Campos Electrostáticos

FLUJO ELECTRICO

Si a cada punto de una región del espacio se puede asociar un vector, decimos que existe un campo vectorial en dicha región del espacio y el comportamiento de tal campo vectorial puede estudiarse mediante el algebra lineal y el cálculo avanzado. Los conceptos de estas disciplinas que se requieren para tal propósito son parte de lo que se aprende en un curso de electromagnetismo.

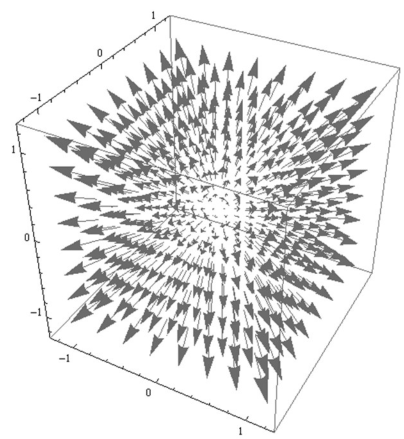


Figura 1 Campo vectorial

El flujo de un campo vectorial $\vec{E}$ a través de una superficie plana regular A, se define como el producto punto del vector campo $\vec{E}$ y el vector área $\vec{A}$. El vector área de una superficie o, la expresión vectorial de una superficie, como también suele llamarse, es el vector que tiene por magnitud el área de la superficie y por dirección la dirección del vector normal a la superficie (vector perpendicular al plano de la superficie).

$$\vec{A} = A\hat{n}$$

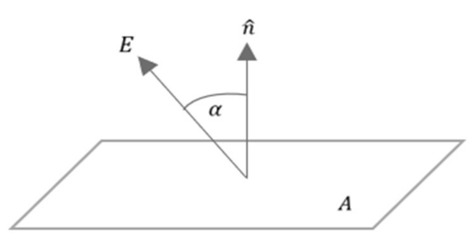


Figura 2. Campo y vector área

Por ejemplo, si el área de la superficie de la figura es $A = 8m^2$ el vector área será

$$\vec{A} = A\hat{n}$$
$$\vec{A} = (8m^2)\hat{n}$$

El flujo del campo $\vec{E}$ a través de la superficie A de la figura anterior, por definición se expresa,

$$\phi = \vec{E} \cdot \vec{A}$$
$$\phi = \vec{E} \cdot A\hat{n}$$

Para resolver el producto punto se tienen dos métodos dependiendo de la información que se tenga del campo y de la superficie.

Si se conocen la magnitud de los vectores campo, área y el ángulo α entre ellos,

$$\vec{E} \cdot \vec{A} = EACos\alpha \tag{1}$$

Si se conocen las componentes rectangulares (es decir, están escritos en la base usual) de los vectores campo y área,

$$\vec{E} = E_x\hat{\imath} + E_y\hat{\jmath} + E_z\hat{k}$$
$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{A} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{A} = E_xA_x + E_yA_y + E_zA_z$$

En ambos casos lo que se obtiene es un escalar, no un vector. De acuerdo con esto, el flujo de un campo vectorial a través de una superficie es un número que nos indica que tanto campo atraviesa la superficie.

<u>Ejemplo</u>

Calcular el flujo del campo $\vec{E} = (3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 1\hat{k})\frac{N}{C}$ a través de las siguientes superficies, tenga en cuenta que

$$b = 2m, c = 3m, d = 4m$$

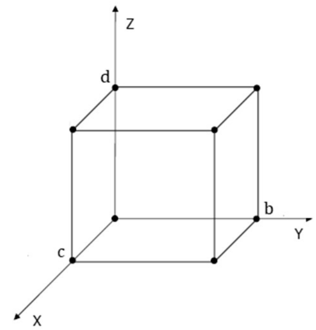


Figura 3. Caja en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares

i) La cara de la caja que está en el plano xz
ii) La cara de la caja cubo que está en el plano yz
iii) La cara de la caja que está en el plano xy

Solución

i) La cara de la caja que está en el plano xz se puede expresar vectorialmente

$$\vec{A} = A\hat{j} = cd\hat{j} = (3m)(4m)\hat{j} = 12m^2$$

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12m^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El flujo del campo a través de esta cara es

$$\vec{E} \cdot \vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 12m^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{A} = -2\frac{N}{C}12m^2 = -24\frac{N}{C}m^2$$

Utilizando el otro método, ecuación (1)

$$E = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}\,\frac{N}{C} = \sqrt{14}\,\frac{N}{C}$$

$$A = cd$$

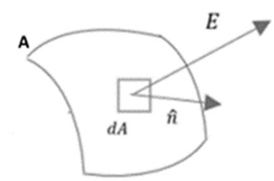
$$\vec{E} \cdot \vec{A} = \sqrt{14}(12)Cos\alpha$$

Pero habría que conocer el ángulo entre los vectores, información que, en este caso, no se tiene. Por ello el cálculo se hizo inicialmente mediante las componentes de los vectores, ecuación (2). Hay muchos casos en los que el ángulo entre los vectores campo y área se puede deducir de la geometría del sistema. Los otros dos casos del ejemplo se dejan como ejercicio para el lector.

