Kinematik mobiler Roboter

- Radbetriebene Roboter
- Kinematik:
  Roboter-Pose, Trajektorien und Momentanpol
- Zweiradfahrzeug mit Differentialantrieb
- Ackermann-Antrieb
- Mecanum-Antrieb
- Kinematische Grundfertigkeiten

Radbetriebene Roboter

- Weit verbreitet
- Robust und vergleichsweise einfach zu steuern (im Vergleich zu Lauf-Robotern)
- Statische Stabilität einfach zu erreichen (durch wenigstens 3 Räder)
- Wichtige Antriebssysteme:
  - Differential-Antrieb (2 Antriebsräder mit Stützrad; Indoor-Anwendungen)
  - Ackermann-Antrieb (Automobile, autonomes Fahren)
  - Mecanum-Antrieb (omni-direktionaler Antrieb, Transportaufgaben im industriellem Umfeld)

Differential-Antrieb; Pioneer 3DX

Ackermann-Antrieb; Modellauto

Mecanum-Antrieb; Kuka YouBot

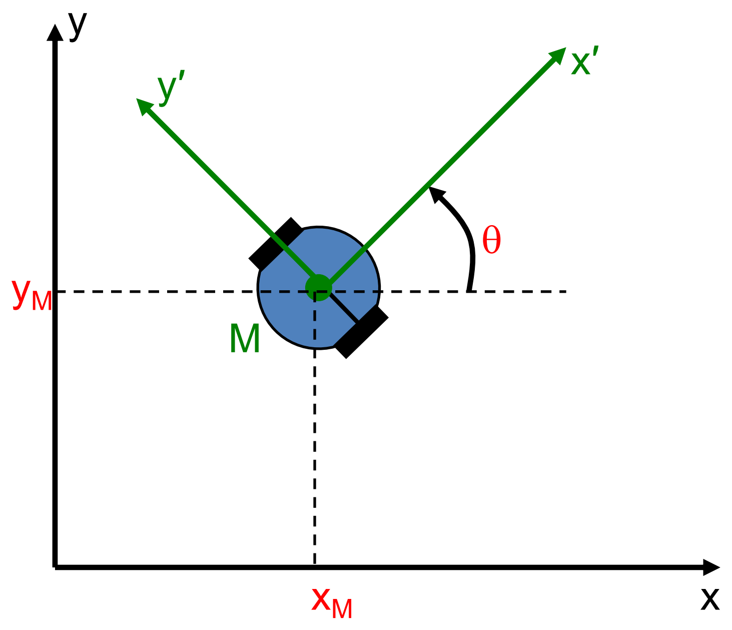
Koordinatensysteme und Roboterpose

- Mit dem Roboter ist ein lokales Koordinatensytem verbunden, wobei der Ursprung üblicherweise in der Mitte M der Antriebsachse liegt und die x-Achse in Richtung des Roboterfrontteils zeigt.

- Die Pose p des Roboters wird festgelegt durch die Koordinaten von M im globalen Koordinatensystem und durch den Winkel θ zwischen der lokalen x-Achse und der globalen x-Achse.

$$p = (x_M, y_M, \theta)^T$$

- Die Position des Roboters ist dann die Pose ohne Orientierung θ.



Koordinatentransformation

- Punkt P im lokalen Koordinatensystem L

  $p^L = (x_L, y_L)^T$

- Punkt P im globalen Koordinatensystem O

  $p^G = (x_G, y_G)^T$

- Transformation von p^L nach p^G mit $m = (x_M, y_M)^T$:

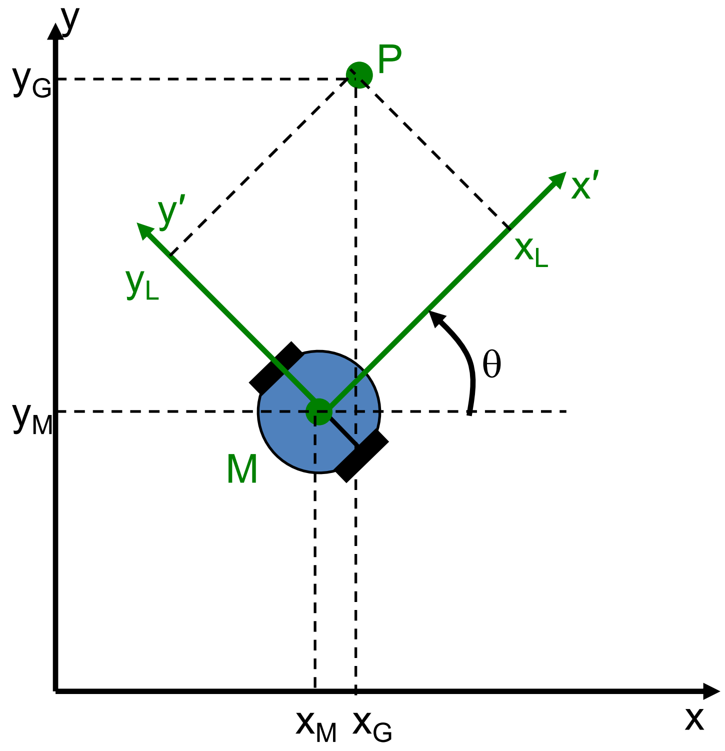
  $p^G = \mathbf{R}(\theta)p^L + m$

- Dabei ist $\mathbf{R}(\theta)$ die sogenannte Rotationsmatrix:

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- Transformation von p^G nach p^L :

  $p^L = \mathbf{R}(\theta)^{-1}(p^G-m) = \mathbf{R}(-\theta)(p^G-m)$



Polar- und kartesische Koordinaten

- Polarkoordinaten von Punkt P:

  d, α

- Kartesische Koordinaten von Punkt P:

  x_P, y_P

- Umrechnung von Polar- in kartesische Koordinaten:

  $x_P = d^*\cos(\alpha)$

  $y_P = d^*\sin(\alpha)$

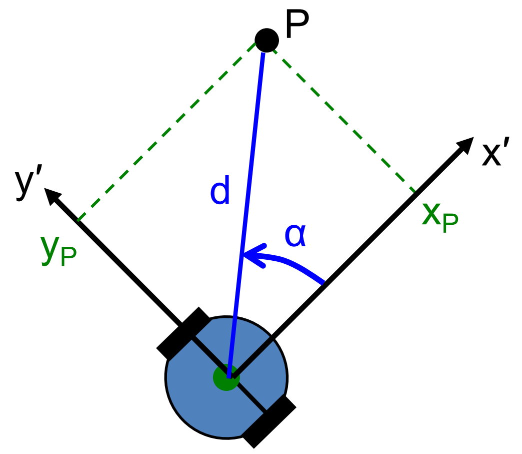
- Umrechnung von kartesische in Polarkoordinaten:

  $\alpha = \mathrm{atan2}(y_P, x_P)$

  $d = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$

- atan2(y,x) berechnet (im Gegensatz zu atan(y/x)) Winkel für den Quadranten, in dem P liegt.
  Üblich:

  $\mathrm{atan2}(y,x) \in [-\pi, +\pi]$



Einschub: Orientierung

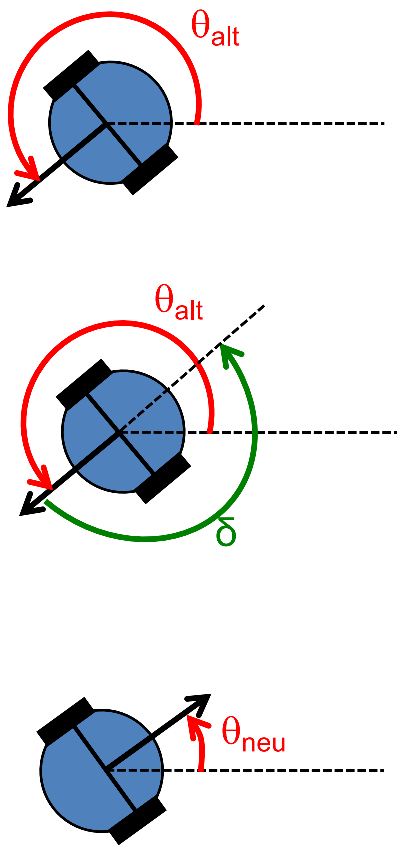
- Die Orientierung eines Roboters wird durch einen Winkel θ aus dem Intervall [0,2π) definiert.
- Ändert sich die Orientierung um einen Winkel δ, so muss immer modolo 2π gerechnet werden.
- Beispiel:

$$\theta_{alt} = 1.25\pi$$

$$\delta = \pi$$

$$\theta_{neu} = \theta_{alt} + \delta \mod 2\pi$$

$$= 0.25\pi$$



Einschub: Winkeldifferenz

- Die Differenz $diff(\theta_1,\theta_2)$ zwischen zwei Winkel θ_1 und θ_2 wird so festgelegt, dass $diff(\theta_1,\theta_2)$ im Intervall $[-\pi,+\pi)$ liegt.

