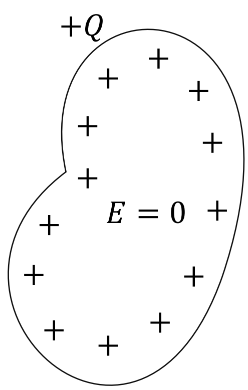
CAMPOS ELECTROSTÁTICOS

CAMPOS ELÉCTRICOS EN LA MATERIA

Considere un conductor con carga neta +Q,



La carga se ubica en la superficie del conductor y en el interior del conductor:

$$\vec{E} = 0$$

Ahora, como

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

Entonces

$$V = Constante.$$

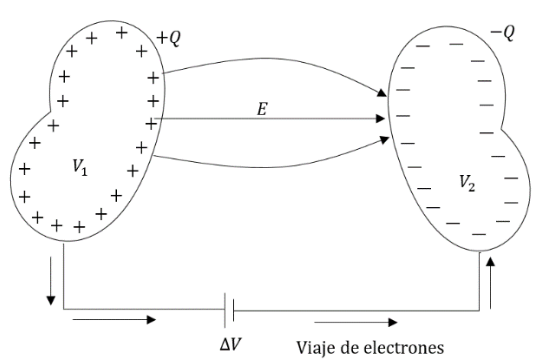
Y todo el conductor queda sometido a un potencial V.

La razón entre la carga y el potencial al que está sometido un conductor se llama capacitancia y es una propiedad característica de los conductores.

$$C = \left|\frac{Q}{V}\right| \qquad \left[\frac{Coulomb}{Volt} = F\colon Faraday\right]$$

Usualmente se usa $1\mu F = 10^{-6}F,\ 1nF = 10^{-9}F.$

Ahora considere dos conductores sometidos a una diferencia de potencial ΔV suministrada por una fuente,



Este sistema se llama capacitor, permite almacenar una carga Q y su capacitancia es

$$C = \left|\frac{Q}{\Delta V}\right| \tag{1}$$

Cuando se pide calcular la capacitancia de un sistema, el problema se reduce a predecir el ΔV necesario para almacenar Q. Esto se logra mediante la relación entre campo y potencial eléctrico

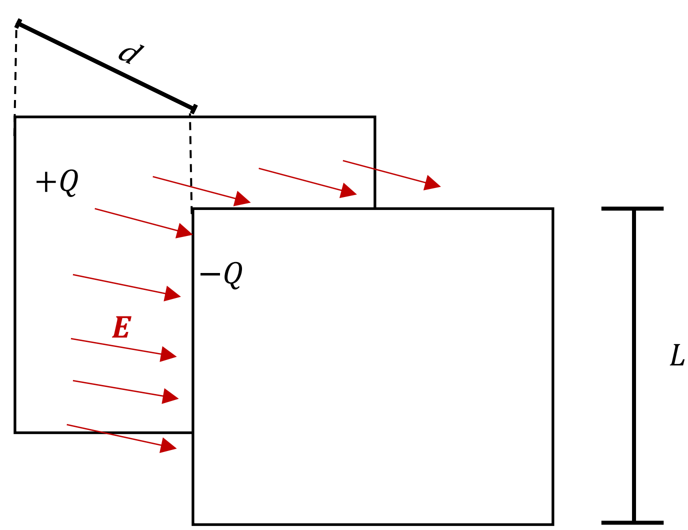
$$\Delta V = -\int_{r1}^{r2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \tag{2}$$

Obviamente se debe hallar primero el campo eléctrico $\vec{E}$ entre los conductores usando la Ley de Gauss