En situaciones más generales, por ejemplo, cuando la superficie es arbitraria, no se puede expresar un solo vector área para toda la superficie, luego se debe calcular el producto punto en elementos infinitesimales de superficie y sumar todos estos productos. Como se verá enseguida.

El flujo de un campo vectorial $\vec{E}$ a través de una superficie arbitraria A, viene dado por la integral de superficie,

$$\Phi_E = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$



$d\vec{A} = (dA)\hat{n}$

$\hat{n}$: Unitario normal

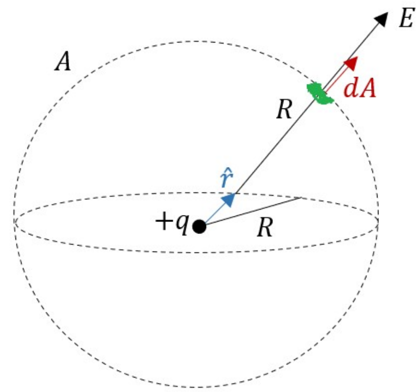
Donde $d\vec{A}$ es la expresión vectorial del elemento infinitesimal de área dA en la superficie A, indicado en la figura,

<u>Problema</u>

Calcular el flujo eléctrico a través de una superficie esférica de radio R que tiene una carga $+q$ en su centro.

<u>Solución</u>

El campo eléctrico es un campo vectorial y en este caso la superficie A es una superficie esférica de radio R. Podemos entonces utilizar la definición anterior para calcular el flujo de campo eléctrico a través de la superficie esférica. Veamos,



El flujo eléctrico a través de la superficie esférica es

$$\Phi_E = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_A K \frac{q}{R^2} \hat{r} \cdot dA\hat{r}$$

Donde dA es un elemento infinitesimal de superficie en la esfera, es el parchecito verde en el punto donde está pintado el vector $d\vec{A}$. Observe que en este caso el vector unitario normal al elemento de área dA es el vector unitario radial $\hat{r}$ que utiliza el observador ubicado en el centro de la esfera y mirando hacia afuera. El campo eléctrico en cada punto de la superficie esférica de radio R según este observador, es,

$$\vec{E} = k \frac{q}{R^2} \hat{r}$$

Y la expresión vectorial del elemento de área en cada punto de la superficie esférica según el mismo observador, es

$$d\vec{A} = dA\hat{r}$$

La integral de flujo queda entonces,

$$\Phi_E = \int_A \frac{Kq}{R^2} \hat{r} \cdot dA\, \hat{r}$$

$$\Phi_E = \int_A \frac{Kq}{R^2} dA\, Cos 0^{\circ}$$

Recuerde que el producto escalar de dos vectores es igual a la magnitud de uno por la magnitud del otro por el coseno del ángulo entre los dos vectores, ecuación (1).

$$\Phi_E = \int_A \frac{Kq}{R^2} dA = \frac{Kq}{R^2} \int_A dA$$

La integral se está calculando en la superficie esférica, por tanto, R es el mismo en todo punto y tanto q como K son constantes, por ello se sacan de la integral y es claro que $\int_A dA$ es la suma de todos los elementos de área que forman A, es decir, esta suma es numéricamente igual a la medida de la superficie de la esfera.

$$\int_A dA = 4\pi R^2$$

Por lo tanto

$$\Phi_E = \frac{Kq}{R^2}(4\pi R^2) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot (4\pi R^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Ahora suponga que la carga en el centro es $-q$, entonces

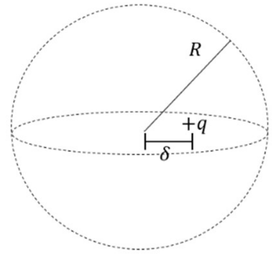
$$\Phi_E = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_A K\frac{q}{R^2}(-\hat{r}) \cdot dA\hat{r}$$

$$\Phi_E = \int_A E\, dACos\ 180^0 = \frac{-q}{\varepsilon_0}$$

Usted debe verificar esto mediante los últimos pasos del procedimiento anterior.

<u>Problema</u>

Calcular el flujo eléctrico a través de una superficie esférica que tiene una carga q a una distancia δ del centro de la esfera.



Repita el problema anterior para una carga negativa $-q$. Repita el problema para n cargas en la misma posición. Repita el problema para n cargas en el interior de una superficie cerrada arbitraria.