I Geometrische Algorithmen

1 Bewegungsplanung bei unvollständiger Information

1.1 Ausweg aus einem Labyrinth

1.1.1 Pledge-Strategie

Input: polygonales Labyrinth L, Roboter R, Drehwinkel $\varphi \in \mathbb{R}$
Output: Ausweg aus Labyrinth falls möglich, ansonsten Endlosschleife

- While $R \in L$
  - gehe vorwärts, bis $R \notin L$ oder Wandkontakt
  - gehe links der Wand, bis $R \notin L$ oder $\varphi = 0$

1.2 Zum Ziel in unbekannter Umgebung

1.2.1 Wanze (Bug)

Input:

- $P_1, \dots, P_n$ disj. einf. zsh. endl. poly. Gebiete aus $\mathbb{R}^2$
- $\mathbf{s}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^n P_i$
- R Roboter mit Position $\mathbf{r}$

Output:

- While $\mathbf{r} \neq \mathbf{z}$
  - laufe in Richtung $\mathbf{z}$ bis $\mathbf{r} = \mathbf{z}$ oder $\exists i : r \in P_i$
  - If $\mathbf{r} \neq \mathbf{z}$
    - umlaufe P_i und suche ein $\mathbf{q} \in \arg\min_{\mathbf{x} \in P_i} ||\mathbf{x} - \mathbf{z}||_2$
    - gehe zu $\mathbf{q}$

terminiert.
Universales Steuerwort: Führt für alle Startpunkte zum geg. Ziel. (ungültige Befehle werden ignoriert)

1.3 Behälterproblem (bin packing)

Maximale Füllmenge h, verteile Zahlenmenge auf möglichst wenige Behälter. NP-hart.

First fit ·

- $B_1, \dots, B_m \leftarrow \emptyset$
- For $i = 1, \dots, m$
  - Bestimme kleinstes j mit $b_i + \sum_{b \in B_j} b \leq h$
  - Füge b_i zu B_j hinzu

2-kompetitiv
Falls $k_A \leq a + ck_{min}$ für alle Eingaben, heißt A c-kompetitiv.

Türsuche ·

- Wähle Erkundungstiefen $f_i > 0$ für $i \in \mathbb{N}$
- For $i := 1$ to ∞ (stoppe, wenn Tür gefunden)
  - gehe f_i Meter die Wand entlang und zurück
  - wechsle Laufrichtung

Legt $L = 2\sum_{i=0}^n f_i + d$ zurück (oder $^{n+1}$)
$L \in \Theta(n^2) = \Theta(d^2)$
Bestmöglich: 9-kompetetitiv (z.B. für $f_i = 2^i$)

1.4 Sternsuche

Gleich Türsuche, nur mit mehr als zwei Wänden (Halbgeraden).
Bestmöglich: Für $f_i = (\frac{m}{m-1})^i$ ist Sternsuche c-kompetitiv mit $c := 2m(\frac{m}{m-1})^{m-1} + 1 < 2me + 1$

1.5 Suche in Polygonen

Roboter R sucht Weg in polygonalem Gebiet P mit n Ecken von $\mathbf{s}$ nach $\mathbf{z}$.
Weglängen: gefunden: l, kürzest: d
Strategie existiert mit $\frac{l}{d} \in O(n)$
Baum der kürzesten Wege (BkW) (Blätter sind Polygonecken)

---

2 Konvexe Hüllen

2.1 Dualität

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\mathbf{x}} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^d$$

bilden *affinen Raum* A^d.

$$\mathbf{u}^t\mathbf{x} := \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix} \geq 0$$

$\mathbf{u}$ bezeichnet Halbraum und $\mathbf{x}$ einen seiner Punkte
Nur betrachtet mit $(1 \quad 0 \quad \dots \quad 0)^t$ d.h. $u_0 > 0$, normiert $u_0 = 1$.
$\mathbf{u}^*$ ist Halbraum zu $\mathbf{u}$.
$\mathbf{x} \in \mathbf{u}^* \Leftrightarrow \mathbf{u} \in \mathbf{x}^*$ (Dualität)

2.2 Konvexe Mengen

Verbindungsstrecke $\mathbf{x} := \mathbf{a}(1-t) + \mathbf{b}t, \quad t \in [0,1]$ wird genannt $\mathbf{ab}$.
$M \subset A$ ist *konvex* wenn sie zu je zwei ihrer Punkte auch die Verbingungsstrecke enthält.
Konvexe Hülle $[M]$ von M ist Schnitt aller konvexen Obermengen.
Ist $M \subset A$ bilden alle Halbräume, die M enthalten, eine konvexe Menge im Dualraum.
Ist $M^* \subset A^*$ eine Halbraummenge, bilden alle Punkte, die in allen $m^* \in M^*$ enthalten sind, eine konvexe Menge im Primalraum A.

