

文章编号:1005-3085(2005)07-0076-09

DVD 租赁优化方案

王 颖, 高德宏, 施 恒

指导教师: 孙 浩

(西北工业大学, 西安 710072)

编者按: 文章较好的理解了题目的意思, 应用二项分布处理问题一, 反映了作者对随机问题的理解和处理; 以满意度最大为目标建立了 0-1 规划模型, 利用 Lingo 软件求解得到会员的分配方案; 问题三的解决是以分阶段建立双目标规划, 虽没能完整解决该问题, 但分析问题、解决问题的思想方法值得推荐。

摘 要: 在线租赁是信息时代发展的必然趋势。在租赁过程中, 网络经营者主要关注 DVD 的预测、购买和分配。本文提出了简单随机抽样、分类预测和关联预测等三种方法进行需求预测。针对问题一, 利用需求预测得到观看 DVD 的人数服从二项分布, 并计算出多种可靠度下购买 DVD 的数量。以会员的最大满意度为目标函数, 建立一个整数规划模型, 得到问题二的分配方案, 并计算出前30位会员的分配结果。在问题三中, 我们考虑到60%的会员由于两次租赁而导致 DVD 可重复利用, 因而, 采用了两阶段购买的策略, 在每个购买阶段都建立了双目标整数规划, 从而得到的购买量比原来网站拥有量小, 并且会员的满意度达到99.38 %。本文最后还给出了考虑归还 DVD 周期的情形下购买与分配的模型。

关键词: 二项分布; 整数规划; 双目标规划; 满意度; 可靠度

分类号: AMS(2000) 90C10

中图分类号: O221.4

文献标识码: A

1 问题的重述 (略)

2 模型假设

- (i) 一个月为一个周期, 考虑在一个周期内 DVD 的租赁情况;
- (ii) 一个周期结束, 所租赁出的 DVD 全部归还网站, 不影响下一个周期的租赁;
- (iii) 一个会员在一个周期内租赁到自己想看的 DVD 的时间不影响他的满意度;
- (iv) 会员只有在将第一次租赁的3张 DVD 还回网站之后, 才能进行第二次租赁;
- (v) 每个会员同一种 DVD 只租赁一次;
- (vi) DVD在租赁过程中无损坏。

3 模型的建立及求解

1) 问题一模型的建立及求解

设随机变量 $\xi_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{表示第 } i \text{ 个会员租赁第 } j \text{ 种 DVD,} \\ 0 & \text{表示第 } i \text{ 个会员不租赁第 } j \text{ 种 DVD,} \end{cases}$ 其中 $i=1, 2, \dots, 100000$, 显然

随机变量 ξ_{ij} 服从两点分布, 即 $p\{\xi_{ij} = 1\} = p_j$ $p\{\xi_{ij} = 0\} = 1 - p_j$ 其中 p_j (网站通过问卷调查得到的概率) 的取值见表1。

表1: 会员租赁5种 DVD 的概率

DVD 的名称	DVD1	DVD2	DVD3	DVD4	DVD5
第 i 张 DVD 被租赁的概率	$p_1 = 0.2$	$p_2 = 0.1$	$p_3 = 0.05$	$p_4 = 0.025$	$p_5 = 0.01$

设随机变量 $\eta_j = \sum_{i=1}^{100,000} \xi_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, 5$, 即 η_j 表示 100,000 个会员中租赁第 j 张 DVD 的总数, 由于会员之间是否租赁该张 DVD 是相互独立的, 因而 $\eta_j \sim B(100,000, p_j)$, 如果网站准备了 $E(50\%\eta_j)$ 张 DVD, 则满足至少 50% 的人看到该 DVD 的概率为

$$P\{50\%\eta_j \leq E(50\%\eta_j)\} = P\left\{\frac{50\%\eta_j - E(50\%\eta_j)}{\sqrt{D(50\%\eta_j)}} \leq \frac{E(50\%\eta_j) - E(50\%\eta_j)}{\sqrt{D(50\%\eta_j)}}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{50\%\eta_j - E(50\%\eta_j)}{\sqrt{D(50\%\eta_j)}} \leq 0\right\} \approx \Phi(0) = \frac{1}{2},$$

