

Atividade03Trabalho - AM2

MNuméricos para EDO/PVI



Docentes:

Prof. Arménio Correia

Prof. Nuno Lavado

Prof. Rui Rodrigues

Curso:

Licenciatura em Engenharia Informática

Trabalho realizado por:

Tiago José Gaspar Oliveira - nº2022137225 - LEI

Pedro Manuel Martins - nº2021118351 - LEI-CE

Pedro da Costa Sherring – nº2020126540 - LEI

Índice

1. Introdução.....	1
1.1 Equação diferencial: definição e propriedades	1
1.2 Definição de PVI	3
2. Métodos Numéricos para resolução de PVI	4
2.1 Método de Euler.....	4
2.1.1 Fórmulas	4
2.1.2 Algoritmo/Função	6
2.2 Método de Euler Melhorado ou Modificado.....	8
2.2.1 Fórmulas	8
2.2.2 Algoritmo/Função	8
2.3 Método de RK2.....	10
2.3.1 Fórmulas	10
2.4 Método de RK4.....	13
2.4.1 Fórmulas	13
2.4.2 Algoritmo/Função	14
2.5 Função ODE45 do Matlab.....	16
2.6 Método de ODE23	17
2.6.1 Algoritmo em Matlab	17
2.6.2 Sua aplicação na App	18
3. Exemplos de aplicação e teste dos métodos	19
3.1 Exercício 3 do Teste Farol	19
3.1.1 PVI - Equação Diferencial de 1ª ordem e Condições Iniciais	19
3.1.2 Exemplos de output - App com gráfico e tabela	20
3.2 Problema de aplicação do Livro:.....	24
3.2.1 Modelação Matemática do Problema.....	24
3.2.2 Resolução do Problema Através da Aplicação	26
3.3 Problemas de aplicação do exercício 2 do teste Farol	29
3.3.1 Modelação matemática do problema.....	29
3.3.2 Resolução através da App desenvolvida	31
4. Conclusão	33
5. Bibliografia	33

Índice figuras

Figura 1 - Método de Euler.....	6
Figura 2 - Método de Euler (APP)	7
Figura 3 - Método Euler melhorado	8
Figura 4 - Método Euler melhorado (APP).....	9
Figura 5 - Método RK2.....	12
Figura 6 - Método RK2 (APP)	12
Figura 7 - Método RK4.....	15
Figura 8 - Método RK4 (APP)	15
Figura 9 - Método ODE45.....	17
Figura 10 - Método ODE45 (APP)	17
Figura 11 - Método ODE23.....	17
Figura 12 - Método ODE23 (APP)	17
Figura 13 - Exercício 3 do teste farol	19
Figura 14 - Execução do método de Euler da expressão $y' = -2ty$ pela aplicação.	20
Figura 15 - Execução do método RK2 da expressão $y' = -2ty$ pela aplicação.	20
Figura 16 - Tabela de resultados da execução de ambos os métodos anteriores.	21
Figura 17 - Gráfico do PVI modelado anteriormente para o exercício 1.	26
Figura 18 - Tabela de resultados do método Runge-Kutta de ordem 4 do PVI.....	26
Figura 19 - Gráfico do PVI.....	27
Figura 20 - Tabela de resultados do método Runge-Kutta de ordem 4 do PVI.....	27
Figura 21 - Tabela com os valores estimado de $A(1), A(2), A(3), A(4)$ e $A(5)$ alínea b.)	28
Figura 22 - Gráfico da função do estado permanente.....	31
Figura 23 - Gráfico da função do estado transitório.....	31
Figura 24- Tabela obtida na execução de P na nossa aplicação	32
Figura 25 - Execução de P na nossa aplicação	32

1. Introdução

1.1 Equação diferencial: definição e propriedades

Uma equação que tem derivadas de uma função que não sabemos (a função que queremos encontrar) é uma equação diferencial. Podemos classificar uma equação diferencial pela sua ordem, tipo e linearidade.

Tipo 1 - Equação Diferencial Ordinária (EDO)

Se uma equação diferencial contém exclusivamente derivadas ordinárias de uma ou mais funções que dependem de uma única variável independente, então ela é uma equação diferencial ordinária (*EDO*).

Exemplo:

$$\frac{dx}{dt} + 3x = 2$$

$$(y - x)dx + 4ydy = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0$$

Tipo 2 - Equação Diferencial Parcial (EDP)

Se uma equação diferencial envolve apenas derivadas ordinárias de uma ou mais funções que dependem de duas ou mais variáveis independentes, então ela é uma equação diferencial parcial (*EDP*).

Exemplo:

$$x \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\partial v}{\partial x}$$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

- **Ordem de uma ED:** A ordem da mais alta derivada envolvida numa **ED** é chamada de sua ordem. Exemplo de uma **EDO** de segunda ordem:

$$y'' + 2y' + 1 = 0$$

- **Linearidade de uma ED:** Uma **ED** é chamada de linear se for possível escrevê-la na forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

1.2 Definição de PVI

Na matemática, um problema de valor inicial (**PVI**) ou problema de condições iniciais ou problema de *Cauchy* é uma equação diferencial que é acompanhada pelo valor da função objetivo num determinado ponto, chamado de valor inicial ou condição inicial. Noutras palavras, um **PVI** é uma equação diferencial que descreve uma relação entre uma função e as suas derivadas, e que é acompanhada de um valor inicial para a função e as suas derivadas.

Um problema de valor inicial é composto por uma equação diferencial juntamente da atribuição do valor das funções desejadas num ponto que denotamos abaixo por t_0 . Formalmente um problema de valor inicial (**PVI**) é definido pelas equações

$$\begin{aligned}y'(t) &= f(t, y(t)), & t > t_0 \\ y(t_0) &= y_0,\end{aligned}$$

em que

$$y : R \rightarrow R, f : R \times R \rightarrow R \text{ e } t_0, y_0$$

Podemos assim concluir que são constantes reais.

2. Métodos Numéricos para resolução de PVI

2.1 Método de Euler

Na matemática e na ciência computacional, o método de Euler, é um procedimento numérico de primeira ordem para solucionar equações diferenciais ordinárias com um valor inicial conhecido. É o tipo mais básico de método explícito para integração numérica para equações diferenciais ordinárias.

2.1.1 Fórmulas

Supondo-se que se quer aproximar a solução de um problema de valor inicial:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0.$$

Escolhendo um valor para h , para o tamanho de cada passo e atribuindo a cada passo um ponto dentro do intervalo, temos que:

$$t_n = t_0 + nh.$$

No próximo passo t_{n+1} a partir do anterior t_n fica definido como

$$t_{n+1} = t_n + h$$

então:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

Com isto, para um valor menor de h iremos ter mais passos dentro de um dado intervalo, o que fará com que a exatidão seja muito superior (mais semelhante ao valor real).

O valor de y_n é uma aproximação da solução da **EDO** no ponto

$$t_n: y_n \approx y(t_n).$$

Enquanto o Método de Euler integra uma EDO de primeira ordem, qualquer EDO de ordem N pode ser representada como uma equação de primeira ordem: tendo a equação

$$y^{(N)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(N-1)}(t)),$$

temos a introdução de variáveis auxiliares

$$z_1(t) = y(t), z_2(t) = y'(t), \dots, z_N(t) = y^{(N-1)}(t)$$

obtendo a seguinte equação:

$$\mathbf{z}'(t) = \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ \vdots \\ z_{N-1}'(t) \\ z_N'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ \vdots \\ y^{(N-1)}(t) \\ y^{(N)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ \vdots \\ z_N(t) \\ f(t, z_1(t), \dots, z_N(t)) \end{pmatrix}$$

Este é um sistema de primeira ordem na variável $z(t)$ e pode ser usada através do Método de Euler ou quaisquer outros métodos de resoluções de sistemas de primeira ordem.