- Formel (für Bogenmaß):

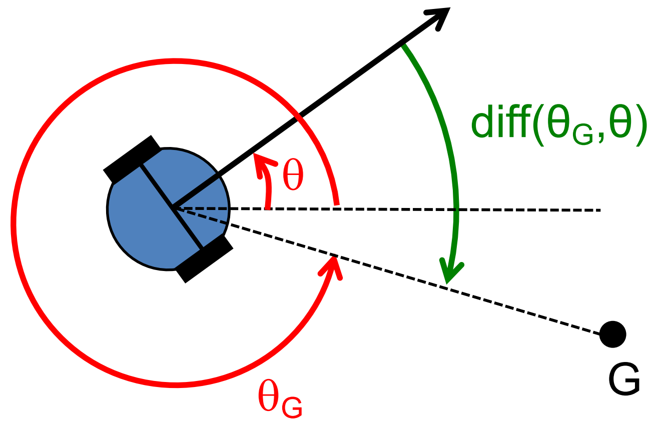
  $$diff(\theta_1,\theta_2) = (\theta_1 - \theta_2 + \pi) \bmod 2\pi - \pi$$

- Beispiel (in Grad gerechnet):

  Orientierung des Zielpunkts G:
  $\theta_G = 350°$

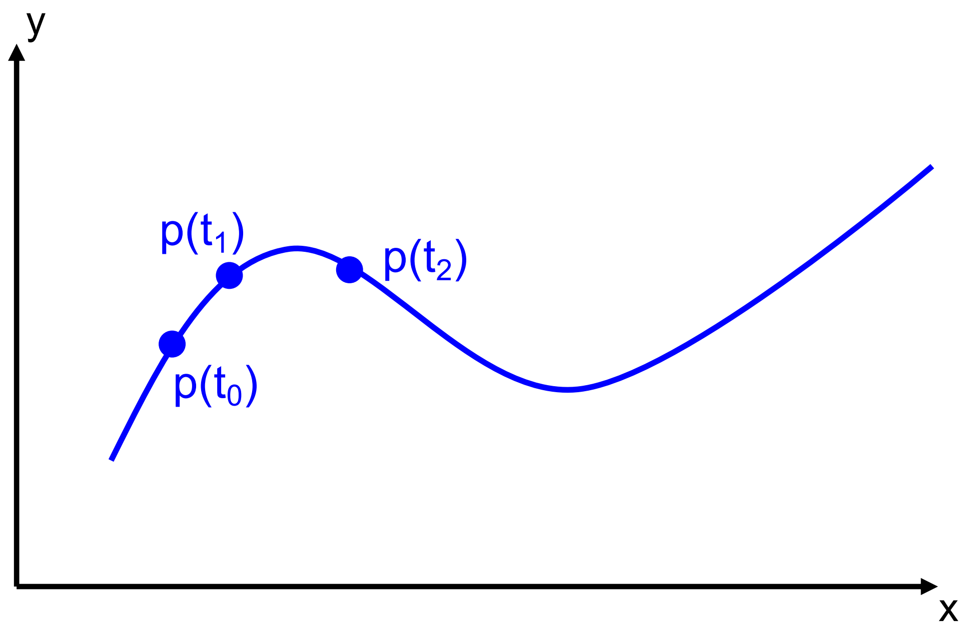
  Roboterorientierung: $\theta = 20°$

  Winkeldifferenz $diff(\theta_G,\theta) = -30°$



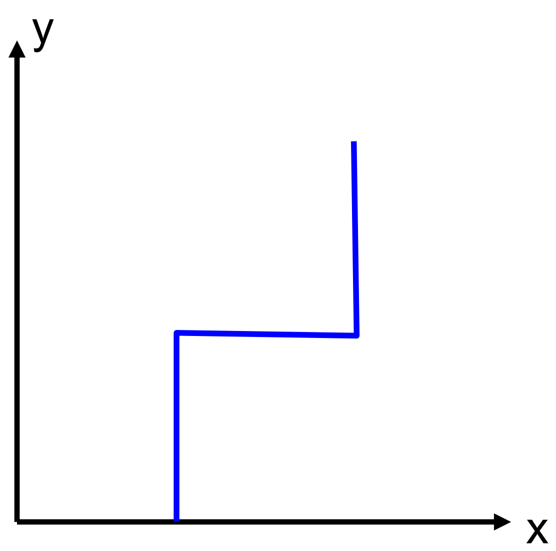
Trajektorie und Pfad

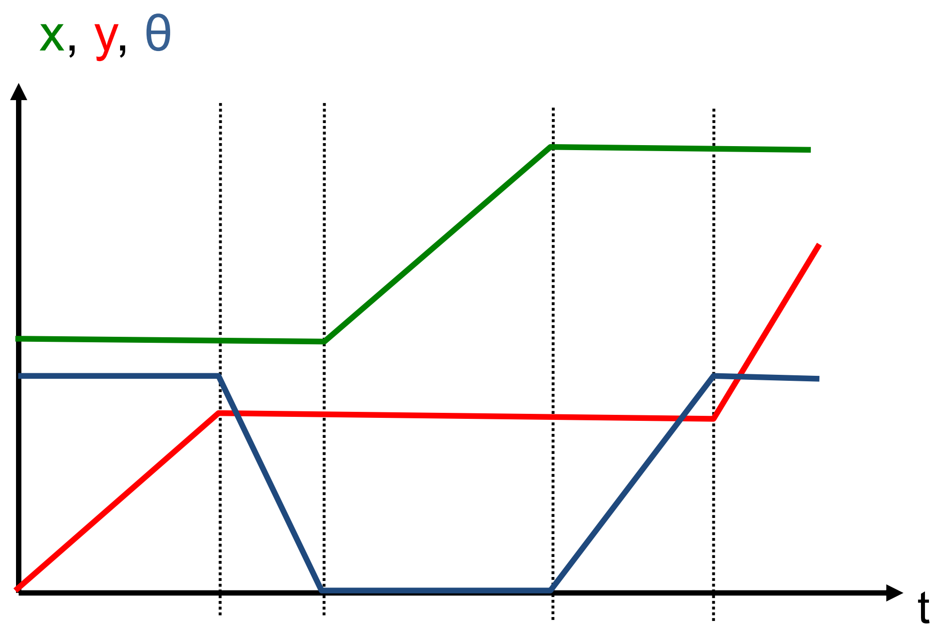
- Eine Trajektorie ist eine Kurve in der Ebene (Raum) parameterisiert über die Zeit.
- Die einzelnen Punkte der Kurve stellen Positionen zu bestimmten Zeitpunkten dar.
- Eine Trajektorie ohne Zeitinformationen wird auch Pfad genannt.