其中约等式是由 De Moivre-Laplace 中心极限定理得到。为了提高满足至少 50% 的人看到该片的可靠度(即概率), 我们需要改变提供的数量。设可以保证至少 50% 的人看到该片的可靠度为 99%, 即 $\Phi(t)=99\%$, 由此可以得到 $t=2.33$, 则

$$50\%\eta_j \leq E(50\%\eta_j) + 2.33\sqrt{D(50\%\eta_j)} = 50,000p_j + 2.33\sqrt{100,000p_j \cdot (1-p_j)}$$

同时, 由于 60% 的会员每个月会租赁 DVD 两次, 40% 的会员每个月会租赁 DVD 一次, 所以租赁两次的会员会将第一次租赁的 DVD 归还, 这样就可以满足其他会员的租赁要求, 但是因为该张 DVD 是被会员在一个月内第一次租赁, 还是被会员在第二次租赁的情况是随机的, 我们假设上述这两种情况是等可能的, 所以该张 DVD 可以被再次利用的期望值为: $\frac{1}{2} \times 60\% + \frac{1}{2} \times 0 = 30\%$, 由此我们可以得出: 只需要准备所需量的 70% 就可以满足题目中的要求。

综上所述, 我们以 99% 的可靠度满足至少 50% 的租赁会员能够看到某种 DVD 所需要准备的该种 DVD 的数量为:

$$70\% \times \left[50,000p_j + 2.33 \times \frac{1}{2} \sqrt{100,000p_j \cdot (1-p_j)} \right],$$

代入相关数据, 我们可以得到保证至少 50% 的人一个月内看到该 DVD, 网站需要准备该 DVD 的张数(见表 2)。

表2: 网站为了保证至少 50% 的人一个月内看到该 DVD 需要准备的张数

可靠度	DVD1	DVD2	DVD3	DVD4	DVD5
50%	7,000	3,500	1,750	875	350
70%	7,024	3,518	1,763	885	356
80%	7,038	3,529	1,771	890	360
99%	7,104	3,578	1,807	916	375

为了保证在三个月内使得 95% 的会员看到其所想要租赁的 DVD, 只需要提供一个半月内使得 95% 的会员看到其想要租赁的 DVD 总量的 $\frac{1}{3}$, 这是因为三个月内 DVD 的流通量相当于一个半月内 DVD 流通了三个周期的量。因而以 99% 的可靠度使得三个月内 95% 的人看到该 DVD, 网站应准备的张数为:

$$\frac{1}{3} \times 70\% \times \left[100,000 \times 95\% \cdot p_j + 2.33 \times 0.95 \sqrt{100,000 \cdot p_j \cdot (1-p_j)} \right],$$

代入相关数据, 可以得到保证至少 95% 的人三个月内看到该 DVD, 网站需要准备该 DVD 的张数(见表 3)。

表3: 网站为了保证至少95%的人三个月内看到该 DVD 需要准备的张数

可靠度	DVD1	DVD2	DVD3	DVD4	DVD5
50%	4,434	2,217	1,109	555	222
70%	4,449	2,228	1,117	560	226
80%	4,458	2,235	1,122	564	228
99%	4,499	2,266	1,144	580	238

2) 问题二模型的建立及求解

设 $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{表示第 } i \text{ 个会员分到了第 } j \text{ 种 DVD,} \\ 0 & \text{表示第 } i \text{ 个会员没有分到第 } j \text{ 种 DVD,} \end{cases}$ 则对会员的分配矩阵为:

$$X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,100} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,100} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1000,1} & x_{1000,2} & \cdots & x_{1000,100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{1000} \end{bmatrix}$$

其中 X_i 为一维行向量, 表示对第 i 个会员的 DVD 分配情况。

设 a_{ij} 表示第 i 个会员对第 j 张 DVD 的偏爱度, 由于 a_{ij} 的数字越大, 表示偏爱程度越小, 同时会员得到该 DVD 的满意度越小, 因而我们定义第 i 个会员对分配到第 j 张 DVD 的满意度为 b_{ij} , 则

$$b_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{a_{ij}}, & a_{ij} \neq 0 \\ 0, & a_{ij} = 0. \end{cases}$$

则会员的满意度矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,100} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,100} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1000,1} & b_{1000,2} & \cdots & b_{1000,100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{1000} \end{bmatrix}$$

