Guía de repaso para la lectura 1

Problema

Existe otra unidad de carga eléctrica denominada unidad electrostática, ues. Esta unidad se define de la siguiente manera: dos cargas puntuales, cada una de 1 ues y separadas una distancia de 1cm, experimentan una fuerza eléctrica de exactamente 1 dina (*1 dina=1gcm/s^2=1x10^{-5}N*). Determine la relación entre ues y Coulomb y calcule cuantas cargas elementales se requieren para tener una carga de 1 ues.

Solución

I. Para responder al anterior problema, se plantea una situación con los datos experimentales suministrados:

$|q_1| = |q_2| = 1\ ues$
$r = 1cm = 0.01$

Con estos datos se mide la fuerza y se obtiene: $F = 1\ dina = 1x10^{-5}N$.

II. Teniendo en cuenta la ley de Coulomb:

$$F = k\frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}$$

Se hace lo siguiente:

III. $1x10^{-5}N = \frac{K(1\ ues)^2}{(0.01m)^2}$

$$1x10^{-5}N = 9x10^9N\frac{m^2}{C^2} \cdot \frac{(1\ ues)^2}{(0.01m)^2}$$

$$1\ ues^2 = \frac{(1x10^{-5}N)(0.01m)^2}{9x10^9N\ \frac{m^2}{C^2}}$$

$$1\ ues^2 = \sqrt{\frac{(1x10^{-5}N)(10^{-4}m^2)}{9x10^9N\ \frac{m^2}{C^2}}}$$

$1\ ues \approx 3.34x10^{-10}C$

Esto da como resultado la relación entre la nueva unidad de carga y la anterior, resulta evidente que el ues es mucho más pequeña que el Coulomb. Si se trabaja en las medidas de centímetros, dinas, ues; la constante seria $K_e = 1$ y la ley de Coulomb queda

$$F = \frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2}.$$

Este tipo de unidades simplifican los cálculos cuando se desarrollan análisis teóricos. El ues también suele llamarse statcoulomb.

Ahora, si $e = 1.6x10^{-19}C$, es la carga elemental; de aquí podemos saber Cuántas cargas elementales tiene 1C y Cuántas cargas elementales tiene 1 ues. En cuanto al ues,

$$1ues = 3.34x10^{-1}\ C.\frac{1e}{1.6x10^{-19}C} \approx 1.98x10^9e \approx 2x10^9e.$$

Problema

Al realizar un experimento semejante al de la gota de aceite de Millikan, un estudiante midió las siguientes magnitudes de carga: $1.53 \cdot 10^{-1}\ C$, $3.26X10^{-1}\ C$, $6.34X10^{-1}\ C$, $5.09X10^{-1}\ C$, $4.66X10^{-19}C$." Hallar el valor de la carga elemental.

Solución

I. Se organizan las cargas de menor a mayor, para tomar como unidad de carga la menor.
II. Sabemos que la carga esta cuantizada por lo tanto se pueden aproximar los resultados de la siguiente manera:

- $\frac{3.26x10^{-19}}{1.53x10^{-19}} = 2.13 \approx 2$
- $\frac{4.66x10^{-19}}{1.53x10^{-19}} = 3.04 \approx 3$
- $\frac{5.09x10^{-19}}{1.53x10^{-19}} = 3.32 \approx 3$
- $\frac{6.34x1\ \ ^{-1}}{1.53x10^{-1}} = 4.17 \approx 4$

III. A continuación, observamos que las cargas elementales están alrededor de

- $\frac{3.26x10^{-19}}{2} = 1.63x10^{-1}\ C$

- $\frac{4.66x10^{-19}}{3} = 1.55x10^{-19}C$
- $\frac{5.09x10^{-19}}{3} = 1.69x10^{-19}C$

- $\frac{6.34x10^{-19}}{4} = 1.60x10^{-1}\ C$

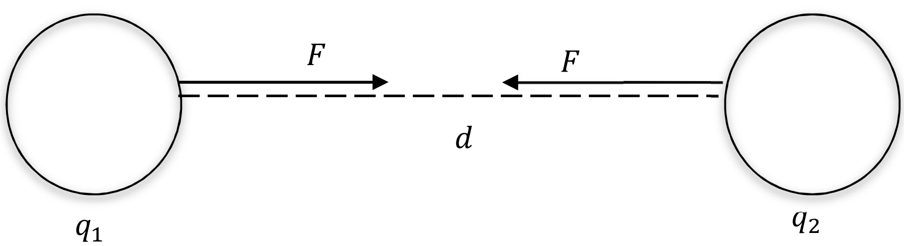
IV. Obtenemos el promedio de estas estimaciones para determinar una aproximación de la carga elemental

$$e \approx 1.6x10^{-19}C$$

<u>Problema:</u>

Si dos partículas cargadas con q_1, q_2 están separadas por una distancia d, hay una fuerza F entre ellas. ¿Cuál es la fuerza si la magnitud de cada carga se duplica y la distancia entre ellas cambia a 2d?