Trajektorie und Posen

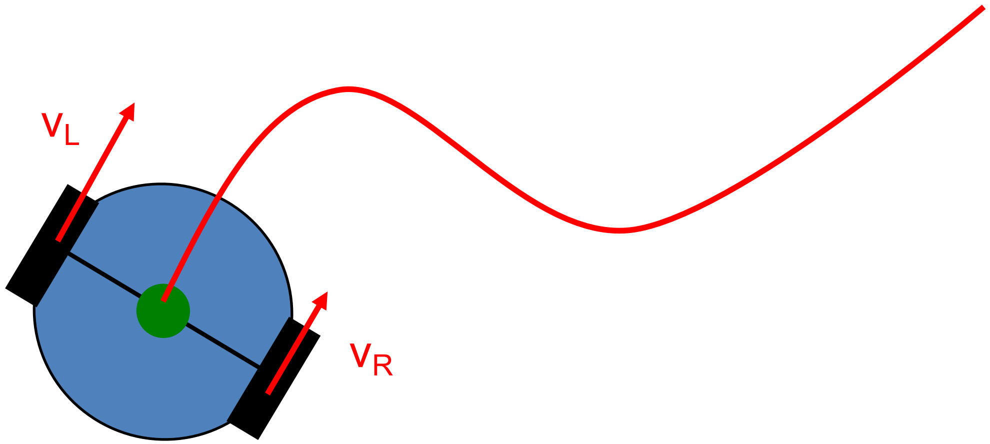
- Manchmal ist auch der zeitliche Verlauf von Posen (Position und Orientierung) gewünscht.
- Bei einer glatten (Positions)Trajektorie kann implizit die Orientierung als Tangente an den jeweiligen Punkten gewählt werden (siehe vorhergehende Folie).
- Bei einer nicht-glatten Trajektorie kann der Verlauf der Orientierung separat dargestellt werden (siehe unten).





Kinematik

- Kinematik = Lehre von den Bewegungen
  (keine Berücksichtigung von Kräften und Drehmomenten)
- In Vergleich dazu berücksichtigt die Kinetik Kräfte und Drehmomente.
- Grundlegende Fragestellung in der Roboterkinematik:
  Zusammenhang zwischen Einstellung der beweglichen Teile des Roboters (Räder, Drehgelenke) und Pose des Roboters.

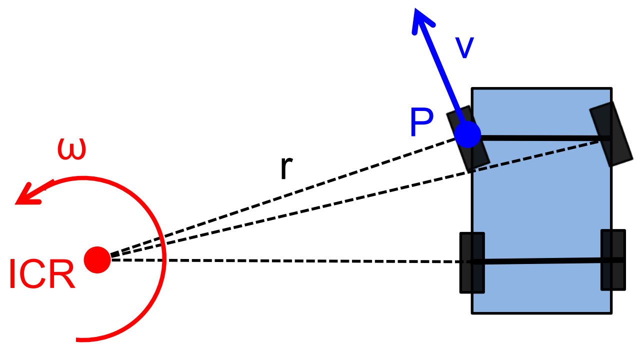


Kinematisches Gesetz: Kreisbewegung um Momentanpol

- Momentanpol
  Die Bewegung eines starren Körpers in der Ebene lässt sich in jedem Zeitpunkt als reine Drehbewegung um einen momentanen Drehpunkt auffassen (ICR = instantaneous center of rotation, Momentanpol)
- Rotiert der Körper mit der Winkelgeschwindigkeit ω um den ICR auf einem Kreis mit Radius r, dann gilt für die Geschwindigkeit v in einem Punkt P:

$$\omega = \frac{v}{r}$$

- Der Geschwindigkeitsvektor v steht dabei senkrecht auf dem Radius r.
- Der Radius r kann unendlich gross werden.
  Dann wird die Winkelgeschwindigkeit ω = 0 (Geradeausfahrt).

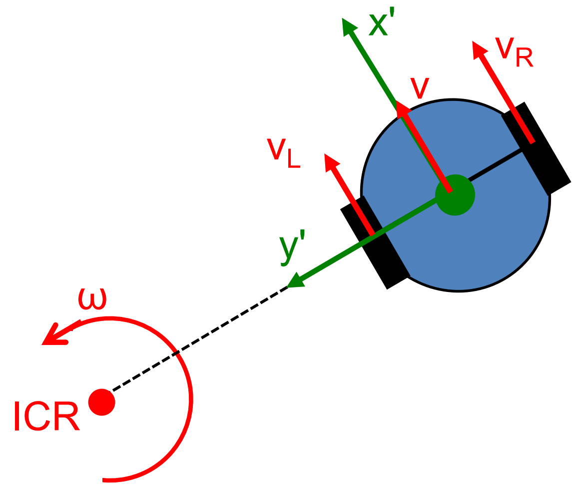


Kinematik mobiler Roboter

- Radbetriebene Roboter
- Kinematik:
  Roboter-Pose, Trajektorien und Momentanpol
- Zweiradfahrzeug mit Differentialantrieb
- Ackermann-Antrieb
- Mecanum-Antrieb
- Kinematische Grundfertigkeiten

Differentialantrieb (1)

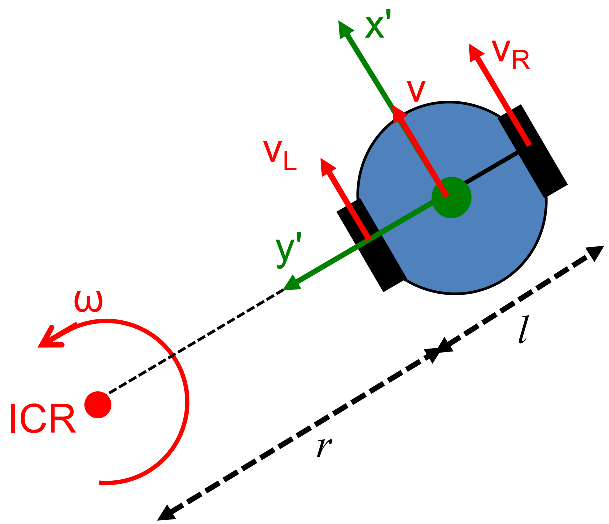
- Kinematisches Modell:
  Roboter wird von zwei unabhängigen Rädern angetrieben.
  Zusätzlich ist ein Stützrad angebracht.
- Geschwindigkeit des linken Rads v_L und des rechten Rads v_R werden eingestellt. Steuerbefehl $u(t) = (v_L, v_R)$
- Nach dem kinematischen Grundgesetz bewegt sich der Roboter um ICR mit Winkelgeschwindigkeit ω und Geschwindigkeit v in lokaler x-Richtung.



Differentialantrieb (2)

- Es gelten folgende kinematischen Zusammenhänge:

$$v_L = \omega r$$
$$v = \omega (r + l/2)$$
$$v_R = \omega (r + l)$$

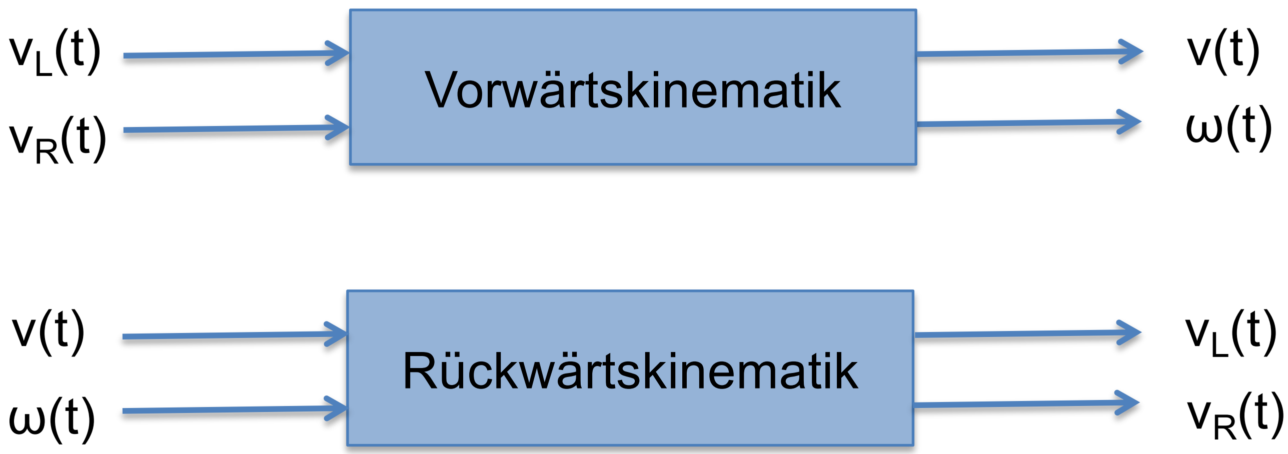


- Daraus ergibt sich:

$$\boxed{\begin{aligned} v &= \frac{v_R + v_L}{2} \\ \omega &= \frac{v_R - v_L}{l} \end{aligned}}$$

- Also lassen sich v und ω unmittelbar aus v_L, v_R und der Achslänge l ermitteln.
- Ebenso einfach lässt sich umgekehrt v_L und v_R aus v und ω bestimmen.