其中 B_i 为一维行向量, 表示第 i 个会员对分配到各类 DVD 的满意度。因而, 第 i 个会员对该分配方案的满意度为: $X_i \cdot B_i^T = \sum_{j=1}^{100} x_{ij} \cdot b_{ij}$ 。当第 i 个会员得到其偏爱度为1、2、3的3张 DVD 时, 他是最满意的, 其满意度为 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$, 由此可以得到第 i 个会员的标准化满意度为:

$$\frac{X_i \cdot B_i^T}{\frac{11}{6}} = \frac{\sum_{j=1}^{100} x_{ij} \cdot b_{ij}}{\frac{11}{6}} = \frac{6}{11} \sum_{j=1}^{100} x_{ij} \cdot b_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, 1000.$$

为了会员获得最大的满意度, 可以使他们的满意度和达到最大, 由此得到目标函数为:

$$\max \frac{6}{11 \times 1000} \sum_{i=1}^{1000} \sum_{j=1}^{100} x_{ij} \cdot b_{ij}.$$

在分配的过程中, 每种 DVD 分配给会员的总数不超过网站准备的总数, 即: $\sum_{i=1}^{1000} x_{ij} \leq n_j$, $j = 1, 2, \dots, 100$ 。在一次分配中, 每个会员获得3张 DVD; 如果不够3张就视为分给该会员0张 DVD, 即: $0 \leq \sum_{i=1}^{1000} x_{ij} \leq 3, i = 1, 2, \dots, 1000$ 。

综合上述分析，可以得到该问题的模型为

$$\begin{aligned} \max & \frac{6}{11 \times 1000} \sum_{i=1}^{1000} \sum_{j=1}^{100} x_{ij} \cdot b_{ij} \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \sum_{i=1}^{1000} x_{ij} \leq n_j, & j = 1, 2, \dots, 100 \\ 0 \leq \sum_{i=1}^{1000} x_{ij} \leq 3, & i = 1, 2, \dots, 1000 \\ x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1, & i = 1, 2, \dots, 1000, j = 1, 2, \dots, 100. \end{cases} \end{aligned}$$

根据上述模型，我们使用 Lingo 软件进行求解，结果如下：目标函数的最大值为89.13%；没有得到 DVD 人数为0；得到1张 DVD 人数为6；得到2张 DVD 人数为54；得到3张 DVD 人数为940；比率分别为0%，0.6%，5.4%，94%。

表4：前30位会员获得 DVD 的情况

会员	会员获得的3张 DVD (该张的偏爱度)			会员	会员获得的3张 DVD (该张的偏爱度)		
C0001	D008 (1)	D041 (7)	D098 (3)	C0016	D055 (9)	D084 (1)	D097 (2)
C0002	D006 (1)	D044 (2)	D062 (4)	C0017	D047 (2)	D051 (3)	D067 (1)
C0003	D032 (4)	D050 (2)	D080 (1)	C0018	D044 (1)	D060 (2)	D078 (3)
C0004	D007 (1)	D018 (2)	D041 (3)	C0019	D066 (4)	D084 (1)	D086 (2)
C0005	D011 (3)	D066 (1)	D068 (2)	C0020	D045 (1)	D061 (3)	D089 (2)
C0006	D019 (1)	D053 (2)	D066 (4)	C0021	D045 (2)	D050 (5)	D053 (1)
C0007	D008 (2)	D026 (3)	D081 (1)	C0022	D038 (3)	D055 (2)	D057 (1)
C0008	D031 (4)	D035 (5)		C0023	D029 (2)	D081 (3)	D095 (1)
C0009	D053 (1)	D078 (3)	D100 (2)	C0024	D037 (4)	D041 (2)	D076 (1)
C0010	D055 (2)	D060 (1)	D085 (3)	C0025	D009 (1)	D069 (2)	D081 (4)
C0011	D059 (1)	D063 (2)	D066 (4)	C0026	D022 (1)	D068 (2)	D095 (3)
C0012	D002 (2)	D031 (1)	D041 (7)	C0027	D050 (4)	D058 (1)	D078 (7)
C0013	D021 (3)	D078 (2)	D096 (1)	C0028	D008 (1)	D034 (2)	
C0014	D023 (2)	D052 (1)	D029 (6)	C0029	D026 (4)	D030 (2)	D055 (1)
C0015	D013 (1)	D066 (9)	D085 (3)	C0030	D037 (2)	D062 (1)	D098 (5)