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \tag{3}$$

Problema: Capacitor de placas paralelas

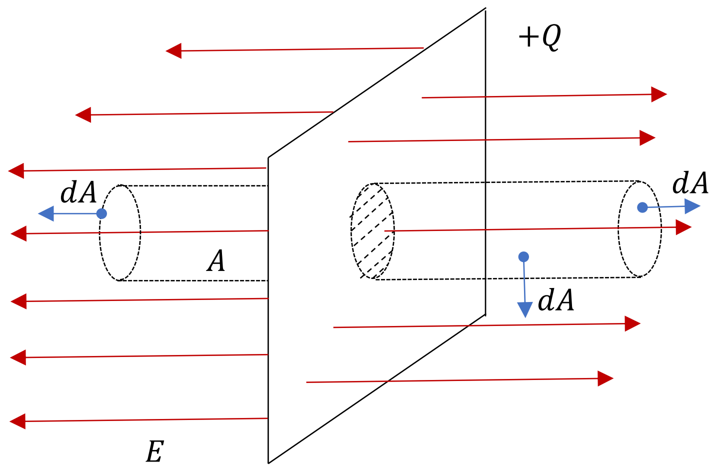
Dos láminas conductoras, planas y cuadradas de lado L, están separadas a una distancia d (d << L) y tienen cargas $+Q$ y $-Q$ respectivamente. Calcular la capacitancia del sistema.



solución

Se comienza calculando el campo eléctrico $\vec{E}$ entre las placas, para esto, considere la lámina con carga $+Q$ y la ecuación (3). Veamos,

A: Superficie Gaussiana cilíndrica que pasa por la lámina, sus tapas son equidistantes a la lámina.



$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\int_{Envol} \vec{E} \cdot d\vec{A} + 2 \int_{Tapa} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

En la gráfica se observa que

$\vec{E} \perp d\vec{A}$ en la envolvente

$\vec{E} \parallel d\vec{A}$ en las tapas

por tanto

$$2 \int_{Tapa} EdA = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Densidad superficial de carga eléctrica

$$\sigma = \frac{Q}{A}, \ \ siendo\ A = L^2 \ \ el\ área\ de\ la\ lámina$$

Reemplazando

$$2 \int_{Tapa} EdA = \frac{\sigma A_{enc}}{\varepsilon_0}$$

E es uniforme en toda la tapa porque la tapa está a igual distancia de la lámina

$$2E \int_{Tapa} dA = \frac{\sigma A_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Integramos

