

文章编号:1005-3085(2005)07-0108-05

DVD 在线租赁

黄 梅, 李 忠, 白海军

指导教师: 符 伟

(西南交通大学峨眉校区, 四川峨眉 614202)

编者按: 本文采用 0-1 规划和 lingo 软件解决了 DVD 分配问题; 采用了双目标线性规划模型, 并加权处理为单目标问题, 给出了较好的结果, 方法简洁、恰当。

摘 要: 针对网站 DVD 在线租赁问题, 我们建立了以线性规划为基础的单目标、多目标及混合整数规划等多个数学模型, 很好的解决了 DVD 的分配问题。对问题一, 我们建立了单目标整数规划模型, 利用 lingo 数学软件包求解, 求出了两种不同情况下 DVD 的最小购买量; 对问题二, 首先我们对所给的表格数据进行了规范化处理, 采用倒数公式得到了每个人对每种 DVD 的满意度系数矩阵, 然后建立了单目标混合整数规划的数学模型, 最后使用 lingo 数学软件包求得了最大满意度时的 DVD 分发方案; 对问题三, 我们建立了双目标规划模型, 为使 DVD 的购买量最小且会员满意度最大, 引进了权重系数 φ , 通过加权组合构造了一个新的单目标的混合整数规划模型, 最后使用 lingo 数学软件包求得了每种 DVD 的最小购买量以及此时 DVD 的分配方案。

关键词: 满意度; 在线租赁

分类号: AMS(2000) 90C10

中图分类号: O221

文献标识码: A

1 基本假设

- 1) 网站根据现有 DVD 数量及会员订单对各类 DVD 进行分发, 且只对当前在线人数进行统计。
- 2) 每位会员对同一种 DVD 只租一次。
- 3) 每个会员每个月租赁次数不得超过2次, 每次获得3张 DVD。
- 4) 会员提交的订单包括多张 DVD, 这些 DVD 是基于其偏爱程度排序。
- 5) 对愿意观看这五类 DVD 的人数调查出来的结果具有代表性。

2 问题二的建模与求解

1) 问题分析

要使会员总的满意度最大, 首先我们需要对题目所给出的体现第 i 个会员对第 j 类 DVD 的偏爱程度的数据进行规范化处理, 我们采用简单的倒数公式, 即: $c_{ij} = \frac{1}{a_{ij}}$, 这里 a_{ij} 为表中所给数据, 且 $a_{ij} = 0$ 时, 定义 $c_{ij} = 0$ 目标函数为全体会员的满意度, 即

$$W = \sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{20} c_{ij} x_{ij}$$

约束条件有:

① DVD 总数的约束

$$\sum_{i=1}^{100} x_{ij} = b_j,$$

② 每位会员每次只能租3张或不租的约束

$$\sum_{j=1}^{20} x_{ij} = 3\sigma_i.$$

2) 模型建立

按照以上分析，我们建立了下列 0-1 规划模型

$$\begin{aligned} \max W &= \sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{20} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} &\begin{cases} \sum_{i=1}^{100} x_{ij} = b_j, & j = 1, 2, \dots, 20, \\ \sum_{j=1}^{20} x_{ij} = 3\sigma_i, & i = 1, 2, \dots, 100, \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, & i = 1, 2, \dots, 100; j = 1, 2, \dots, 20, \\ \sigma_i \in \{0, 1\}, & i = 1, 2, \dots, 100. \end{cases} \end{aligned}$$