2.1.2 Algoritmo/Função

```
1 function [t,y] = NEuler(f,a,b,n,y0)
2 %NEULER Método de Euler para resolução numérica de EDO/PVI
3 % y'=f(t,y), t=[a,b], y(a)=y0
4 % y(i+1)=y(i)+hf(t(i),y(i)), i=0,1,2,...,n
5 %INPUT:
6 % f - função da EDO y'=f(t,y)
7 % [a,b] - intervalo de valores da variável independente t
8 % n - número de subintervalos ou iterações do método
9 % y0 - aproximação inicial y(a)=y0
10 %OUTPUT:
11 % t - vetor do intervalo [a,b] discretizado
12 % y - vetor das soluções aproximadas do PVI em cada um dos t(i)
13 %
14 % 05/03/2024 Arménio Correia armenioc@isec.pt
15 % 14/03/2024 Arménio Correia
16
17 h = (b-a)/n;
18 t = a:h:b;
19 y = zeros(1,n+1);
20 y(1) = y0;
21 for i = 1:n
22     y(i+1) = y(i)+h*f(t(i),y(i));
23 end
24 end
```

Figura 1 - Método de Euler

Exemplo para a **ED** $y' = y + \exp(3 * t)$ “, com $n = 2$ e $y_0 = 2$:

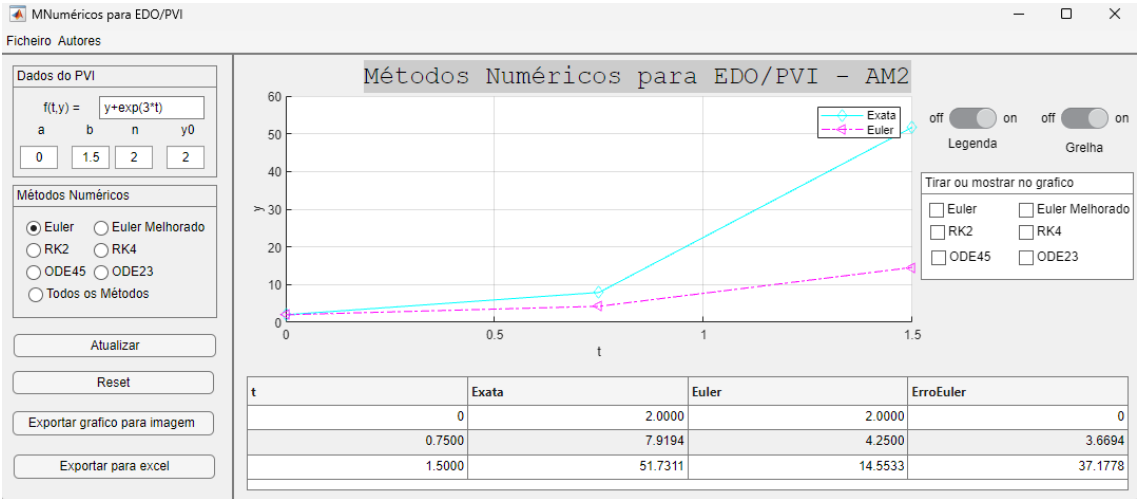


Figura 2 - Método de Euler (APP)

2.2 Método de Euler Melhorado ou Modificado

2.2.1 Fórmulas

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t^{(k)}, u^{(k)}), \\k_2 &= f(t^{(k+1)}, u^{(k)} + k_1), \\u^{(k+1)} &= u^{(k)} + h \frac{k_1 + k_2}{2}, \\u^{(1)} &= a \quad (\text{condição inicial}).\end{aligned}$$

2.1.2 Algoritmo/Função

```
1 function [t,y] = NEuler_melhorado(f,a,b,h,y0)
2 %MEULER Método de Euler para resolução numérica de EDO/PVI
3 %
4 %INPUT:
5 % f - função da EDO y'=f(t,y)
6 % [a,b] - intervalo de valores da variável independente t
7 % n - número de subintervalos ou iterações do método
8 % y0 - aproximação inicial y(a)=y0
9 %OUTPUT:
10 % t - vetor do intervalo [a,b] discretizado
11 % y - vetor das soluções aproximadas do PVI em cada um dos t(i)
12 %
13 % 26/04/2024 Tiago Oliveira a2022137225@isec.pt
14 % 26/04/2024 Pedro Sherring a2020126540@isec.pt
15 % 26/04/2024 Pedro Martins a2021118351@isec.pt
16 h=(b-a)/n;
17 t=a:h:b;
18 y=zeros(1,n+1);
19 y(1)=y0;
20
21 for i=1:n
22
23     y(i+1) = y(i)+(h/2)*(f(t(i),y(i))+ f(t(i+1),y(i+1)));
24
25 end
26
27 end
28
```

Figura 3 - Método melhorado de Euler

Exemplo para a **ED** " $y' = y + \exp(3 * t)$ ", com $n = 2$ e $y_0 = 2$:

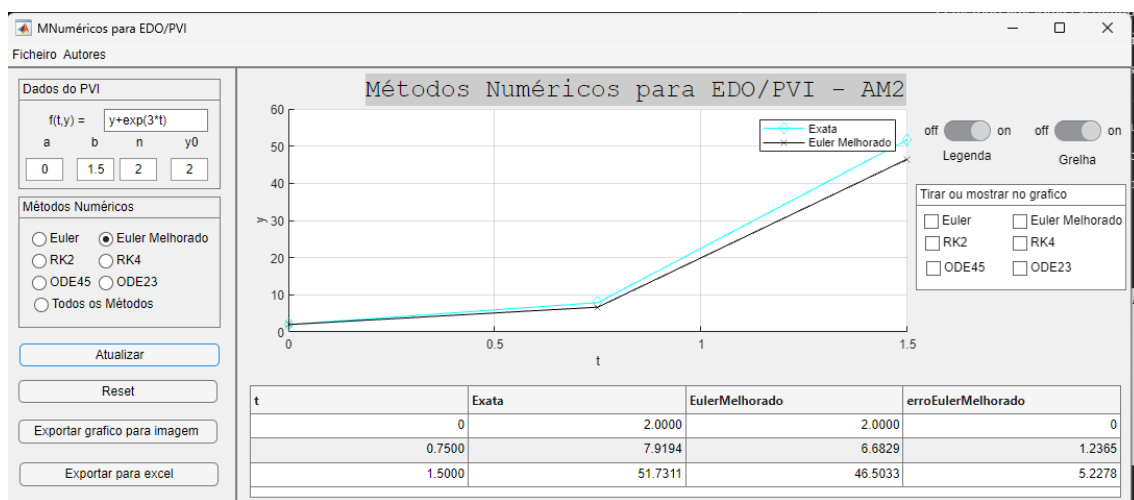


Figura 4 - Método Euler melhorado (APP)

2.3 Método de RK2

Em análise numérica, os métodos de Runge–Kutta formam uma família importante de métodos iterativos implícitos e explícitos para a resolução numérica (aproximação) de soluções de equações diferenciais ordinárias.

2.3.1 Fórmulas

Trata-se de um método por etapas que tem a seguinte expressão geral:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \sum_{i=1}^e b_i k_i,$$

onde

$$k_i = F\left(u^n + \Delta t \sum_{j=1}^e a_{ij} k_j; t_n + c_i \Delta t\right) \quad i = 1, \dots, e$$

com a_{ij} , b_i , c_i constantes próprias do esquema numérico.

2.3.2 Algoritmo/Função

```
1 function [t,y] = NRK2(f,a,b,n,y0)
2 %NRK2 Método de Runge-Kutta de ordem 2 para resolução numérica de EDO/PVI
3 % y'=f(t,y), t=[a,b], y(a)=y0
4 % y(i+1)=y(i)+1/2(k1+k2)
5 %INPUT:
6 % f - função da EDO y'=f(t,y)
7 % [a,b] - intervalo de valores da variável independente t
8 % n - número de subintervalos ou iterações do método
9 % y0 - aproximação inicial y(a)=y0
10 %OUTPUT:
11 % t - vetor do intervalo [a,b] discretizado
12 % y - vetor das soluções aproximadas do PVI em cada um dos t(i)
13 %
14 % 05/03/2024 Arménio Correia armenioc@isec.pt
15 % 14/03/2024 Arménio Correia
16
17 h = (b-a)/n;
18 t = a:h:b;
19 y = zeros(1,n+1);
20 y(1) = y0;
21 for i = 1:n
22     k1 = h*f(t(i),y(i));
23     k2 = h*f(t(i+1),y(i)+k1);
24     y(i+1) = y(i)+(k1+k2)/2;
25 end
26 end
```

Figura 1 - Método RK2

Exemplo para a ED $y' = y + \exp(3 * t)$, com $n = 2$ e $y_0 = 2$:

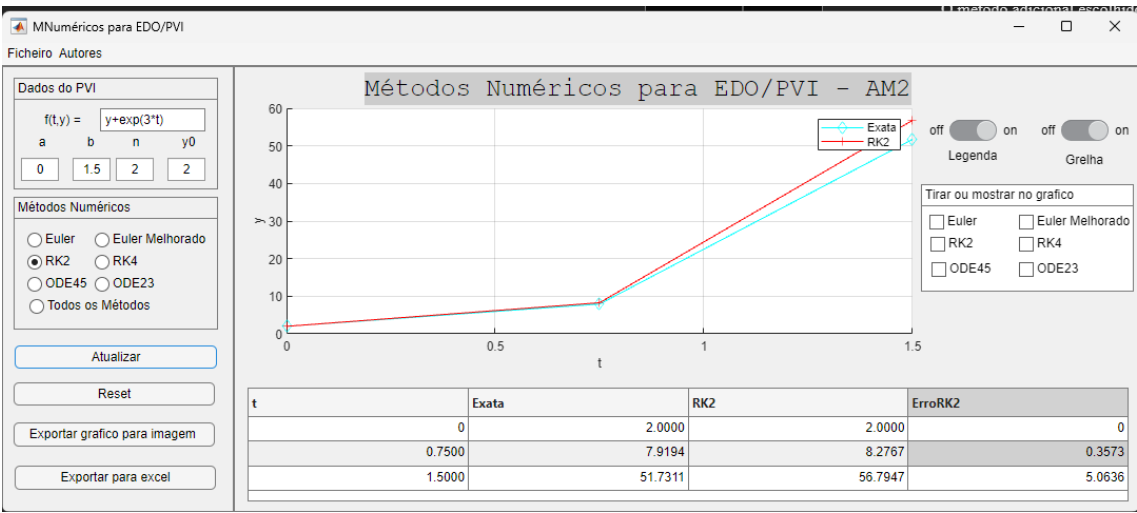


Figura 6 - Método RK2 (APP)

2.4 Método de RK4

Um membro da família de métodos *Runge–Kutta* é usado com tanta frequência que costuma receber o nome de "**RK4**" ou simplesmente "*o método Runge–Kutta*".

