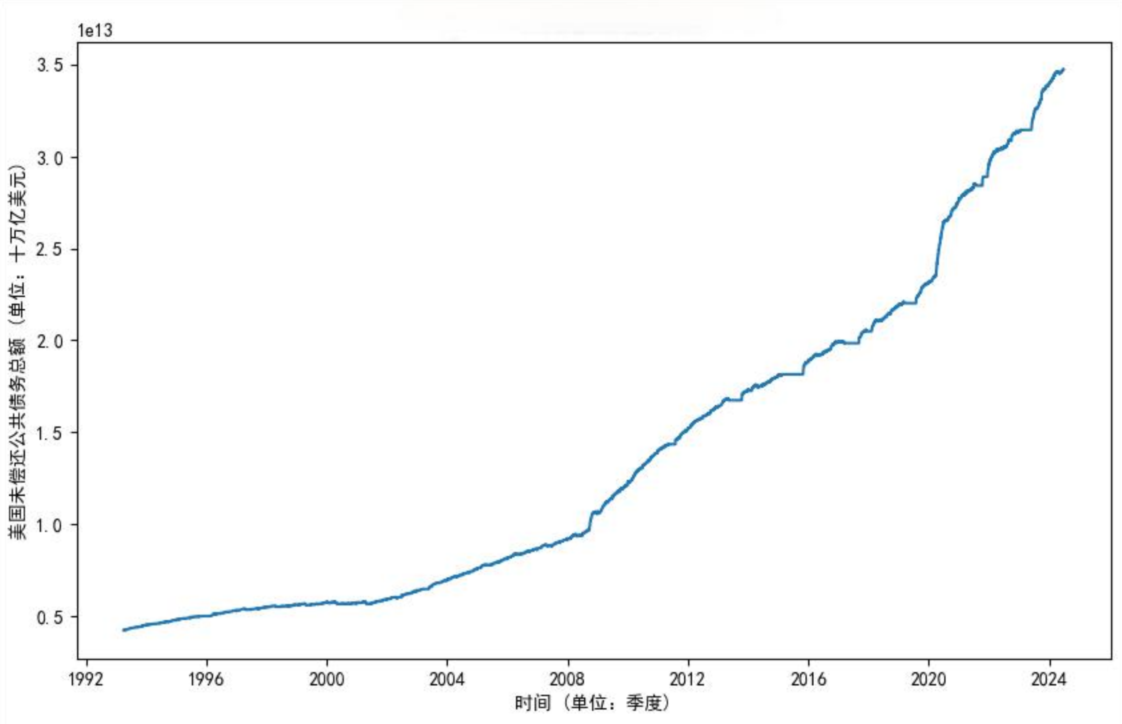


图 2　1992-2023 年美国未偿还公公债务总额

在构建 ARIMA 模型之前，我们先对数据进行平稳性分析。平稳性是 ARIMA 模型所假设的关键特性，该模型的预测能力很大程度上取决于数据的平稳性。一般情况下，在时间序列分析中原始数据若不具备平稳性，通常需要将非平稳时间序列转化为平稳时间序列，这种转化可以通过差分或其他预处理方法来实现。

自相关函数 ACF (Auto-Correlation Function)和偏自相关函数 PACF (Partial AutoCorrelation Function)是时间序列分析中的两个重要工具，可以用来检验一个时间序列是否是平稳的，并帮助确定 ARIMA 模型的参数。

ACF 揭示了当前时间点上的观测值与历史时间点观测值之间的相关性。通过量化不同滞后阶数（lag）下数据点间的协方差，并以其时间序列总体方差为基准进行归一化处理，从而直观展现出时间序列自身随时间延迟而变化的相关性模式[10]。其数学表达式为：

$$\rho(k)=\frac{Cov(X_t,X_{t+k})}{Var(X_t)} \tag{6}$$

其中，$Cov(X_t,X_{t+k})$ 是时间点 t 和 t+k 的观测值的协方差，$Var(X_t)$ 是时间序列 X_t 的方差。

PACF 揭示了控制中间时间点的影响后，两个时间点的观测值之间的相关性[13]。数学表达式为：

$$\varphi(k)=\frac{Cov(X_t-E[X_t\mid X_{t-1},\ldots,X_{t-k+1}],X_{t-k}-E[X_{t-k}\mid X_{t-k+1},\ldots,X_{t-1}])}{Var(X_t)} \tag{7}$$

其中，Cov 表示协方差，E 表示期望，Var 表示方差。

ACF 和 PACF 范围均为 -1 到 1。当所得值接近 1 时，表示正相关；当接近 -1 时，表示负相关；当接近 0 时，表示相关性较弱。

为了减少由于样本选择偏差所导致的问题、提高模型的鲁棒性和泛化能力，我们采用重采样的方法，将原本以日为粒度绘制的美债总额曲线图按月、季度、年分别进行重采样，如图 3 所示：

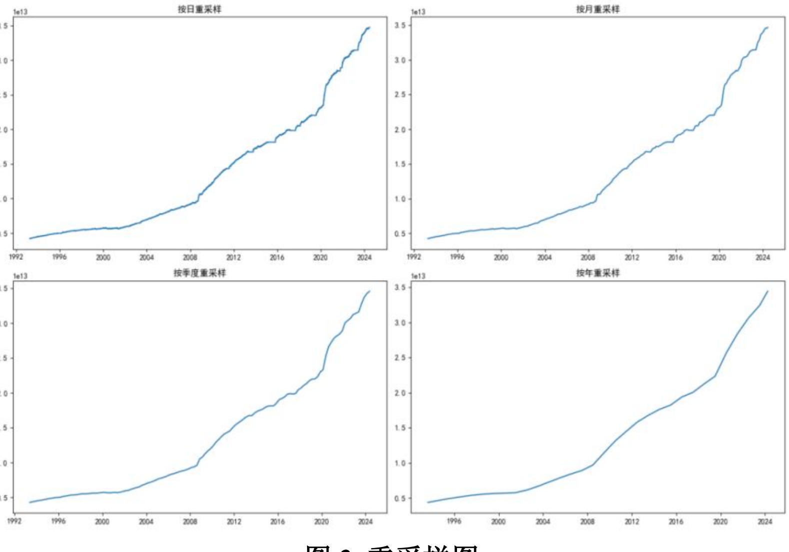


图 3 重采样图

比较原图与三张重采样图，我们发现采样线逐渐变得平缓甚至有失真的现象。在此基础上进行 ACF 和 PACF 绘制，得出图 4：

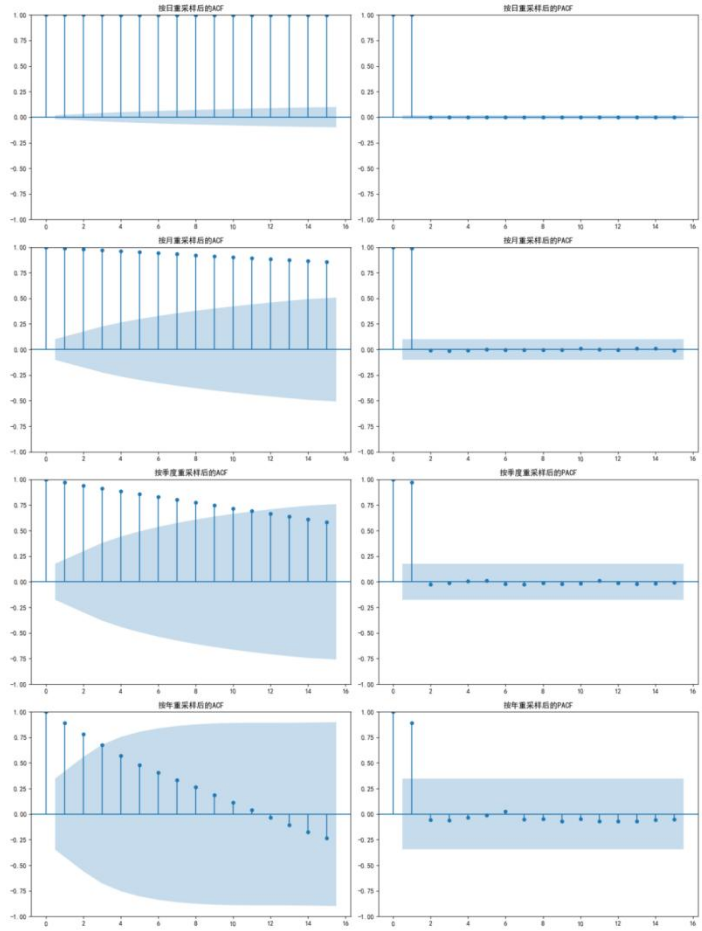


图 4 不同频率的 ACF 与 PACF 图

观察、分析四组采样下的 ACF 和 PACF 图片后，我们发现在按日和按月采样频率下，ACF 曲线的下降斜率过小，即出现了平稳性过低的问题，且题目所给数据中有多日存在数据缺失的情况，不适合按日采样；而按年采样下数据较少，容易出现较大失真，因此我们选用按季度采样。但由于直接对采样后的数据进行 ACF 和 PACF 绘制所得图像的平稳性仍较差，我们再对其进行差分和滞后差分的运算，以便比较得到更为精准的图片，如下图所示：

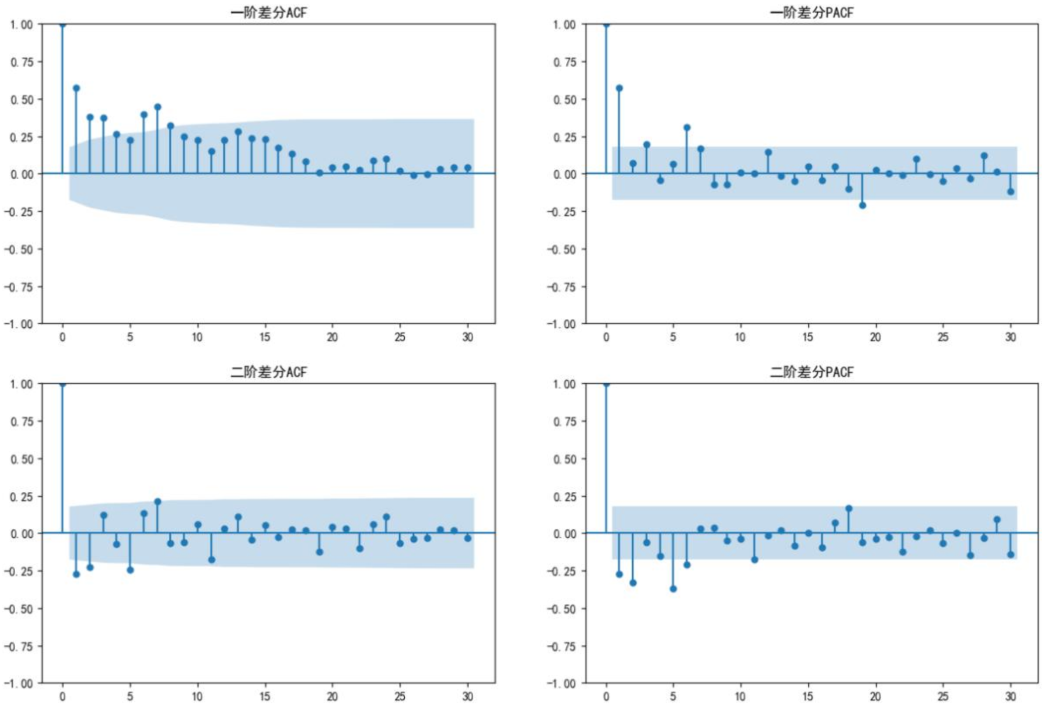


图 5 差分所得 ACF 与 PACF 图

但是如上图所示，即使经过了重采样和差分运算之后，所得到的 ACF 和 PACF 图像仍均是以拖尾的形式，代表其平稳性不佳，依然不能很好地试用于后续的 ARIMA 模型预测。于是，我们反思数据预处理时仅借助的差分仍不够，可以再结合其他处理方式。统计学家 George Box 和 David Cox 在 1964 年提出了 Box-Cox 变换，这种方法通过确定一个合适的指数（λ），将数据转换为正态分布，使数据更加正常化，λ 值指的是所有数据应变换的幂值[13]。我们借助 Box-Cox 变换先一步数据处理，以此一定程度上减小不可观测的误差和预测变量的相关性，改善数据的正态性、对称性和方差相等性，再进行 ACF、PACF 分析。