经计算，前30位会员的标准满意度为92.0%，获得3张 DVD 的比率为93.3%，也就是93.3%的会员能够得到他想看的 DVD。

3) 问题三模型的建立以及求解

为了利用题目中表2给出的数据，给出一种合理的购买方案，我们分两次完成购买方案。

第一阶段购买方案 设 $Y_i = (y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,100})$ 表示针对第 i 个会员的需求所选取的购买方案，其中 $y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{表示针对第 } i \text{ 个会员购买第 } j \text{ 种 DVD} \\ 0 & \text{表示不为第 } i \text{ 个会员购买第 } j \text{ 种 DVD} \end{cases}$ 因为有60%的会员每月会租赁 DVD 两次，而另外40%的会员每月只租赁一次，因此我们假设一月会有两次订单，其中题目所给出的表2作为第一次订单，首先利用表2的数据给出第一阶段购买方案。在购买中，保证95%的会员得到他想看的 DVD，即95%的会员得到他订单中的3张，同时要使他们的满意度

最大, 另外网站希望购买的 DVD 张数越少越好, 基于上述要求, 我们给出如下模型:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1}^{1000} \sum_{j=1}^{100} y_{ij} \\ & \max \frac{6}{11 \times 1000} \sum_{i=1}^{1000} \sum_{j=1}^{100} y_{ij} \cdot b_{ij} \\ & \text{s.t.} \begin{cases} 0 \leq \sum_{j=1}^{100} y_{ij} \leq 3, & i = 1, 2, \dots, 1000, \\ \sum_{j=1}^{100} y_{ij} \neq 1, & \sum_{j=1}^{100} y_{ij} \neq 2, & i = 1, 2, \dots, 1000, \\ \sum_{i=1}^{1000} \sum_{j=1}^{100} y_{ij} \geq 1000 \times 95\% \times 3, \\ y_{ij} = 0 \text{ 或 } 1, & i = 1, 2, \dots, 1000, \quad j = 1, 2, \dots, 100. \end{cases} \end{aligned}$$

由上述目标函数及约束条件可以看到, 这个整数规划有多个可行解, 这些解是从1000个人中任取950人, 对于950人中的每一个人选取其偏爱程度分别为1、2、3的3张 DVD。最后统计一下每张 DVD 被950人选为偏爱程度为1、2、3的总数, 则可得到该张 DVD 购买的数目。

第二阶段购买方案 网站为了满足95%的人的需求, 根据60%的人本月内的第二次租赁订单, 进行第二次购买。题中没有给出60%的人第二次租赁的订单, 我们将利用题目中的表2, 随机选取600 (1000 * 60%) 位会员的在线订单, 作为第二次租赁订单。为了便于数学符号上的处理, 不失一般性, 我们不妨选择1000会员中的前600个会员的订单作为第二次订单。因为这600个会员在第一阶段购买方案中已经满足了他们偏爱度为1、2、3的 DVD 的需求, 所以在第二次订单中他们偏爱度为1、2、3的 DVD 的需求应记为0 (否则, 因为目标函数是满意度最大, 所以最后得出的还是偏爱度为1、2、3的 DVD 的需求), 则第二次订单中各会员相应的满意度为 $d_{ij} = \begin{cases} b_{ij}, & y_{ij} = 0 \\ 0, & y_{ij} = 1 \end{cases}$ ($i=1, 2, \dots, 600, j=1, 2, \dots, 100$), 也就是说, 如果第 i 个会员在第一次租赁中得到第 j 张 DVD 时, 则在第二次租赁中, 第 i 个会员对第 j 张 DVD 的满意度为0。

设 $Z_i = (Z_{i1}, Z_{i2}, \dots, Z_{i100})$ 表示根据第二次租赁订单第 i 个人的需求网站采购 DVD 碟片的方案。在第二次分配中, 当第 i 个会员得到其偏爱度为4、5、6的3张 DVD 时, 他是最满意的, 其满意度为 $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$, 由此可以得到第 i 个会员的标准化满意度为:

$$\frac{\sum_{j=1}^{100} z_{ij} \cdot d_{ij}}{\frac{37}{60}} = \frac{60}{37} \sum_{j=1}^{100} z_{ij} \cdot d_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, 600.$$

为了会员获得比较大的满意度, 可以使他们的满意度和达到最大, 由此可以得到目标函数为:

$$\max \frac{60}{37 \times 600} \sum_{i=1}^{600} \sum_{j=1}^{100} z_{ij} \cdot d_{ij} = \max \frac{1}{370} \sum_{i=1}^{600} \sum_{j=1}^{100} z_{ij} \cdot d_{ij}.$$