2.4.1 Fórmulas

Seja um problema de valor inicial (PVI) especificado como segue:

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

Então o método RK4 para este problema é dado pelas seguintes equações:

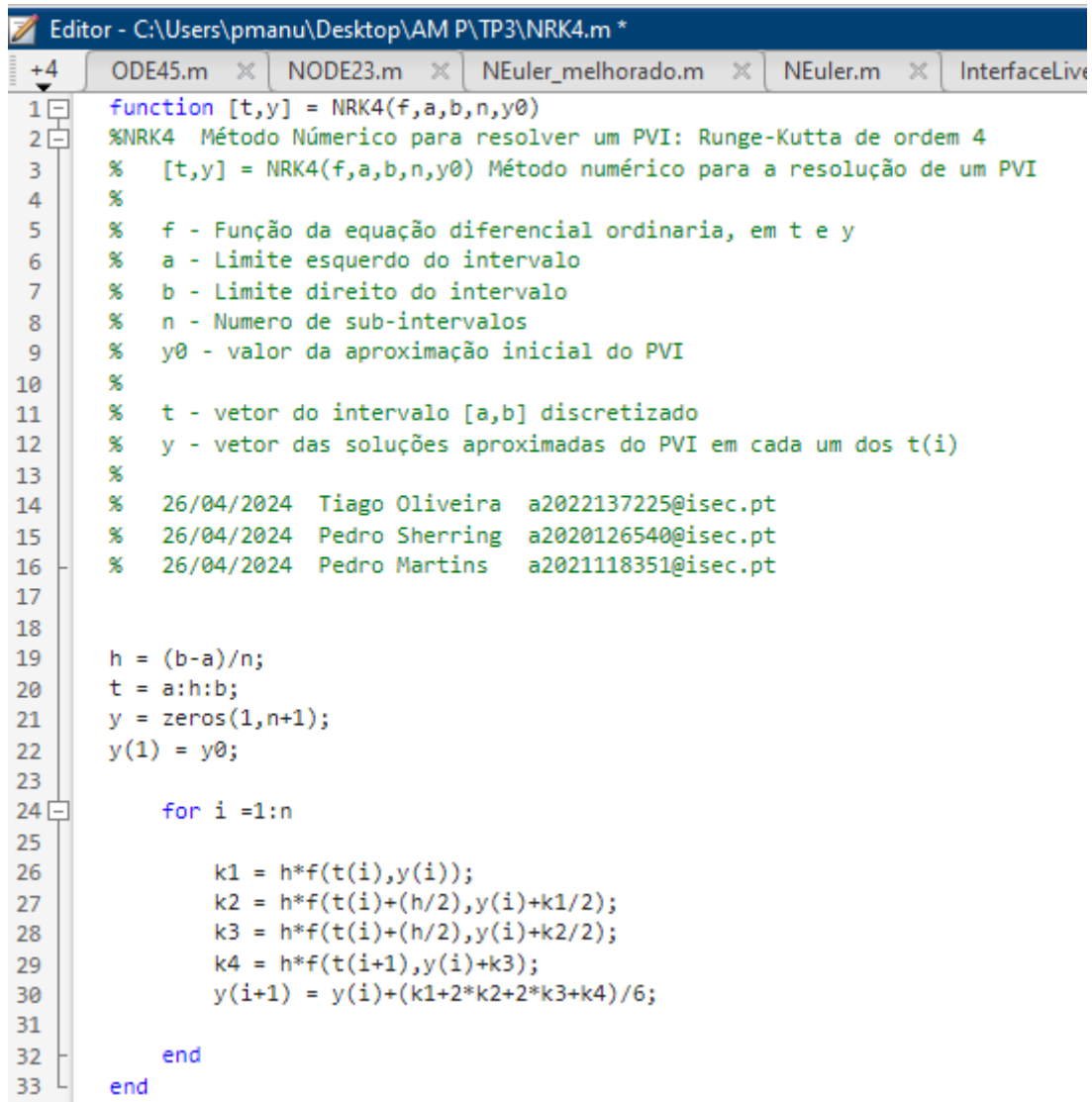
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$t_{n+1} = t_n + h$$

onde y_{n+1} é a aproximação por RK4 de $y(t_{n+1})$ e

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$
$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$
$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3)$$

Então, o próximo valor (y_{n+1}) é determinado pelo valor atual (y_n) somado com o produto do tamanho do intervalo (h) e uma inclinação estimada.

2.4.2 Algoritmo/Função



```
Editor - C:\Users\pmanu\Desktop\AM P\TP3\NRK4.m *
+4 ODE45.m x NODE23.m x NEuler_melhorado.m x NEuler.m x InterfaceLive
1 function [t,y] = NRK4(f,a,b,n,y0)
2 %NRK4 Método Numérico para resolver um PVI: Runge-Kutta de ordem 4
3 % [t,y] = NRK4(f,a,b,n,y0) Método numérico para a resolução de um PVI
4 %
5 % f - Função da equação diferencial ordinária, em t e y
6 % a - Limite esquerdo do intervalo
7 % b - Limite direito do intervalo
8 % n - Numero de sub-intervalos
9 % y0 - valor da aproximação inicial do PVI
10 %
11 % t - vetor do intervalo [a,b] discretizado
12 % y - vetor das soluções aproximadas do PVI em cada um dos t(i)
13 %
14 % 26/04/2024 Tiago Oliveira a2022137225@isec.pt
15 % 26/04/2024 Pedro Sherring a2020126540@isec.pt
16 % 26/04/2024 Pedro Martins a2021118351@isec.pt
17
18
19 h = (b-a)/n;
20 t = a:h:b;
21 y = zeros(1,n+1);
22 y(1) = y0;
23
24 for i =1:n
25
26     k1 = h*f(t(i),y(i));
27     k2 = h*f(t(i)+(h/2),y(i)+k1/2);
28     k3 = h*f(t(i)+(h/2),y(i)+k2/2);
29     k4 = h*f(t(i+1),y(i)+k3);
30     y(i+1) = y(i)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
31
32 end
33 end
```

Figura 7 - Método RK4

Exemplo para a ED $y' = y + \exp(3*t)$, com $n = 2$ e $y_0 = 2$:

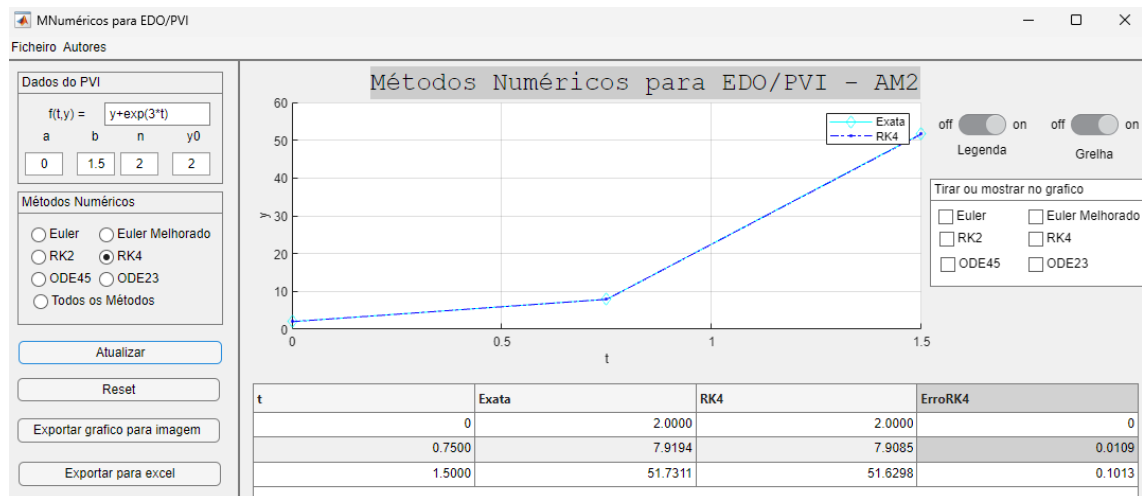


Figura 8 - Método RK4 (APP)