Vorwärts- und Rückwärtskinematik



Anmerkungen:

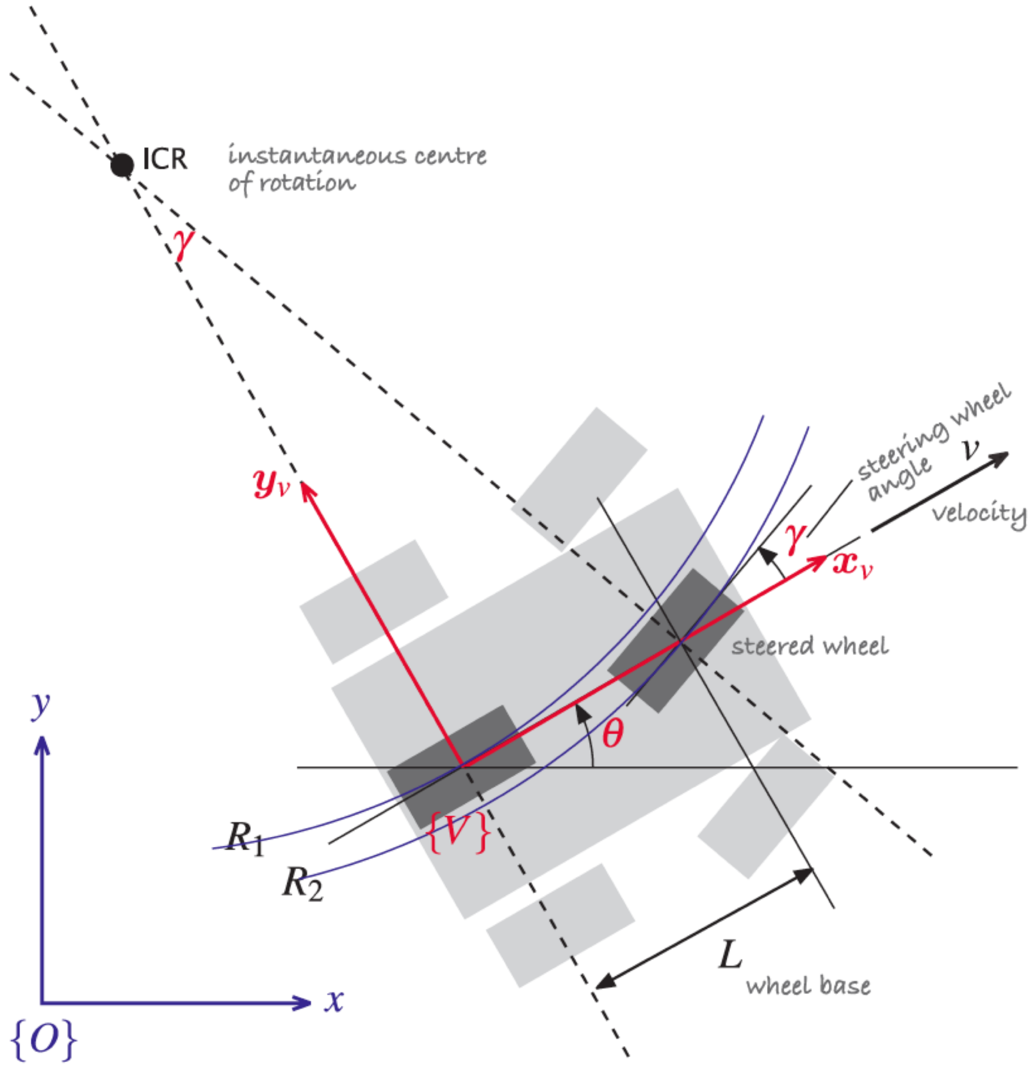
- Die hier dargestellten Kinematiken sind einfache lineare Zusammenhänge (s. Seite 3-14)
- Wesentlicher komplizierter ist der Zusammenhang zwischen $v(t)$ und $\omega(t)$ und der Pose oder Trajektorie des Roboters.
- Die Berechnung der Pose oder Trajektorie aufgrund von $v(t)$ und $\omega(t)$ wird im Abschnitt Lokalisierung – Koppelnavigation behandelt.
- Für eine gewünschte Pose oder Trajektorie eine Folge von Steuerbefehlen $v(t)$ und $\omega(t)$ zu berechnen, wird im Abschnitt Pfadplanung behandelt.

Ackermann-Antrieb (1)

- $v(t)$ = Geschwindigkeit der Antriebsräder
- $\gamma(t)$ = Lenkwinkel

Ackermann-Antrieb (2)

- Mit dem Automobil ist ein lokales Koordinatensystem {V} (Vehicle) fixiert.
- Die Steuerung des Fahrzeugs geschieht durch den Lenkwinkel γ und die Geschwindigkeit v der Hinterachse in Richtung der lokalen x-Achse.
- Das Fahrzeug dreht sich um den ICR.
- Die 4 Räder bewegen sich auf unterschiedlichen Radien. Darüberhinaus muss bei der dargestellten Linkskurve der Lenkwinkel vom linkem Rad größer als vom rechten Rad sein. Das wird durch die Ackermannsteuerung gewährleistet.
- Zweckmäßigerweise wird das Automobil durch ein Fahrradmodell approximiert.



aus [Corke 2011]

Ackermann-Antrieb (3)

- Es gelten folgende kinematische Beziehungen:

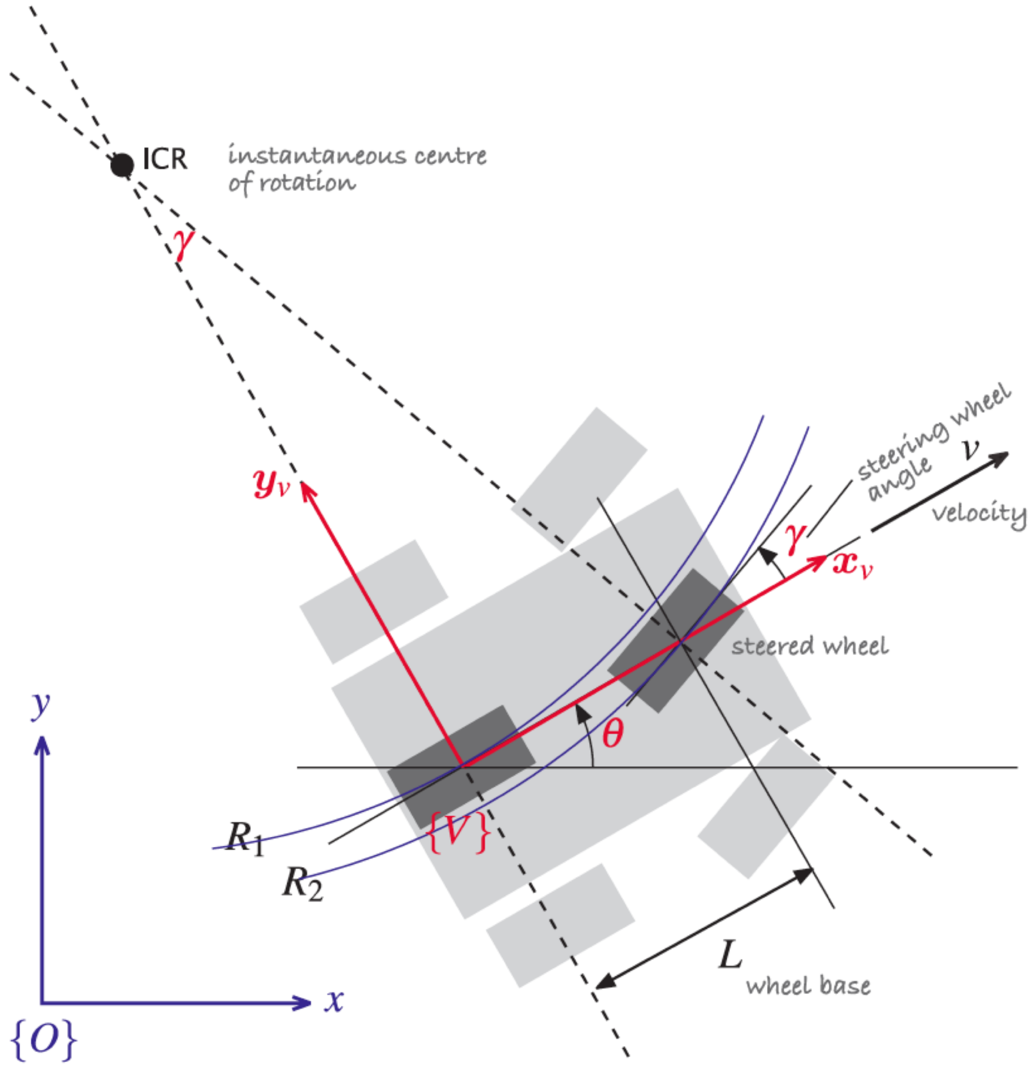
$$\tan\gamma = \frac{L}{R_1}$$

$$v = \omega R_1$$

- Daraus ergibt sich:

$$\boxed{\omega = \frac{v}{L}\tan\gamma}$$

- Also lässt sich aus dem Lenkwinkel γ und der Geschwindigkeit v der Hinterachse die Winkelgeschwindigkeit ω direkt ermitteln (Vorwärtskinematik).
- Rückwärtskinematik durch Auflösung nach γ.



aus [Corke 2011]

Mecanum-Antrieb

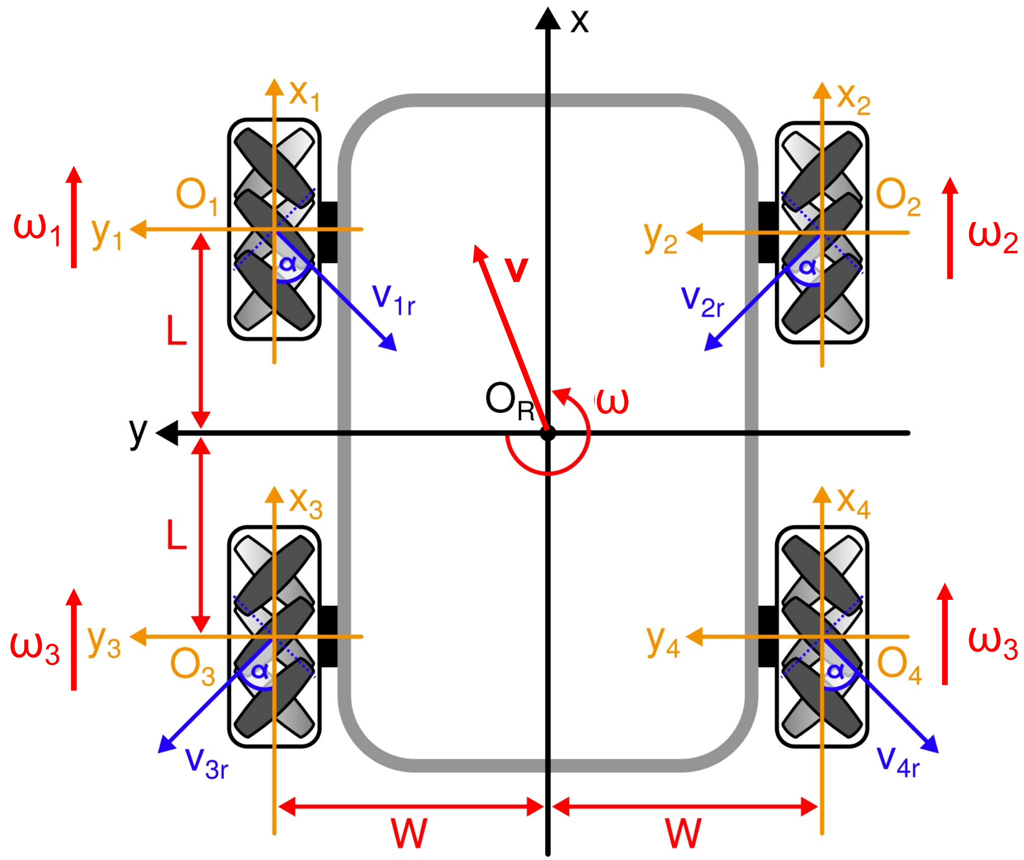
- Wurde 1973 von Bengt Ilon bei der schwedischen Firma Mecanum erfunden.
- Antrieb gestattet Drehbewegung und Translations-Bewegung in allen Richtungen: omnidirektional
- Dazu werden (wenigstens) 4 Räder (fast) unabhängig voneinander bewegt.

Kuka YouBot

Kuka FTS in der Airbus-Produktion

Mecanum-Antrieb – schematischer Aufbau

- x-y-KS im Zentrum des Roboters.
- Roboter bewegt sich mit Geschwindigkeit $\mathbf{v} = (v_x, v_y)^T$ (in beliebiger Richtung!) und Winkelgeschwindigkeit ω.
- Die 4 Räder mit Radius R sind mit dem Winkel α = 45° ausgerichtet.
- Räder haben eine X-Anordnung (von oben gesehen).
- Die Räder können mit unabhängigen Winkelgeschwindigkeiten gedreht werden: ω_1, ω_2, ω_3, ω_4

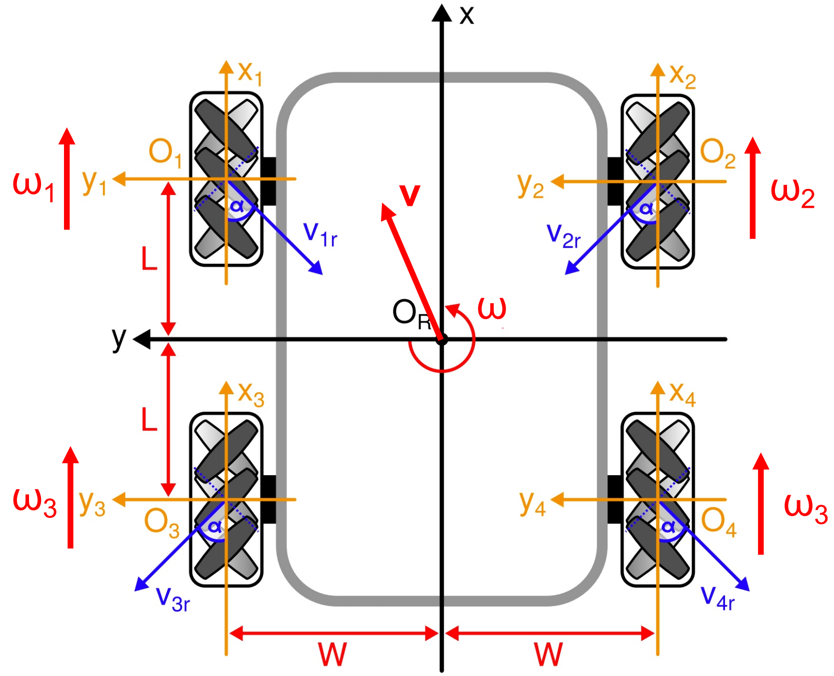


Roboter von oben gesehen.
[aus Woltjen, Bachelorarbeit HTWG, 2017]

Rückwärtskinematik für Mecanum-Antrieb

- Durch kinematische Betrachtungen an den Radmittelpunkten O_i ergibt sich ein einfacher linearer Zusammenhang:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -G \\ 1 & 1 & G \\ 1 & 1 & -G \\ 1 & -1 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{pmatrix}$$