$$2EA_{Tapa} = \frac{\sigma A_{enc}}{\varepsilon_0}$$

El A_{enc} es la “sombra” de A_{Tapa}

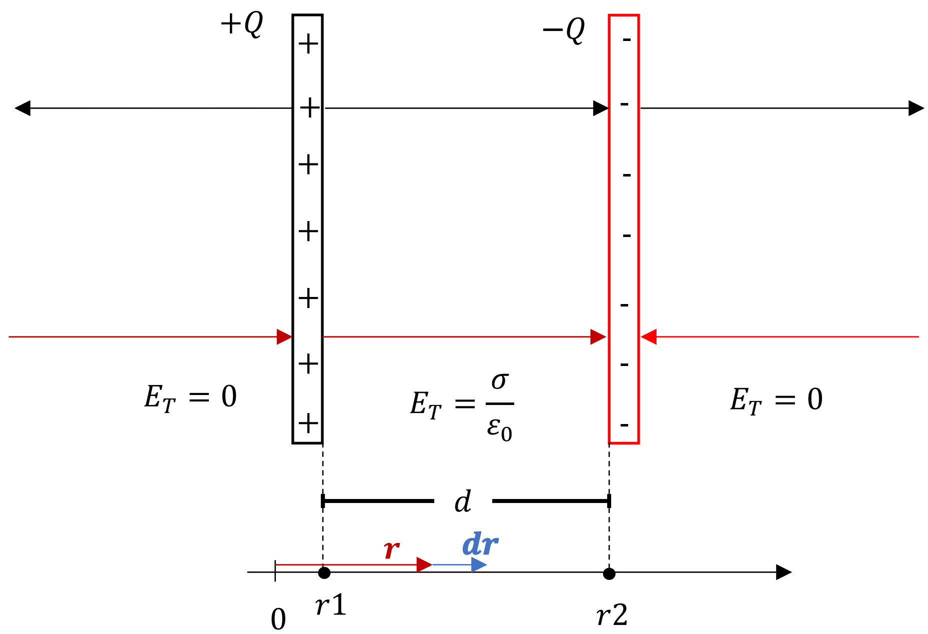
$$A_{tapa} = A_{enc}$$

El campo es entonces

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Y su dirección es de la placa positiva hacia el exterior. Puede probarse con un análisis similar (usted debe desarrollarlo explícitamente) que el campo para la placa negativa es de la misma magnitud y de dirección hacia la placa.

Ahora analicemos el campo entre las dos placas, separadas una distancia d << L. Puesto que el campo eléctrico neto es la suma del campo de la lámina positiva (líneas superiores negras) y el de la lámina negativa (líneas inferiores rojas), se puede ver que el campo eléctrico tiene los valores indicados en cada región.



Además, Se aprovechó el diagrama para especificar el camino para resolver la integral de camino necesaria para calcular ΔV mediante la ecuación (2). Veamos,

En la gráfica se ve que $\vec{E} \parallel d\vec{r}$ por tanto,

$$\Delta V = -\int_{r1}^{r2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{r1}^{r2} Edr = -\int_{r1}^{r2} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dr$$

$$\Delta V = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(r_2 - r_1) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d, \qquad |\Delta V| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

La capacitancia de acuerdo con la ecuación (1) es entonces,

$$C = \left|\frac{Q}{\Delta V}\right| = \frac{Q}{\frac{\sigma}{\epsilon_0}d} = \frac{Q}{\frac{Qd}{\epsilon_0 A}}$$

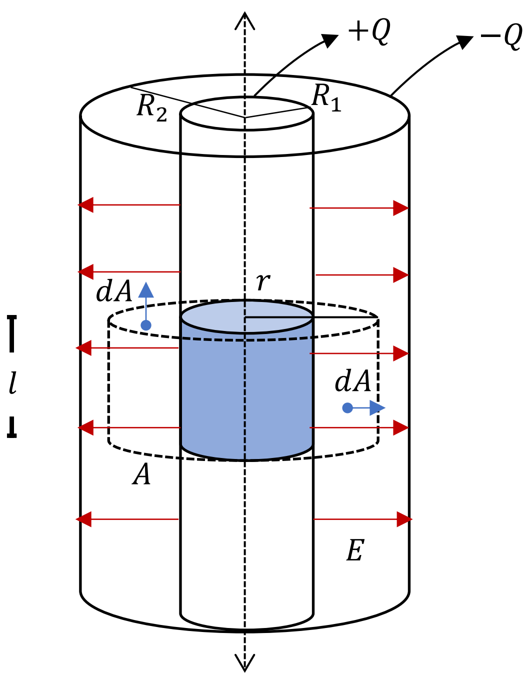
$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \qquad para\ este\ caso\ A = L^2$$

Observe que la capacitancia no depende de la carga, pero sí de la geometría del sistema.

Problema: Capacitor cilíndrico

Dos láminas conductoras, cilíndricas, coaxiales de radio $R_1\ y\ R_2$ $(R_1 < R_2)$ con cargas $+Q\ y -Q$ respectivamente. Calcular la capacitancia del sistema.

A: Superficie Gaussiana cilíndrica de radio r $(R_1 < r < R_2)$, longitud l y coaxial a los cilindros conductores.



$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\int_{Envol} \vec{E} \cdot d\vec{A} + 2\int_{Tapa} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

En la gráfica se observa que

$\vec{E}\ \parallel d\vec{A}$ en la envolvente.

