CAMPOS ELECTROSTÁTICOS

LEY DE GAUSS

El flujo eléctrico a través de una superficie arbitraria cerrada A, es proporcional a la carga encerrada por la superficie A.

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Esta ley permite calcular campos eléctricos en situaciones de alta simetría. (Esferas, cilindros, planos)

<u>Problema</u>

Un cilindro conductor de radio R y longitud L porta una carga total Q. Calcular el campo eléctrico en puntos interiores del cilindro $r < R$, en puntos exteriores del cilindro $R < r$ y en la superficie del cilindro $r = R$.

<u>Solución</u>

Se trata de un cilindro conductor y sabemos que los materiales conductores tienen alta movilidad de carga, por tanto, el exceso de carga se ubica en la superficie del cilindro. Requerimos utilizar densidad superficial de carga.

Densidad superficial de carga

$$\sigma = \frac{dq}{dA}$$

Como la distribución de carga eléctrica es uniforme, ya que no indican otra cosa, se puede calcular directamente la densidad superficial de carga así,

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{2\pi RL}$$

Ahora veamos el cálculo del campo eléctrico en puntos exteriores del cilindro conductor.

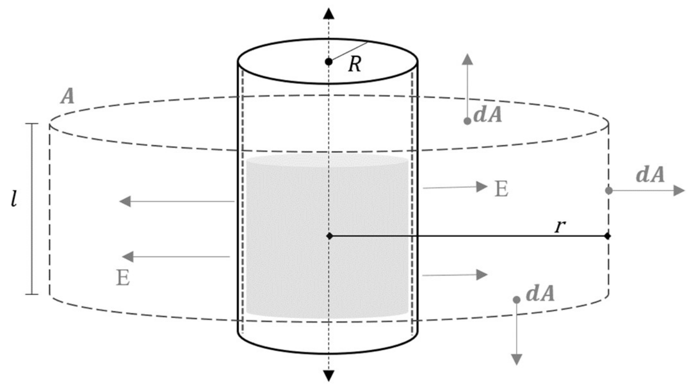
***En el exterior*, $R < r$**

De acuerdo con la ley de Gauss

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

A: superficie Gaussiana cilíndrica de radio r y longitud l coaxial al cilindro conductor y que contiene el punto en que se requiere calcular el campo eléctrico.

$\boldsymbol{A_{enc}}$: Área del cilindro conductor encerrada por la superficie Gaussiana (sombreada en la figura).



La integral de superficie cerrada sobre la superficie Gaussiana A en el lado izquierdo de la ley de Gauss, se convierte en dos integrales de superficie abiertas, una integral sobre la envolvente cilíndrica de A y la integral sobre las tapas de A (son dos tapas),

$$\int_{envol} \vec{E} \cdot d\vec{A} + 2 \int_{tapa} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\sigma \cdot A_{enc}}{\varepsilon_0}$$

La carga encerrada en la parte derecha de la ley de Gauss, se expresa $q_{enc} = \sigma \cdot A_{Enc}$ ya que la carga está en la superficie encerrada del cilindro y la densidad superficial de carga se conoce.

Para resolver los productos escalares en las dos integrales de superficie, se debe reconocer el ángulo entre el vector campo eléctrico y el vector elemento de área en cada caso. De la figura anterior es claro que,

$\vec{E} \parallel d\vec{A}$ en toda la envolvente.

$\vec{E} \perp d\vec{A}$ en ambas tapas.

