Математика 9+ класс. Разбор домашней работы №5.

Т. Д. Горлов

май, 2025

1 Решите уравнение.

$$6 + |x| = 18$$
$$|x| - 12 = 0$$

Рассмотри функцию $y = |x| - 12$, тогда $y = 0$:

$$y = \begin{cases} x - 12, & \text{при } x \geq 0 \\ -x - 12, & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

Рассмотрим два случая.

$$\begin{array}{lcr} x - 12 = 0 & \text{или} & -x - 12 = 0 \\ x = 12 & & x = -12 \end{array}$$

Ответ: $x_{1,2} = -12; 12$

2 Решите уравнение.

$$x^2 - 8|x| + 16 = 0$$

Рассмотри функцию $y = x^2 - 8|x| + 16$, тогда $y = 0$:

$$y = \begin{cases} x^2 - 8x + 16, & \text{при } x \geq 0 \\ x^2 + 8x + 16, & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

Рассмотрим два случая.

$$\begin{array}{lcr} x^2 - 8x + 16 = 0 & \text{или} & x^2 + 8x + 16 = 0 \\ D = 64 - 4 \cdot 16 = 0 & & D = 64 - 4 \cdot 16 = 0 \\ x = \dfrac{8}{2} = 4 & & x = -\dfrac{8}{2} = -4 \end{array}$$

Ответ: $x_{1,2} = -4; 4$

3 Решите уравнение.

$$x^2 - 4|x+2| + 4 = 0$$

Рассмотри функцию $y = x^2 - 4|x+2| + 4$, тогда $y = 0$:

$$y = \begin{cases} x^2 - 4(x+2) + 4, & \text{при } x+2 \geq 0 \\ x^2 - 4 \cdot (-(x+2)) + 4, & \text{при } x+2 < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x - 4, & \text{при } x+2 \geq 0 \\ x^2 + 4x + 12, & \text{при } x+2 < 0 \end{cases}$$

Рассмотрим два случая.

$$\begin{array}{lcr} x^2 - 4x - 4 = 0 & \text{или} & x^2 + 4x + 12 = 0 \\ D = 16 + 4 \cdot 4 = 32 & & D = 16 - 4 \cdot 12 = -32 \\ x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{32}}{2} & & x \notin \mathbb{R} \\ x_{1,2} = \dfrac{4 \pm 4\sqrt{2}}{2} & & \\ x_{1,2} = 2 \pm 2\sqrt{2} & & \end{array}$$

Ответ: $x_{1,2} = 2 - 2\sqrt{2}; \quad 2 + 2\sqrt{2}$

4 Решите уравнение.

$$\sqrt{6-x} = -x$$

$$\begin{array}{ll} \sqrt{6-x} = -x \quad {}^{\uparrow 2} & \text{Ограничения:} \\ 6 - x = x^2 & 6 - x \geq 0 \\ -x^2 - x + 6 = 0 \quad | \cdot (-1) & -x \geq 0 \\ x^2 + x - 6 = 0 & \\ D = 1 + 24 = 25 & \\ x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} & \\ x_{1,2} = 2; \quad -3 & \end{array}$$

Проверка:

$$\begin{array}{r} 6 - 2 \geq 0 \quad ✓ \\ -2 \geq 0 \quad \otimes \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 + 3 \geq 0 \quad ✓ \\ 3 \geq 0 \quad ✓ \end{array}$$

$\Rightarrow$ С учетом ограничений: $x = -3$.

Ответ: $x = -3$

5 Решите уравнение.

$$\sqrt{x^2+6x+12} = -x$$

$\sqrt{x^2+6x+12} = -x \quad \uparrow 2$ — Ограничения:

$x^2+6x+12 = x^2$ — $x^2+6x+12 \geq 0$

$6x+12=0$ — $-x \geq 0$

$6x = -12$

$x = -2$

Проверка:

$$(-2)^2 - 12 + 12 \geq 0 \quad \checkmark$$
$$-(-2) \geq 0 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ С учетом ограничений: $x = -2$.