2.3 Konvexe Polyeder P

ist Schnitt endlich vieler Halbräume.
Rand ∂P; Facetten darauf.
Jede Facectte liegt auf Rand eines Halbraums (FHR)
P ist konvexe Hülle seiner Eckenmenge
Ist P ein konvexes Polyeder mit den Ecken $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_e$ und den FHRen $\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_f^*$, hat die Menge $U^* := \{\mathbf{u}^* | \mathbf{u}^* \supset P\} \subset A^*$ die Ecken $\mathbf{w}_1^*, \dots, \mathbf{w}_f^*$ und die FHRe $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_e$. Dual ausgedrückt heißt das, dass die Menge $U := \{\mathbf{u} | \mathbf{u}^* \supset P\} \subset A$ die Ecken $\mathbf{w}_i$ und die FHRe $\mathbf{p}_i^*$ hat.
Polyeder P und $U \subset A$ heißen dual zueinander.

2.4 Euler: Knoten, Kanten, Facetten

v Knoten, e Kanten, f Seiten
Eulers Formel: $v - e + f = 2$

2.5 Datenstruktur für Netze

Für jede Ecke $\mathbf{p}$:

- Koordinaten von $\mathbf{p}$
- Liste von Zeigerpaaren:
  - die ersten Zeiger im Gegenuhrzeigersinn auf alle Nachbarn von $\mathbf{p}$

Sind $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ im GUS geordnete Nachbarn einer Facette und weist der 1. Zeiger eines Paares auf $\mathbf{q}$, zeigt der 2. Zeiger indirekt auf $\mathbf{r}$. Er weist auf das Zeigerpaar von q

2.6 Konvexe Hülle

Input: $P := (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \subset A^3$
Output: $[P]$

1. Verschiebe P sodass Ursprung in P liegt
2. $U_4 \leftarrow \mathbf{p}_1^* \cap \dots \cap \mathbf{p}_4^*$
3. For $i = 5, \dots, n$
   - (falls $U_4 \subset \mathbf{p}_i^*$, markiere $\mathbf{p}_i$ als gelöscht
   - sonst verknüpfe $\mathbf{p}_i$ bidirektional mit einem Knoten von $U_4 \notin \mathbf{p}_i^*$
4. For $i = 5, \dots, n$
   - $U_i \leftarrow U_{i-1} \cap \mathbf{p}_i^*$
   - ...zeug
5. Dualisiere, verschiebe und gib $\bigcap_{\mathbf{u} \in U} \mathbf{u}^* - \mathbf{v}$ aus

---

3 Distanzprobleme

3.1 Voronoi-Gebiet

eines der Punkte $\mathbf{p}_i$ ist
$V_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | \forall j = 1, \dots, n : ||\mathbf{x} - \mathbf{p}_i||_2 \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{p}_j||_2\}$
V_i ist konvex da Schnitt der Halbebenen.
Voroni-Kreis (Punkte des Schnitts von drei Voronoi-Gebieten) ist *leer*.

3.2 Delaunay-Triangulierung

Delaunay-Triangulierung $D(P)$ einer Punktemenge P hat Kantenmenge $\{\mathbf{p}_i\mathbf{p}_j | V_i \cap V_j$ ist Kante des Voronoi-Diagramms $V(P)\}$.
Ist der zu $V(P)$ duale Graph.
Die Gebiete von $D(P)$ sind disjunkte Dreiecke und zerlegen die konvexe Hülle $[P]$

3.2.1 Eigenschaften

1. Umkreise der Dreiecke sind leer
2. *Paraboloid-Eigenschaft:*
   Sei $Z(x, y) = x^2 + y^2$.
   Projiziert man den unteren Teil der konvexen Hülle $[\{\begin{pmatrix} \mathbf{p}_i \\ Z(\mathbf{p}_i) \end{pmatrix} | i = 1, \dots, n\}]$ orthogonal auf die xy-Ebene, erhält man $D(P)$
   - D(P) kann mit *Konvexe Hülle* und mittlerem Aufwand $O(n \log n)$ berechnet Werden
   - Kanten einer Triangulierung von Q sind konvex (Tal) oder konkav (Berg), ersetze sukzessiv in konkave durch konvexe Kanten
3. Winkeleigenschaft: Der kleinste Winkel in jedem Viereck ist größer bei DT als bei jeder anderen Triangulierung
4. jeder Punkt $\mathbf{p}_i$ ist mit nächstem Nachabarn durch Kante in $D(P)$ verbunden $\rightarrow$ nächste Nachbarn aller p_i können in $O(n)$ bestimmt werden
5. minimale Spannbäume von P liegen auf D(P) (findbar mit Kruskal (greedy))
6. Rundweg um minimalen Spannbaum ist 2-kompetitiv zu kürzestem Rundweg.