Además, como puede verse en la figura, el área del cilindro encerrada por la superficie Gaussiana es $A_{enc} = (2\pi Rl)$

$$\int_{envol} E\ dA\ \cos 0^{\circ} + 2\int_{tapa} E\ dA \cos 90^{\circ} = \frac{\sigma\cdot(2\pi Rl)}{\varepsilon_0}$$

$$\int_{envol} EdA = \frac{\sigma\cdot(2\pi Rl)}{\varepsilon_0}$$

El campo E, es uniforme en toda la envolvente de la superficie Gaussiana ya que todos estos puntos están a la misma distancia de la superficie del cilindro, luego sale de la integral

$$E\int_{envol} dA = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot(2\pi Rl)$$

La integral sobre la envolvente da el área de la envolvente de la superficie Gaussiana,

$$E(2\pi rl) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot(2\pi Rl)$$

$$E = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$$

Aquí,

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi RL} = \frac{\lambda}{2\pi R}$$

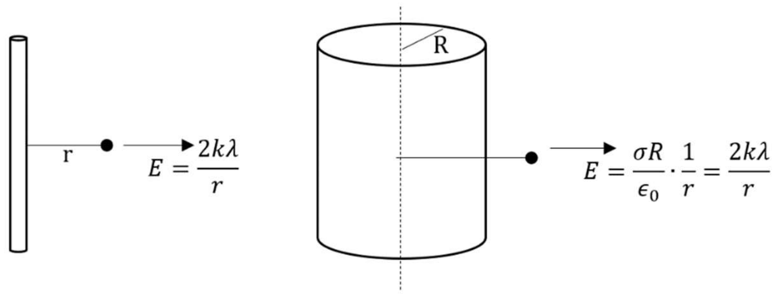
Con lo que el campo se puede expresar en la forma

$$E = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r} = \frac{QR}{2\pi RL\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$$

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda}{r}$$

$$E = \frac{2k\lambda}{r}$$

El resultado coincide con el campo de un alambre con densidad de carga λ (verificarlo aplicando ley de Gauss a un alambre con densidad lineal de carga λ)



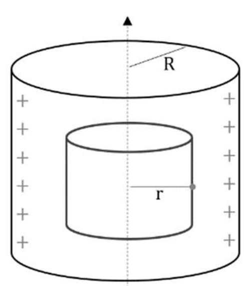
Ahora bien, en $\boldsymbol{r = R}$

$$E = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Ahora veamos el cálculo del campo eléctrico en puntos interiores del cilindro conductor.

En el interior $\boldsymbol{r < R}$



De acuerdo con la ley de Gauss,

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

A: Superficie cilíndrica de radio $r < R$ y longitud l, coaxial al cilindro conductor. La carga encerrada por esta superficie cilíndrica es cero, luego

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

Y el campo eléctrico en el interior del cilindro conductor es

$$E = 0$$

<u>Problema</u>

Considere una esfera conductora de radio R que tiene una carga total Q. Calcular el campo eléctrico en puntos exteriores e interiores de la esfera. Calcular el campo eléctrico en la superficie de la esfera.

Con los resultados obtenidos en estos dos problemas trace la gráfica de la intensidad del campo eléctrico en función de la distancia al eje del cilindro (en el caso del cilindro) y la distancia al centro de la esfera (en el caso de la esfera).

<u>Problema</u>

Cilindro dieléctrico de radio R y longitud L con carga total Q distribuida uniformemente en todo su volumen. Calcular el campo en el interior y el exterior del cilindro. Trazar la gráfica del comportamiento del campo con la distancia al eje del cilindro.

<u>Solución</u>

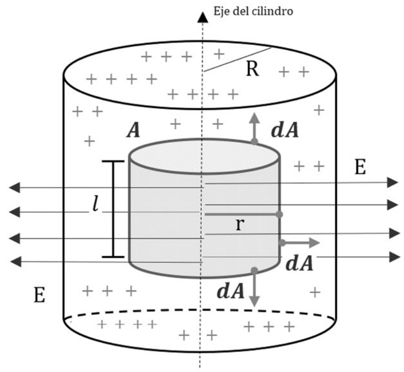
En este caso se trata de un cilindro dieléctrico. Sabemos que, para este tipo de materiales, la movilidad electrónica es pobre y todo exceso de carga se distribuye en el volumen del material. Se requiere entonces la densidad volumétrica de carga,

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

Si la densidad es uniforme, ya que no hay razón para pensar lo contrario y tampoco lo afirman para este problema,

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\pi R^2 L}$$

Puntos interiores, $\boldsymbol{r < R}$



Según Gauss,

$$\oint_{\boldsymbol{A}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

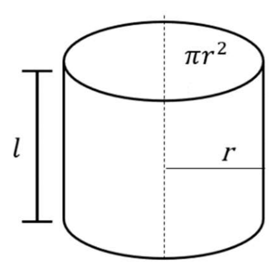
A: Superficie cilíndrica de radio r y longitud l coaxial al cilindro dieléctrico (eje en común con el cilindro dieléctrico).

