Circuito RC

Introducción

En el siguiente desarrollo se discute el análisis del circuito RC. Estudie detalladamente el desarrollo y elabore notas de su reflexión sobre este tema. Después de estudiar este material usted debe contrastar su análisis con el análisis que se presenta en el texto del profe Serway, secciones 27.1, 27.2 y 28.4.

Vamos a analizar el proceso de carga y descarga de un capacitor, para ello debemos inicialmente precisar y delimitar algunos elementos conceptuales.

Sabemos que la corriente es el flujo de portadores de carga a través del área transversal de un conductor en el tiempo (figura, izquierda),

Y sabemos que los conductores están hechos de materia, es decir, átomos organizados en una estructura geométrica llamada red cristalina. Como los portadores de carga deben moverse a través de esta red cristalina, encuentran oposición a su movimiento (chocan con los núcleos de estos átomos que están fijos en sus posiciones en la red, bueno, no completamente quietos, en realidad vibrando. Ver figura, derecha); esta oposición se caracteriza por una cualidad llamada resistencia que depende de la estructura del conductor (resistividad: ρ) y de la forma del conductor (longitud y sección).

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

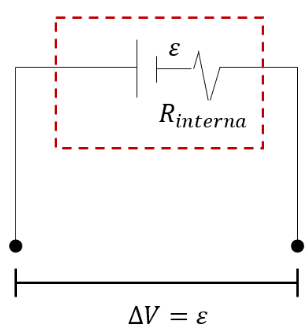
Donde L es la longitud del conductor y A el área de su sección transversal.

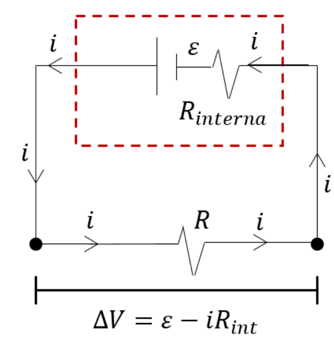
Experimentalmente se encuentra que corriente y resistencia se relacionan mediante

$$\Delta V = iR$$

La cual es una expresión equivalente a la ley de Ohm.

Ahora bien, sabemos que una fuente (batería, pila, …) puede generar una diferencia de potencial entre sus bornes (por algún proceso químico, …). El punto es que una cosa es la batería sola y otra la batería conectada a un circuito. Si la batería no está conectada a un circuito la diferencia de potencial entre sus bornes es la que dice en la etiqueta, 12Volt, …Sin embargo cuando la conectamos a un circuito ella genera una diferencia de potencial en el circuito, lo que lleva a que circule corriente en el circuito. La corriente también pasa por la batería y la batería está hecha de materia, luego la batería misma ofrece una pequeña resistencia a la corriente.





La diferencia de potencial que la fuente puede entregar (voltaje nominal o de etiqueta) se llama fem: ε, y la diferencia de potencial de la fuente cuando está conectada a un circuito es lo que puede entregar menos lo que se pierde por la resistencia interna de la batería (por estar hecha de materia) debido a que circula corriente. Cuando analizamos circuitos en el papel o en un simulador trabajamos con el potencial de la batería que dice en la etiqueta; por esta razón es que se utiliza la fem para las baterías en circuitos. Experimentalmente, si se puede medir la diferencia de potencial en cada elemento del circuito. La diferencia entre el voltaje fem y el medido en una batería conectada es muy pequeña (pero la hay).

Por otro lado, resulta que, al estudiar circuitos eléctricos, debemos escoger inicialmente un sentido en el cual creemos que circula la corriente. A continuación, debemos escoger un sentido para ir recorriendo el circuito e ir pasando por los elementos conectados en el circuito. No hay un sentido especial para recorrer el circuito y cualquiera de los dos sentidos posibles llevan al resultado correcto si se sigue el siguiente acuerdo:

Al pasar por una fuente (aplica también para capacitores), si pasamos primero por el polo negativo y después por el positivo, la fem (diferencia de potencial de la fuente) es positiva ($\varepsilon > 0$). Si pasamos primero por el polo positivo y después por el negativo, la fem es negativa ($\varepsilon < 0$).