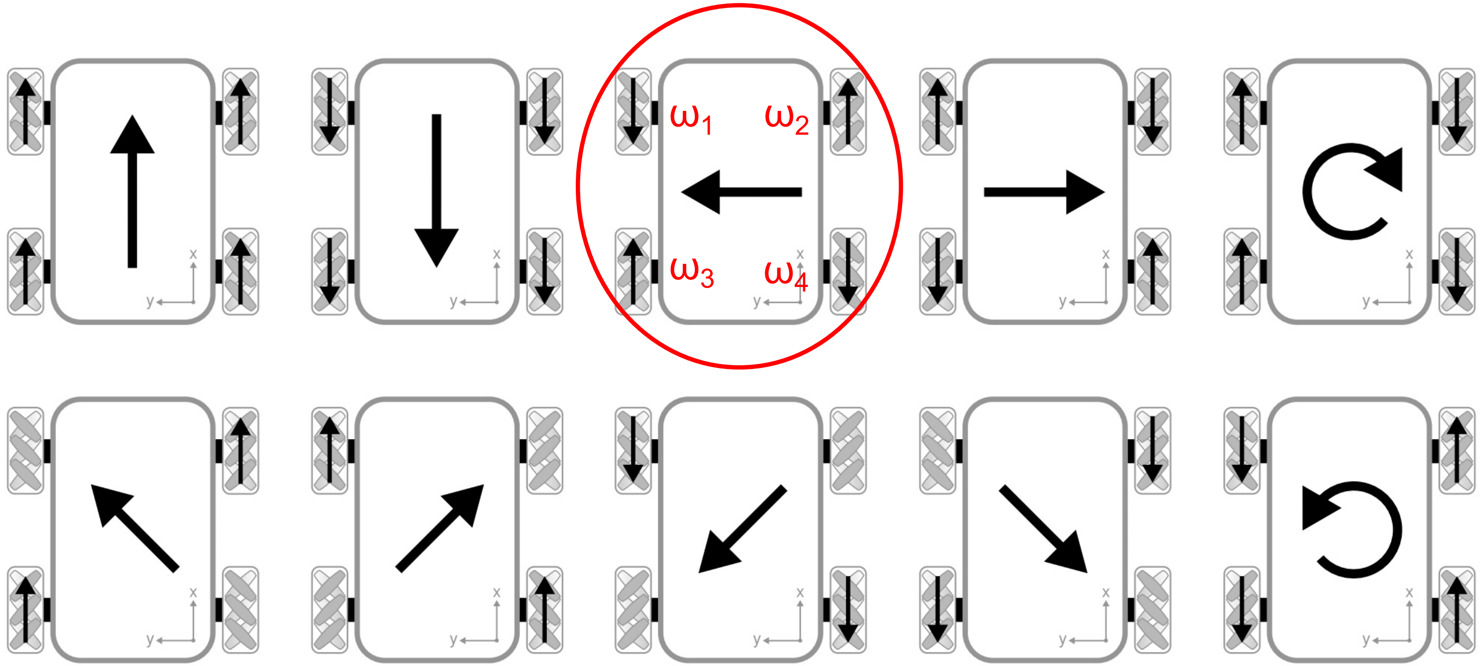


R = Radradius

G = W+L

Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$

Rückwärts-Kinematik an Beispielen



Ansicht von oben; [aus Woltjen, Bachelorarbeit HTWG, 2017]

- Beispielsweise ergibt sich für die umkreiste Konstellation mit $v_x = 0$, $v_y = 1$ und $\omega = 0$ und der Formel für Rückwärtskinematik:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -G \\ 1 & 1 & G \\ 1 & 1 & -G \\ 1 & -1 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vorwärtskinematik für Mecanum-Antrieb

- Auflösung der Gleichung von Seite 3-21 nach Geschwindigkeit v_x, v_y und Winkelgeschwindigkeit ω führt zu einem überbestimmten Gleichungssystem.
- Durch eine Least-Square-Approximation erhält man:

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{pmatrix} = \frac{R}{4G} \begin{pmatrix} G & G & G & G \\ -G & G & G & -G \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{pmatrix}$$

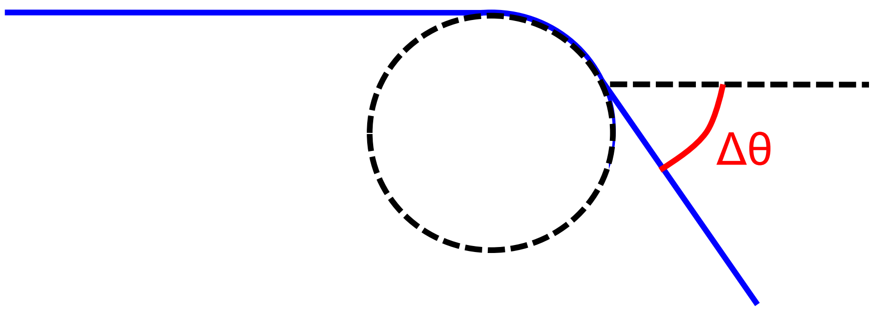
Kinematik mobiler Roboter

- Radbetriebene Roboter
- Kinematik:
  Roboter-Pose, Trajektorien und Momentanpol
- Zweiradfahrzeug mit Differentialantrieb
- Ackermann-Antrieb
- Mecanum-Antrieb
- Kinematische Grundfertigkeiten

Kinematische Grundfertigkeiten

- Richtungsänderung
- Fahrspurwechsel
- Auf Punkt zufahren
- Linie verfolgen und PID-Regler
- Bahn verfolgen.

Richtungsänderung



- Gewünschte Richtungänderung $\Delta\theta$.
- Setze $\omega(t) = \omega_0$ über eine Zeitperiode von

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega_0}$$

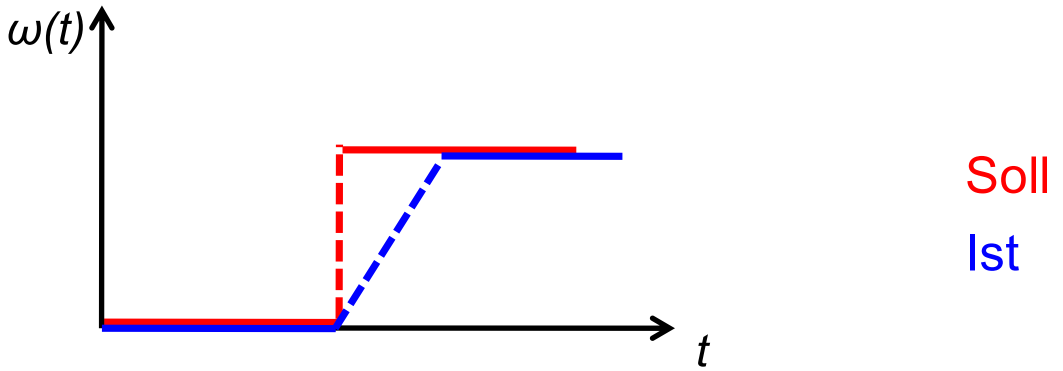
- Gefahrener Kurvenradius r bei einer Geschwindigkeit $v(t) = v_0$ ist dabei

$$r = \frac{v_0}{\omega_0}$$

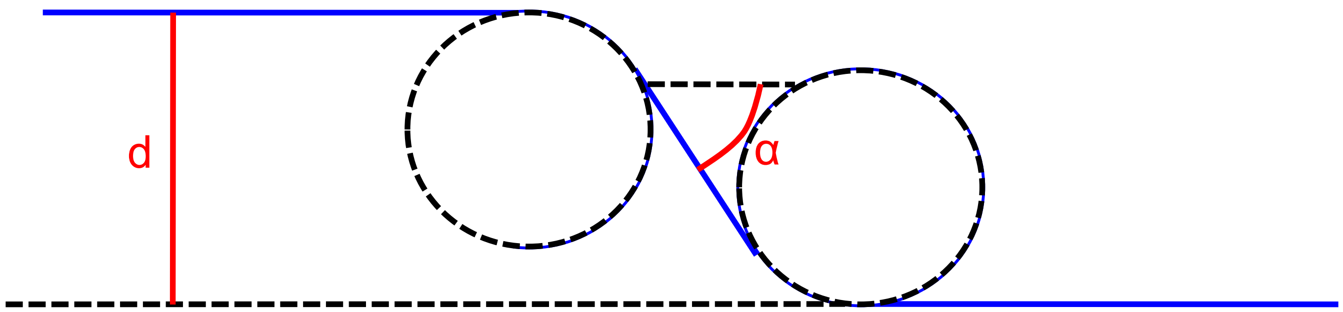
- Beachte: bei einer Rechtskurve (negative Winkeländerung) ist die Winkelgeschwindigkeit negativ. Entsprechend ist bei einer Linkskurve die Winkelgeschwindigkeit positiv.

