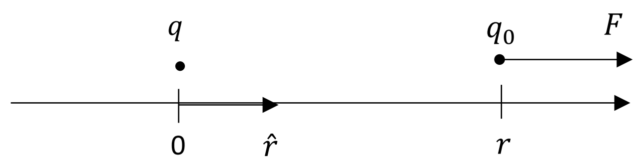
CAMPOS ELECTROSTÁTICOS

POTENCIAL ELÉCTRICO

Considerese la fuerza eléctrica entre dos cargas q y q_0 separadas una distancia r, vista desde un sistema de referencia en q



$$\vec{F} = k\frac{q \cdot q_0}{r^2}\hat{r}$$

Esta fuerza es conservativa (fuerza central); entonces existe una función escalar llamada energía potecial $U(r)$ asociada a $\vec{F}$, tal que $\vec{F}$ es menos el gradiente de dicha función potencial

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\,U(r)$$

O bien,

$$\Delta U = -\int_{r1}^{r2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

A continuación, nos interesa saber cuánta es la energía potencial asociada a la fuerza eléctrica entre las dos cargas puntuales consideradas arriba.

<u>Problema</u>

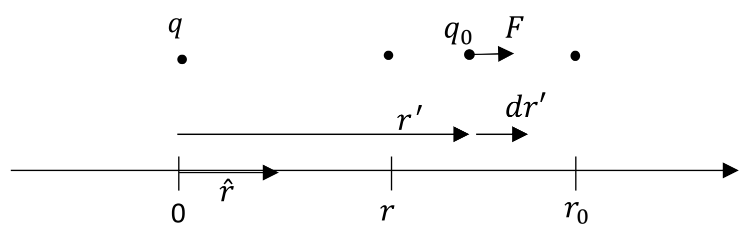
Calcular la energía potencial eléctrica asociada a la interacción eléctrica entre dos cargas q y q_0 separadas una distancia r.

<u>Solución</u>

Para calcular dicha energía utilizamos la forma integral de la relación fuerza energía potencial

$$\Delta U = -\int_{r1}^{r2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Es decir debemos calcular el trabajo necesario para traer a q_0 desde una posición arbitraria r_0 hasta una posición a una distancia r de q, mientras q_0 está sometida a la fuerza $\vec{F}$. Veamos, en el sistema de referencia del observador O, se ha indicado la situación de q_0 en una posición intermedia entre r_0 y r para efectuar la integral de camino, la fuerza que siente q_0 debido a q, actúa en la dirección de4 observación



$$\Delta U = -\int_{r0}^{r} \vec{F} \cdot d\overrightarrow{r'}$$

$$\Delta U = -\int_{r0}^{r} \frac{kqq_0}{r'^2} \hat{r} \cdot d\overrightarrow{r'}$$

$$\Delta U = -\int_{r0}^{r} \frac{kqq_0}{r'^2} dr'$$

$$ya\ que\quad \vec{F} \parallel d\overrightarrow{r'} \quad Cos0 = 1$$

$$\Delta U = -kq \cdot q_0 \int_{r0}^{r} \frac{dr'}{r'^2}$$

$$\Delta U = kq \cdot q_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

Como $\Delta U = U - U_0$

$$U - U_0 = \frac{kq \cdot q_0}{r} - \frac{kq \cdot q_0}{r_0}$$

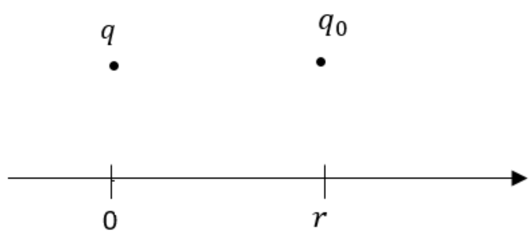
Asumiendo como energía potencial de referencia:

$$U_0 = k\frac{q \cdot q_0}{r_0}$$

Y asumiendo que traemos a q_0 desde una posición inicial muy lejos de q, es decir donde la interacción entre q_0 y q es prácticamente nula, $r_0 \to \infty, \quad U_0 = 0$; se llega a que

$$U = \ k\frac{q \cdot q_0}{r}$$

es la energía potencial eléctrica asociada a la interacción entre dos cargas $q\ y\ q_0$ separadas por una distancia r



Además nótese que $U\ [Joule\colon J = Nm]$ es un escalar!!

Problema

Ahora determine, ¿por que q_0 experimenta una energía de interacción con q a distancia r?.