II Unterteilungsalgorithmen

4 Stationäre Unterteilung für Kurven

todo

---

5 bla

Das Symbol $\gamma(x, y) := \sum \gamma_{ij} x^i y^j$

III Graphen-Algorithmen

6 Flussmaximierung

Flussnetzwerk $F := (G = (V, E), q \in V, s \in V, k : V^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0})$
Graph zusammenhängend (für jeden Knoten ex. Weg von q zu s), $|E| \geq |V| - 1$
Fluss $f : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

(1) $f \leq k$
(2) $\forall x, y \in V : f(x, y) = -f(y, x)$
(3) $\forall x \in V \setminus \{q, s\} : \sum f(x, V) := \sum_{y \in V} f(x, y) = 0$

Residualgraph $G_f := (V, E_f := \{e \in V^2 | f(e) < k(e)\})$
Residualnetz $F_f := (G_f, q, s, k_f := k - f)$

6.1 Methoden

6.1.1 Ford-Fulkerson (naiv)

solange es einen Weg $q \rightsquigarrow s$ in G_f gibt, erhöhe f maximal über diesen Weg.

6.1.2 Edmonds-Karp

=FF, erhöhen immer längs eines kürzesten Pfades in G_f

6.1.3 Präfluss-Pusch

Push(x,y) ·

- $d \leftarrow \min\{ü(x), k_f(x, y)\}$
- $f(x, y) \mathrel{+}= d$
- $ü(x) \mathrel{-}= d$
- $ü(y) \mathrel{+}= d$

Pushbar(x,y) ·

- $x \in V \setminus \{q, s\}$
- und $h(x) - h(y) = 1$
- und $ü(x) > 0$
- und $(x, y) \in E_f$

Lift(x) ·
$h(x) \leftarrow 1 + \min_{(x,y) \in E_f} h(y)$

Liftbar(x) ·

- $x \in V \setminus \{q, s\}$
- $ü(x) > 0$
- $h(x) \leq \min_{(x,y) \in E_f} h(x)$

Präfluss-Push: ·

- for all $x, y \in V$
- $h(x) \leftarrow$ if $x = q$ then $|V|$ else 0
- $f(x, y) \leftarrow$ if $x = q$ then $k(x, y)$ else 0
- solange es eine erlaubte Push oder Lift-Operation gibt, führe beliebige aus

6.1.4 An-Die-Spitze

Leere(x) ·
- while ü$(x) > 0$
  - if $i_x \le Grad(x)$
    - if pushbar$(x, n_x(i_x))$: push$(x, n_x(i_x))$
    - sonst: i_x += 1
  - else
    - Lift(x)
    - $i_x \leftarrow 1$

L ist Liste aller $x \in V \setminus \{q, s\}$ mit x vor y falls pushbar(x,y)
$n_x(i) \quad (1 \le i \le Grad(x))$ sind Nachbarn von x (auch Gegenrichtung)
i_x ist Zähler (alle $n_x(i)$ mit $i \le i_x$ nicht pushbar)

An die Spitze · Initialisiere f und h wie bei *Präfluss-Push*
- $\forall x \in V : i_x \leftarrow 1$
- Generiere L
- $x \leftarrow$ Kopf(L)
- while $x \ne$ NIL
  - $h_{alt} \leftarrow h(x)$
  - Leere(x)
  - Falls $h_{alt} < h(x)$, setze x an Spitze von L
  - $x \leftarrow$ Nachfolger von x in L

---

7 Zuordnungsprobleme

7.1 Paaren in bipartiten Graphen

Paare · Input: Bipartiter Graph $(L \dot\cup R, E)$
- $V \leftarrow L \cup R \cup \{q, s\}$
- $\hat{E} \leftarrow (q, L) \cup \{(x, y) \subset L \times R \mid \langle x, y\rangle \in E\} \cup (R, s)$
- for all $(x, y) \in V^2$
  - $k(x, y) \leftarrow 1$ if $(x, y) \in \hat{E}$ else 0
- f $\leftarrow$ FordFulkerson$((V, \hat{E}), q, s, k)$
- $P \leftarrow \{\langle x, y\rangle \in E \mid f(x, y) = 1\}$