Bemerkung

- Bei einem realen Roboter stellt sich die gewünschte Winkelgeschwindigkeit nicht sofort ein, sondern erst mit einer gewissen Verzögerung, die durch die maximal mögliche Winkelbeschleunigung bestimmt ist.
- Analoges gilt für die Geschwindigkeit.



Spurwechsel



- Führe zwei entgegengesetzte Richtungsänderungen mit gleichem Betrag durch.
- Die Schräge des Spurwechsels α und die Spurbreite d lassen sich aus den gewählten Geschwindigkeiten und Zeitdauer berechnen

Auf Punkt zufahren (1)

- Bewege Roboter
  auf Zielpunkt (x*,y*)

- Wähle Geschwindigkeit:

$$v = \min(v_{max}, K_P\sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2}$$

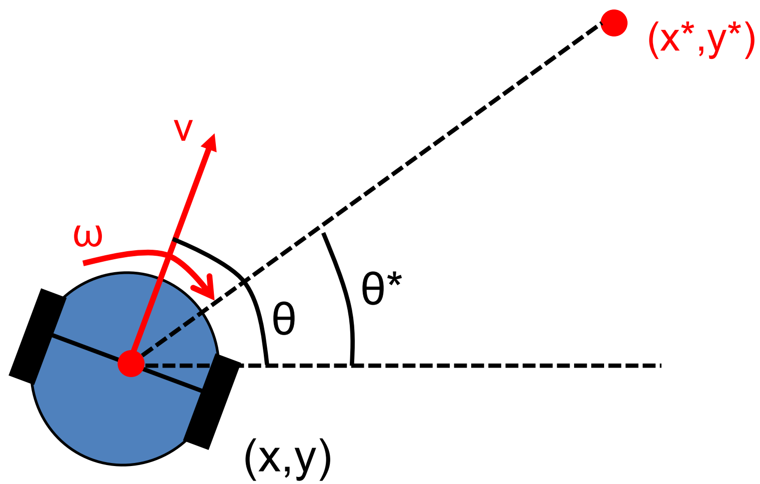
- Zielrichtung:

$$\theta^* = \mathrm{atan2}(y^* - y, x^* - x)$$

- Winkelgeschwindigkeit:

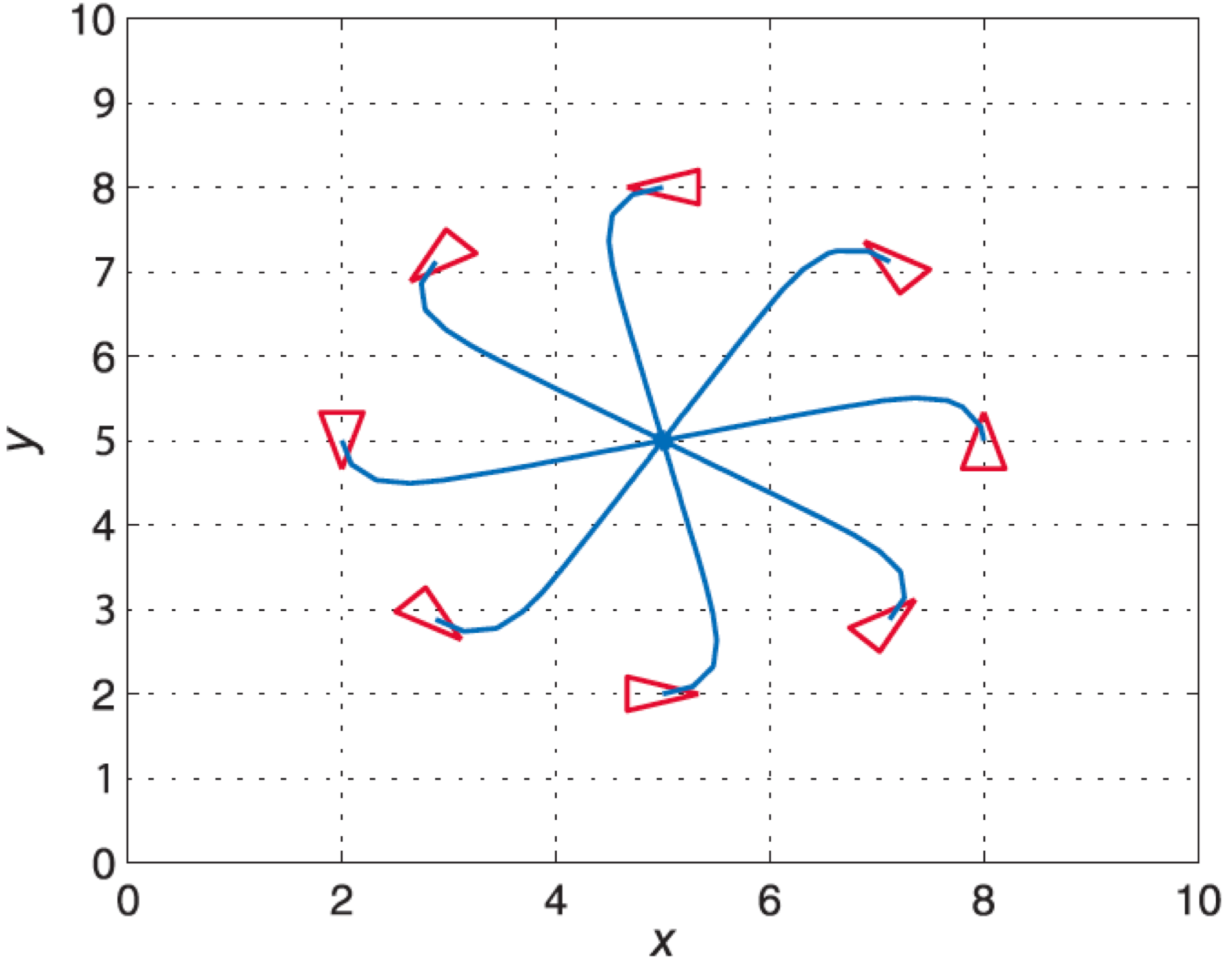
$$\omega = \min(\omega_{max}, K_\omega \mathrm{diff}(\theta^*, \theta))$$

dabei ist diff(θ*,θ) die Winkeldifferenz aus dem Intervall [-π +π).



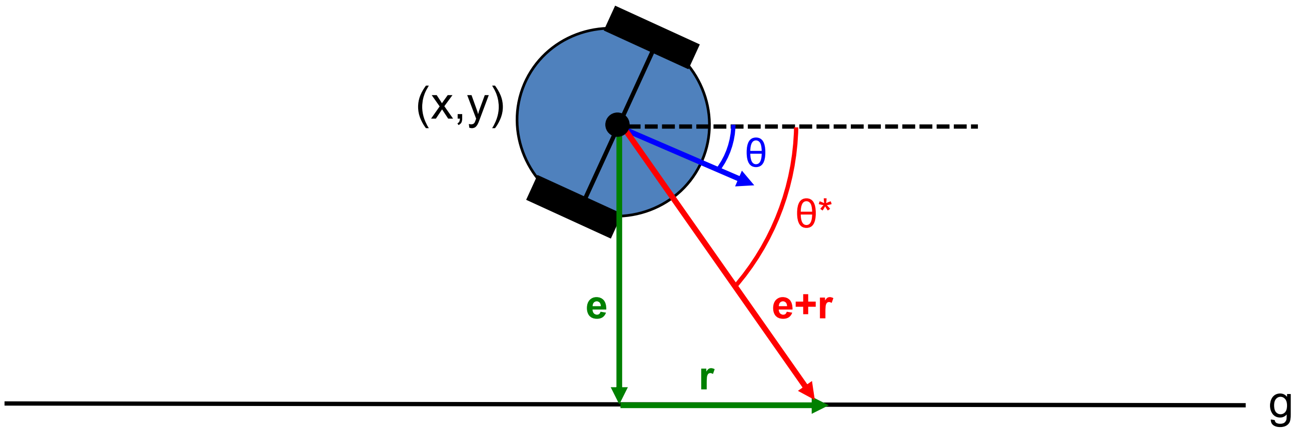
Auf Punkt zufahren (2)

- Beispiel-Trajektorien:



aus [Corke 2011]