Solución

Para ello suponga que retiramos q_0 y averigüe lo que sucede en r

Matemáticamente (lo aprendimos antes) esto equivale a dividir toda la ecuación por q_0, lo cual nos da

$$\frac{U}{q_0} = \frac{kq}{r}$$

Del lado derecho de la ecuación resultante es claro que pasa "algo" en la posición r, generado por la presencia de q

$$kq/r,$$

¿Qué es ese "algo"? La respuesta está en el lado izquierdo de la ecuación

$$V = \frac{U}{q_0}$$

Es una energía por unidad de carga en cada punto del espacio alrededor de q. Se define entonces el potencial eléctrico de una carga puntual q como

$$V = k\frac{q}{r}$$

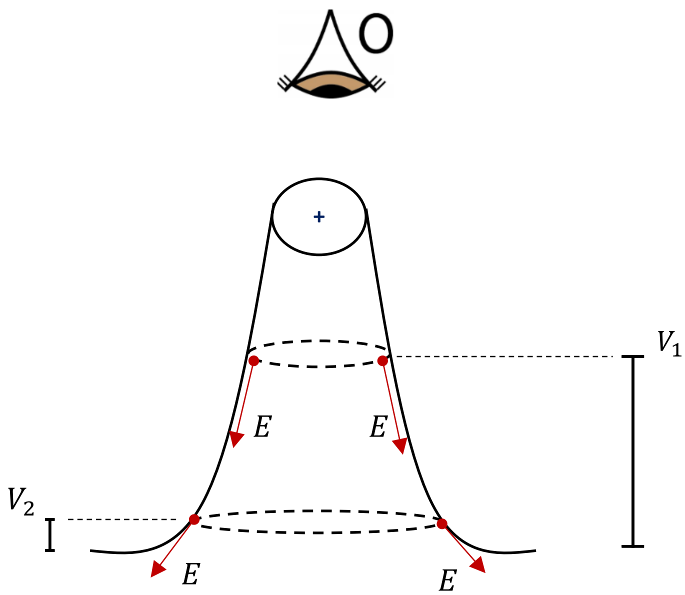
Y la unidad de medida del potencial eléctrico es $Volt = \frac{J}{C}$

El potencial eléctrico es un escalar que se puede asociar a todo punto del espacio alrededor de una carga eléctrica.

POTENCIAL ELÉCTRICO DE CARGAS PUNTUALES

Vamos a dar una interpretación física del potencial eléctrico producido por una carga puntual en términos de lo que le pasa al espacio cuando hay carga eléctrica presente. Sabemos que las propiedades eléctricas del espacio son afectadas por la presencia de carga eléctrica causando una deformación del espacio que puede ser percibida por otras entidades que también tengan carga.