$\varepsilon > 0$ $\qquad\qquad$ $\varepsilon < 0$

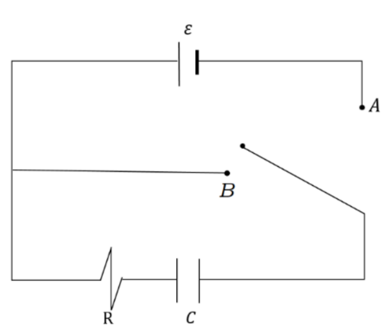
Al pasar por un resistor, si pasamos por él, en el mismo sentido de la corriente, la diferencia de potencial entre los extremos del resistor es negativa ($\Delta V < 0$). Si pasamos por el resistor en sentido contrario de la corriente, la diferencia de potencial entre los extremos del resistor es positiva ($\Delta V > 0$). Recuerde que la ley de Ohm permite expresar $\Delta V = iR$.

$\Delta V = iR < 0$ $\qquad\qquad$ $\Delta V = iR > 0$

El convenio de signos para las corrientes es más simple, corrientes que entran a un nodo son positivas y corrientes que salen de un nodo son negativas.

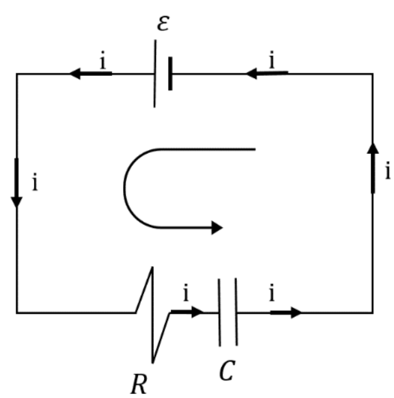
Análisis del circuito RC

Ahora vamos a considerar el circuito de interés en este curso, el circuito RC en serie. El circuito se ilustra en la siguiente figura. Observe que hay un interruptor el cual puede conectarse en A o en B. El análisis de este circuito implica dos procesos físicos fundamentales, almacenamiento de carga y energía en el proceso de cargar el capacitor y, la entrega de carga y energía en el proceso de descargar del capacitor. Veremos uno por uno.



i) Proceso de cargar el capacitor:

Si se conecta el interruptor en A, se tiene el circuito de una sola espira que se muestra a continuación,



Esto es un capacitor de capacitancia C, conectado en serie con un resistor de resistencia R y una fuente de fem ε. Como solo hay una fuente, solo es posible un sentido de circulación de la corriente, el que se indica en la gráfica (de los puntos de mayor potencial hacia los de menor potencial). La línea mayor en la fuente es el borne positivo y la menor el negativo.

Si recorremos la espira en el sentido que se indica en la gráfica, el convenio de signos para el potencial nos dice que

$$\varepsilon - V_R - V_C = 0 \tag{1}$$

Según la ley de Ohm y la definición de capacitancia

$$\Delta V = iR$$

$$C = \frac{q}{V} \quad \rightarrow \quad V = \frac{q}{C}$$

la ecuación queda

$$\varepsilon - iR - \frac{q}{C} = 0$$

Dividiendo toda la ecuación por R y teniendo en cuenta la definición de corriente $i = dq/dt$ se obtiene

$$\frac{\varepsilon}{R} - \frac{dq}{dt} - \frac{1}{RC}q = 0$$

Despejando la derivada de la carga respecto al tiempo y organizando se tiene

$$\frac{1}{RC}(\varepsilon C - q) = \frac{dq}{dt}$$

De la definición de capacitancia (más arriba) se ve que la máxima carga que puede almacenar el capacitor es

$$q_{max} = \varepsilon C$$

Por consiguiente, la expresión anterior queda

$$\frac{1}{RC}(q_{max} - q) = \frac{dq}{dt}$$

Esta expresión es una EDO separable, así que separando variables (carga eléctrica a un lado y tiempo en el otro) e integrando queda

$$\int_0^t \frac{dt}{RC} = \int_0^{q(t)} \frac{dq}{q_{max} - q}$$

Los límites de integración reflejan el hecho que en $t = 0$ el capacitor esta descargado $q = 0$ y, en un tiempo t posterior, el capacitor tiene una carga $q(t)$.