Linienverfolger



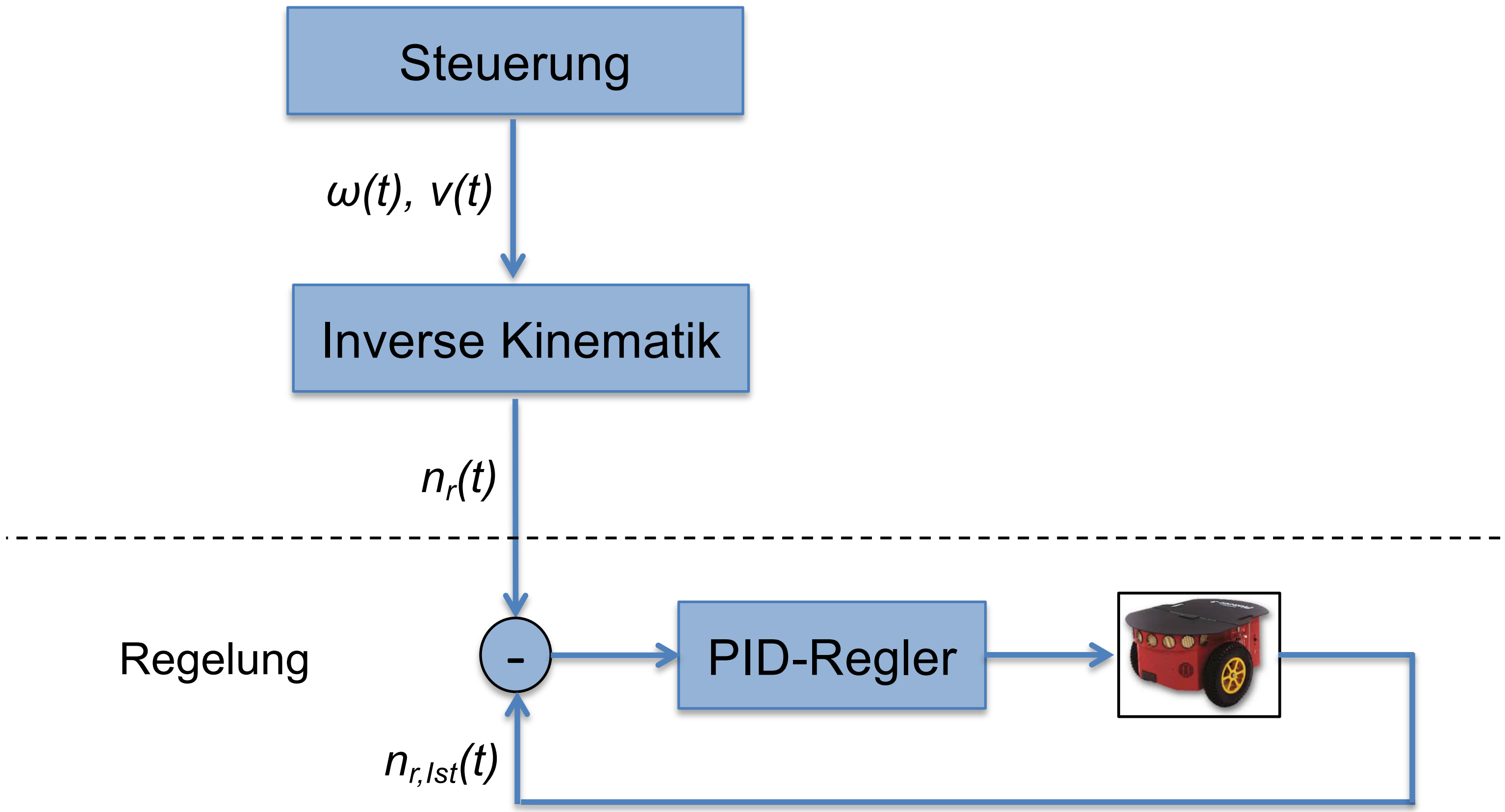
- Verfolge Linie (Gerade) g in Richtung **r** (|**r**| = 1).
- Bestimme Abstandsvektor **e** (orthogonal zu g mit |**e**| = Abstand zu (x,y))
- Berechne Wunschrichtung θ* aus **e + r**
- Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \min(\omega_{max}, K_{\omega} \mathrm{diff}(\theta^*, \theta))$$

- Hinweis: Aus Hessesche Normalform einer Gerade g lassen sich sowohl Abstand eines Punktes zu g als auch eine Geradennormale berechnen. (https://de.wikipedia.org/wiki/Hessesche_Normalform)

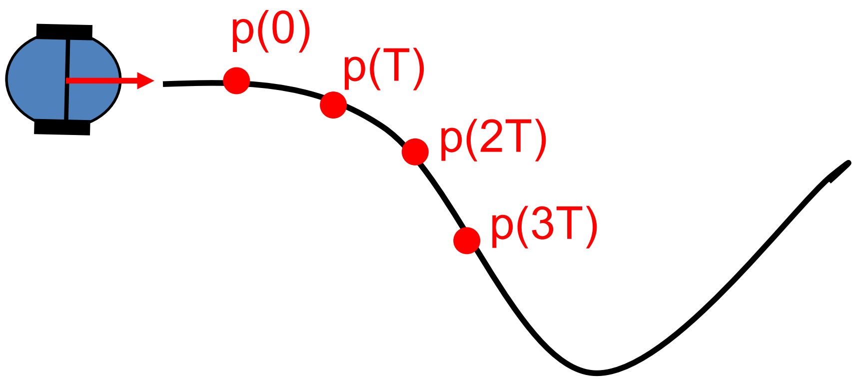
Einschub: PID-Regler

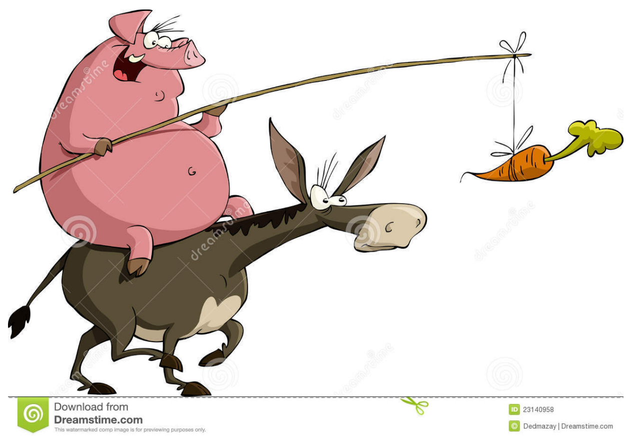
- Aus $\omega(t)$ und $v(t)$ wird mittels inverser Kinematik eine Drehzahl $n_r(t)$ für jedes Rad r bestimmt.
- Die Drehzahl $n_r(t)$ wird mit einem PID-Regler für jedes Rad einzeln geregelt.



Bahn verfolgen

- Ist die vorgebene Bahn als glatte, kinematisch befahrbare Trajektorie vorgebenen, dann kann mit einem Linienverfolger die Trajektorie abgefahren werden.
- Eine Alternative ist das Carrot-Donkey-Verfahren
- Dabei bewegt sich ein Zielpunkt p(t) = (x*(t),y*(t)) über die gewünschte Trajektorie.
- Ein PID-Regler für die Geschwindigkeit v sorgt dafür, dass der Abstand zu p(t) = (x*(t),y*(t)) einen konstanten Wert d* behält.
- Ein zweiter PID-Regler sorgt dafür, dass der Roboter in Richtung Zielpunkt p(t) = (x*(t),y*(t)) ausgerichtet wird (wie bei Regler, der auf einen Punkt zufährt.)





Polylinie verfolgen

- Einfacher Ansatz:

  fahre ersten Eckpunkte an;
  sobald Eckpunkt mit einer gewissen Toleranz erreicht ist,
  drehe Roboter in die Richtung des nächsten Eckpunkts
  und fahre entsprechend fort.
  Versuche Geschwindigkeit möglichst konstant zu halten.

- Die Polylinie kann zu einer kinematisch befahrbaren Kurve geglättet werden (z.B. mit Bezierkurven)

- Die Polylinie kann auch mit einem Carrot-Donkey-Verfahren abgefahren werden.