En el caso de una carga puntual positiva



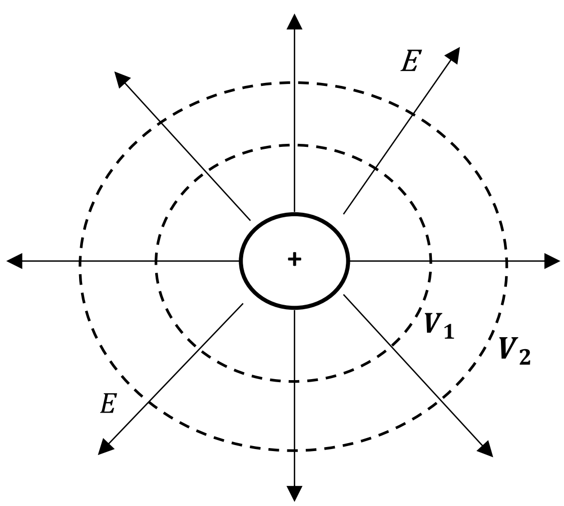
V disminuye con la distancia

$$V = \frac{kq}{r}$$

$$r_1 < r_2$$

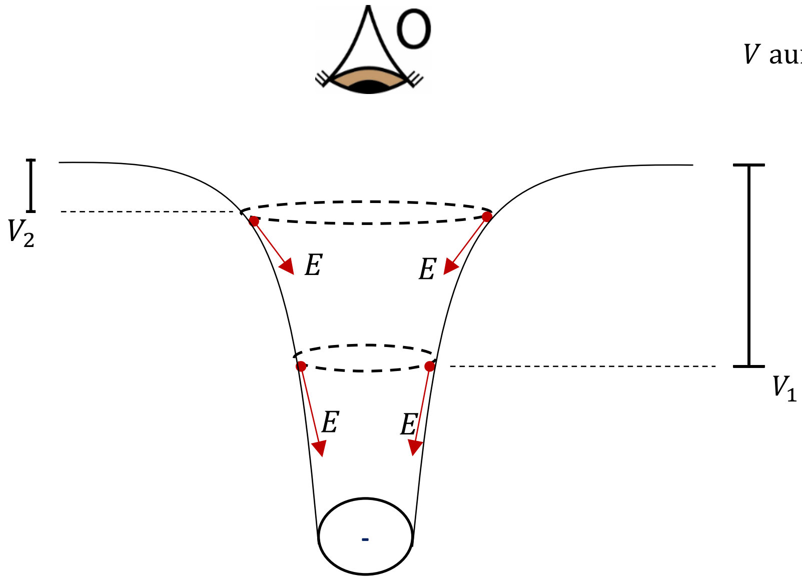
$$V_1 > V_2$$

Debido a la deformación del espacio en cada punto alrededor de $+q$, se tiene la pendiente de la deformación indicada por el campo eléctrico, pero también el nivel al que esta ese punto del nivel cero de deformación (espacio sin perturbar); esto es, el potencial eléctrico. Los puntos que se encuentran al mismo nivel alrededor de $+q$ forman superficies esféricas llamadas superficies equipotenciales (igual potencial). La vista para el observador O, que se indica en la parte superior de la gráfica es la siguiente,



Note que el campo eléctrico está orientado en la dirección en la que decrece el potencial eléctrico.

Ahora consideremos el caso de una carga puntual negativa



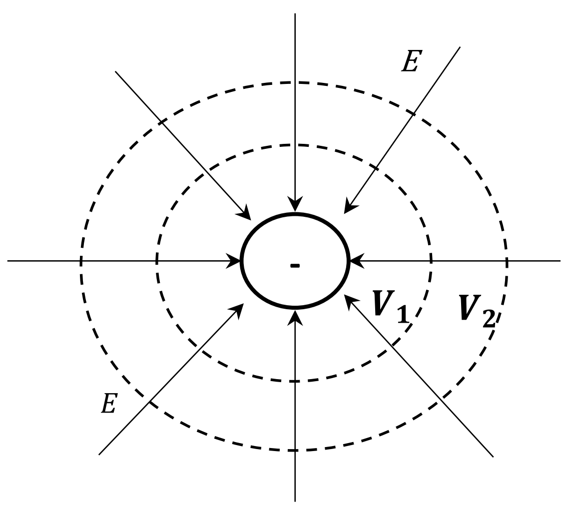
V aumenta con la distancia

$$V = \frac{kq}{r}$$

$$r_1 < r_2$$

$$V_1 < V_2$$

Al igual que antes, debido a la deformación del espacio, en cada punto alrededor de $-q$ se tiene la pendiente de la deformación indicada por el campo eléctrico, pero también el nivel al que esta ese punto del nivel cero de deformación (espacio sin perturbar); esto es, el potencial eléctrico. De nuevo los puntos que se encuentran al mismo nivel alrededor de $-q$ forman superficies esféricas llamadas superficies equipotenciales (igual potencial). La vista para el observador O, que se indica en la parte superior de la gráfica se muestra a continuación. El potencial aumenta con la distancia puesto que, en este caso (carga negativa) el potencial es un numero negativo y, dichos números, entre más cerca del cero mayores son.

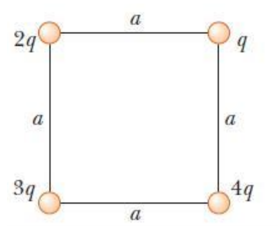


Nótese que, de nuevo el campo está orientado en la dirección que decrece el potencial.

Para calcular el potencial eléctrico debido a un sistema de cargas en un punto del espacio solo se calcula el potencial en dicho punto debido a cada carga y luego se suman escalarmente. Esto ya que el potencial es un escalar con signo.

<u>Problema</u>

Considere cuatro cargas que se encuentran en las esquinas de un cuadrado como se muestra en la figura. (a) Calcular la energía potencial eléctrica del sistema de cargas. (b) Calcular el potencial eléctrico en el centro del cuadrado.



RELACIÓN ENTRE CAMPO Y POTENCIAL ELÉCTRICOS

Sabemos que la fuerza eléctrica es conservativa por tanto se cumple que,

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U, \qquad \Delta U = -\int_{r1}^{r2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Multiplicando ambas expresiones por $1/q$ y teniendo en cuenta las definiciones de campo eléctrico y potencial eléctrico en cada punto del espacio, en una región de campo eléctrico se satisface que

$$\frac{1}{q}\vec{F} = -\vec{\nabla}\left(\frac{U}{q}\right) \qquad \frac{\Delta U}{q} = -\int_{r1}^{r2} \frac{1}{q}\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\,V \qquad \Delta V = -\int_{r1}^{r2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