网站在第二次确定购买方案时, 一方面需要考虑第一步采购时所有的相关问题, 同时还需要考

虑第一次租赁后还回来的 DVD 的再次利用，因而可以得到如下模型：

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1}^{600} \sum_{j=1}^{100} z_{ij} \\ & \max \frac{1}{370} \sum_{i=1}^{600} \sum_{j=1}^{100} z_{ij} \cdot d_{ij} \\ & \text{s.t.} \begin{cases} 0 \leq \sum_{j=1}^{100} z_{ij} \leq 3, \\ \sum_{j=1}^{100} z_{ij} \neq 1, \quad \sum_{j=1}^{100} z_{ij} \neq 2, \quad i = 1, 2, \dots, 600, \\ \sum_{i=1}^{600} \sum_{j=1}^{100} z_{ij} \geq 600 \times 95\% \times 3, \\ z_{ij} = 0 \text{ 或 } 1, \quad i = 1, 2, \dots, 600, \quad j = 1, 2, \dots, 100. \end{cases} \end{aligned}$$

此模型的解法类似于第一阶段购买方案模型的解法。

综上所述两步，则可以得到网站购买 DVD 数量的方案为：

$$w_j = \begin{cases} \sum_{i=1}^{1000} y_{ij} + \left(\sum_{i=1}^{600} z_{ij} - \sum_{i=1}^{600} y_{ij} \right), & \sum_{i=1}^{600} z_{ij} \geq \sum_{i=1}^{600} y_{ij} \\ \sum_{i=1}^{1000} y_{ij}, & \sum_{i=1}^{600} z_{ij} < \sum_{i=1}^{600} y_{ij}. \end{cases}$$

其中 w_j 表示网站购买第 j 张 DVD 的数量， $j=1, 2, \dots, 100$ 。

在前面按照百分比（95%及60%）选取会员时，为了便于数学上的处理，我们选取了1000人中的前950人以及前600人这种处理方法过于简单，但由于这种选取方法的多样性，在数学记号以及计算上都会产生较大的复杂性。因而为了避免这种复杂性以及前面处理方法的简单性，以下我们将用数学期望的办法解决购买方案问题。

设 a_j 为1000名会员中第 j 张 DVD 偏爱程度为1、2、3的总人数，其中 $j=1, 2, \dots, 100$ ，则 $\frac{a_j}{1000}$ 为会员租赁第 j 张 DVD 偏爱度为1、2、3的频率（概率的近似值）。因而950人租赁第 j 张 DVD 偏爱度为1、2、3人数的均值为：

$$950 \times \frac{a_j}{1000} = a_j \times 95\% \quad , \quad j=1, 2, \dots, 100.$$

用类似的方法，我们也可以得到600会员中选取第 j 张 DVD 偏爱度为4、5或6的会员的均值。同时计算这600人中选取第 j 张 DVD 偏爱程度为1、2或3人数的均值，这个均值表示第 j 张 DVD 可以被重复利用，因而在购买时可以从第 j 张 DVD 偏爱程度为4、5或6人数的均值中减去这些可以再次利用的数量。这样按照均值的方法，购买 DVD 的方案见表5（在均值情况下的购买总量为2996张）。

表5: 均值方法得到的购买方案

DVD	DVD1	DVD2	DVD3	DVD4	DVD5	DVD6	DVD7	DVD8	DVD9	DVD10
购买量	26	34	30	36	26	31	29	31	33	29
DVD	DVD11	DVD12	DVD13	DVD14	DVD15	DVD16	DVD17	DVD18	DVD19	DVD20
购买量	29	29	27	29	26	35	33	29	30	35
DVD	DVD21	DVD22	DVD23	DVD24	DVD25	DVD26	DVD27	DVD28	DVD29	DVD30
购买量	32	29	33	27	27	29	28	24	25	38
DVD	DVD31	DVD32	DVD33	DVD34	DVD35	DVD36	DVD37	DVD38	DVD39	DVD40
购买量	33	33	29	29	34	32	26	30	28	27
DVD	DVD41	DVD42	DVD43	DVD44	DVD45	DVD46	DVD47	DVD48	DVD49	DVD50
购买量	48	35	30	33	38	27	29	27	29	32
DVD	DVD51	DVD52	DVD53	DVD54	DVD55	DVD56	DVD57	DVD58	DVD59	DVD60
购买量	38	26	29	26	29	33	28	27	31	32
DVD	DVD61	DVD62	DVD63	DVD64	DVD65	DVD66	DVD67	DVD68	DVD69	DVD70
购买量	27	32	30	35	31	36	31	33	32	31
DVD	DVD71	DVD72	DVD73	DVD74	DVD75	DVD76	DVD77	DVD78	DVD79	DVD80
购买量	34	32	23	29	27	24	26	30	29	29
DVD	DVD81	DVD82	DVD83	DVD84	DVD85	DVD86	DVD87	DVD88	DVD89	DVD90
购买量	31	23	21	23	31	25	32	23	27	31
DVD	DVD91	DVD92	DVD93	DVD94	DVD95	DVD96	DVD97	DVD98	DVD99	DVD100
购买量	37	29	27	28	38	23	32	32	23	32