Box-Cox 变换的一般形式为:

$$y_{\lambda} = \frac{y^{\lambda} - 1}{\lambda} \tag{8}$$

其中，λ 是待确定的参数，通常通过最大化变换后数据的似然函数来确定，即“最大似然估计”。

综上，经过重采样、Box-Cox 变换、差分后所得 ACF、PACF 图如下所示：

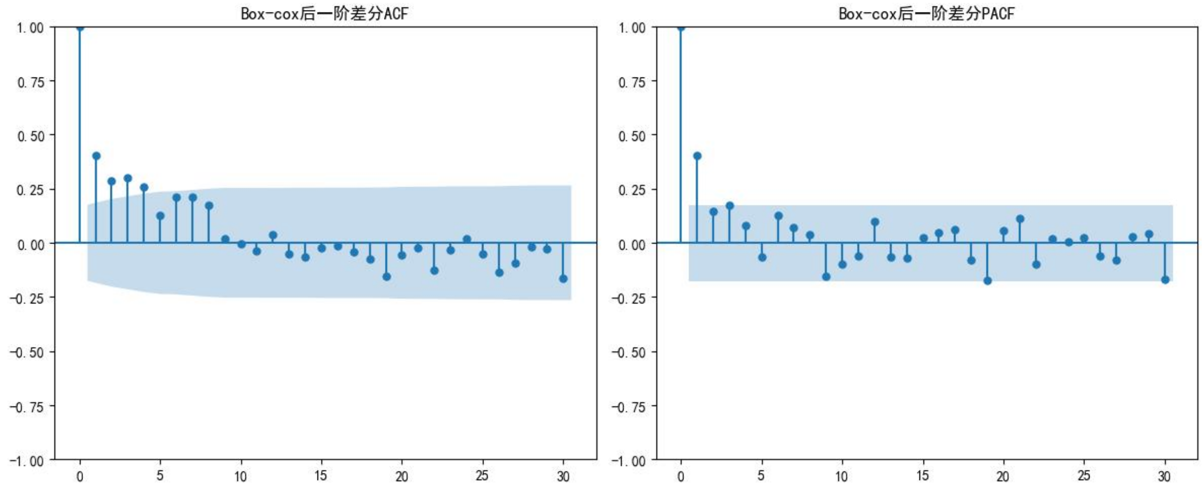


图 6　Box-cox 后一节差分 ACF 与 PACF

由上图可观察到，处理后的一阶差分 ACF 和 PACF 均不呈现拖尾状态，这表明该时间序列适用于 ARIMA 模型，符合原来的猜想建模。虽然此时 ACF 和 PACF 图像无法帮助我们确定 p 和 q 的具体值，但能确认 p 和 q 一定都不为 0。

接着，由于 p，q 的取值一般为[0，4]，我们针对美债的一阶差分时间序列图,基于 ACF 图和 PACF 图分别建立 ARIMA(0,1,0)模型、ARIMA(0,1,1)模型、ARIMA(1,1,0)模型、ARIMA(1,1,1)模型、ARIMA(2,1,0)模型等 25 个模型,根据 BIC 准则确定最优模型,得出下图数据：

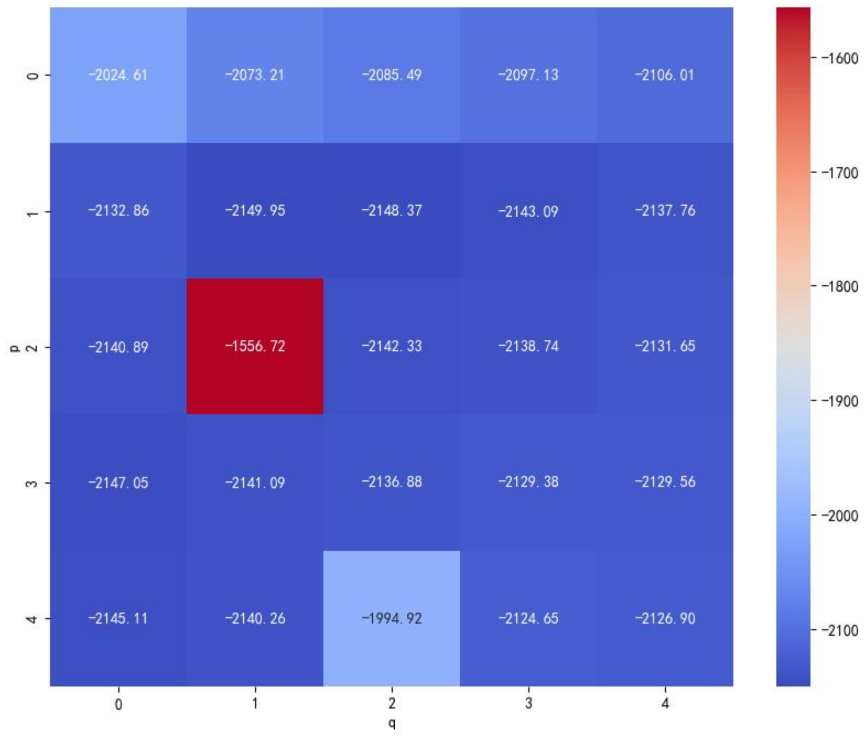


图 7　$d=1$ 时不同 p，q 组合的 BIC 值

由贝叶斯信息准则可知，在选择 ARIMA 模型的参数时，应当选择使 BIC 值最小的参数组合（p, d, q），即上图中当 d=1，p=1，q=1 时，而不是 p=2，q=1 时。BIC 是一种评价统计模型的准则，它不仅考虑了模型的拟合度，还对模型中参数的数量进行了惩罚。 BIC 值越小，表示模型越优[15]。观察上图我们发现，各模型的 BIC 值均为负数，即使 BIC 值为负，也应选择 BIC 值最小的那组参数，而不是 BIC 值的绝对值最小的参数。在实际应用中，BIC 值可能为负，这是因为 BIC 的计算公式包含了对似然函数的对数值，而当模型对数据的拟合非常好时，这个对数值可能会变得非常大（正值），从而导致整个 BIC 值为负。这也从侧面表明我们前期使用多种方法进行数据预处理分析平稳性的准确性和必要性。

在确定 ARIMA（1，1，1）模型之后，我们对所得模型进行残差检验，来评估模型的拟合度和假设的有效性。

残差（e_i）是指第 i 个观测值的预测值（$\widehat{y}_i$）与实际观测值（y_i）之间的差，即：

$$e_i = y_i - \widehat{y}_i \tag{9}$$

利用残差法需要进行正态检验和自相关检验，具体可以通过四张图反映：（对 y 的）标准化残差图展示模型残差的标准化值，检查残差的波动情况是否一致（即残差的同方差性）；残差的直方图加正态分布曲线图展示残差的分布情况，并与标准正态分布进行对比，用于检查残差是否近似正态分布；正态 Q - Q 图将样本数据的分位数与标准正态分布的分位数进行比较，用于直观地检验数据的分布情况是否近似正态分布；自相关函数图展示残差的自相关性，检查模型是否已经充分捕获了数据中的信息，或者残差中是否还存在未被模型解释的结构信息。

根据前面分析得到 ARIMA（1，1，1）模型，我们进行残差检验得到以下四张图：

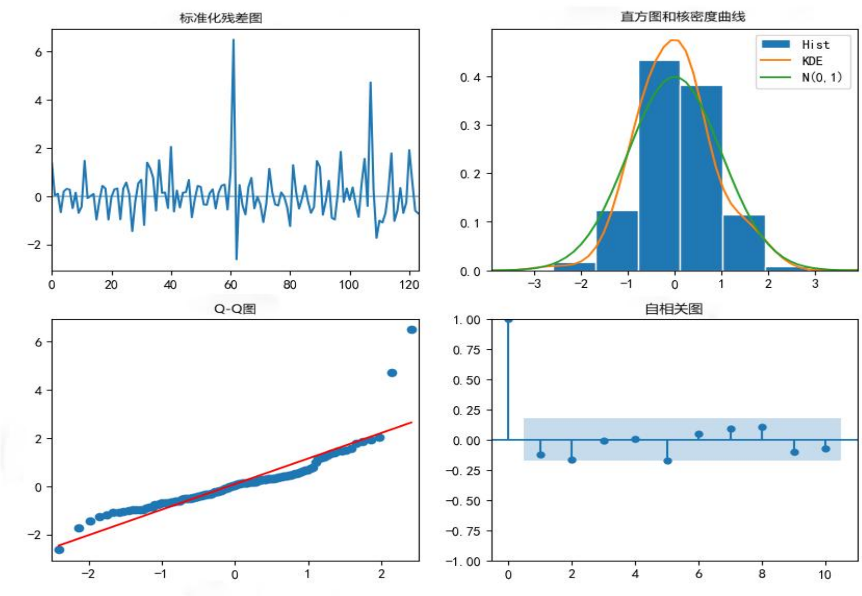


图 8　残差检验图

根据上述图的展现，我们可以直观的发现左上（对 y 的）标准化残差图大体上具有较好的一致性，围绕 0 上下波动；右上残差的直方图和核密度曲线表明残差近似正态分布，符合要求；左下正态 Q-Q 图中点与标准线大致重合，进一步表明数据的分布情况满足近似正态分布；右下自相关函数图说明已经充分捕获数据信息。同时，我们仔细观察上图，发现位于 2008 年、2020 年的标准化残差图存在较明显的波动，且对应正态 Q-Q 图中亦有几个点严重偏离曲线，经过对《美国金融危机对国际经济与政治格局的影响》、《新冠肺炎疫情视角下的经济全球化：风险、趋势及治理》等文献的分析，我们了解到 2008 年正处于金融危机[17]，2020 年处于疫情全球化[18]，这些偶然特殊事件会导致预测模型的波动，符合上述图形的检验结果。因此，该残差序列可以认为是彼此独立的，为白噪声序列，该模型具有良好的预测效果，可以用来对美债进行预测。

通过上面已经确定的 p，d，q 参数,并根据 BIC 准则确定的最优模型 ARIMA (1,1,1)，我们利用该模型在 python 系统中进行建模预测，拟合效果下图所示：