3) 模型求解

利用 Lingo 软件我们很快就求出了问题的解，得到了前30位会员 DVD 分发策略如表1。

表 1: 前30位会员 DVD 分发策略表

| 会员名 | 获得 DVD 的编号 | 会员名 | 获得 DVD 的编号 |
|-------|------------------|-------|------------------|
| C0001 | D003, D017, D020 | C0016 | D007, D011, D017 |
| C0002 | D001, D006, D012 | C0017 | D004, D007, D017 |
| C0003 | D013, D017, D020 | C0018 | D007, D018, D020 |
| C0004 | D007, D011, D012 | C0019 | D006, D007, D017 |
| C0005 | D006, D007, D019 | C0020 | D006, D009, D020 |
| C0006 | D006, D012, D016 | C0021 | D006, D013, D015 |
| C0007 | D007, D011, D020 | C0022 | D003, D007, D011 |
| C0008 | D007, D013, D014 | C0023 | D011, D012, D013 |
| C0009 | D003, D007, D015 | C0024 | D007, D011, D017 |
| C0010 | D010, D012, D017 | C0025 | D006, D017, D020 |
| C0011 | D003, D007, D010 | C0026 | D003, D006, D016 |
| C0012 | D007, D011, D019 | C0027 | D006, D007, D010 |
| C0013 | D006, D017, D019 | C0028 | D005, D007, D009 |
| C0014 | D006, D016, D017 | C0029 | D012, D013, D020 |
| C0015 | D007, D017, D020 | C0030 | D003, D017, D020 |

3 问题三的建模与求解

1) 问题分析

问题三中有两个目标：最少的购买量和最大的满意度，于是我们建立了双目标规划模型，并将其通过加权组合转化为单目标的混合整数规划模型。

首先会员的满意程度仍采用问题二中的规范化处理方法，得到每个人对每种 DVD 的满意度系数矩阵 c_{ij} ，那么总的满意度 W 和总的购买量分别为

$$W = \sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{20} c_{ij} x_{ij}, \quad Z = \sum_{j=1}^{20} z_j.$$

目标函数和约束条件为

$$\begin{aligned} \max Y &= \varphi W - (1 - \varphi) Z \\ \sum_{j=1}^{20} x_{ij} &= 3\sigma_i, \quad \sum_{i=1}^{100} x_{ij} \leq z_j, \\ \sum_{i=1}^{100} \sigma_i &\geq \lambda M, \quad \text{其中 } \lambda = 95\%; \quad M = 100. \end{aligned}$$

2) 模型建立

经过以上的分析，我们建立了如下的混合整数规划模型：

$$\begin{aligned} \max Y &= \varphi W - (1 - \varphi) Z \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} W = \sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{20} c_{ij} x_{ij}, & i = 1, 2, \dots, 100, \quad j = 1, 2, \dots, 20, \\ Z = \sum_{j=1}^{20} z_j, & i = 1, 2, \dots, 100, \\ \sum_{j=1}^{20} x_{ij} = 3\sigma_i, & i = 1, 2, \dots, 100, \\ \sum_{i=1}^{100} x_{ij} \leq z_j, & j = 1, 2, \dots, 20, \\ \sum_{i=1}^{100} \sigma_i \geq \lambda M, & i = 1, 2, \dots, 100, \\ x_{ij} = \{0, 1\}, & i = 1, 2, \dots, 100, \quad j = 1, 2, \dots, 20, \\ \sigma_i = \{0, 1\}, & i = 1, 2, \dots, 100. \end{cases} \end{aligned}$$

3) 模型求解

利用 lingo 数学软件，我们对该混合整数规划模型进行了求解，得到了网站应决定的各种 DVD 的购买量如表2。

此时部分 DVD 的分配方案如表3。

在问题三中，我们只对权重系数 $\varphi = 0.618$ 时的情况给出了结果，而这个权重系数是可以根据实际情况发生改变的，如果更注重成本则可以选择较小的 φ ，如果更注重会员的感受则可以选择稍大的 φ 。

表 2: 网站购买各种 DVD 的数量表

| DVD种类 | 网 站 定 购DVD数量 | 欢迎程度 | DVD种类 | 网 站 定 购DVD数量 | 欢迎程度 |
|-------|-----------------|-------|-------|-----------------|-------|
| D001 | 16 | 0.056 | D011 | 15 | 0.053 |
| D002 | 10 | 0.035 | D012 | 15 | 0.053 |
| D003 | 16 | 0.056 | D013 | 16 | 0.056 |
| D004 | 15 | 0.053 | D014 | 12 | 0.042 |
| D005 | 10 | 0.035 | D015 | 17 | 0.060 |
| D006 | 18 | 0.063 | D016 | 10 | 0.035 |
| D007 | 15 | 0.053 | D017 | 15 | 0.053 |
| D008 | 17 | 0.060 | D018 | 14 | 0.049 |
| D009 | 19 | 0.067 | D019 | 16 | 0.056 |
| D010 | 12 | 0.042 | D020 | 7 | 0.025 |