Ответ: $x = -2$

6 Решите уравнение.

$$\sqrt{(x+1)(x+6)} = 2x$$

$\sqrt{(x+1)(x+6)} = 2x \quad \uparrow 2$ — Ограничения:

$(x+1)(x+6) = 4x^2$ — $(x+1)(x+6) \geq 0$

$x^2+7x+6 = 4x^2$ — $2x \geq 0$

$-3x^2+7x+6=0 \quad | \cdot (-1)$

$3x^2-7x-6=0$

$D = 49 + 4 \cdot 3 \cdot 6 = 121$

$x_{1,2} = \dfrac{7 \pm 11}{6}$

$x_{1,2} = -\dfrac{2}{3}; \quad 3$

Проверка:

$$\left(-\frac{2}{3}+1\right)\left(-\frac{2}{3}+6\right) \geq 0 \quad \checkmark$$
$$2\left(-\frac{2}{3}\right) \geq 0 \quad \otimes$$

$$(3+1)(3+6) \geq 0 \quad \checkmark$$
$$2 \cdot 3 \geq 0 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ С учетом ограничений: $x = 3$.

Ответ: $x = 3$

7 Решите уравнение.

$$\sqrt{x+1}\left(x^4+4x^2+4\right)=0$$

Произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю, а другие при этом не теряют смысл.

$$\sqrt{x+1}=0 \qquad \text{или} \qquad x^4+4x^2+4=0$$

Запишем ограничение **на все уравнение** $x+1\geq 0$.

$$\begin{aligned} &\sqrt{x+1}=0 \quad {}^{\uparrow 2}\\ &x+1=0\\ &x=-1 \end{aligned}$$

Пусть $t=x^2$, тогда:

$$\begin{aligned} &t^2+4t+4=0\\ &D=16-4\cdot 4=0\\ &t=\frac{-4}{2}=-2 \end{aligned}$$

Вернемся к замене:

$$t=x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2=-2 \quad \Rightarrow \quad x\notin R$$

Проверка:

$$-1+1\geq 0 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ С учетом ограничений: $x=-1$.
Ответ: $x=-1$

8 Решите уравнение повышенной сложности.

$$\begin{aligned} &\sqrt{|x^2+4x+4|}=2x \quad {}^{\uparrow 2} && \text{Ограничения:}\\ &|x^2+4x+4|=4x^2 && 2x\geq 0\\ &|x^2+4x+4|-4x^2=0 \end{aligned}$$

Заметим, что выражение $|x^2+4x+4|$ под корнем всегда будет ≥ 0 (по свойству модуля), поэтому ограничение на подкоренное выражение не будем записывать. Рассмотрим функцию $y=|x^2+4x+4|-4x^2$, тогда $y=0$:

$$y=\begin{cases} x^2+4x+4-4x^2, & \text{при } x\geq 0\\ -(x^2+4x+4)-4x^2, & \text{при } x<0 \end{cases}$$

$$y=\begin{cases} -3x^2+4x+4, & \text{при } x\geq 0\\ -5x^2-4x-4, & \text{при } x<0 \end{cases}$$

$$-3x^2+4x+4=0 \qquad\qquad -5x^2-4x-4=0$$
$$D=16+4\cdot 4\cdot 3=64 \qquad\qquad D=16-4\cdot 4\cdot 5=-64$$
$$x_{1,2}=\frac{-4\pm 8}{-6} \qquad\qquad x\notin R$$
$$x_{1,2}=-\frac{2}{3};\quad 2$$

Проверка:

$$2\left(-\frac{2}{3}\right)\geq 0 \quad \otimes$$
$$2\cdot 2\geq 0 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ С учетом ограничений: $x=2$.

Ответ: $x=2$

9 Решите уравнение повышенной сложности.

$$|x+2|\cdot|x+4|\cdot\sqrt{|x|-6}=0$$

Произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю, а другие при этом не теряют смысл.

$$|x+2|=0 \qquad |x+4|=0 \qquad \sqrt{|x|-6}=0 \quad \uparrow^2 \qquad \text{Ограничение:}$$
$$x=-2 \qquad x=-4 \qquad |x|-6=0 \qquad |x|-6\geq 0$$

Здесь стоит учесть, что **ограничение относится ко всему уравнению**, не только к $\sqrt{|x|-6}$.