基于上述两种方法,可以得到网站购买 DVD 的数量,在此基础上,利用问题二中的分配 DVD 的模型,可以得到相应的分配方案。

对于上述两种购买方案,与原有 DVD 拥有的数量相比,哪一种方案更好呢?我们可以从三个方面比较这三种购买方案的优劣性(见表6)。

表6: 第一次订单三种方案优劣性的比较

	问题二中的原来拥有量 分配方案	问题三第一种方法得到 购买量分配方案	问题三均值方法得到 购买量分配方案
标准满意度	89.13%	99.82%	99.38%
获得3张 DVD 的比率	94%	100%	99.6%
购买 DVD 的总数	3007	3094	2996

从表6可以看到,均值方法得到的购买方案在分配过程中,标准满意度、获得3张 DVD 的比例以及购买 DVD 的总数都比较好一些。假设前600个人进行了第二次租赁,表7给出了在三种不同购买量的情形下600人分配的结果比较。

表7: 600人第二次订单三种方案优劣性的比较

	问题二中的原来拥有量 分配方案	问题三第一种方法得到 购买量分配方案	问题三均值方法得到 购买量分配方案
标准满意度	95.76%	99.31%	99.7%
获得3张 DVD 的比率	61.83%	100%	99.83%
购买 DVD 的总数	3007	3094	2996

4) 问题四的求解

作为一名网络的经营商，在经营过程中，主要考虑以下几个方面的问题：对新出的 DVD 进行市场需求预测；利用市场预测选取购买方案，最后按在线会员的订单进行合理分配。在这个过程中，我们追求获得最大收益。因而一方面减少购买 DVD 所需的成本，另一方面最大化满足各会员的需求。以下将详细描述这个过程的相关模型。

① 在市场需求预测方面，可以通过市场调查和以往的租赁经验，采取简单随机抽样，分类预测，关联预测等多种方法，以便得到较为准确的市场信息。

② 利用市场需求预测的相关信息对购买方案进行指导。一方面减少 DVD 的购买量，另一方面最大化满足各会员的需求。在这个过程中，除了题目中所考虑的约束问题之外，我们还需要关注 DVD 的价格，DVD 的重复利用率，新加入会员人群的潜在性影响等。

根据第一步的市场需求分析，可以得到该张 DVD 可能被租赁的概率为 p （频率是概率的近似值）。类似于问题一的分析，只需总量的 70% 就可以满足要求。

同时，我们也可以通过网站以前的数据得到会员使用 DVD 的时间（从租到归还）的概率分布律为：

表8: DVD 使用周期分布律

η	1天	2天	...	30天
P	p_1	p_2	...	p_{30}

如果会员使用 DVD 的时间为 k 天，则这类会员所使用的 DVD 可以重复利用的次数为 $\frac{30}{k}$ ，因而该 DVD 在这样的概率分布下，可以重复利用次数的数学期望为： $\sum_{k=1}^{30} \frac{30}{k} \cdot p_k$ 。

设在线会员人数为 n ，在一个月內，新加入会员的潜在可能性为 α ，同时网站需要以 β 的概率保证使得 $a\%$ 的会员看到想看的 DVD，那么网站应该购买的 DVD 数量为：

$$\frac{70\% \times [(1 + \alpha) \cdot n \cdot p \cdot a\% + t \cdot a\% \sqrt{(1 + \alpha) \cdot n \cdot p \cdot (1 - p)}]}{\sum_{k=1}^{30} \frac{30}{k} \cdot p_k}, \quad \text{其中 } \Phi(t) = \beta.$$