表 3: 部分 DVD 的分配表

| 会员名 | C0001 | C0002 | C0003 | C0004 | C0005 | C0006 |
|----------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 获得DVD的编号 | D003 D008 D016 | D001 D012 D015 | D013 D014 D017 | D011 D012 D019 | D013 D015 D019 | D012 D015 D016 |
| 会员名 | ... | C0050 | C0051 | C0052 | C0053 | ... |
| 获得DVD的编号 | ... | D001 D005 D006 | D003 D017 D018 | D001 D004 D015 | D010 D015 D019 | ... |
| 会员名 | C0095 | C0096 | C0097 | C0098 | C0099 | C0100 |
| 获得DVD的编号 | D007 D009 D011 | D009 D017 D019 | D002 D012 D014 | D001 D006 D018 | D002 D013 D014 | D009 D016 D018 |

由于各类 DVD 的受欢迎程度对其购买量具有较强的影响力, 所以各类 DVD 的受欢迎程度的比例图也可以给网站在购买各种 DVD 时提供有用参考数据, 其中各类 DVD 受欢迎程度比例图如图1。

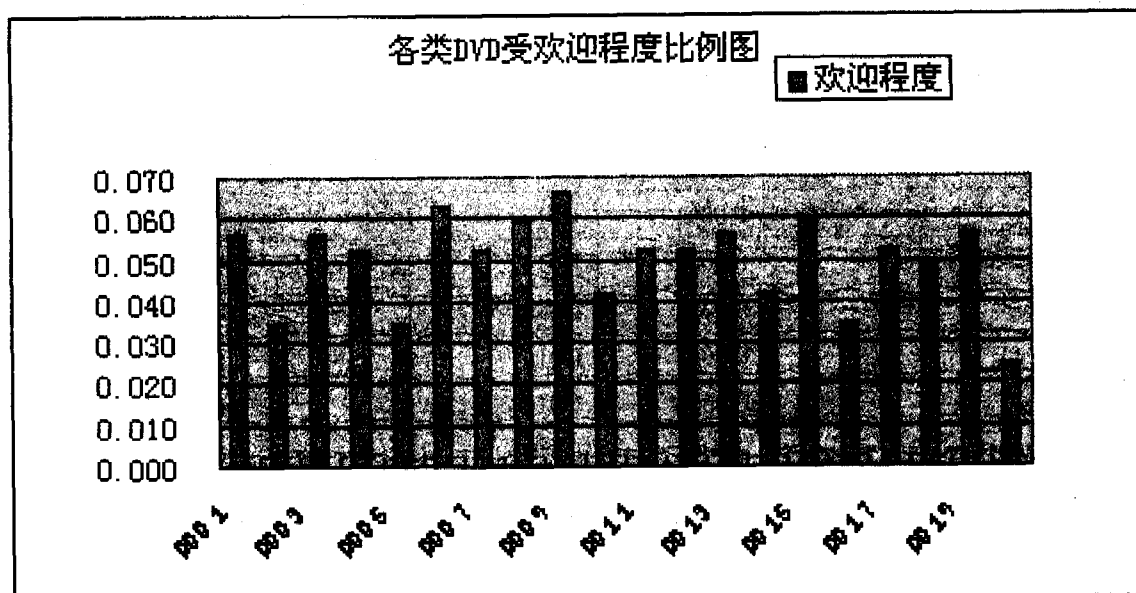


图 1: 各类 DVD 受欢迎程度比例图

参考文献:

- [1] 费培之等. 数学模型实用教程[M]. 成都: 四川大学出版社, 1998年
- [2] 朱德通. 最优化模型与实验[M]. 上海: 同济大学出版社, 2003年
- [3] 卢开澄. 单目标、多目标与整数规划[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999年

DVD On-line Rents

HUANG Mei, LI Zhong, BAI Hai-jun

Advisor: FU Wei

(Emei School, Southwest Jiaotong University Emeishan City 614202)

Abstract: Aimed at the problem of renting DVD on-line, 0-1 planning mathematical model is established. By using Lingo software the problem of assigning DVD has been solved reasonably. Specially, for problem 3, a double-object linear programming model is approached, then processed to the single-object problem by weighting treatment, the better results are obtained.

Keywords: degree of satisfaction; on-line rents