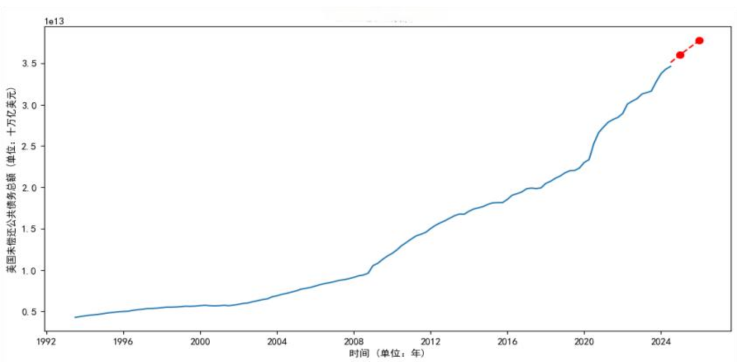


图 9　ARIMA 模型预测结果

由于按季度进行取样预测，我们可以得到更为细致的 2024、2025 年个季度的美债预测，如下图所示：

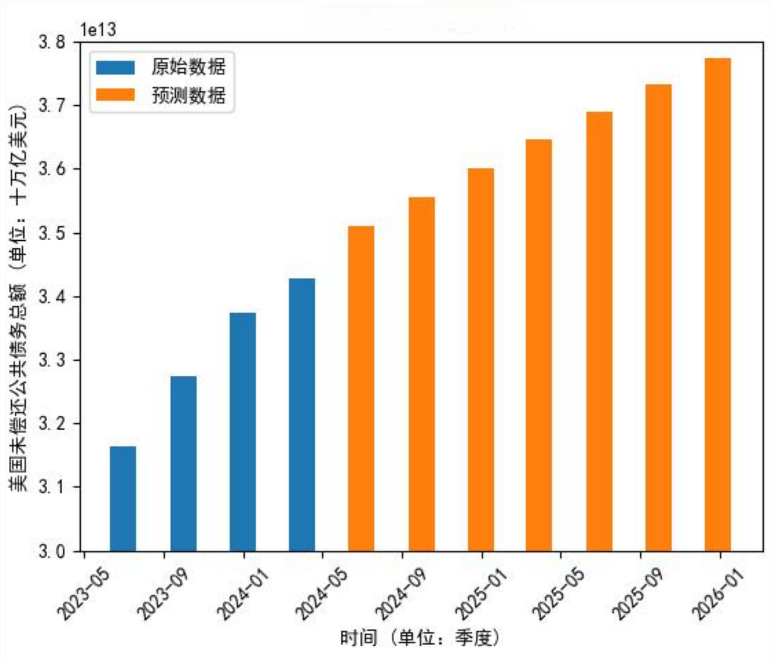


图 10　ARIMA 模型预测结果（按季度）

5.1.3 分析 VAR 模型

VAR 模型，即向量自回归模型（Vector Autoregression Model），是一种多变量时间序列分析模型，常用在经济学与金融学中分析和预测多个相互关联的时间序列之间的复杂关系[14]。该模型能够捕捉变量之间的动态关系和相互影响，是理解和预测宏观经济变量之间相互作用的有力工具。VAR 模型通过把每个内生变量视为系统中所有其他内生变量过去值的函数来构造模型，从而避开了传统结构建模中需要逐一为各内生变量关于其滞后值及所有其他内生变量滞后值建模的繁琐过程。题目所要预测的 GDP 是经济学中的一个核心宏观指标，其变动深受多重因素的动态交织影响[14]，我们采用 VAR 模型，依托在美国商务部官方网站发布的相关数据[4]，从而较为准确地预测 2024、2025 年美国 GDP 数额。

VAR 模型的基本形式是弱平稳过程的自回归表达式，描述的是在同一样本期间内的若干变量可以作为它们过去值的线性函数，数学表达式为：

$$Y_t = \Phi_0 + \Phi_1 Y_{t-1} + \ldots + \Phi_p Y_{t-p} + BX_t + \varepsilon_t, \quad \mathrm{t} = 1,2,\ldots,\mathrm{T} \tag{10}$$

其中：

$$Y_t=\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \vdots \\ y_{kt} \end{pmatrix},\quad \varepsilon_t=\begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{kt} \end{pmatrix},\quad \Phi_t=\begin{pmatrix} \Phi_{10} \\ \Phi_{20} \\ \vdots \\ \Phi_{k0} \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\Phi_{\mathrm{i}}=\begin{pmatrix} \phi_{11(i)} & \phi_{12(i)} & \cdots & \phi_{1k(i)} \\ \phi_{21(i)} & \phi_{22(i)} & \cdots & \phi_{2k(i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{k1(i)} & \phi_{k2(i)} & \cdots & \phi_{kk(i)} \end{pmatrix},\quad \mathrm{i}=1,2,\ldots,\mathrm{p} \tag{12}$$

Y_t 表示 k 维内生成的变量列向量；Y_{t-i}，i=1，2，……p 表示滞后的内生变量；X_t 表示 d 维外生变量列向量；p 为滞后阶数；T 为样本数目；Φ_{i} 即 k*k 维的待估矩阵；B 为 k*d 维的待估矩阵；ε_t～N 是误差项向量，通常假设为白噪声过程。

VAR 模型能将多个时间序列纳入一个系统中，分析它们之间的动态关系。同时它不需要对每个方程设定结构关系，而可以通过模型本身来识别变量之间的联系，灵活处理变量之间的线性和非线性关系以及变量的滞后效应，在短期预测领域具有较好的准确性。

5.1.4 利用 VAR 模型预测 2024、2025 美国 GDP

与利用 ARIMA 模型分析预测美债步骤相似，我们首先搜集了美国历年 GDP 的相关数据[4]，绘制时间序列图观察 GDP 历年来的变化，对后续的预测分析有一个大致的走势印象，如下图所示：

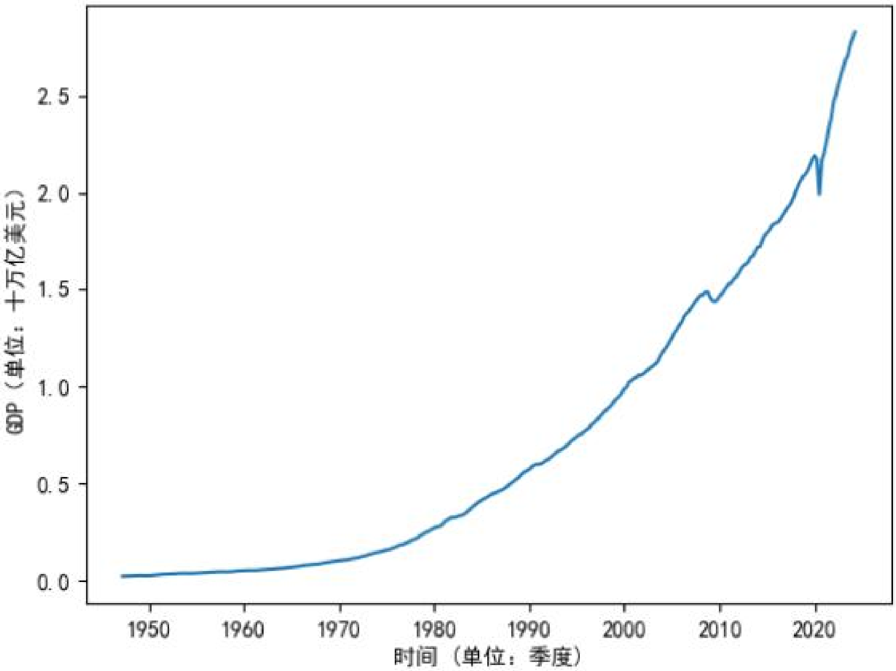


图 11　1947-2024 年美国 GDP 走势图

通过曲线图我们可以直观感受到 GDP 总体呈一个上升的大趋势，且上升的速率在不断提升。并且在 2008 年和 2020 年有明显的下降，符合经济危机和疫情影响的结果。

考虑到 GDP 的变动深受居民消费水平、社会消费品零售总额、进出口贸易总额、固定资产投资及财政支出等多重因素的动态交织影响[14]，我们依托在美国商务部经济分析局官网上查找到的上述五大关键要素的历史数据[4]，同样先绘制时间序列图观察各要素历年变化，如下图所示：

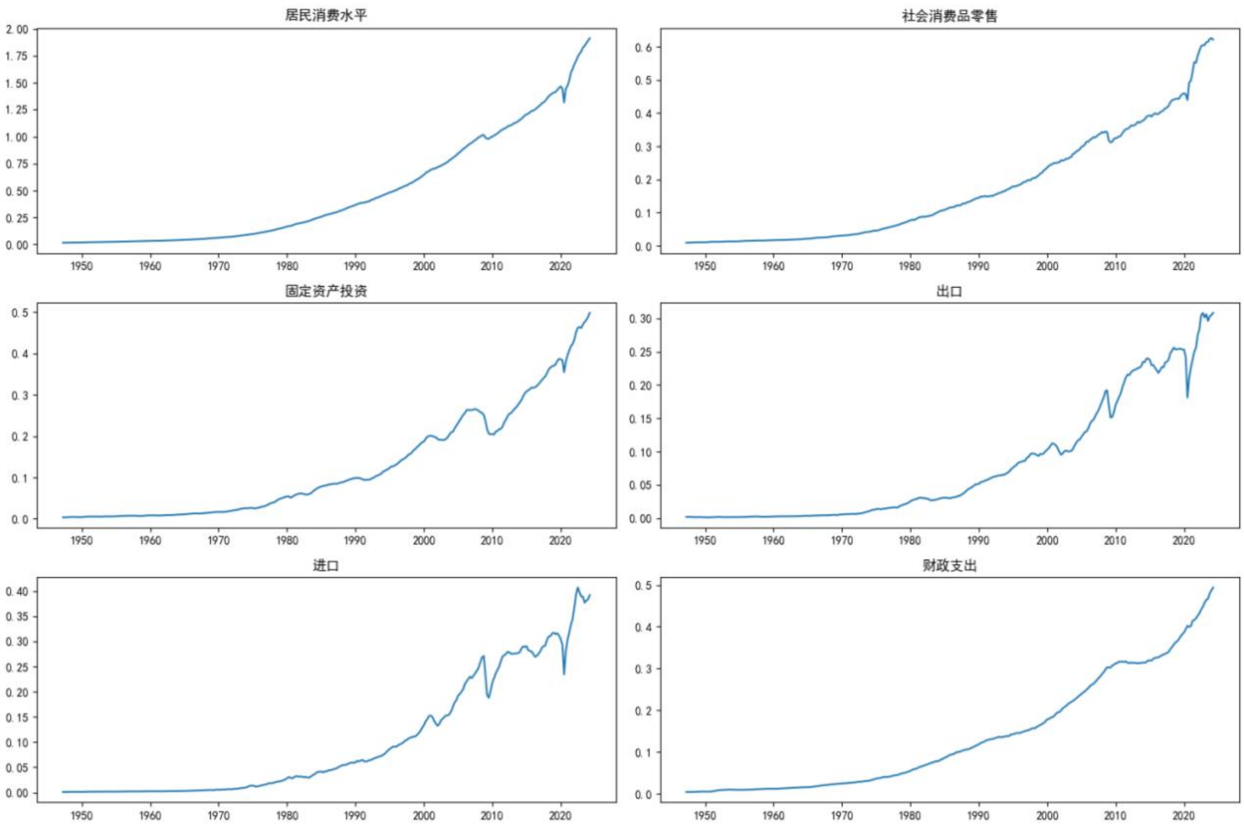


图 12　各要素时间序列图

可以看出，不同要素总体均呈现上升趋势，但是具体形状仍有较大差异，说明其中包含更深层的动态影响关系，接着我们正式借助 VAR 模型分析。

VAR 背后逻辑是各种时序变量互相影响，也就是说 GDP 的变化是由变量引起的，所以检验是否存在一定的因果关系是应用 VAR 模型的先决条件。检验的方法有许多，在这里我们选用最为经典的格兰杰因果检验[16]。在 VAR 模型中，格兰杰检验的因果关系不是通常所说的因果关系（并非真正汉语意义上的“因果关系”），而是说先发生的事情对后发生的事情有–定的影响，或者说某个变量是否可以用来提高对其他相关变量的预测能力。这也是为什么我们通过文献阅读确定五大要素之后仍要进行格兰杰检验的原