③ 在分配过程中，可以充分考虑会员在一个月內还回来的 DVD 的重复利用率，依据上述分析可知，每张 DVD 的可以重复利用的次数为： $\sum_{k=1}^{30} \frac{30}{k} \cdot p_k$ ，该网站拥有第 j 张 DVD 的数量为 n_j ，则在分配中，该 DVD 的数量可以被认定为： $n_j \cdot \sum_{k=1}^{30} \frac{30}{k} \cdot p_k$ ，其中 $j=1, 2, \dots, m$ 。综上所述，得如下模型：

$$\begin{aligned} & \max \frac{6}{11L} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^m x_{ij} b_{ij} \\ & \text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^L x_{ij} \leq n_j \cdot \sum_{k=1}^{30} \frac{30}{k} \cdot p_k, & j=1, 2, \dots, m, \\ 0 \leq \sum_{j=1}^m x_{ij} \leq 3, & i=1, 2, \dots, L, \\ x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1, & i=1, 2, \dots, L, \quad j=1, 2, \dots, m. \end{cases} \end{aligned}$$

$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{表示第 } i \text{ 会员分到了第 } j \text{ 张 DVD} \\ 0, & \text{表示第 } i \text{ 会员没有分到了第 } j \text{ 张 DVD} \end{cases}$ ， b_{ij} 表示第 i 个会员对分配到第 j 张 DVD 的满意度。此模型的求解与问题二模型求解类似。

4 模型的优缺点

优点 1) 我们建立了一个随机模型, 引入了数学期望, 较好的解决了会员对 DVD 需求数量的预测, 使模型得到简化, 进而能够在计算机上得到满意的解。

2) 对于满意度的表示, 我们采取了将表2中的偏爱程度取倒数, 使得会员满意度的描述有依据, 避免了线性取值带来的较大误差。显得比较合理。

3) 本模型在随机分布的基础上, 建立关于 DVD 分配情况的矩阵, 以及各会员的满意度矩阵, 使得问题的描述比较清晰。

4) 问题三我们采用在 Excel 工作表上作业方式, 这样减少数据的导入、导出, 并且统计出每种 DVD 网站需要购买的均值和网站需要购买的最大值, 在此基础上进行分配, 并且与问题二分配结果进行比较, 在三种方案的比较下, 我们选取以均值方式购买每种 DVD 的方案。

缺点 在进行问题三的求解时, 我们仅选取前600位客户作为分析对象, 这样虽然避免大的计算量, 但是使结果的误差变大。而且, 表2所给出的仅仅是一个网站某一次会员订单的数据, 由于数据量不够充足, 使得我们所求的数学期望就显得有些粗略。在实际中, 租赁分配又是一个复杂的数学问题, 存在着大量的不确定性, 例如: 网站会员数目、会员对不同 DVD 的偏爱度、会员的租赁时间、租赁的 DVD 的数目以及归还的时间等等, 所以我们的模型就会有一定程度的偏差。

参考文献:

- [1] 田铮, 肖华勇. 随机数学基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 2005
- [2] 刘金兰, 朱晓杨. 顾客满意度指标重要性测量的主成分分析与多元回归方法[J]. 天津大学学报, 2004, 16(2): 159-163
- [3] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004
- [4] 吴祈宗. 运筹学与最优化方法[M]. 北京: 机械工业出版社, 2003
- [5] 李继成. 数学实验[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2003
- [6] 麻志毅(译). C语言解析教程[M]. 北京: 机械工业出版社, 2000

A Optimal Scheme of Renting DVD Online

WANG Ying, GAO De-hong, SHI Heng

Advisor: SUN Hao

(Northwestern Polytechnical University, Xi'an, Shaanxi 710072)

Abstract: It will be a trend to renting DVD online during information age. A random model for problem 1 shows that the random variable of the number of renting DVDs satisfies binomial distribution. The number of DVDs purchased by net manager is calculated under some probability. A integer programming model of problem 2, in which the objective function is the maximum degree satisfaction of clients, is given. The optimal solution of this integer programming model is derived by Lingo 5.0. And the distribution scheme of the first 30 clients is given. Considering that DVDs are recycled for the twice rent of 60% the clients, the two-steps strategy of purchase scheme, for which a bi-object integer programming is found, is described for problem 3. The result of problem 3 is shown in Table 6 and Table 7. A new model of purchase and distribution scheme of renting DVD online is also discussed in the last part of this paper.

Keywords: binomial distribution; integer programming; bi-objective programming; degree satisfaction; probability