7.2 Paaren in allgemeinen Graphen

Alternierender Weg ist *maximal*, wenn er nicht Teil eines längeren alternierenden Weges ist.
$\rightarrow$ Maximale Paarung kann durch sukzessive Vergrößerung gefunden werden

7.3 Berechnung vergrößender Wege

Vergrößernder Weg · Input: G und P, Output: Vergrößernder Weg für P
- $h(x) \leftarrow 0$ wenn x frei, -1 wenn x gebunden
- Solange kein vergrößernder Pfad gefunden und gibt untersuchte Kante $\langle x, y\rangle$ mit $h(x) \in 2\mathbb{N}_0$
- if $h(y) = -1$
- **unwichtig**

7.4 Maximal gewichtete Paarungen

Berechnung möglich in $O(|V|^3)$ bzw. $O(|V| \cdot |E| \log |V|)$

8 Minimale Schnitte

Sei
- $\bar{G} := (V, \bar{E}), \bar{E} := \{(x, y) | \langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle \in E\}$
- $k : V^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\ge 0}, k(x, y) :=$ if $(\langle x, y\rangle \in E)$ then $\gamma(\langle x, y\rangle)$ else 0
- $x, z \in V$ beliebig

Berechne maximalen Fluss
$\rightarrow A := \{y \mid \exists$ Pfad $x \rightsquigarrow y$ in $\bar{G}_f\}$ und $B := V \setminus A$ bilden minimalen xz-Schnitt $(x \in A, z \in B)$
Gewicht des Schnitts = Wert des Flusses
kleinster xz-Schnitt in G lässt sich mit Flussmaximierung in $O(|V|^4)$ berechnen
(es existieren Algorithmen in $O(|V|^2 \log |V| + |V||E|)$)

8.1 Zufällige Kontraktion

ggf. todo
Monte-Carlo-Algorithmus = stochastischer Algorithmus, kann falsche Ergebnisse Liefern
Las-Vegas-Algorithmus = stoch. Algo., immer richtig

8.2 Rekursive Kontraktion

IV Optimierungsalgorithmen

9 Kleinste Kugeln

Für jede Punktmenge P ist die kleinste Kugel $K(P) \supset P$ eindeutig.

9.1 Algorithmus von Welzl

$K(P, R)$ ist Kugel die P enthält und R auf der Oberfläche hat

Welzl · Input: $P, R \subset \mathbb{R}^d$, $K(P, R)$ exist., P,R endlich
- if $P = \emptyset$ or $|R| = d + 1$
  - $C \leftarrow K(R)$
- else wähle $\mathbf{p} \in P$ zufällig
  - C $\leftarrow$ Welzl$(P \setminus \{\mathbf{p}\}, R)$
  - if $\mathbf{p} \notin C$
    - $C \leftarrow$ Welzl$(P \setminus \{\mathbf{p}\}, R \cup \{\mathbf{p}\})$
- Gib C aus

---

10 Lineare Programmierung

10.1 Lineare Programme

LP ist

$$z(\mathbf{x}) := \mathbf{zx} = \max!$$

$$A\mathbf{x} \ge \mathbf{a},$$

wobei $\mathbf{z}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, A \in \mathbb{R}^{n \times d}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, und $\mathbf{zx} := \mathbf{z}^t\mathbf{x}$
d ist die Dimension des linearen Programms.
Die Ungleichungen $A\mathbf{x} \ge \mathbf{a}$ repräsentieren den Schnitt S von n Halbräumen, der *Simplex* genannt wird.
Die Punkte $\mathbf{x} \in S$ heißen *zulässig.*
Die Ecken von S liegen je auf d Hyperebenen (d Gleichungen des Gleichungssystems).

- Simplexalgorithmus: Iterativ Ecken entlang gehen, bis z maximal.

10.2 Flussmaximierung als LP

maximiere Summe der ausgehenden Flüsse aus der Quelle.
Gleichungen zur Flusserhaltung (je eingehende Kanten - ausgehende Kanten = 0 ($\ge$ und $\le$))
Gleichungen zur Kapazitätsbeschränkung (Fluss $\ge$ 0 und (Kapazität - Fluss) $\ge$ 0)
$f(a, b) = -f(b, a)$

10.3 Kürzester Weg als LP

Suche Weg $1 \rightsquigarrow 2$

$$\sum_{(i,j) \in E} x_{ij}\gamma_{ij} = \min!$$

$$x_{ij} \ge 0, (i, j) \in E$$

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ -1 & i = 2 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

(Ausgehende Kanten = Eingehende Kanten außer für $i \ne 1, 2$)
negative Kreise $\Rightarrow$ keine endliche Lösung. Erzwingbar durch $x_{ij} \le 1, (i, j) \in E$ (?)