因。

格兰杰检验的原假设是回归方程中所有过去的值的系数都为0。简单来说，在时序X的过去的值并不能影响另一个时序Y的前提下，如果p-value小于0.05的显著性水平，就可以拒绝原假设。我们利用python库函数进行检验，得到各因素的p-value如下表：

表1　各因素的p-value

因素	P-value
居民消费水平	0.14921069
社会消费品零售	0.036114257
固定资产投资	0.943487667
出口	0.00253503
进口	0.001051616
财政支出	6.41554E-12

由此可得“居民消费水平”和“固定资产投资”这两因素并不满足格兰杰检验下的“因果关系”，即使它们在真正汉语意义上与GDP有强烈的“因果关系”，我们在后续模型预测中排除它们的影响。

同样，VAR模型需要参与的时序是平稳的，我们再次利用ADF检验进行平稳性验证，得出下表：

表2　ADF检验结果

	原始数据	结论	一阶差分	结论	二阶差分	结论
社会消费品零售	1	不稳定	0.006675347	稳定	5.57546E-12	稳定
出口	1	不稳定	1.82481E-12	稳定	6.0794E-15	稳定
进口	1	不稳定	2.4925E-12	稳定	1.01855E-14	稳定
财政支出	0.999030119	不稳定	0.947832833	不稳定	6.75935E-08	稳定
GDP	1	不稳定	0.001766167	稳定	2.08365E-09	稳定

在检验过程中，我们发现使用原始数据和一阶差分后的数据所得到的p-value值均存在大于0.05的值，代表该因素的不稳定，因此我们进行二阶差分，终于满足所有序列的平稳性。经济增长和GDP增长率的预期会影响美债的风险溢价，在经济增长放缓或不确定性增加时，投资者可能要求更高的风险溢价来持有美债。

在这之后，我们需要选择 VAR 模型的阶数 P。我们选用最广泛的 BIC 准则确定[20]，得出下图：

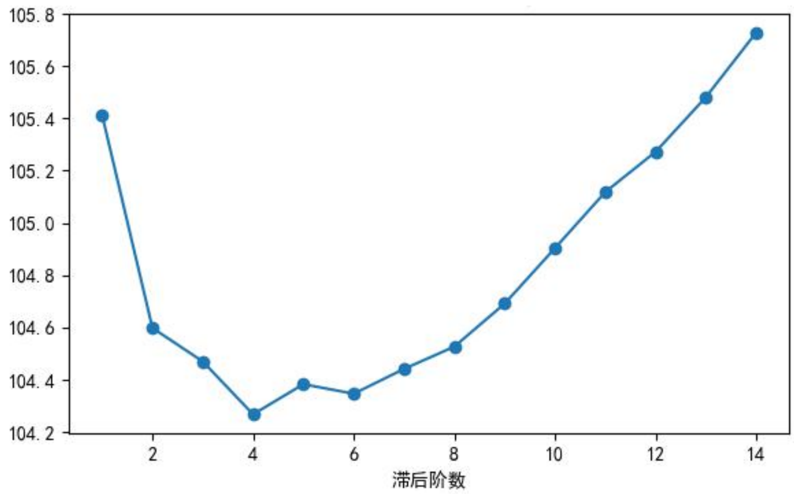


图 13　BIC 值随滞后阶数变化图

当 BIC 值最小时，表明此时 VAR 模型的阶数最为合理。从上图看,当阶数为 4 时，BIC 最小，因此我们选择阶数 4。

在确定 VAR（4）模型之后，我们同样需要对其进行残差检验，来评估模型的拟合度和假设的有效性。下图为所得残差 ACF、PACF、Q-Q 图：

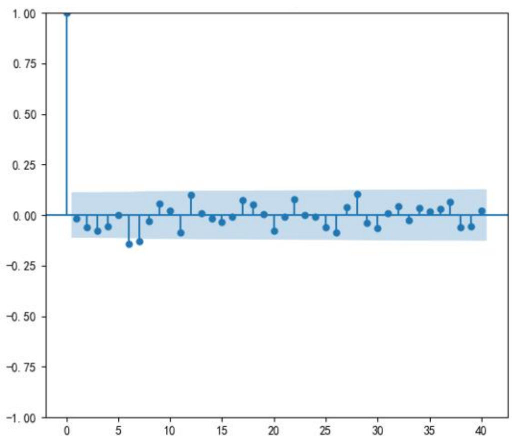


图 14　残差 ACF 图

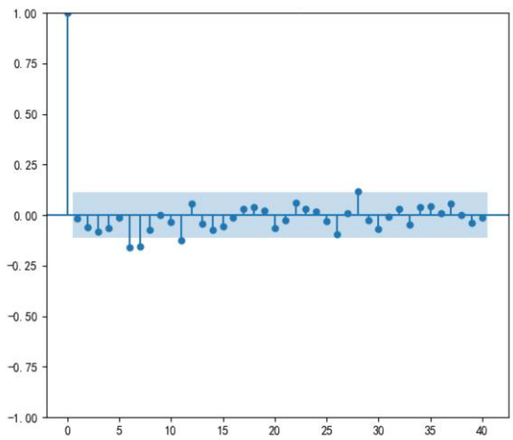


图 15 残差 PACF 图

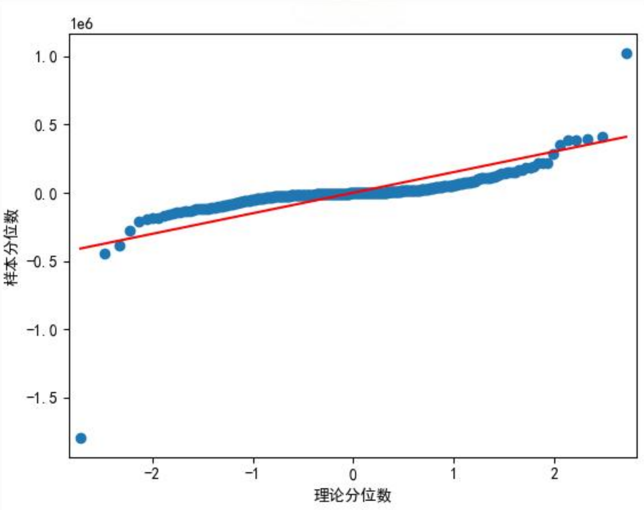


图 16　残差 Q-Q 图

与 ARIMA 模型残差检验分析一致，ACF 与 PACF 均为不拖尾状，Q-Q 图点集与相关性重合度高，反应出 VAR（4）较好通过残差检验，模型有效性较强。

最后，利用 VAR（4）在 python 系统中进行建模预测,拟合效果下图所示：

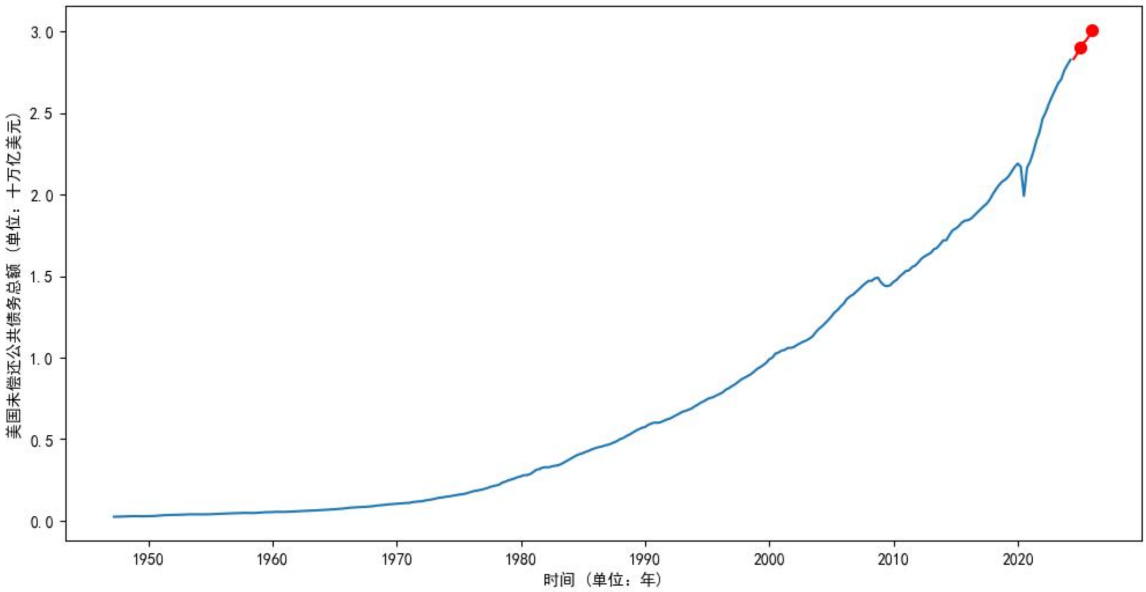


图 17　VAR 预测结果

同样的，由于按季度进行取样预测，因此我们可以得到更为细致的 2024、2025 年个季度的美国 GDP 预测，如下图所示：

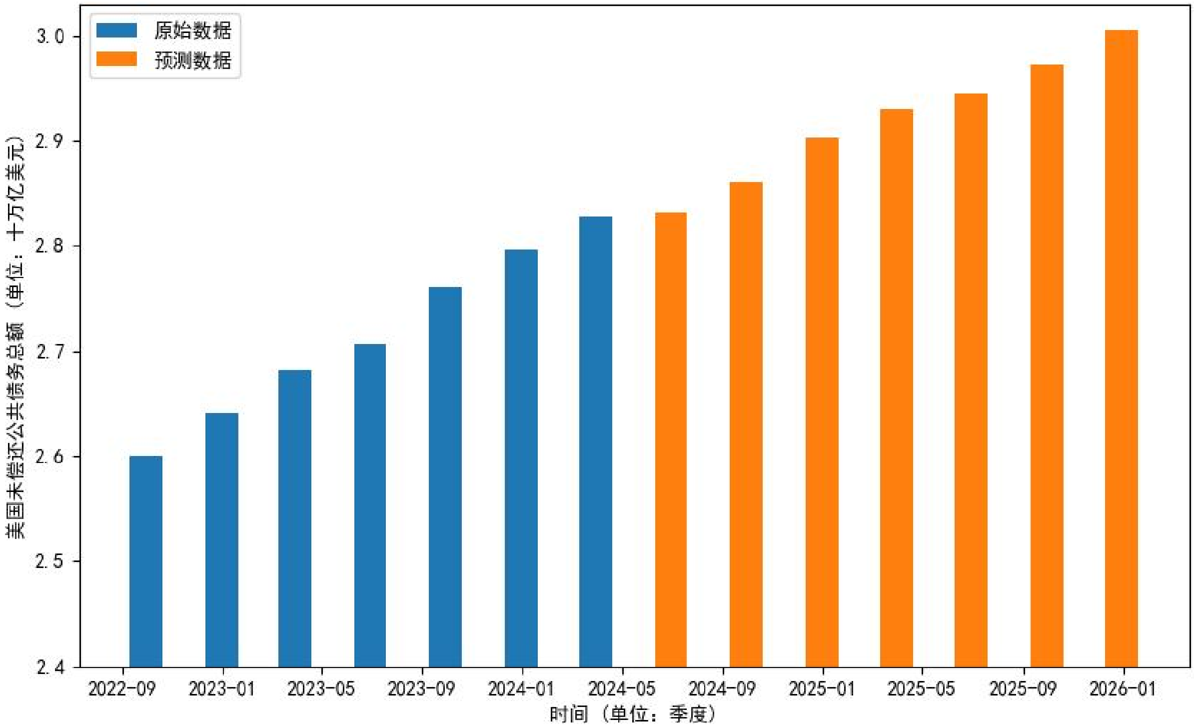


图 18　美国未来两年 GDP 预测结果

5.2 问题 2——分析每年美债总额变化与美国 GDP、GDP 增长率之间的函数关系

5.2.1 探索 GDP、GDP 增长率对美债总额的线性与非线性关系

首先，我们将数据进行缺失值剔除、分段整理等预处理，得到一个全新的数据整理表。然后根据所得数据绘制历年来 GDP、GDP 变化率、美债变化的时序图，对各要素的时序变化有一个大致的了解，如下图所示：