2.5 Função ODE45 do Matlab

```
1 function [t,y] = ODE45 (f,a,b,n,y0)
2 %      Função ODE45 em MATLAB
3 %      [t,y] = ODE45 (f,a,b,n,y0) Método numérico para a resolução de um PVI
4 %
5 %INPUT:
6 % f - Função da equação diferencial ordinária, em t e y
7 % a - Limite esquerdo do intervalo
8 % b - Limite direito do intervalo
9 % n - Numero de sub-intervalos
10 % y0 - valor da aproximação inicial do PVI
11 %
12 %OUTPUT:
13 % t - vetor do intervalo [a,b] discretizado
14 % y - vetor das soluções aproximadas do PVI em cada um dos t(i)
15 %
16 % 26/04/2024 Tiago Oliveira a2022137225@isec.pt
17 % 26/04/2024 Pedro Sherring a2020126540@isec.pt
18 % 26/04/2024 Pedro Martins a2021118351@isec.pt
19
20 h = (b-a)/n;
21 t = a:h:b;
22 [~,y] = ode45(f,t,y0);
23 if size(y, 1) ~= length(t)
24     y = y';
25 end
26 end
27
28
29
```

Figura 9 - Método ODE45

Exemplo para a ED $y' = y + \exp(3 * t)$ com $n = 2$ e $y_0 = 2$:

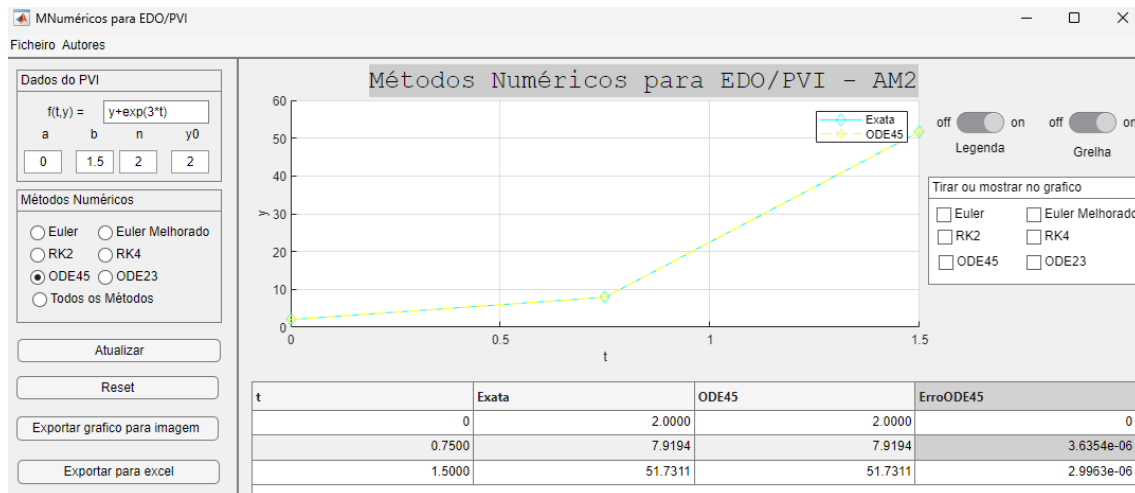


Figura 10 - Método ODE45 (APP)

2.6 Método de ODE23

O método adicional escolhido por nós foi o ODE23, usado para resolver sistemas de equações diferenciais ordinárias (EDOs), decidimos escolhê-lo porque é um método com boa precisão para muitos. Baseado na estimativa de erro, o método ajusta o tamanho do passo para tentar manter o erro abaixo de um limite especificado pelo usuário. Isso ajuda a evitar passos excessivamente grandes que podem levar a erros significativos ou passos muito pequenos que tornariam a computação desnecessariamente lenta. O método é uma combinação de fórmulas de Runge-Kutta de segunda e terceira ordem.

2.6.1 Algoritmo em Matlab

```

1  %M_ODE23 ODE23 do Matlab.
2  % [t,y] = Heun(f,a,b,n,y0) Método numérico para a resolução de um PVI
3  %INPUT:
4  % f - função da EDO y'=f(t,y)
5  % [a,b] - intervalo de valores da variável independente t
6  % n - número de subintervalos ou iterações do método
7  % y0 - aproximação inicial y(a)=y0
8  %OUTPUT:
9  % t - vetor do intervalo [a,b] discretizado
10 % y - vetor das soluções aproximadas do PVI em cada um dos t(i)
11 %
12 %
13 % 26/04/2024 Tiago Oliveira a2022137225@isec.pt
14 % 26/04/2024 Pedro Sherring a2020126540@isec.pt
15 % 26/04/2024 Pedro Martins a2021118351@isec.pt
16 function [t,y]=M_ODE23(f,a,b,n,y0)
17 h=(b-a)/n;
18 t=a:h:b;
19 y=zeros(1,n+1);
20 sol=ode23(f,t,y0);
21 y=deval(sol,t);
22
23
24 end

```

Figura 11 - Método ODE23

2.6.2 Sua aplicação na App

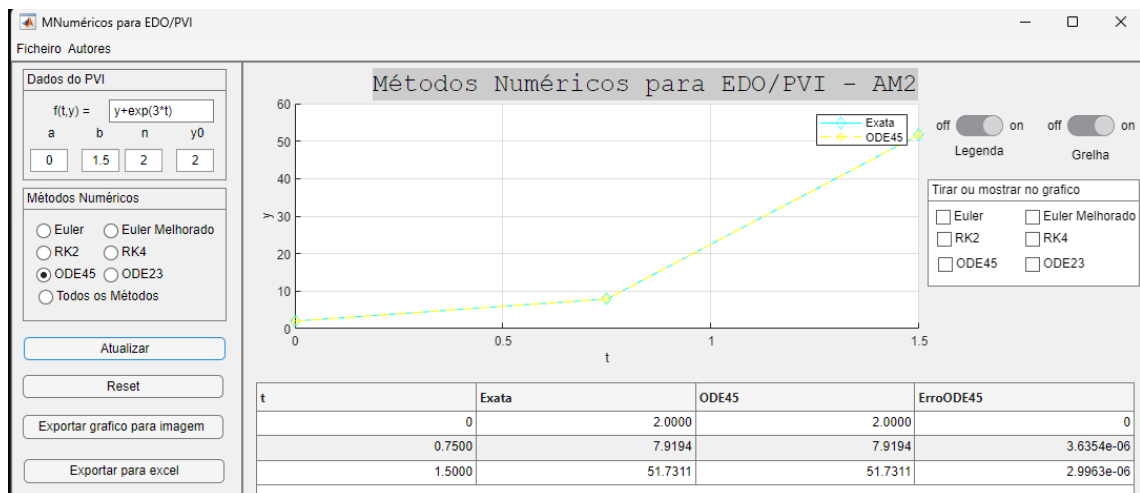


Figura 12 - Método ODE23 (APP)

3. Exemplos de aplicação e teste dos métodos

3.1 Exercício 3 do Teste Farol

3.1.1 PVI - Equação Diferencial de 1ª ordem e Condições Iniciais

3. Considere o problema de valor inicial $y' = -2ty$, $y(0) = 2$, $t \in [0, 1.5]$

(a) Verifique que $y(t) = 2 \exp(-t^2)$ é a solução exata do problema.

(b) Complete a tabela seguinte e interprete os resultados obtidos. Para o preenchimento da coluna das aproximações de Euler, deve apresentar os cálculos das iterações da aplicação da fórmula do método de Euler.

i	t_i	Aproximações			Erros	
		$y(t_i)$ Exata	y_i Euler	y_i RK2	$ y(t_i) - y_i $ Euler	$ y(t_i) - y_i $ RK2
0	0	2			0	0
1		1.5576		1.5000		0.0576
2	1					0.0142
3	1.5	0.2108		0.3750		

Figura 13 - Exercício 3 do teste farol

a)

Nesta alínea observa-se o seguinte **PVI**:

$$\begin{cases} y' + 2xy = 0 \\ t \in [0, 1.5] \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Resolução:

$$y' + 2xy = 0 \quad (=) \quad \frac{dy}{dt} = -2ty \quad (=) \quad \frac{1}{y} dy = -2t dt \quad (\text{ED Separáveis})$$

$$(\Rightarrow) \int \frac{1}{y} dy = \int -2t dt \quad (\Rightarrow) \int \frac{1}{y} dy = -2 \int t dt$$

$$(\Rightarrow) \ln|y| = -2 \frac{t^2}{2} + c$$

$$(\Rightarrow) |y| = e^{-t^2+c}$$

$$(\Rightarrow) y = e^c * e^{-t^2}$$

$$(\Rightarrow) y = c_2 * e^{-t^2}$$

$$(\Rightarrow) y = c * e^{-t^2}, \quad c, \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = 2 (=) c * e^{-0^2} = 2 (=) c * 1 = 2 (=) c = 2$$

Então $y(t) = 2e^{-t^2}$ é a solução exata do problema.