10.4 *ggf. todo*

10.5 Simplexalgorithmus

$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

wobei $n = d + 1$ und $x_n = 1$
Hyperebenen $H_i : y_i(\mathbf{x}) = 0$
Gegeben: $A = [a_{ij}]_{i,j=1,1}^{m,n}$

$$\begin{array}{c|ccccc} & & x_j & & x_s & \\ \hline & & \vdots & & \vdots & \\ y_i & \dots & a_{ij} & \dots & a_{is} & \dots \\ & & \vdots & & \vdots & \\ y_r & \dots & a_{rj} & \dots & a_{rs} & \dots \\ & & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

Gesucht: $B = [b_{ij}]_{i,j=1,1}^{m,n}$
r=Pivotzeile, s=Pivotspalte

Austausch ·
- $b_{rs} \leftarrow \frac{1}{a_{rs}}$
- $b_{rj} \leftarrow -\frac{a_{rj}}{a_{rs}}$ (Pivotzeile, $j \ne s$)
- $b_{is} \leftarrow \frac{a_{is}}{a_{rs}}$ (Pivotspalte, $i \ne r$)
- $b_{ij} \leftarrow a_{ij} - \frac{a_{is}a_{rj}}{a_{rs}}$ $(i \ne r, j \ne s)$

10.6 Normalform

Jedes lin. Programm kann auf die Form

$$\mathbf{zx} = \max!$$

$$A\mathbf{x} \ge 0$$

mit $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_d\ 1]^t$ kann auf die Form

$$[\mathbf{c}^t c]\mathbf{y} = \max!$$

$$\mathbf{y} \ge 0$$

$$[B\mathbf{b}]\mathbf{y} \ge 0$$

mit $\mathbf{y} := [y_1 \dots y_d\ 1]^t$ gebracht werden.
Notation:

$$\begin{array}{r|cc|l} & x_{0\dots d} & 1 & \\ \hline y_{d+1} = & & & \\ \vdots & B & \mathbf{b} & \ge 0 \\ y_m = & & & \\ \hline z = & \mathbf{c}^t & c & = \max! \\ \hline \end{array}$$

$\mathbf{b} \ge 0$, sonst Simplex leer.

10.7 Simplexalgorithmus

Simplex · Input: $\bar{A}$ Normalformmatrix eines lin. Progr. $\bar{A} := \begin{bmatrix} A & \mathbf{a} \\ \mathbf{c}^t & c \end{bmatrix}$
- Solange ein $c_s > 0$
  - Falls alle $a_{is} \ge 0$
    - gib $c \leftarrow \infty$ aus
    - Ende
  - sonst
    - bestimme r so, dass

$$\frac{a_r}{a_{rs}} = \max_{a_{is} < 0} \frac{a_i}{a_{is}}$$

$$\bar{A} \leftarrow \text{Austausch}(\bar{A}, r, s)$$

- Gib $\bar{A}$ aus

Die Lösung ist dann, dass alle y_i die oben an der Tabelle stehen = 0 sind.

Util
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

Laufzeiten

Kapitel	Name	Laufzeit
1.1	Pledge	
1.2	Wanze (Bug)	
2.6 Zielsuche	Konvexe Hülle	erw: $O(n \log n)$, max: $O(n^2)$
6 Flüsse	Ford-Fulkerson	$O(\|E\| * W)$ (k Wert eines max. Flusses)
6 Flüsse	Edmonds-Karp	$O(\|E\|^2 * \|V\|)$
6 Flüsse	Präfluss-Push	$O(\|V\|^2 * \|E\|)$
6 Flüsse	An-Die-Spitze	$O(\|V\|^3)$
7	Paare	$O(\|E\| \cdot min\{\|L\|, \|R\|\})$
7	Vergrößernder Weg	$O(\|V\| \cdot \|E\|)$
8.3	Min Schnitt	$O(\|V\|^2 \log \|V\|)$ richtig mit $P \in \Theta(1/\log \|V\|)$
9	Welzl	mittl: $O(n)$
10	Simplex	erw: $O(n^2 d)$, max: $\Omega(n^{d/2})$
10	Ellipsoid	polyn.; in praxis langsamer als Simplex
10	Innere Punkte	polyn.; in praxis fast so gut wie Simplex
10.5	Seidel	$O(d^3 d! + dnd!)$