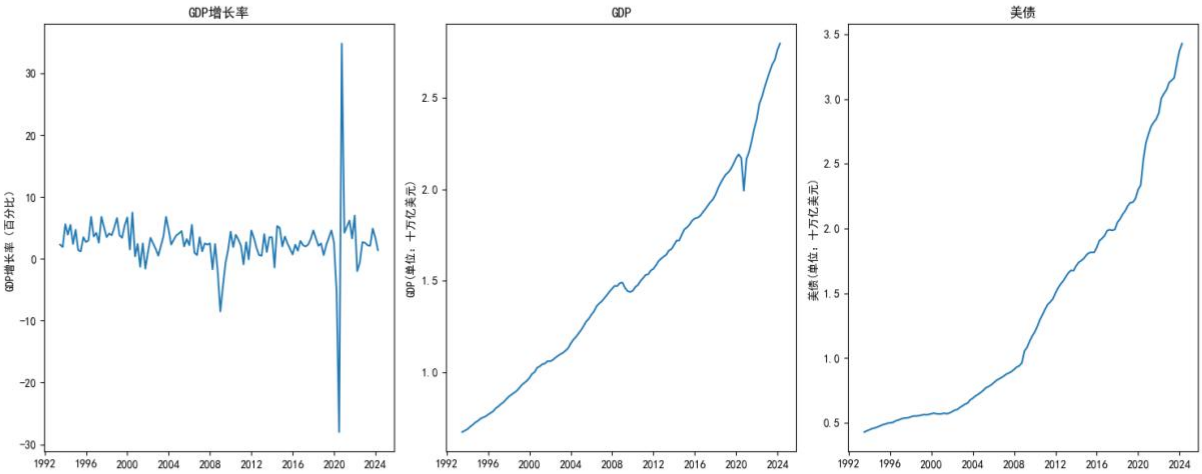


图 19　历年来 GDP、GDP 变化率、美债变化时序图

从上图中我们发现三个图像均呈现出明显的“三段”的特征（这一点在第一问中已经有所提到，是由于08年的经济危机和20年的疫情影响），因此后续在构建具体的函数模型需要进行分段处理。第一问中并未进行分段是因为题目需要的是预测2024、2025年数据，强调近期数据预测的准确性。我们在使用ARIMA和VAR模型进行构建时，对未来的预测上，近期的数据影响要比远期的数据影响大的多，因此不必要进行分段处理。

其次，我们发现GDP和美债的时序图在形态上和趋势上呈现出明显相似性，但是GDP增长率与美债时序图关系较难看出。为了进一步检验这一想法，我们绘制散点图以便更直观地观察二者的关系，如下图所示：

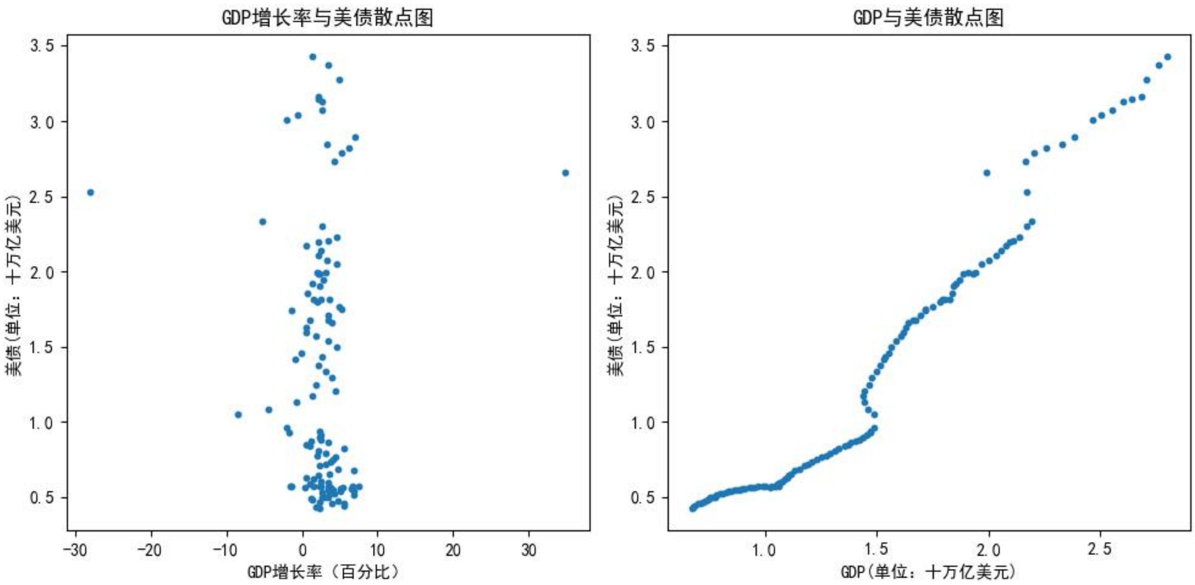


图20　GDP、GDP变化率、美债变化散点图

我们观察到GDP增长率与美债的散点图大致在 [-5,10] 横轴上平铺展开，而GDP与美债的散点图则是形成了一种类似线性但又不是严格意义上线性的点线图，并且存在明显的三段式的特征：2008年之前、2008年至2020年、2020年之后。

为了严格确定构造关系函数的线性关系，我们对每一段求的三个变量求相关系数矩阵，绘制热图：

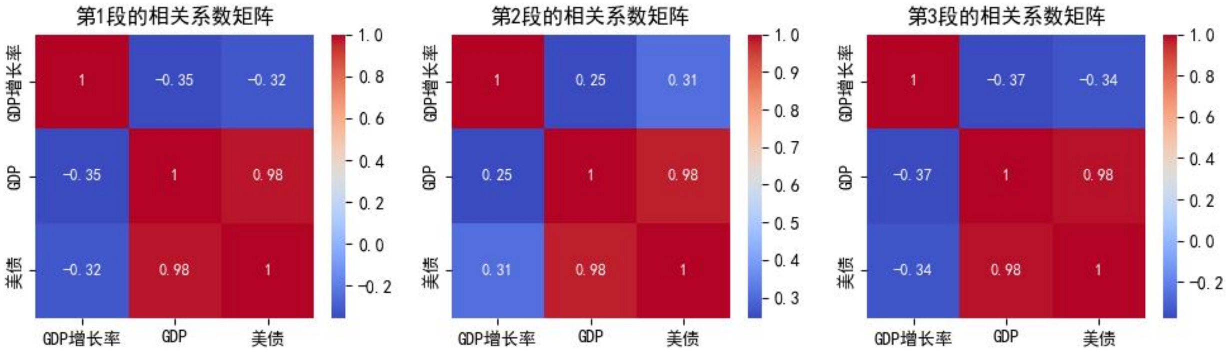


图 21　各段相关系数矩阵热力图

观察三张热图可知，GDP 和美债有很强的线性相关性，而 GDP 增长率与美债线性相关性很弱，结果符合预期。为了进一步了解两者共同作用时的相关性，我们再将这 GDP 和 GDP 增长率两组数据与美债进行线性回归拟合，得到残差图和 R^2 值。在这里，残差图可以帮助我们观察残差是否随机分布。理想情况下，残差应该围绕 0 随机分布，没有明显的模式或趋势；R^2 值表示模型解释的变异性占总变异性的比例，即自变量对因变量的解释程度。R^2 值越高，说明模型的拟合度越好。残差图如下图所示：

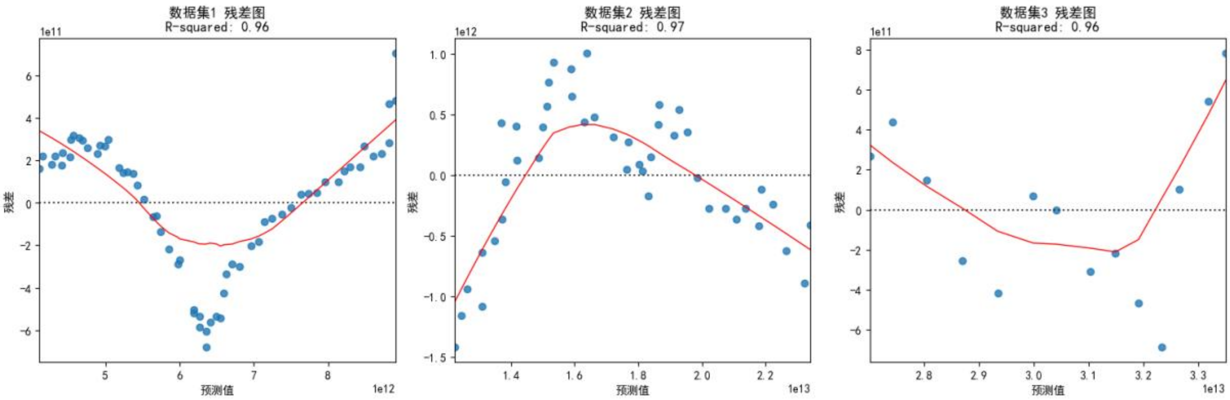


图 22　三段对应的残差图

根据上图所示，尽管 R^2 值并不低，但是残差值在三个数据集中并没有围绕 0 随机分布，而是有明显的趋势（见上图生成的红色残差趋势线），这说明两者共同作用时相关性并不强，不能用简单的线性回归模型来解决函数关系问题。同时，GDP 增长率和 GDP 之间存在紧密的关系，二者会共同作用于美债变化，因此我们考虑适当提升多项式次数，采用多项式回归的模型，来达到更好的拟合效果；利用更多参数，能够赋予更丰富完备的函数关系意义。

5.2.2 构造 GDP、GDP 增长率与美债总额间函数关系

多项式回归通过对变量进行升维，将变量之间的非线性关系转化为线性关系。以预测变量的幂形式作为新的预测变量，其实本质上还是属于线性回归，只不过是利用多项式函数来拟合数据的非线性关系。一般而言，多项式回归模型的形式可以表示为：

$$y=\omega_0+\omega_1 x+\omega_2 x^2+\ldots+\omega_n x^n+\varepsilon \tag{13}$$

其中，y是目标变量，x是特征变量，ω_i是模型的系数，n 是多项式的阶数，ε 是误差项。多项式回归通过引入高阶项来建模数据中的非线性关系，从而能够更灵活地拟合各种形状的数据分布。

多项式回归相比于线性回归多项式回归能够拟合各种形状的数据分布，包括非线性关系。虽然模型形式更加复杂，但通常能够提供更直观的解释，尤其是对于二次和三次多项式。

我们通过R^2来评估多项式回归预测的效果，R^2也叫确定系数（Coefficient of Determination），它表示模型对现实数据拟合的程度。计算R^2的方法有几种，一元线性回归中R^2等于皮尔逊积矩相关系数（Pearson Product Moment Correlation Coefficient）的平方，该方法计算的R^2是一定介于 0～1 之间的正数。另一种是 Sklearn 库提供的方法来计算 R^2。多项式回归的阶数不能太高，否则会出现过拟合现象。R^2值通常接近 1，但很少达到 1，特别是在存在随机误差或模型未能捕捉所有影响因素的情况下。