3.1.2 Exemplos de output - App com gráfico e tabela

b) Resolvendo através da aplicação:

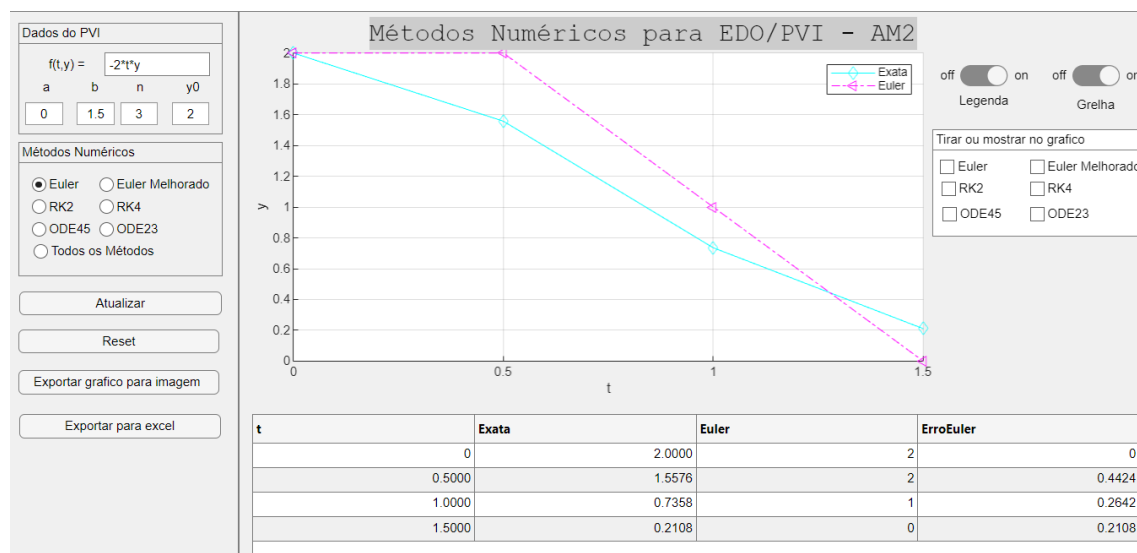


Figura 14 - Execução do método de Euler da expressão $y' = -2ty$ pela aplicação.

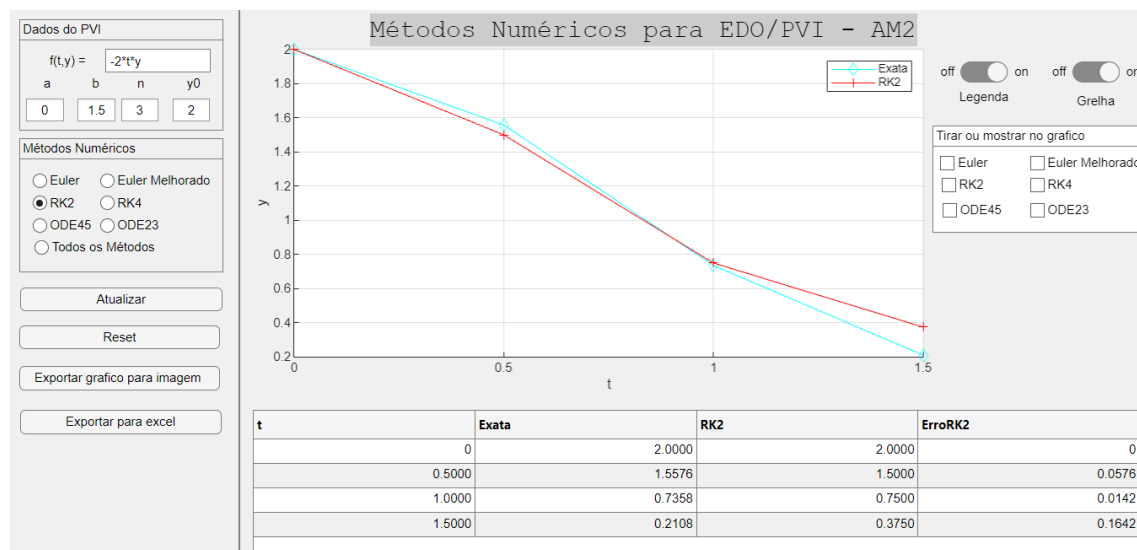


Figura 15 - Execução do método RK2 da expressão $y' = -2ty$ pela aplicação.

t	Exata	Euler	ErroEuler	RK2	ErroRK2
0	2.0000	2	0	2.0000	0
0.5000	1.5576	2	0.4424	1.5000	0.0576
1.0000	0.7358	1	0.2642	0.7500	0.0142
1.5000	0.2108	0	0.2108	0.3750	0.1642

Figura 16 - Tabela de resultados da execução de ambos os métodos anteriores.

i	ti	y(ti) Exata	Aproximações		Erros	
			yi Euler	yi RK2	y(ti)-yi Euler	y(ti)-yi RK2
0	0	2	2	2	0	0
1	0.5	1.5576	2	1.5000	0.4424	0.0576
2	1	0.7358	1	0.7500	0.2642	0.0142
3	1.5	0.2108	0	0.3750	0.2108	0.1642

(c) Qual das figuras seguintes representa graficamente uma solução do PVI dado? Justifique a sua resposta.

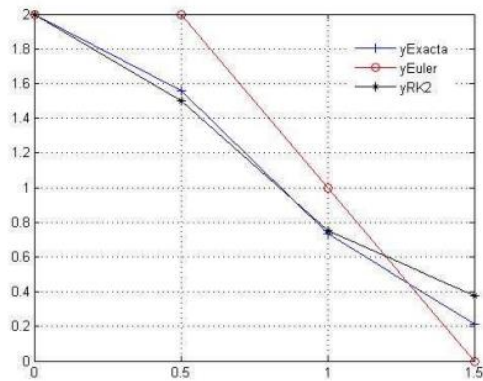


Figura 4

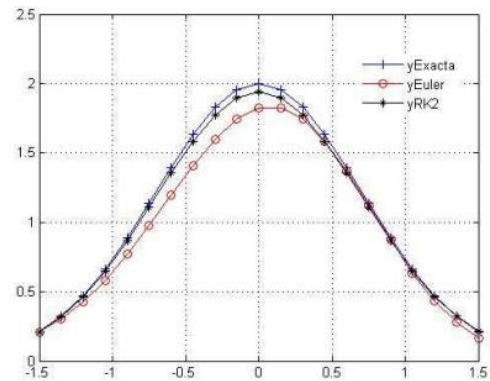


Figura 5

(d) Estabeleça um PVI cuja solução em modo gráfico coincida com a figura que excluiu na alínea anterior.

c)

Depois de analisar os dois últimos gráficos apresentados é fácil concluir que a figura 4 é a que representa graficamente uma solução do PVI dado.

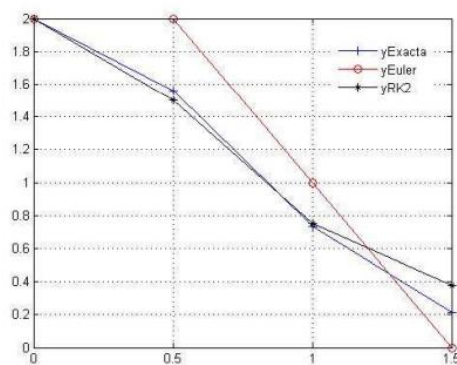
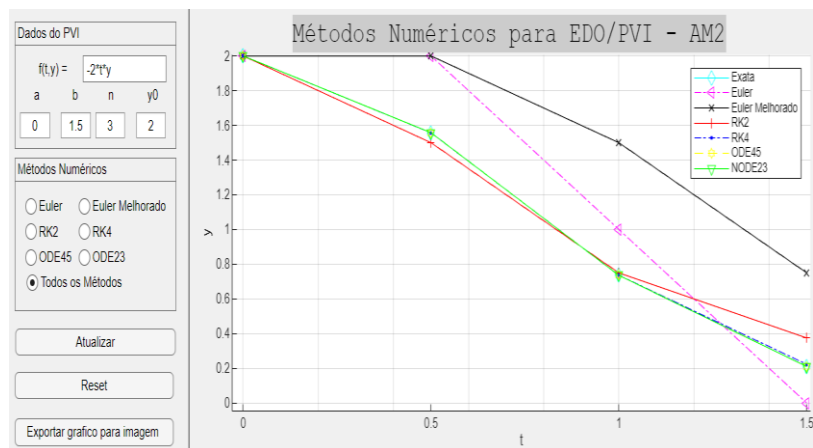


Figura 4



d)

Depois de reparar que o intervalo da figura 5 é $[-1.5, 1.5]$ e o ajustarmos a execução da nossa aplicação, é possível reparar que o gráfico da figura 5 se assemelha mais ao nosso gráfico da execução.