El campo eléctrico es menos el gradiente del potencial eléctrico. Esta relación se expresa de las dos formas siguientes

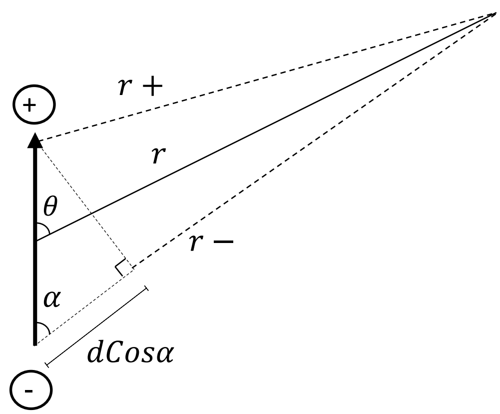
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\,V$$

$$\Delta V = -\int_{r1}^{r2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Estas dos ecuaciones expresan lo mismo, la primera localmente y la segunda globalmente. Esta relación permite calcular campo eléctrico a partir de potencial en situaciones muy complicadas. Como se verá a continuación.

Problema:

Calcular el campo de un dipolo eléctrico de carga q y eje d a una distancia r del centro del eje y en un angulo θ respecto al eje del dipolo.



Solución:

Debido a la complejidad del cálculo del vector campo eléctrico en este caso, vamos a calcular el potencial eléctrico que es un escalar y luego usamos la relación campo potencial para deducir el campo. Veamos, el potencial de una carga puntual es

$$V = \frac{kq}{r}$$

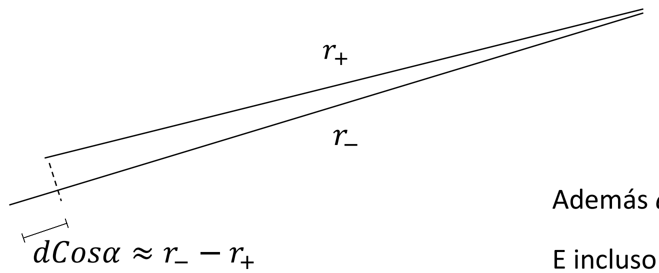
El potencial en el punto considerado es la suma de los potenciales debidos a las cargas del dipolo (recuerde que el potencial es un escalar con el signo de la carga)

$$V = V_{+} + V_{-} = \frac{kq}{r_{+}} + (-\frac{kq}{r_{-}})$$

Desarrollando la suma entre este par de fracciones se tiene

$$V = kq\left(\frac{r_- - r_+}{r_+ \cdot r_-}\right) \qquad (1)$$

En la condición $d \ll r$, es decir, para un punto muy alejado del dipolo



Además $dCos\alpha \approx dCos\theta$

E incluso: $r_- \cong r_+ \cong r$

Llevando estas estimaciones a (1), se tiene

$$V \approx k\frac{q\ dCos\theta}{r^2}$$

El potencial está en términos de r y θ, esto es $V(r,\theta)$. Es claro entonces que el potencial está escrito en una base en coordenadas polares. Para obtener el campo

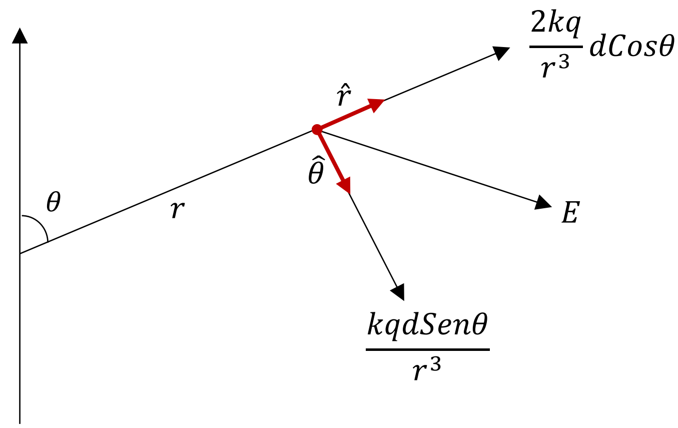
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V(r,\theta)$$

Se debe tomar el gradiente en coordenadas polares, esto es

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial r}V(r,\theta)\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}V(r,\theta)\hat{\theta}$$

$$\vec{E} = \frac{2kqdCos\theta}{r^3}\hat{r} + \frac{kqdSen\theta}{r^3}\hat{\theta}$$

En la figura se muestra el campo en sus componentes radial, $\hat{r}$, y transversal, $\hat{\theta}$. Esta expresión permite obtener el campo del dipolo en puntos arbitrarios alrededor del dipolo.



Calcular para $\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$. ¿Qué pasa si $r \to 0$?