R^2的计算公式如下:

$$R^2=1-\frac{SS_{res}}{SS_{tot}} \tag{14}$$

其中，SS_{res} 为残差平方和，即实际观测值与模型预测值之差的平方和；SS_{tot} 为总平方和，即实际观测值与观测平均值之差的平方和。为了确定模型预测值，我们利用批量梯度下降法确定各项系数。

批量梯度下降（Batch Gradient Descent，BGD）是梯度下降法的形式之一，是最原始的形式，指在每一次迭代时使用所有样本来进行梯度的更新。它通过计算整个训练数据集上的代价函数的梯度来更新模型的参数，每次迭代使用所有数据点来更新参数。 在数学计算上分成以下两个步骤：对目标函数求偏导、每次迭代对参数进行更新，具体数学公式如下：

$$\frac{\Delta J(\theta_0,\theta_1)}{\Delta\theta_j}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(h_0(x^{(i)})-y^{(i)}x_j{}^{(i)}) \tag{15}$$

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)} x_j^{(i)}) \tag{16}$$

结合批量梯度下降法求模型预测函数的系数在进行计算，我们发现各阶数 R^2 图如下所示：

表 3 数据集 1 各阶数 R^2 图

	GDP 增长率 1 次项	GDP 增长率 2 次项	GDP 增长率 3 次项	GDP 增长率 4 次项
GDP 1 次项	0.955	0.955	0.956	0.928
GDP 2 次项	0.982	0.975	0.968	0.933
GDP 3 次项	0.980	0.977	0.969	0.932
GDP 4 次项	0.978	0.972	0.970	0.940

表 4 数据集 2 各阶数 R^2 图

	GDP 增长率 1 次项	GDP 增长率 2 次项	GDP 增长率 3 次项	GDP 增长率 4 次项
GDP 1 次项	0.969	0.973	0.976	0.975
GDP 2 次项	0.987	0.990	0.990	0.990
GDP 3 次项	0.994	0.996	0.995	0.994
GDP 4 次项	0.971	0.971	0.967	0.967

表 5 数据集 3 各阶数 R^2 图

	GDP 增长率 1 次项	GDP 增长率 2 次项	GDP 增长率 3 次项	GDP 增长率 4 次项
GDP 1 次项	0.963	0.963	0.967	0.974
GDP 2 次项	0.985	0.988	0.989	0.990
GDP 3 次项	0.989	0.990	0.991	0.993
GDP 4 次项	0.970	0.958	0.930	0.929

在三张数据集的R^2图中，我们得到了各自数据集最大R^2值的 GDP、GDP 增长率次项数（在表中已标红）。

经过选取最合适的次项后，我们再次得出数值变换下的残差图，如下：

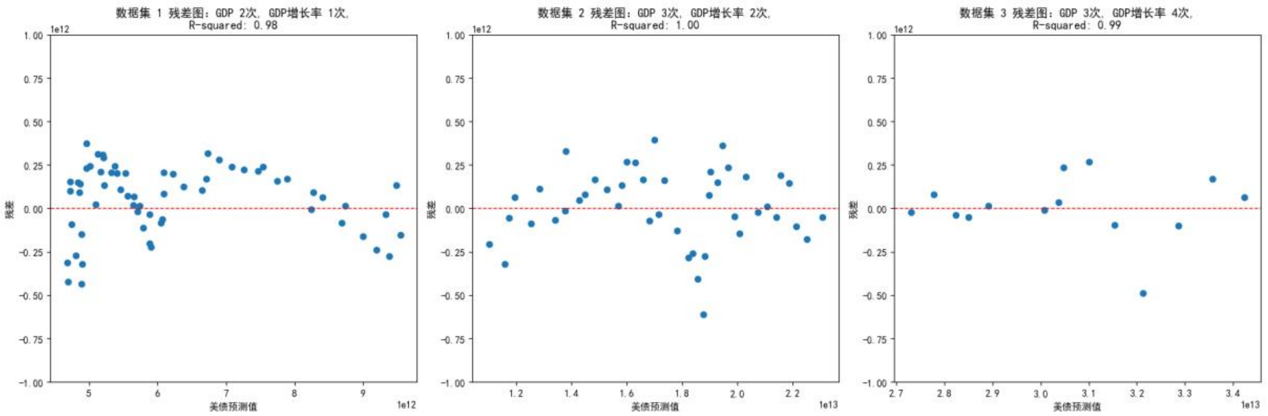


图 23　统一尺度所得残差图

统一尺度后，重新绘制两组残差图，对比前后我们得到以下残差图：

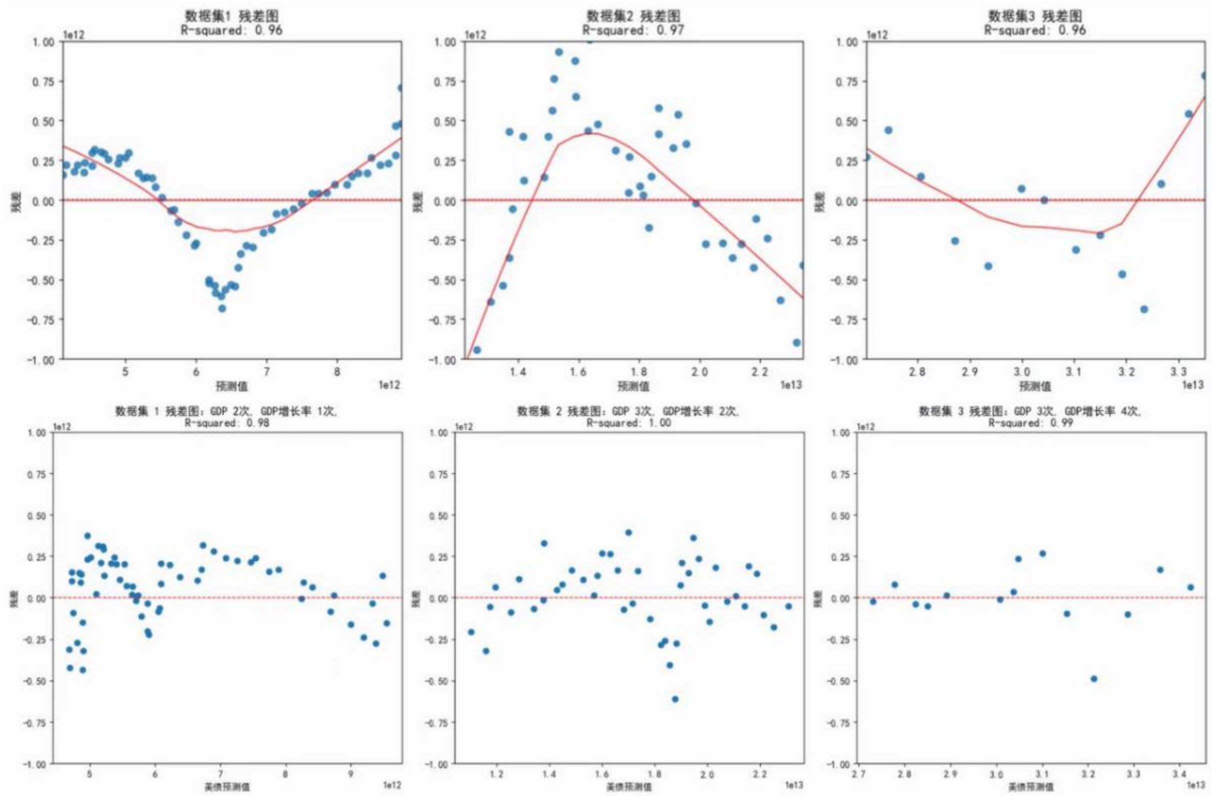


图 24　残差对比图

对比分析两组图，我们发现经过相关阶次的选取，残差图大体上均沿 0 上下分布，且不存在明显的起伏趋势；R^2 值也更加接近于 1。因此，这更进一步说明了取阶次后的准确性。

接下来再次借助梯度下降法，求出各项系数，得到完整的函数关系表达式：

数据集 1 的函数表达式：

$$Debt = 5.880 + 1.366GDP + 0.404GDP^2 + 0.115Growth \quad (17)$$

数据集 2 的函数表达式：

$$Debt = 17.921 + 2.727GDP - 0.584GDP^2 + 0.287GDP^3 + 0.075Growth - 0.088Growth^2 \quad (18)$$

数据集 3 的函数表达式：

$$\begin{aligned} Debt &= 29.971 + 1.995GDP + 0.423GDP^2 + 0.143GDP^3 + 0.238Growth \\ &+ 0.334Growth^2 - 0.134Growth^3 - 0.089Growth^4 \end{aligned} \quad (19)$$

其中 *D*ebt 表示美债，*Growth* 表示 GDP 增长率。

同时生成 BGD 预测曲面图，对三段函数关系进行可视化处理：

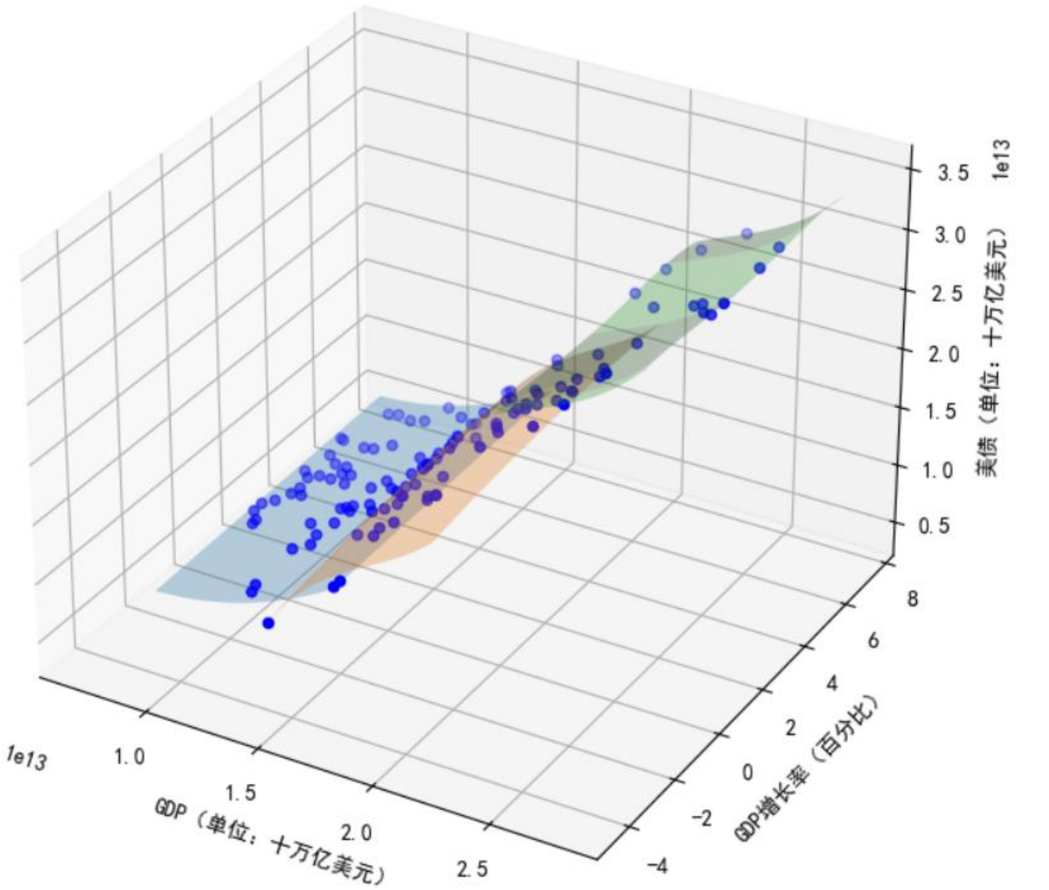


图 25　原始数据三维散点图与 BGD 预测曲面

由散点图和预测曲面图分析可知，美债的三个阶段下，美债总额的上升与 GDP 与 GDP 增长率的上升大体上有着一致性。具体而言，在实际生活中，GDP 增长率的提升

通常表明经济健康，这可以增强投资者对美债的信心，此时投资者可能更愿意购买或持有美债，因为它们被视为风险较低的投资。值得注意的是，2008 年的全球经济危机以及 2020 年的新冠疫情，对美国 GDP 及其增长率造成了显著冲击，这些重大事件也间接影响了美国国债总额的变动。美国 GDP 与 GDP 增长率作为美国经济状况的关键指标，其变动直接反映了美国经济的活力与稳健性。在美国经济稳健增长时，投资者往往增加对美国国债等安全资产的需求，以规避潜在的市场风险。此外，美国经济增长的预期及 GDP 增长率的变动还深刻影响着美国国债的风险溢价水平。在美国经济增速放缓或不确定性加剧的时期，投资者为了补偿额外的风险，会要求更高的风险溢价来持有美国国债，这进一步体现了美国国债市场与美国经济动态之间的紧密联系。