$\vec{E}\ \perp d\vec{A}$ en las tapas

por tanto

$$\int_{Envol} EdA = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\int_{Envol} EdA = \frac{\sigma A_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Como $A_{enc} = 2\pi R_1 l$

$$\int_{Envol} E \cdot dA = \frac{\sigma 2\pi R_1 l}{\varepsilon_0}$$

Todos los puntos de la superficie Gaussiana están a la misma distancia de la superficie del cilindro contenido $\longrightarrow E\ uniforme$

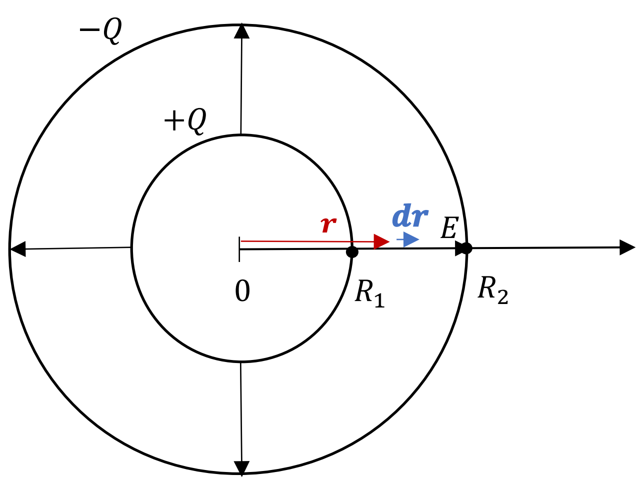
$$E\int_{Envol} dA = \frac{\sigma 2\pi R_1 l}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E(2\pi r l) = \frac{\sigma 2\pi R_1 l}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0 r}, \quad como\ \sigma = \frac{Q}{2\pi R_1 L}$$

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{L}\cdot\frac{1}{r}$$

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda}{r} \quad o \quad E = \frac{2k\lambda}{r}$$

A continuación, se define la integral de camino necesaria para calcular ΔV.



$$\Delta V = -\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

Es claro que $\vec{E} \parallel d\vec{r}$

$$\Delta V = -\int_{R_1}^{R_2} E dr$$

$$\Delta V = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{2k\lambda}{r} dr$$

$$\Delta V = -2k\lambda \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$\Delta V = -2k\lambda \ln\left|\frac{R_2}{R_1}\right|$$

La capacitancia es entonces:

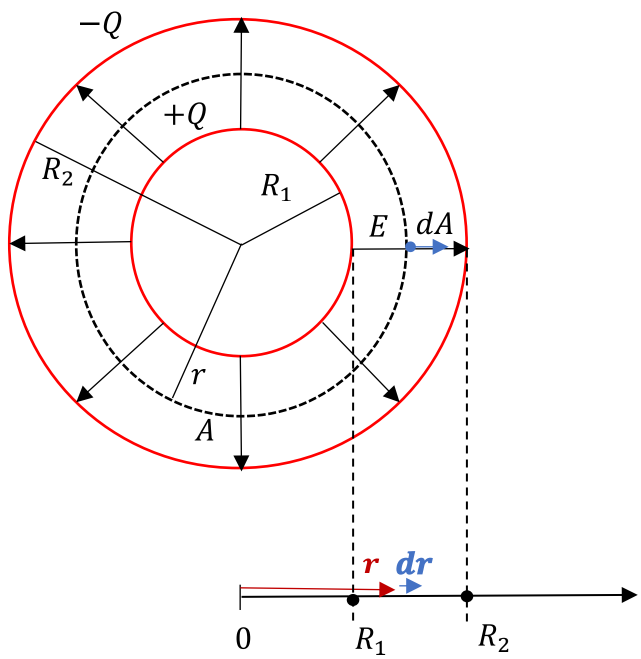
$$C = \left|\frac{Q}{\Delta V}\right| = \left|\frac{Q}{2k\lambda \ln\left|\frac{R_2}{R_1}\right|}\right| = \left|\frac{Q}{2k\frac{Q}{L}\ln\left|\frac{R_2}{R_1}\right|}\right|$$

$$C = \left|\frac{L}{2k\ln\left|\frac{R_2}{R_1}\right|}\right| \quad o \quad C = \left|\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\left|\frac{R_2}{R_1}\right|}\right|$$

Problema: Capacitor esférico

Dos cascarones esféricos concéntricos de radios R_1 y R_2 $(R_1 < R_2)$, con cargas $+Q$ y $-Q$, respectivamente. Calcular la capacitancia del sistema.