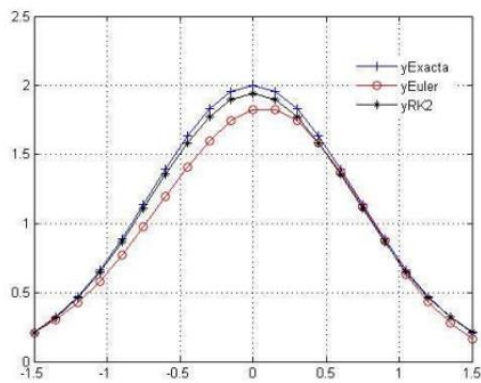
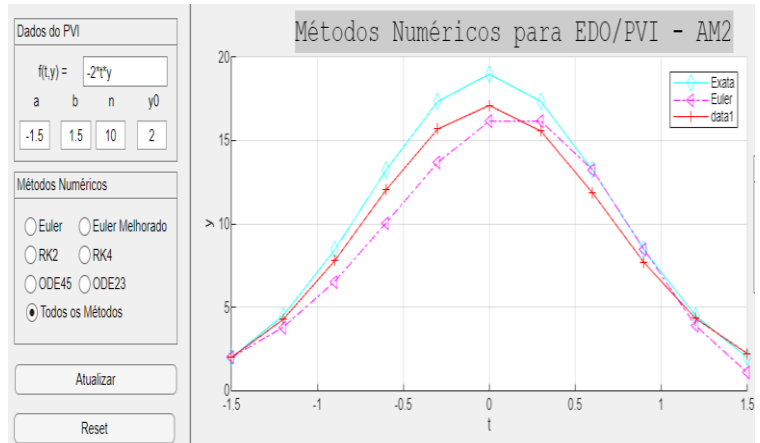


Figura 5



Se aumentarmos o número de subintervalos de 10 para 25 já conseguimos obter a figura 5 na nossa aplicação.

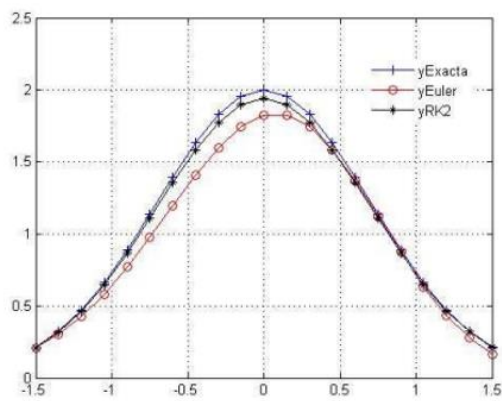
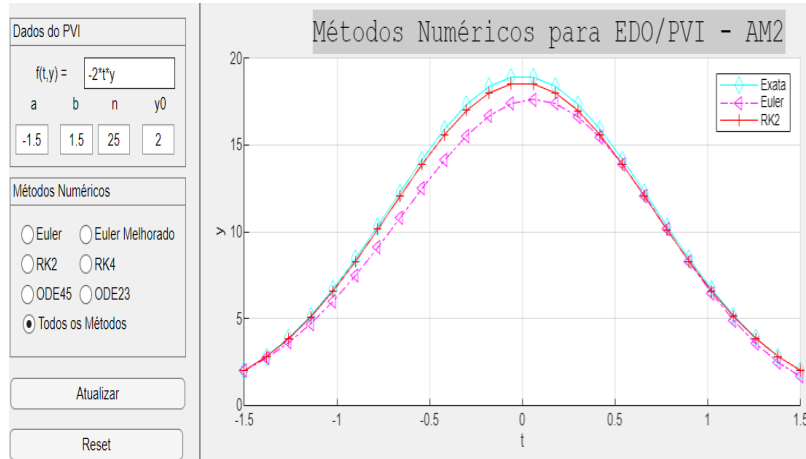


Figura 5



3.2 Problema de aplicação do Livro:

Differential Equations with Modeling Applications

3.2.1 Modelação Matemática do Problema

Exercício 1:

1. If air resistance is proportional to the square of the instantaneous velocity, then the velocity v of a mass m dropped from a height h is determined from

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2, \quad k > 0$$

Let $v(0) = 0$, $k = 0.125$, $m = 5$ slugs, and $g = 32 \text{ ft/s}^2$.

- (a) Use the Runge-Kutta method with $h = 1$ to find an approximation to the velocity of the falling mass at $t = 5 \text{ s}$.
- (b) Use a numerical solver to graph the solution of the initial-value problem.
- (c) Use separation of variables to solve the initial-value problem and find the true value $v(5)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2, \quad k > 0 \\ v(0) = 0 \\ k = 0.125 \\ m = 5 \text{ slugs} \\ h = 1 \\ g = 32 \text{ ft/s}^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} mv' = mg - kv^2, \quad k > 0 \\ v(0) = 0 \\ k = 0.125 \\ m = 5 \text{ slugs} \\ h = 1 \\ g = 32 \text{ ft/s}^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 * v' = 5 * 32 - 0.125v^2 \\ v(0) = 0 \\ k = 0.125 \\ m = 5 \text{ slugs} \\ h = 1 \\ g = 32 \text{ ft/s}^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v' = 32 - \frac{0.125v^2}{5} \\ v(0) = 0 \\ k = 0.125 \\ m = 5 \text{ slugs} \\ h = 1 \\ g = 32 \text{ ft/s}^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v' = 32 - 0.025v^2 \\ v(0) = 0 \\ k = 0.125 \\ m = 5 \text{ slugs} \\ h = 1 \\ g = 32 \text{ ft/s}^2 \end{array} \right.$$

Exercício 2:

2. A mathematical model for the area A (in cm^2) that a colony of bacteria (*B. forbiddenkeyworddendroides*) occupies is given by

$$\frac{dA}{dt} = A(2.128 - 0.0432A).$$

Suppose that the initial area is 0.24 cm^2 .

- (a) Use the Runge-Kutta method with $h = 0.5$ to complete the following table.

$t(\text{days})$	1	2	3	4	5
$A(\text{observed})$	2.78	13.53	36.30	47.50	49.40
$A(\text{approximated})$					

- (b) Use a numerical solver to graph the solution of the initial-value problem. Estimate the values $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$, and $A(5)$ from the graph.
- (c) Use separation of variables to solve the initial-value problem and compute the values $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$, and $A(5)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dt} = A(2.128 - 0.0432A) \\ t \in [1,5] \\ A(0) = 0.24\text{cm}^2 \\ h = 0.5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A' = A(2.128 - 0.0432A) \\ t \in [1,5] \\ A(0) = 0.24\text{cm}^2 \\ h = 0.5 \end{array} \right.$$

3.2.2 Resolução do Problema Através da Aplicação

Exercício 1:

b)

Como a alínea a) pede uma aproximação à velocidade em $t = 5s$ e a alínea c) pede o valor real de $y(5)$, introduzimos a equação na aplicação com intervalo $[0,5]$, $y_0 = 0$ e o método Runge-Kutta de ordem 4 pois é o mais preciso.

Visto que $h=1$ então, $h = \frac{b-a}{n} (=) 1 = \frac{5-0}{n} (=) n = 5$

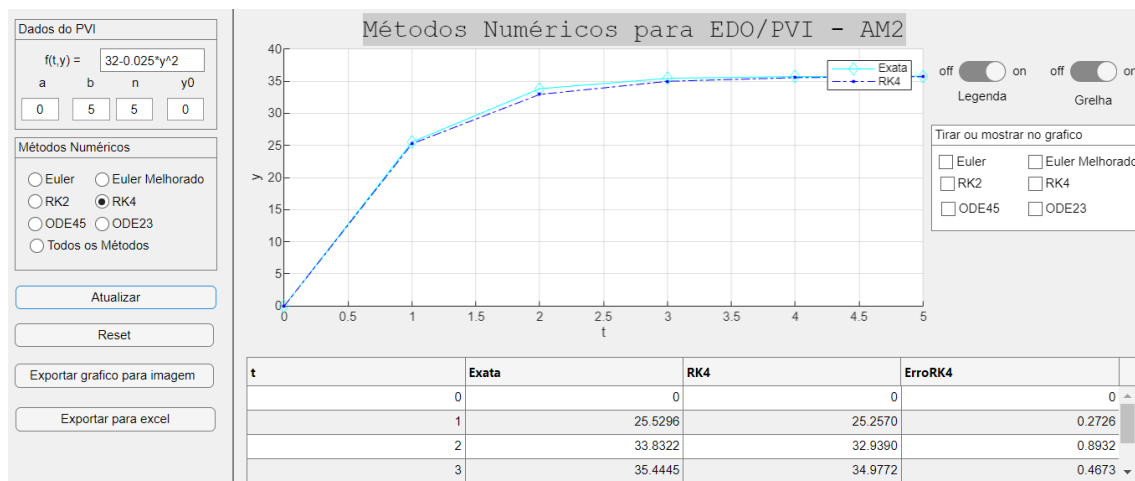


Figura 17 - Gráfico do PVI modelado anteriormente para o exercício 1.

t	Exata	RK4	ErroRK4
0	0	0	0
1	25.5296	25.2570	0.2726
2	33.8322	32.9390	0.8932
3	35.4445	34.9772	0.4673
4	35.7213	35.5503	0.1709
5	35.7678	35.7128	0.0550

Figura 18 - Tabela de resultados do método Runge-Kutta de ordem 4 do PVI

a) Ao analisar o gráfico e a tabela podemos afirmar que a aproximação da velocidade da massa em queda em $t = 5s$ é 35.7128.

c) Mais uma vez após analisar o gráfico e a tabela reparamos que o valor real de $y(5)$ é 35.7678.