通过研读《政府债务与经济增长：基于资本回报率的门槛效应分析》一文，我们深刻认识到政府债务存在显著的门槛效应。这一效应具体表现为双重维度：首先，政府债务的增长在任何国家都受到自然限制，无法无限累积；一旦政府债务超过某一临界值，其进一步增加将阻碍经济的持续增长。其次，鉴于新兴市场国家往往拥有较高的资本回报率，这些国家的政府债务所能承受的转折点相较于发达国家而言更高，即政府债务的转折点实际上是资本回报率的递增函数[21]。当前，包括《Growth in a Time of Debt》在内的广泛文献体系（如 Reinhart & Rogoff, 2010; Kumar & Woo, 2010; Checherita & Rother, 2012 等）[22][23][24]，均进一步证实了政府债务门槛效应的存在。

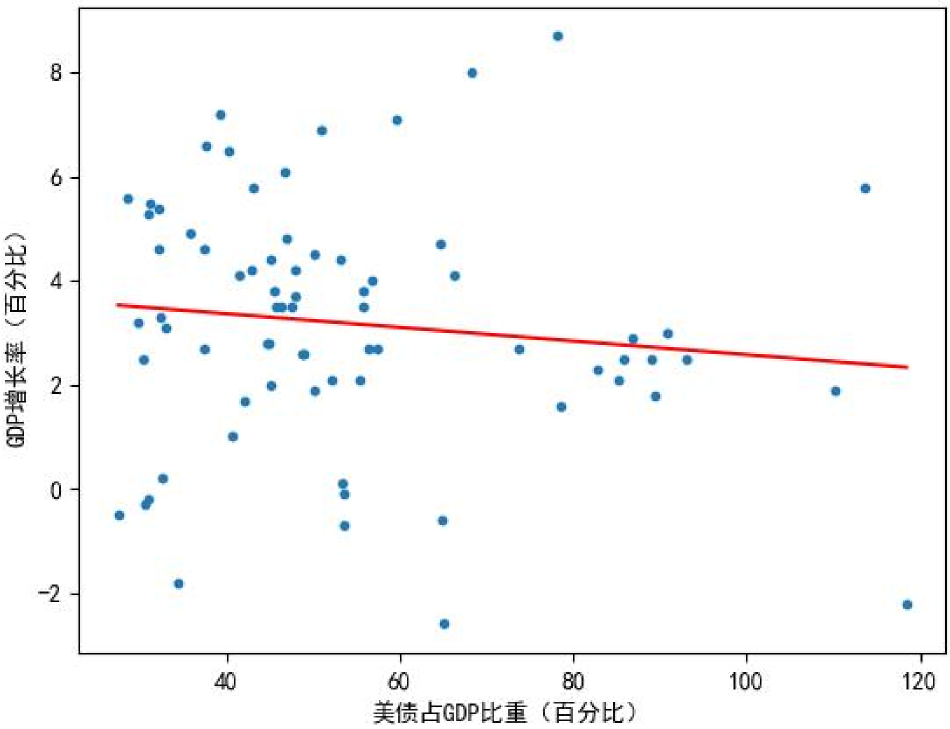


图 26　美债占 GDP 比重与 GDP 增长率的关系

结合美债占 GDP 比重与 GDP 增长率散点图,我们发现其中的确存在着一定的关系：随着美债占 GDP 比重的增长，GDP 增长率存在着明显的下降趋势。这正是门槛效应在美债与 GDP 关系上的充分体现，反映了当代美债危机正在长期化，会不断反噬美国政府信用和美国经济，若不采取相关政治措施，美债危机一定会对美国自身以及全球各国 GDP 造成严重影响。

六、模型结果分析

对于问题一，为了预测 2024、2025 年美国 GDP 和美债总额，我们针对 GDP 和美债总额自身特点，分别利用 VAR 模型和 ARIMA 模型进行预测。模型求解的结果较直观地反应了 2024 年和 2025 年的数据情况和变化趋势，符合预测的情况。并且预测这些近年未来的数据对于理解未来经济趋势、政策制定、投资决策以及全球金融市场的稳定性具有重要的帮助和启示，例如：预测数据可以帮助政府制定或调整财政和货币政策，以促进经济增长或控制通货膨胀；投资者可以根据 GDP 预测来评估不同行业和市场的潜在增长，从而做出更明智的投资选择；美国作为全球最大的经济体，其经济表现对其他国家有显著影响，预测数据可以帮助其他国家调整自己的经济政策以适应可能的全球经济变化。

对于问题二，为了分析每年美债总额变化与美国 GDP、GDP 增长率之间复杂的函数关系，我们首先利用时序图和散点图探索析每年美债总额变化与美国 GDP、GDP 增长率之间的函数关系，再结合热图、R 方值、残差图确定选取多项式回归模型，最后成功构造出 GDP、GDP 增长率与美债总额间函数关系并完成相关检验。在实际情况中，了解美债总额与 GDP 和 GDP 增长率的关系有助于评估美国债务的可持续性，预测未来可能面临的财政风险。深入研究三者的关系可以推动经济模型和理论的发展，提高经济学研究的准确性和实用性。

七、总结

7.1 模型的优、缺点评价分析

7.1.1 模型的优点

ARIMA 模型：能够捕捉数据的趋势和季节性特征。对于具有明显自相关性的时间序列数据，可以提供准确的预测。模型参数（自回归项、差分阶数、滑动平均项）有助于识别数据的统计特性。

VAR 模型：能够同时分析多个时间序列之间的关系；可以捕捉变量之间的动态关系和滞后效应；可以分析一个变量的冲击对其他变量的影响。

多项式回归模型：模型结构简单，易于理解和实现；能够拟合数据中的非线性趋势；模型的多项式形式易于在图表上表示。

7.1.2 模型的缺点

ARIMA 模型：对季节性模式的识别和调整可能比较复杂；需要数据是平稳的，非平稳数据需要先进行差分处理。

VAR 模型：随着变量数量的增加，模型的复杂度和参数数量急剧增加。模型的稳定性可能难以保证，特别是当变量间存在高度相关性时。

多项式回归模型：高阶多项式模型容易过拟合，特别是在数据量较少的情况下；随着多项式的阶数增加，模型的计算复杂性也会增加。

7.2 模型的改进与推广

7.2.1 模型的改进

在使用 ARIMA 模型预测 2024、2025 美债总额时，我们可以对于具有季节性的数据，可以引入季节性差分和季节性 MA/AR 项来改进模型。同时 ARIMA 模型本质上是线性的，对于非线性趋势可以使用 ARIMA 与非线性模型的混合模型，例如 ARIMA-GARCH 模型。

在使用 VAR 模型预测预测 2024、2025 美国 GDP 时，我们可以通过引入结构化约束来减少模型参数，例如设定某些参数为零。再更具体地分析 VAR 模型的脉冲响应函数，以更好地理解变量之间的动态关系。对于具有长期均衡关系的变量，可以使用 VECM 来改进 VAR 模型。

在使用多项式回归模型分析每年美债总额变化与美国 GDP、GDP 增长率之间的函数关系时，我们可以引入岭回归（Ridge Regression）或 LASSO 来处理多项式回归中的过拟合问题。采用局部加权回归（Locally Weighted Regression）来适应数据中的非线性模式，再结合多项式回归与其他模型（如指数平滑或神经网络）来提高预测精度。

7.2.2 模型的推广

整篇文章主要是围绕美债、GDP、GDP 增长率展开，具体借助三个主要模型进行探索预测和函数关系分析。最终的分析结果可以帮助政策制定者理解不同经济指标之间的相互作用，为制定财政和货币政策提供依据。并且模型预测可以为政府和企业提供关于

未来经济走向的信息，帮助他们做出更明智的决策。投资者们也可以利用这些模型的分析结果来评估市场趋势，制定投资策略，进行风险管理。总体来说，对美债、GDP 和 GDP 增长率的深入分析有助于国际社会更好地理解全球经济格局，促进国际经济合作。也在引导我们推广使用先进的数据分析技术，如机器学习和人工智能，以提高经济预测的准确性和效率。

参考文献

[1] 赵元铭.美国国债违约风险研究[D].哈尔滨工业大学,2020.DOI:10.27061/d.cnki.ghgdu.2020.003725.

[2] 张心平.美国国债收益率对中国股票价格的影响机制[D].上海社会科学院,2022.DOI:10.27310/d.cnki.gshsy.2022.000035.

[3] 张乐.二十一世纪以来安徽省 GDP 增长态势及其外贸依存度研究[J].安徽农业大学学报(社会科学版),2018,27(06):44-49.DOI:10.19747/j.cnki.1009-2463.2018.06.008.

[4] U.S. Bureau of Economic Analysis (BEA). National Data[EB/OL]. (2024-06-30). [2024-07-05]. https://apps.bea.gov/iTable/?isuri=1&reqid=19&step=4&categories=flatfiles&nipa_table_list=1.

[5] 张浩.灰色系统理论在我国宏观经济分析中的应用[D].南京信息工程大学,2005.

[6] 王永杰.人工神经网络算法在 GDP 和 CPI 中的预测应用[D].中北大学,2017.

[7] 殷佳棋.内蒙古自治区 GDP 分析与预测[J].内蒙古科技与经济,2024,(07):15-18+54.

[8] 杨忠裕，薛紫玥.基于 ARIMA 模型的甘肃省 GDP 的分析与预测[J].中国市场，2023(6):1-4

[9] 李振亮, 乐昕雨.基于 ARIMA 模型的北京市 GDP 分析与预测[J].中小企业管理与科技, 2023, 694(1):153-155.

[10] 戴然婕. 基于自相关函数和互相关函数的高速铁路环境噪声烦恼度研究[D]. 华南理工大学, 2019.DOI:10.27151/d.cnki.ghnlu.2019.003803.

[11] 唐贤伦,张家瑞,郭祥麟,等.基于数据平稳化和 BiLSTM 的短期风电功率预测方法[J].重庆邮电大学学报(自然科学版),2023,35(06):1135-1144.

[12] 杨尚晨.数字普惠金融对山西城乡居民消费支出的影响[D].山西财经大学,2023.DOI:10.27283/d.cnki.gsxcc.2023.001403.