A: Esfera de radio r $(R_1 < r < R_2)$, concéntrica a las esferas conductoras.



$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

En la gráfica se observa que

$$\vec{E} \parallel d\vec{A}$$

$$\oint_A E \cdot dA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Todos los puntos de la esfera Gaussiana están a la misma distancia de la esfera conductora, es decir, E es constante en magnitud sobre todo A.

$$E \oint_A dA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \quad o \quad E = \frac{kQ}{r^2}$$

Ahora hallamos ΔV

$$\Delta V = -\int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

En la gráfica se observa que $\vec{E} \parallel d\vec{r}$

$$\Delta V = -\int_{R_1}^{R_2} E dr$$

$$\Delta V = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{kQ}{r^2} dr$$

$$\Delta V = -kQ \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr = kQ(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1})$$

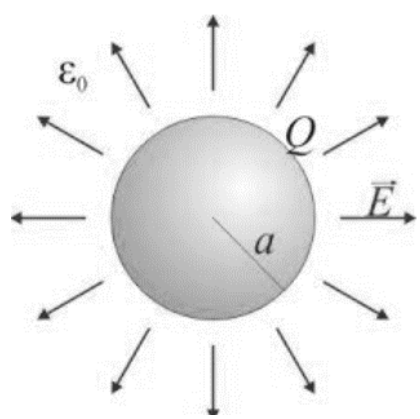
La capacitancia es entonces:

$$C = \left|\frac{Q}{\Delta V}\right| = \left|\frac{Q}{kQ(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1})}\right| = \left|\frac{4\pi\varepsilon_0}{(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1})}\right|$$

Problema

A partir del resultado anterior, calcular capacitancia de un solo cascaron conductor de radio R.

Solución



Problema

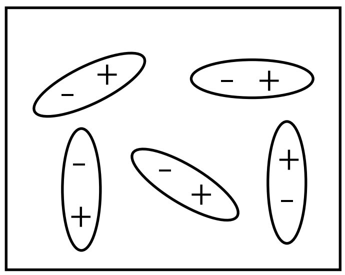
Demostrar que, al colocar un bloque dieléctrico en la región entre las placas de un capacitor de placas paralelas, este aumenta la capacitancia en un factor K_a. Siendo K_d la constante dieléctrica del material.

Solución

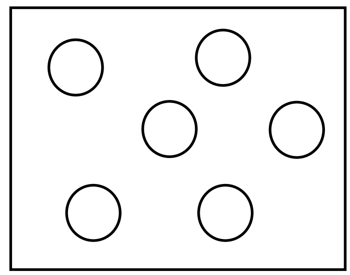
Para resolver el problema, se debe conocer que un material dieléctrico (tanto polar como no polar) colocado en un campo eléctrico externo $\vec{E}$ se ***polariza***.

DIELÉCTRICO POLAR — **DIELÉCTRICO NO POLAR**

Sin campo externo

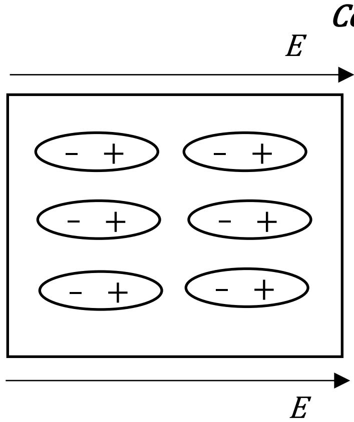


Dipolos orientados aleatoriamente.