Exercício 2:

Observando a tabela da alínea a) reparamos que nos são pedidos dados no intervalo $[0,5]$. O y_0 é nos dado na questão, ou seja, $y_0 = 0.24$.

Visto que $h=0.5$ então, $h = \frac{b-a}{n} (=) 0.5 = \frac{5-0}{n} (=) n = 10$

Usando a equação modelada anteriormente para este exercício com o método Runge-Kutta de ordem 4 mais uma vez pela razão de ser mais preciso, obtemos o seguinte gráfico e tabela:

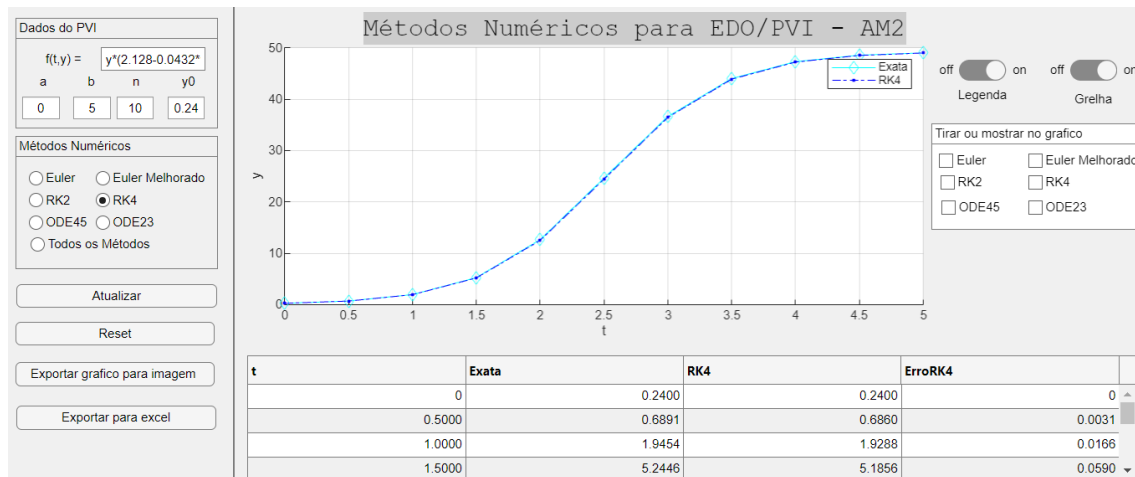


Figura 19 - Gráfico do PVI

t	Exata	RK4	ErroRK4
0	0.2400	0.2400	0
0.5000	0.6891	0.6860	0.0031
1.0000	1.9454	1.9288	0.0166
1.5000	5.2446	5.1856	0.0590
2.0000	12.6436	12.5007	0.1429
2.5000	24.6379	24.4334	0.2044
3	36.6283	36.4618	0.1665
3.5000	44.0210	43.9020	0.1189
4.0000	47.3164	47.2349	0.0814
4.5000	48.5710	48.5245	0.0465
5	49.0196	48.9965	0.0231

Figura 20 - Tabela de resultados do método Runge-Kutta de ordem 4 do PVI

Completemos agora o gráfico de acordo com os valores da tabela acima representada:

a)

$t(days)$	1	2	3	4	5
$A(observed)$	2.78	13.53	36.30	47.50	49.40
$A(approximated)$	1.93	12.5	36.46	47.23	49

b)

t	Exata	RK4	ErroRK4	
0	0,24	0,24	0	
0,5	0,689133018	0,686013999	0,003119019	
1	1,94541126	1,928773847	0,016637413	A(1)
1,5	5,244572562	5,185556402	0,05901616	
2	12,64355504	12,50067932	0,142875729	A(2)
2,5	24,6378852	24,43344779	0,204437408	
3	36,6283009	36,46180136	0,166499538	A(3)
3,5	44,02096641	43,90203505	0,118931364	
4	47,31635176	47,23494199	0,081409773	A(4)
4,5	48,57103668	48,52452007	0,046516609	
5	49,01957926	48,99649487	0,023084387	A(5)

Figura 21 - Tabela com os valores estimado de A(1), A(2), A(3), A(4) e A(5) pedidos pela alínea b.

3.3 Problemas de aplicação do exercício 2 do teste Farol

3.3.1 Modelação matemática do problema

Exercício 2.b)

(b) A força eletromotriz e de um circuito RL com intensidade i , resistência $R = 10 \Omega$ (ohms) e indutância $L = 0.5 \text{ h}$ (henry), é igual à queda de tensão Ri mais a força eletromotriz de autoindução $L \frac{di}{dt}$. Assim, a intensidade de corrente i , no instante t , se $e = 3 \sin(2t)$ (em volts) e $i = 6$ quando $t = 0$ é dada pela solução particular $i(t) = \frac{609}{101} e^{-20t} - \frac{30}{101} \sin 2t + \frac{3}{101} \cos 2t$. À medida que o tempo aumenta, o termo que envolve e^{-20t} perde influência no valor da intensidade da corrente. Diz-se que este termo é o termo do *estado transitório* e o outro é o termo do *estado permanente*.

Passo 01

$$e = Ri + L * \frac{di}{dt} \quad (=) \quad e = Ri + L * i'$$

Passo 02

$$e = 3 * \sin(2t)$$

$$R = 10 \Omega$$

$$L = 0.5 \text{ henry}$$

Passo 03

$$e = Ri + L * i'$$

$$(\Rightarrow) 3 \sin(2t) = 10i + 0.5 * i'$$

$$(\Rightarrow) 6 \sin(2t) = 20i + i'$$

$$(\Rightarrow) i' = 6 \sin(2t) - 20i$$

$$P \begin{cases} i' = 6 \sin(2t) - 20i \\ y(0) = 6 \end{cases}$$

Passo 04

$$i(t) = \frac{609}{101} * e^{-20t} - \frac{30}{101} * \sin(2t) + \frac{3}{101} * \cos(2t)$$

Verificar se esta é solução de P

$$i(0) = 6$$

$$(=) \frac{609}{101} * e^{-20*0} - \frac{30}{101} * \sin(2 * 0) + \frac{3}{101} * \cos(2 * 0) = 6$$

$$(=) \frac{609}{101} * e^0 - \frac{30}{101} * \sin(0) + \frac{3}{101} * \cos(0) = 6$$

$$(=) \frac{609}{101} * 1 - \frac{30}{101} * 0 + \frac{3}{101} * 1 = 6$$

$$(=) \frac{609}{101} + \frac{3}{101} = 6$$

$$(=) \frac{612}{101} \neq 6 \quad \text{Proposição falsa}$$

O valor lógico da afirmação colocada na questão da alínea b) é falso.

3.3.2 Resolução através da App desenvolvida

Analisando P notamos que a equação pode ser dividida em duas partes de forma a compreender melhor o exercício. Executando esta metade da equação de P, $i' = 6\sin(2t)$, com $y(0) = 0$ na app obtemos o seguinte gráfico:

Analisando este gráfico, podemos observar uma função sinusoidal e suspeitar que este é o gráfico do estado permanente.

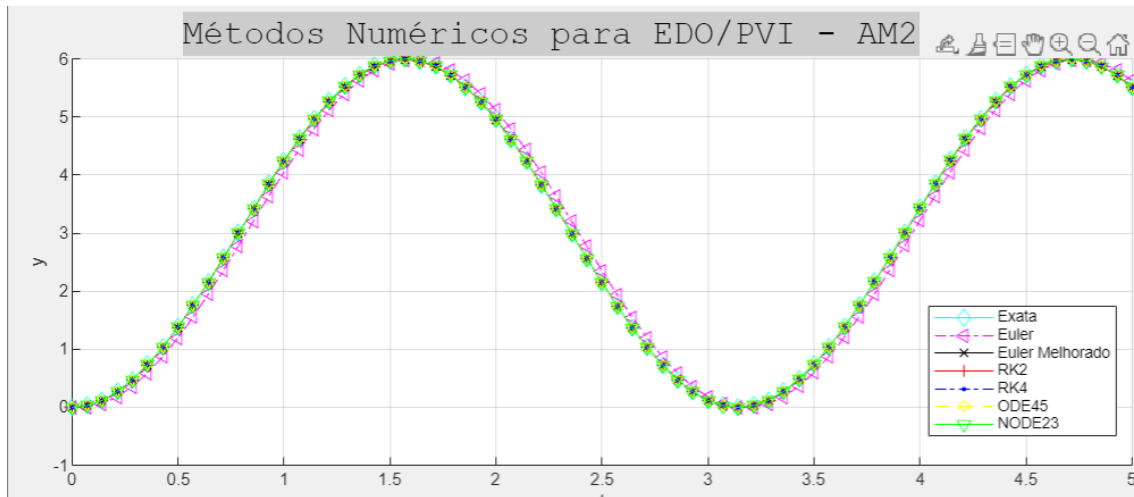


Figura 22 - Gráfico da função do estado permanente

Por fim executando a restante equação, $i' = -20i$, na app obtemos o seguinte gráfico:

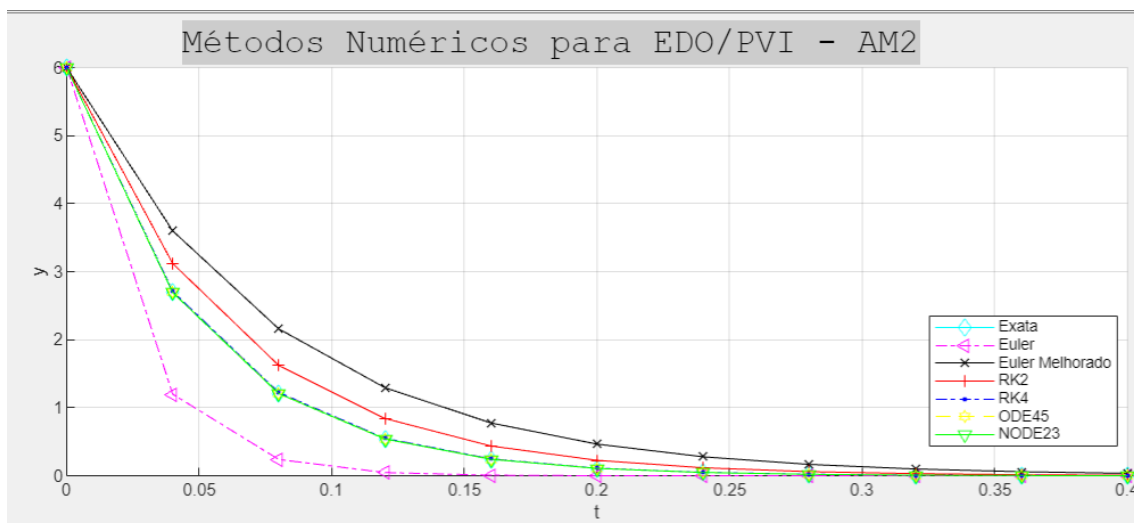


Figura 23 - Gráfico da função do estado transitório

E analisando este segundo gráfico de declive negativo, podemos suspeitar que este é o gráfico do estado transitório.

Usando agora a equação total de P, $i' = 6\sin(2t) - 20i$, na nossa app e no intervalo $[0,0.4]$ com $y(0) = 6$, conseguimos observar o seguinte resultado:

Como conclusão final, após a análise do gráfico e da tabela da execução de P, observamos o instante em que ocorre a mudança entre o estado transitório para o estado permanente. Esse instante é $t = 0.28$, que podemos observar com mais clareza na tabela, e ocorre quando a função transitória perde influxo para a função sinusoidal.

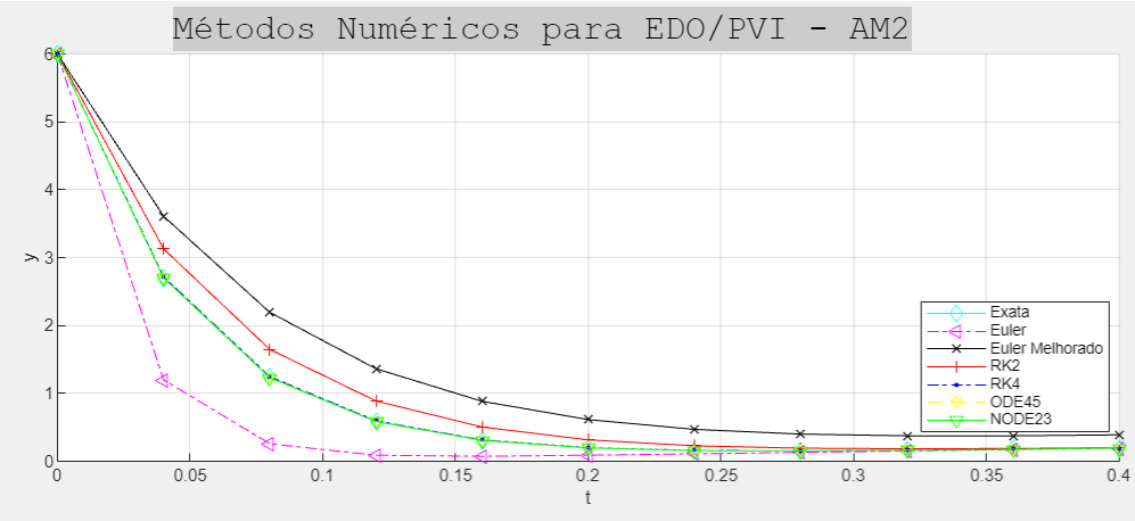


Figura 24 - Execução de P na nossa aplicação

t	Exata	Euler	Euler Modificado	RK2	RK4	ODE45	Heun	ErroEuler	ErroEulerMelhorado	ErroRK2	ErroRK4	ErroODE45	erroHeun
0	6.0000	6.0000	6.0000	6.0000	6.0000	6.0000	6.0000	0	0	0	0	0	0
0.0400	2.7034	1.2000	3.1296	3.1296	2.7179	2.7030	2.6150	1.5034	0.4261	0.4261	0.0145	4.5176e-04	0.0884
0.0800	1.2354	0.2592	1.6484	1.6484	1.2484	1.2355	1.1572	0.9762	0.4130	0.4130	0.0131	1.4991e-04	0.0782
0.1200	0.5888	0.0901	0.8895	0.8895	0.5976	0.5890	0.5369	0.4987	0.3008	0.3008	0.0088	2.0283e-04	0.0518
0.1600	0.3110	0.0751	0.5060	0.5060	0.3163	0.3112	0.2805	0.2360	0.1950	0.1950	0.0053	1.5097e-04	0.0305
0.2000	0.1987	0.0905	0.3174	0.3174	0.2017	0.1988	0.1819	0.1082	0.1187	0.1187	0.0030	9.2920e-05	0.0169
0.2400	0.1604	0.1116	0.2298	0.2298	0.1620	0.1605	0.1515	0.0489	0.0694	0.0694	0.0016	5.3966e-05	0.0089
0.2800	0.1549	0.1331	0.1943	0.1943	0.1558	0.1549	0.1503	0.0218	0.0394	0.0394	0.0008	2.9724e-05	0.0046
0.3200	0.1636	0.1541	0.1855	0.1855	0.1640	0.1636	0.1613	0.0095	0.0219	0.0219	0.0004	1.5798e-05	0.0023
0.3600	0.1780	0.1741	0.1899	0.1899	0.1782	0.1780	0.1769	0.0039	0.0119	0.0119	0.0002	8.1746e-06	0.0011
0.4000	0.1944	0.1931	0.2007	0.2007	0.1945	0.1944	0.1939	0.0013	0.0063	0.0063	0.0001	4.2325e-06	0.0005

Figura 25 - Tabela obtida na execução de P na nossa aplicação

4. Conclusão

Após uma análise da nossa prestação e desempenho no trabalho realizado, é com grande satisfação que concluímos, atingimos os objetivos propostos com dedicação. A colaboração mútua entre todos membros do grupo foi fundamental para a conclusão do trabalho. Este desafio não só nos permitiu cumprir com os requisitos estabelecidos, mas também adquirir um conjunto valioso de conhecimentos na disciplina dos métodos numéricos. Além dos resultados obtidos, este trabalho permitiu-nos desenvolver não só competências em MATLAB, mas também habilidades de pesquisa e compreensão de informações de forma independente. Assim, concluímos que os métodos numéricos para resolução de problemas de valor inicial são úteis para aplicações práticas, proporcionando soluções e contribuindo para o nosso desenvolvimento acadêmico e profissional. Observamos que, de modo geral, um aumento no número de subintervalos resulta em uma redução do erro em todos os métodos estudados.

5. Bibliografia

https://pt.wikipedia.org/wiki/Problema_de_valor_inicialhttps://www.ime.unicamp.br/~pjssilva/pdfs/notas_de_aula/ms211/Problemas_de_Valor_Inicial.pdf

https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Euler

<chromeextension://efaidnbmnnnibpcajpcgklcfindmkaj/https://www.eng.auburn.edu/~tplacek/courses/3600/ode45waterloo.pdf>

<https://www.somatematica.com.br/superior/equacoesdif/eq.php>

<https://www.infoescola.com/matematica/equacoes-diferenciais/>

Fórum Matlab: <https://moodle.isec.pt/moodle/mod/forum/view.php?id=236987>