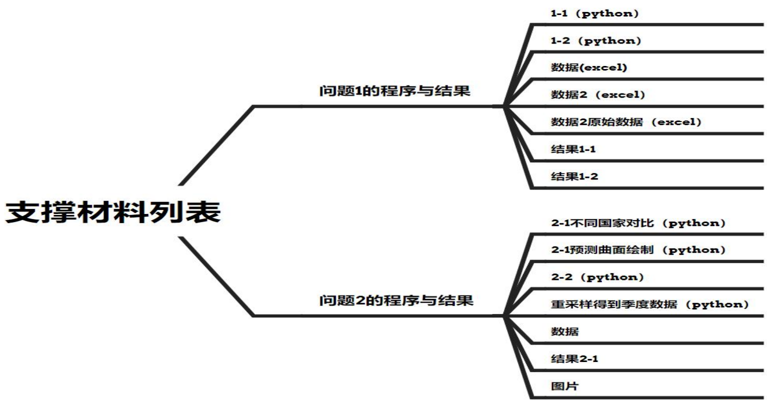
[13] Discussion on Paper by Professor Box and Professor Cox[J].Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology),1964,Vol.26(2): 244-252.

[14] 姚玉臣.影响 GDP 增长的经济因素分析[D].哈尔滨工业大学,2014.

[15] 刘希波.甘肃省主要法定报告乙丙类传染病预测研究[D].甘肃中医药大学,202

0.DOI:10.27026/d.cnki.ggszc.2020.000161.
[16] 邹宇.政府投入、市场投入与高校研发效率[D].华中科技大学,2020.DOI:10.27157/d.cnki.ghzku.2019.002618.
[17] 谢霖.美国金融危机对国际经济与政治格局的影响[D].兰州大学,2010.
[18] 王亚丽.新冠肺炎疫情视角下的经济全球化：风险、趋势及治理[J].经济论坛,2021,(01):56-64.
[19] 曲远源. 美国国债的可持续性研究[D].南开大学,2023.DOI:10.27254/d.cnki.gnkau.2022.000065.
[20] 齐朋磊. 煤矿复杂噪声背景下微震监测关键技术研究[D].河北工程大学,2024.DOI:10.27104/d.cnki.ghbjy.2023.000421.
[21] 郭步超,王博.政府债务与经济增长:基于资本回报率的门槛效应分析[J].世界经济,2014,37(09):95-118.DOI:10.19985/j.cnki.cassjwe.2014.09.006.
[22] Reinhart.M.C, Rogoff.S.K. Growth in a Time of Debt[J].The American Economic Review,2010,100(2):573-578.
[23] Jaejoon W ,S. M K .Public Debt and Growth[J].IMF Working Papers,2010,10(174):1-1.
[24] Checherita-Westphal.C ,Rother.P .The impact of high government debt on economic growth and its channels: An empirical investigation for the euro area[J]. European Economic Review,2012,56(7):1392-1405.

附录 A 支撑材料列表



附录 B ARIMA 模型构建代码

```
# 重采样
df_daily = df.resample('D').mean().interpolate()
df_quar = df_daily.resample('QE').mean()
```

```
# 差分
df_quar_d = df_quar.diff().dropna()
df_quar_dd = df_quar_d.diff().dropna()
dfds = [df_quar_d, df_quar_dd]
ts = df_quar.iloc[:, 1]
# Box-Cox 变换
ts_boxcox, lambda_ = boxcox(ts)
bcdf_quar_d = pd.Series(ts_boxcox, index=ts.index).diff().dropna()

# 模型拟合
model = ARIMA(ts_boxcox, order=(1, 1, 1))
model_fit = model.fit()
# 预测
steps = 7
forecast = model_fit.forecast(steps=steps)
forecast_original_scale = inv_boxcox(forecast, lambda_)
last_date = ts.index[-1]
future_dates = [last_date + DateOffset(months=x) for x in range(0, 3*steps, 3)]
forecast_matrix = forecast_original_scale.reshape(-1, 1)
dates_matrix = np.array(future_dates).reshape(-1, 1)
result_matrix = np.hstack((dates_matrix, forecast_matrix))
result_df = pd.DataFrame(result_matrix, columns=['Date', 'Forecast'])
print(forecast_original_scale)
print(ts[-5:])
print(result_df)
```

附录 C VAR 模型构建代码

```
# 格兰杰因果检验
results_matrix = pd.DataFrame(index=df.columns, columns=df.columns, dtype=float)
for col1 in df.columns:
    for col2 in df.columns:
        test_result = grangercausalitytests(df[[col1, col2]], maxlag=2)
        p_value = test_result[1][0]['ssr_chi2test'][1]
        results_matrix.loc[col1, col2] = p_value
print(results_matrix)
results_matrix.to_excel('结果 1-2/格兰杰因果检验.xlsx')

# ADF 检验
train = df[['社会消费品零售', '出口', '进口', '财政支出', 'GDP']]
columns = ['原始数据', '一阶差分', '二阶差分']
p_values = pd.DataFrame(index=train.columns, columns=columns, dtype=float)
for diff_level in range(3):
    if diff_level == 0:
        data_diff = train
        column_name = '原始数据'
    else:
```

```
            data_diff = data_diff.diff().dropna()
            column_name = columns[diff_level]
        for col in data_diff.columns:
            result = adfuller(data_diff[col])
            p_values.loc[col, column_name] = result[1]
    excel_path = '结果 1-2/ADF 检验.xlsx'
    p_values.to_excel(excel_path)

    # 阶数确定
    train_diff = train.diff().dropna()
    train_diff_diff = train_diff.diff().dropna()
    model = VAR(train_diff_diff)
    criteria = {'BIC': []}
    lags = range(1, 15)
    # 计算每个滞后阶数下的 BIC 值
    for i in lags:
        result = model.fit(i)
        criteria['BIC'].append(result.bic)
    # 绘制 BIC 图
    plt.figure(figsize=(6, 4))
    plt.plot(lags, criteria['BIC'], marker='o')
    plt.title('BIC 值随滞后阶数变化图')
    plt.xlabel('滞后阶数')
    plt.tight_layout()
    plt.savefig('结果 1-2/BIC.png')
    plt.show()

    # 预测
    model = VAR(train_diff_diff)
    model_fitted = model.fit(4)
    # 预测未来 7 个季度
    forecasted_values_diff =
model_fitted.forecast(train_diff_diff.values[-model_fitted.k_ar:], steps=7)
    # 首先，将二阶差分的预测值还原为一阶差分的尺度
    last_observation_diff = train_diff.iloc[-1].values
    forecasted_values_diff_cumsum = forecasted_values_diff.cumsum(axis=0)
    forecasted_values_diff_cumsum += last_observation_diff
    # 然后，将一阶差分的预测值还原为原始尺度的值
    last_original_observation = train.iloc[-1].values
    # 执行预测
    forecasted_values_original = forecasted_values_diff_cumsum.cumsum(axis=0)
    forecasted_values_original += last_original_observation
```

附录 D 多项式回归模型构建代码

```
    # 分割数据集
    df_1 = df[df.index <= '2008-09-30']
```

```
df_2 = df[(df.index >= '2009-03-31') & (df.index <= '2019-12-31')]
df_3 = df[df.index >= '2020-12-31']
dfs = [df_1, df_2, df_3]


# 梯度下降法更新系数
def gradient_descent(X, y, theta, learning_rate=0.001):
    iterations=10000 * (100//y.shape[0])
    m = len(y)
    cost_history = np.zeros(iterations)
    for it in range(iterations):
        prediction = np.dot(X, theta)
        theta = theta - (1/m) * learning_rate * (X.T.dot((prediction - y)))
        cost_history[it] = (1/(2*m)) * np.sum(np.square(prediction - y))
    return theta, cost_history

# 在应用梯度下降之前对特征进行缩放
scaler = StandardScaler()
r_squared_values = np.zeros((4, 4, 3))
# 求 R 方矩阵
for i, dfi in enumerate(dfs):
    X = dfi[['GDP', 'GDP 增长率']]
    y = dfi['美债'].values
    # 应用特征缩放
    X_scaled = scaler.fit_transform(X)
    for degree_gdp in range(1, 5):
        for degree_growth in range(1, 5):
            # 为 GDP 和 GDP 增长率添加指定次数的多项式特征
            poly_gdp = PolynomialFeatures(degree=degree_gdp, include_bias=False)
            poly_growth = PolynomialFeatures(degree=degree_growth, include_bias=False)
            X_gdp_poly = poly_gdp.fit_transform(X_scaled[:, 0].reshape(-1, 1))
            X_growth_poly = poly_growth.fit_transform(X_scaled[:, 1].reshape(-1, 1))
            # 合并多项式特征
            X_poly = np.concatenate((X_gdp_poly, X_growth_poly), axis=1)
            # 添加常数项
            X_poly = sm.add_constant(X_poly)
            # 初始化系数
            theta = np.random.randn(X_poly.shape[1], 1)
            # 使用梯度下降法求解系数
            theta, _ = gradient_descent(X_poly, y.reshape(-1,1), theta)
            # 使用求解的系数计算 R 方值
            prediction = X_poly.dot(theta)
            ss_res = np.sum(np.square(prediction - y.reshape(-1,1)))
            ss_tot = np.sum(np.square(y - np.mean(y)))
            r_squared = 1 - (ss_res / ss_tot)
            # 存储 R 方值
            r_squared_values[degree_gdp-1, degree_growth-1, i] = r_squared
```

```
    # 求最佳函数表达式
    for i, dfi in enumerate(dfs):
        X = dfi[['GDP', 'GDP 增长率']]
        y = dfi['美债'].values
        X_scaled = scaler.fit_transform(X) # 输入的是标准化后的值
        # 找到 R 方值最大的组合
        max_r_squared_index = np.unravel_index(np.argmax(r_squared_values[:, :, i]),
r_squared_values[:, :, i].shape)
        degree_gdp_best, degree_growth_best = max_r_squared_index
        # 重新构建模型
        poly_gdp_best = PolynomialFeatures(degree=degree_gdp_best+1, include_bias=False)
        poly_growth_best = PolynomialFeatures(degree=degree_growth_best+1,
include_bias=False)
        X_gdp_poly_best = poly_gdp_best.fit_transform(X_scaled[:, 0].reshape(-1, 1))
        X_growth_poly_best = poly_growth_best.fit_transform(X_scaled[:, 1].reshape(-1, 1))
        X_poly_best = np.concatenate((X_gdp_poly_best, X_growth_poly_best), axis=1)
        X_poly_best = sm.add_constant(X_poly_best)  # 添加常数项
        # 初始化系数
        theta_best = np.random.randn(X_poly_best.shape[1], 1)
        # 使用梯度下降法求解系数
        theta_best, _ = gradient_descent(X_poly_best, y.reshape(-1,1), theta_best)
        # 使用求解的系数计算预测值
        predictions = X_poly_best.dot(theta_best)
        # 为了生成函数表达式，我们需要特征的名称
        feature_names_gdp = poly_gdp_best.get_feature_names_out(['g'])
        feature_names_growth = poly_growth_best.get_feature_names_out(['ggr'])
        feature_names = np.concatenate((feature_names_gdp, feature_names_growth))
        # 构建函数表达式
        expression = f"美债预测值 = {theta_best.flatten()[0]/1e12:.3f}"
        for coef, name in zip(theta_best.flatten()[1:]/1e12, feature_names):
            if coef >= 0:
                expression += f"+ {coef:.3f}*{name} "
            else:
                expression += f"- {-coef:.3f}*{name} "
        print(f"数据集 {i+1} 的函数表达式:\n{expression}\n")
```