Математика 9+ класс. Разбор домашней работы №2.

Т. Д. Горлов

май, 2025

1 Упростите выражение.

$$\frac{x^2-y^2}{x+y}-\frac{x-y}{2}=\frac{(x-y)(x+y)}{x+y}-\frac{x-y}{2}=\frac{2(x-y)(x+y)-(x-y)(x+y)}{2(x+y)}$$

Теперь заметим, что в числителе получается ситуация похожа на $2t-t=t$, соответственно $2(x-y)(x+y)-(x-y)(x+y)=(x-y)(x+y)$

$$\frac{(x-y)(x+y)}{2(x+y)}=\frac{(x-y)}{2}$$

В конце сократим одинаковые скобки в числителе и знаменателе.
Ответ: $\frac{(x-y)}{2}$

2 Решите уравнение.

$$x^2-2x-8=-2x^2+4x+16$$
$$3x^2-6x-24=0 \quad |:3$$
$$x^2-2x-8=0$$
$$D=b^2-4ac=4+4\cdot 8=36$$
$$x_1=\frac{4+\sqrt{36}}{2\cdot 3}=4; \quad x_2=\frac{4-\sqrt{36}}{2\cdot 3}=-2$$

Ответ: $x_{1,2}=-2;4$

3 Решите уравнение.

$$x^2-2x+12=0$$
$$D=4-4\cdot 12=-44$$
$$D<0 \quad \Rightarrow \quad x\notin\mathbb{R}$$

Ответ: $x\notin\mathbb{R}$

4 Решите систему линейных уравнений методом выражения.

$$\begin{cases} -6x = 18 \\ 8y = 4 + x \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \dfrac{18}{-6} \\ 8y = 4 + x \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -3 \\ 8y = 4 + (-3) \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Ответ: $(x, y) = \left(-3; \frac{1}{8}\right)$

5 Задача на графики повышенной сложности.

Даны функции $f(x) = ax^2 - 1$ и $g(x) = 4x + 5$, известно, что графики этих функций пересекаются в точке $A\,(-1; 1)$. Найдите вторую точку пересечения графиков B.

Точка пересечения графиков **всегда** принадлежит обоим графикам функций $f(x)$ и $g(x)$. Воспользуемся этим фактом: $A\,(-1; 1)$ – означает, что при $x = -1$: $y = 1$, теперь решим уравнение, чтобы найти неизвестный параметр a:

$$a(-1)^2 - 1 = 1$$

$$a = 2$$

Тогда $f(x) = 2x^2 - 1$. Сейчас уже можно найти все точки пресечения двух графиков. Для этого составим уравнение $f(x) = g(x)$:

$$2x^2 - 1 = 4x + 5 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 4x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = -1; 3$$

Исключим $x = -1$, так как он уже принадлежит точке A, тогда $B = (3, ?)$. Чтобы узнать y координату этой точки нужно подставить полученный x **в любую из двух функций**, так как в этой точке они имеют одинаковое значение, чаще всего выбор в какую функцию подставить осуществляется на основе того, где будут проще вычисления. Мы же выбираем в $g(x)$;

$$y = f(3) = 4(3) + 5 = 17$$

Следовательно $B = (3, 17)$.
Ответ: $B(3, 17)$

6 Задача на множества повышенной сложности.

Даны множества $A = \{4, 7, 10, \ldots\}$ и $B = \{5, 7, 9, \ldots\}$. Известно, что каждый элемент множества A задается формулой: $3x + 1$, а каждый элемент множества B – $2x + 3$, при этом x перебирается как натуральное число от 1 до $+\infty$.

Пример: при $x = 1$: $3(1) + 1 = 4$; при $x = 2$: $3(2) + 1 = 7$ и т.д.

Также известно, что $|A| = 200$, $|B| = 150$.

а) Сколько общих элементов у этих множеств?
б) Найдите $|A \cup B| = ?$

Это задача составлена так, чтобы вопрос под буквой «а» наводил на ответ под буквой «б». Начнем анализ. Для этого расширим известные значения у множеств используя данные выше формулы:

$$
\begin{array}{lllllllllll}
A: & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 19 & 22 & 25 & 28 & 31 & ... \\
B: & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 & 21 & 23 & ...
\end{array}
$$

Теперь выделим общие элементы в множествах A и B:

$$
\begin{array}{lllllllllll}
A: & 4 & \boxed{7} & 10 & \boxed{13} & 16 & \boxed{19} & 22 & 25 & 28 & 31 & ... \\
B: & 5 & \boxed{7} & 9 & 11 & \boxed{13} & 15 & 17 & \boxed{19} & 21 & 23 & ...
\end{array}
$$

Если просмотреть чуть больше элементов в обоих множествах, становится понять, что в A все общие элементы лежат **через 1 элемент**, а в B Общие элементы лежат через 2 элемента. Эти два факта нам оказываются достаточно полезными. Не самый очевидный факт, но чтобы узнать сколько общих элементов содержится в том или ином множестве нужно общее число элементов поделить на что-то, при этом «что-то» должно обязательно вплотную заполнять все множество но быть достаточно информативным, чтобы на основе него делать выводы. Давайте выделим такие области внутри множеств:

$$
\begin{array}{llllll}
A: & \boxed{4 \quad \mathbf{7}} & \boxed{10 \quad \mathbf{13}} & \boxed{16 \quad \mathbf{19}} & \boxed{22 \quad \mathbf{25}} & \boxed{28 \quad \mathbf{31}} \quad \mathbf{...} \\
B: & 5 \quad \mathbf{7} & \boxed{9 \quad 11 \quad \mathbf{13}} & \boxed{15 \quad 17 \quad \mathbf{19}} & \boxed{21 \quad 23 \quad \mathbf{...}} &
\end{array}
$$

Разделим каждое множество по правилу: пропуск + повторяющийся элемент, тогда все множество A и B разделится на куски, по которым можно однозначно посчитать количество повторов. Конечно, видно, что в B первые два элемента не попадут ни в один кусок, т.к их остается 2, а в куске должно быть 3 элемента, но ничего плохого в этом нет, потом при необходимости у результата деления просто возьмем целую часть.

Так как количество элементов отличается в множествах, то количество найденных повторов между A и B будут своими для каждого:

$$\text{Повторы найденные в А} = \frac{200}{2} = 100; \quad \text{Повторы найденные в В} = \frac{150}{3} = 50;$$

Где 2 и 3 в знаменателе это количество элементов в «куске». Из этих двух чисел выбирем меньшее, почему так предлагается для самостоятельного рассуждения. Я лишь оставлю пример, который может помочь понять:

$$
\begin{array}{llllllllllll}
A: & 4 & \boxed{7} & 10 & \boxed{13} & 16 & \boxed{19} & 22 & 25 & 28 & 31 & ... \\
B: & 5 & \boxed{7} & 9 & 11 & \boxed{13} & ... & & & & &
\end{array}
$$

Итого под первым пунктом ответ: 50 повторов.
Для ответа на второй вопрос: воспользуемся логикой. Если просто «склеить» A и B, то каждый повтор в «склеенном» множестве встретится ровно два раза (по числу объединяемых множеств), следовательно 50 лишних элментов нужно будет удалить, иначе будет нарушено правило «в множестве не бывает повторов», тогда выполним действие, чтобы убрать эти лишние повторения:

$$|A| + |B| - \text{Количество общих} = 200 + 150 - 50 = 300$$

Замечу, что решение с помощью перебора всех 200 и 150 элементов и проверки подхода под условия тоже допустимо, но **займет значительно больше времени**!

Ответ: а) 50 **общих элементов; б)** $|A \cup B| = 300$;