Рассмотрим функцию $y=|x|-6$, тогда $y=0$:

$$y=\begin{cases} x-6, & \text{при } x\geq 0\\ -x-6, & \text{при } x<0\end{cases}$$

$$x=-6;\quad \text{или} \quad x=6$$

Проверка:

$$|-2|-6\geq 0 \quad \otimes$$
$$|-4|-6\geq 0 \quad \otimes$$
$$|-6|-6\geq 0 \quad \checkmark$$
$$|6|-6\geq 0 \quad \checkmark$$

Ответ: $x_{1,2}=-6;\quad 6$

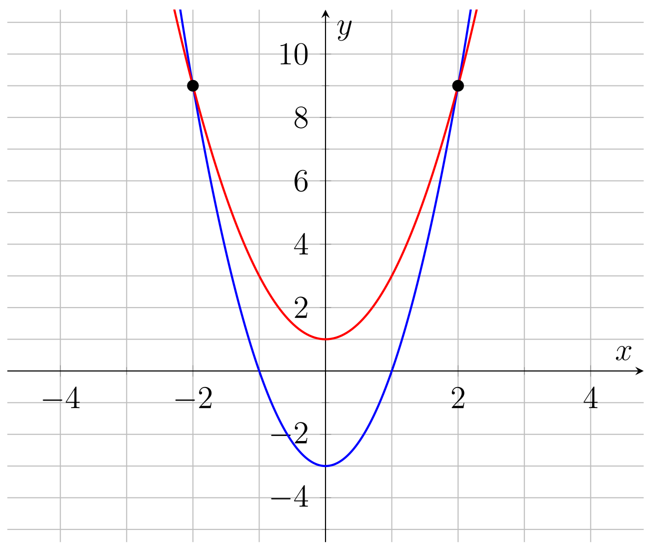
10 Задача на график.

Постройте графики функций $f(x) = 3x^2 - 3$ и $g(x) = 2x^2 + 1$. Ответьте на следующие вопросы:

а) Найдите координаты общих точек графическим методом.

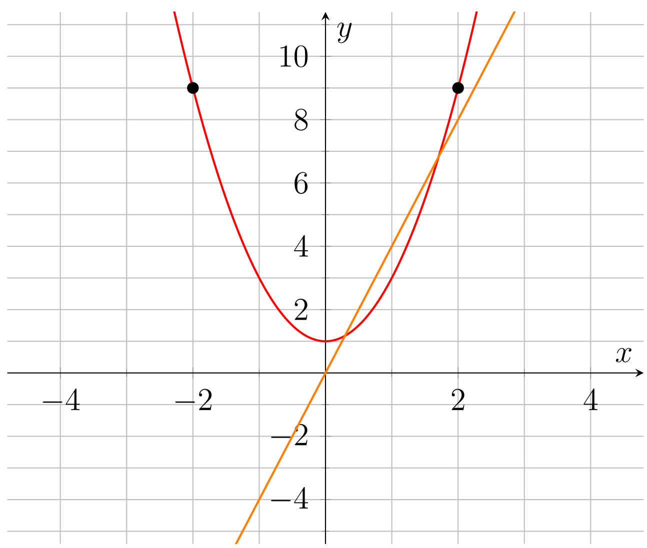
б) На сколько нужно опустить над осью OX график $h(x) = 4x$, чтобы $h(x)$ и $g(x)$ имели одну общую точку?

Для ответа на первый вопрос построим два графика в одной системе координат.



Ответ: а) Графики персекаются в точках: $A = (-2; 9)$; $\quad B = (2; 9)$

Для ответа на второй вопрос добавим график $h(x) = 4x$ и $g(x) = 2x^2 + 1$:



Введем некоторый параметр b: $h(x) = 4x+b$. Для того, чтобы найти общие точки графиков их нужно приравнять $g(x) = h(x)$:

$$2x^2 + 1 = 4x + b$$

$$2x^2 - 4x + 1 - b = 0$$

Теперь выделим отдельно свободный член этого квадратного уравнения (в который войдет b, т.к оно при подстановке будем просто числом):

$$2x^2 - 4x + (1 - b) = 0$$

$$D = 16 - 8(1 - b)$$

После этого момента нужно вспомнить **условие наличия 1 общей точки для квадратного уравнения**: $D = 0$

$$8 + 8b = 0$$

$$b = -1$$

Ответ: б) нужно опустить на 1

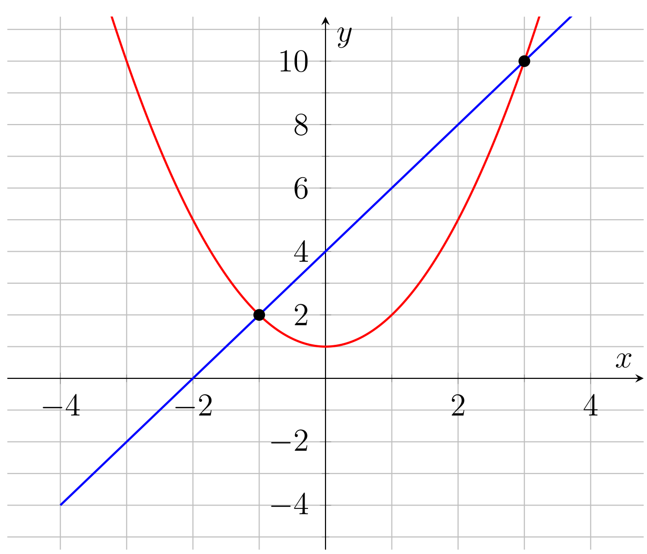
11 Задача на график повышенной сложности.

Постройте графики функций $f(x) = x^2 + 1$ и $g(x) = 2x + 4$. Ответьте на следующие вопросы:

а) Найдите координаты общих точек аналитическим методом.

б) На сколько нужно опустить над осью OX график $g(x)$ относительно текущего положения, чтобы $f(x)$ и $g(x)$ имели одну общую точку?

Для начала построим графики $f(x)$ и $g(x)$:



На графике хорошо видны общие точки, но по заданию требуется воспользоваться аналитическим методом. Для нахождения абсцисс общих точек приравняем $f(x) = g(x)$:

$$x^2 + 1 = 2x + 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 3 = 16$$
$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$
$$x_1 = -1; \quad x_2 = 3$$

Важная заметка: ось абсцисс – OX, ось ординат – OY. Соответственно x – абсцисса, y – ордината, но при этом (x, y) – координата.

Теперь осталось найти ординаты общих точек. Для этого подставим x_1 и x_2 в любое из двух уравнений (куда будет удобнее), в данном случае в $g(x) = 2x + 4$:

$$y_1 = 2, \quad \text{при } x_1 = -1$$
$$y_2 = 10, \quad \text{при } x_1 = 3$$

Запишем ответ в формате координат.

Ответ: а) $(x, y) = (-1, 2); (3; 10)$

Для решения следующего пункта, следует обратить внимание на формулировку вопроса. Ключевым моментом будет являться то, что опускать график $g(x)$ нужно будет относительно текущего положения. Т.е до этого мы делали преобразования относительно прямой оси OX. Какие изменения в решения это вводит? Проведу аналогию с многоквартирным домом: на сколько нужно опуститься относительно 9 этажа, чтобы оказать на 7? Понятно, что нужно выполнить $9 - 7 = 2$ (на 2 этажа). Так мы и поступим далее.

Найдем новое положение $g(x) = 2x + 4 + c$ такое, чтобы две функции имели одну общую точку.

$$x^2 + 1 = 2x + 4 + c \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 3 - c = 0$$

Запишем условие наличия одной общей точки: $D = 0$, и отделим свободный член уравнения визуально, при этом не забудем, что перед скобкой окажется минус и изменим знак внутри:

$$x^2 - 2x - (3 + c) = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot (3 + c) = 16 + 4c$$
$$16 + 4c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -4$$

Теперь подставим найденное значение c и получим, что новое положение должно быть $2x + 4 - 4 = 2x$. Вычтем из исходного положения новое:

$$(2x + 4) - (2x) = 4$$

Следовательно опустить график $g(x)$ нужно на 4.

Ответ: б) $g(x)$ **опустить нужно на 4.**