Integrando y evaluando se tiene

$$\frac{t}{RC} = -\ln(q_{max} - q)\Big|_0^{q(t)}$$

$$\frac{-t}{RC} = \ln\left|\frac{q_{max} - q(t)}{q_{max}}\right|$$

Aplicando exponencial a ambos lados se encuentra que

$$e^{\frac{-t}{RC}} = \frac{q_{max} - q(t)}{q_{max}}$$

Despejando la función carga en el tiempo se tiene

$$q(t) = q_{max}(1 - e^{\frac{-t}{RC}})$$

La constante RC puede mostrarse que tiene unidades de tiempo, por tanto, se define la constante de tiempo del circuito, $\tau = RC$ y la expresión para la carga eléctrica en el tiempo durante el proceso de cargar el capacitor es

$$q(t) = q_{max}(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}) \tag{2}$$

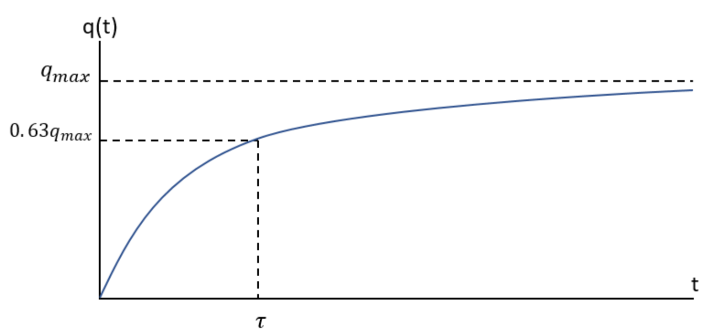
Observe que en $t = 0$ la expresión (2) da $q(t) = 0$, en $t \to \infty$ da $q(t) = qmax$ y en $t = \tau$ veamos,

$$q(t) = q_{max}(1 - e^{\frac{-\tau}{\tau}})$$

$$q(t) = q_{max}(1 - e^{-1}) = q_{max}(1 - \frac{1}{e})$$

$$q(t) = 0.63q_{max}$$

De acuerdo con estos datos la gráfica de la función carga eléctrica en el capacitor en el tiempo para el proceso de cargar el capacitor queda

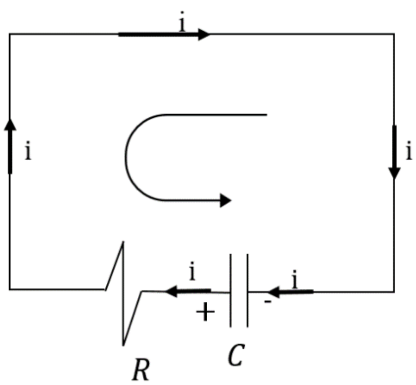


Esta grafica nos dice que la carga eléctrica en el capacitor aumenta rápidamente al principio hasta el tiempo $t = \tau$ y después de este instante aumenta más lentamente y cada vez más lentamente: Esto se debe a que el capacitor cuando esta vacío recibe fácilmente carga, pero a medida que se va llenando es más difícil llevarle carga debido a la repulsión entre cargas de la misma naturaleza.

Taller

1. En el problema anterior, utilice la definición de corriente eléctrica como derivada de la carga en el tiempo, $i = dq/dt$, para obtener la función corriente en el tiempo para el proceso de cargar el capacitor. De acuerdo con lo aprendido al final del problema anterior trace la gráfica de la función corriente en el tiempo para este proceso. Compare las gráficas de las funciones *q(t)* e *i(t)* y proponga una interpretación física para la relación entre estas variables del circuito a medida que pasa el tiempo, desde que el capacitor está vacío hasta que se carga completamente.

2. ii) Proceso de descargar el capacitor. En el circuito RC discutido en este documento, si se conecta el interruptor en B se obtiene un circuito en serie solo con el capacitor cargado y el resistor, como se muestra en la figura



Al conectar el interruptor en B, básicamente se está retirando la fuente del circuito lo cual equivale a hacer la fem cero en la ecuación (1). Hágalo y resuelva la ecuación resultante para obtener las funciones carga y corriente en el tiempo durante el proceso de descarga. Trace las gráficas de carga eléctrica y corriente eléctrica en el tiempo para este proceso. Compare las gráficas con las del proceso de carga y explique.