La superficie Gaussiana cerrada cilíndrica se debe descomponer en tres superficies; esto es, la envolvente cilíndrica y las dos tapas. La integral de superficie en ambas tapas es la misma por esto el 2 delante de la segunda integral del lado izquierdo de la siguiente ecuación. En el lado derecho la carga encerrada se puede expresar $q_{enc} = \rho V_{enc}$

$$\int_{Envolvente} \vec{E} \cdot d\vec{A} + 2\int_{Tapa} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \rho\frac{V_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} \parallel d\vec{A} \qquad\qquad \vec{E} \perp d\vec{A}$$

La integral sobre las tapas se desvanece debido a la perpendicularidad del campo y el vector elemento de área. La carga encerrada por la superficie Gaussiana, en este caso, es la contenida en el volumen de cilindro dieléctrico encerrado por dicha superficie Gaussiana. El volumen encerrado es el sombreado en la figura anterior e ilustrado a continuación



$V_{enc} = \pi r^2 l$

Por consiguiente, la integral queda,

$$\int_{Env} EdA = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot (\pi r^2 l)$$

E es uniforme en toda la envolvente de la superficie Gaussiana A, luego sale de la integral

$$E \int_{env} dA = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot (\pi r^2 l)$$

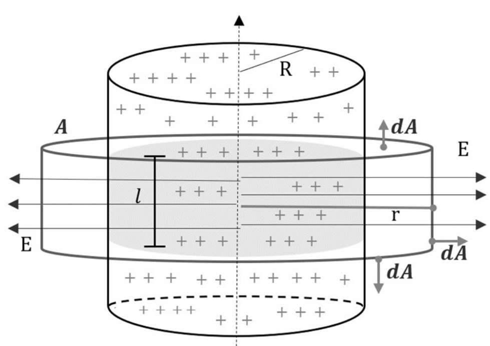
La integral de superficie de la envolvente es el área de la envolvente del cilindro Gaussiano

$$E(2\pi r l) = \frac{\rho}{\epsilon_0} (\pi r^2 l)$$

$$E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r$$

Puntos exteriores: $\boldsymbol{R < r}$

Completar el análisis comentando el código que se presenta a continuación (es decir, justificando los desarrollos de acuerdo con lo visto en clase y en la lectura),



$$\int_{Env} \vec{E} \cdot d\vec{A} + 2\int_{Tapa} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \rho \frac{V_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} \parallel d\vec{A} \qquad\qquad \vec{E} \perp d\vec{A}$$

$$\int_{env} EdA = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot (\pi R^2 l)$$

$$E \int_{env} dA = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot (\pi R^2 l)$$

$$E(2\pi r l) = \frac{\rho}{\epsilon_0} (\pi R^2 l)$$

$$E = \frac{\rho R^2}{2 \in_0} \cdot \frac{1}{r}$$

Se deja como ejercicio para el lector el valor del campo en $r = R$ y la gráfica del comportamiento del campo con la distancia al eje del cilindro dieléctrico.

<u>Problema</u>

Esfera sólida dieléctrica de radio R con carga total Q. Calcular el campo en puntos exteriores, puntos interiores y en la superficie de la esfera. Trazar la grafica del comportamiento del campo con la distancia al centro de la esfera.

<u>Problema</u>

Considere una lámina plana conductora muy grande, con una densidad superficial de carga σ. Calcule el campo eléctrico a una distancia r del centro de la lámina.