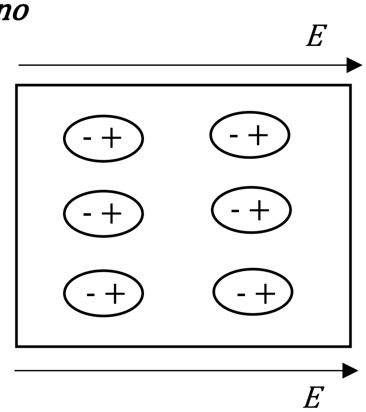


Moléculas orientadas aleatoriamente.

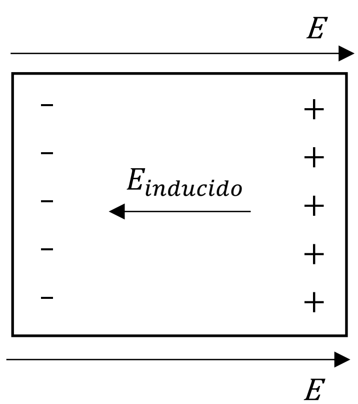
Con campo externo



Dipolos se orientan según el campo.

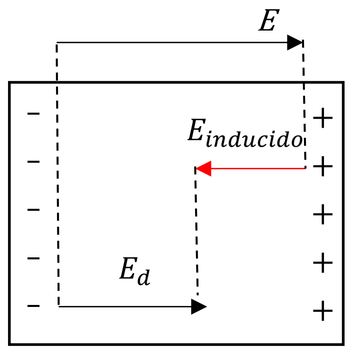


Las moléculas se deforman y aparece una polaridad.



Como resultado de la polarización del dieléctrico (tanto polar como no polar) dentro del dieléctrico aparece un campo inducido E_{ind}.

El campo neto en el interior del dieléctrico, E_d es entonces:



$$\vec{E}_d = \vec{E} + \vec{E}_{ind}, \qquad E_d = E - E_{ind}, \qquad E_d < E$$

Experimentalmente se encuentra que la razón entre el campo externo y el campo neto dentro del dieléctrico es

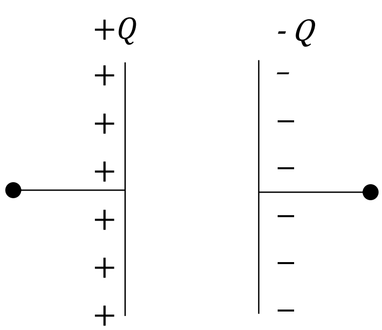
$$\frac{E}{E_d} = K_d \qquad por\ tanto \qquad E_d = \frac{1}{K_d} E$$

Donde K_d es la constante dieléctrica del material. Ahora bien, debido a la relación entre campo eléctrico y diferencia de potencial se sigue que:

$$\Delta V_d = \frac{1}{K_d} \Delta V$$

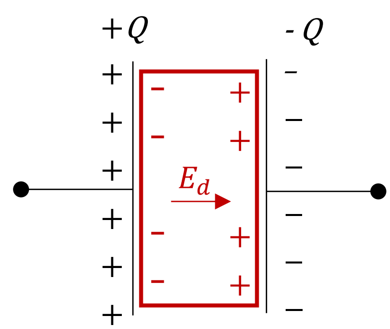
La diferencia de potencial dentro del dieléctrico disminuye en la misma proporción. Ahora supóngase que se coloca un bloque de material dieléctrico de constante K_d en el interior de un capacitor de placas paralelas.

Sin dieléctrico



$$C_0 = \left|\frac{Q}{\Delta V}\right|$$

Con dieléctrico



$$C = \left|\frac{Q}{\Delta V_d}\right|$$

$$C = \frac{Q}{\frac{1}{K_d}\Delta V} = K_d \frac{Q}{\Delta V}$$

Por lo tanto, obtenemos lo siguiente:

$$C = K_d \cdot C_0$$

Donde C_0 es la capacitancia sin el material dieléctrico. Por tanto, introducir un dieléctrico en el capacitor es equivalente a multiplicar la capacitancia por un factor igual a la constante dieléctrica del material.