<u>Solución</u>



En la situación inicial

$$F_1 = \frac{k|q_1q_2|}{2}$$

En la situación planteada en el problema

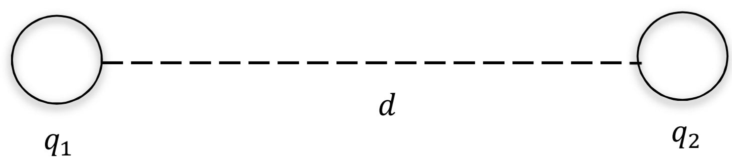
$$F_2 = k\frac{|2q_1 2q_2|}{(2d)^2} = k\frac{\cancel{4}|q_1q_2|}{\cancel{4}d^2} = k\frac{|q_1q_2|}{d^2} = F_1$$

La fuerza es la misma que en la situación inicial

<u>Problema:</u>

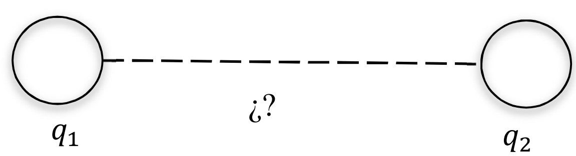
Dos esferas cargadas están inicialmente separadas por una distancia d. La magnitud de la fuerza sobre cada esfera es F. Se acercan de modo que la magnitud de la fuerza entre sí sea 9F. ¿Por qué factor ha cambiado la distancia entre las dos esferas?

En la condición inicial



$$F_1 = k\frac{|q_1 q_2|}{d_1^2}$$

En la condición final



$$F_2 = k\frac{|q_1 q_2|}{d_2^2}$$

Despejando lo que es común a ambas situaciones

$$\left.\begin{aligned} F_1 d_1^2 &= k|q_1 q_2| \\ F_2 d_1^2 &= k|q_1 q_2| \end{aligned}\right\} despeje$$

E igualando en virtud de lo que es común se llega a que

$$F_1 d_1^2 = F_2 d_2^2$$

$$\cancel{F_1} d_1^2 = 9\cancel{F_2} d_2^2$$

$$d_1^2 = 9 d_2^2$$

$$d_2^2 = \frac{1}{9} d_1^2$$

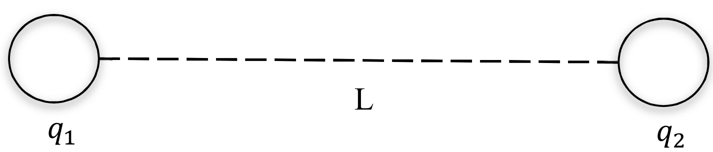
$$d_2 = \sqrt{\frac{1}{9} d_1^2}$$

$$d_2 = \frac{1}{3} d_1$$

La distancia entre las cargas a disminuido a la tercera parte de la distancia inicial.

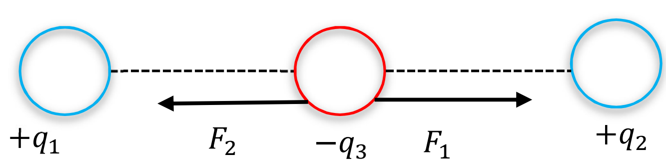
Problema

Dos cargas eléctricas se colocan en a lo largo de una recta, como se muestra en la figura. ¿En qué parte de la recta es posible colocar una tercera carga de modo que la fuerza sobre ésta sea cero? ¿El signo o la magnitud de la tercera carga afecta la respuesta?



Solución

Suponiendo que q_3 sea negativa y, q_1 y q_2 sean positivas



Asumiendo como base para los vectores el eje x, Se tiene que la fuerza sobre la carga q_3 es,

$$F_{neta} = F_1 - F_2$$

$$F_1 - F_2 = 0$$

$$F_{13} = F_{23}$$

$$k\frac{q_1 q_3}{x_3} = k\frac{q_2 q_3}{(L - x_3)^2}$$

$$q_1(L - x_3)^2 = q_2(x_3)^2$$

No es necesario desarrollar el binomio

$$\sqrt{q_1(L - x_3)^2} = \sqrt{q_2(x_3)^2}$$

$$\sqrt{q_1}(L - x_3) = \sqrt{q_2}(x_3)$$

$$L\sqrt{q_1} - x_3\sqrt{q_1} = \sqrt{q_2}(x_3)$$

Y la posición en la que se debe colocar q_3 es

$$\frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_2} + \sqrt{q_1}}L = x_3$$

Si q_3 fuera positiva el resultado no cambia. El lector puede verificarlo dibujando la situación y los vectores fuerza.

<u>Problema</u>

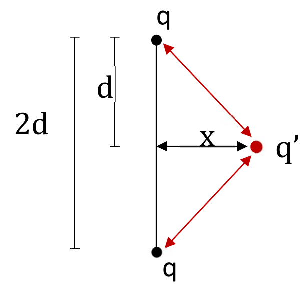
Dos cargas positivas, cada una igual a q, se colocan a una distancia $2d$ de separación entre ambas. Una tercera carga, $-0.2q$, se coloca exactamente a la mitad del camino entre las dos cargas positivas y se desplaza una distancia x en dirección perpendicular a la recta que une las cargas positivas. ¿Cuál es la fuerza sobre esta carga? Para $x \ll d$, ¿cómo es posible aproximar el movimiento de la carga negativa?

<u>Solución</u>

La carga de interés es

$$q' = -0.2q,$$

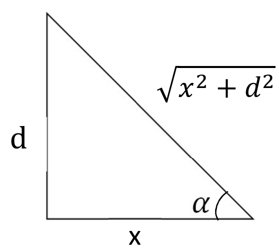
La situación a considerar es la mostrada en la figura. Como q' y q son cargas de distinto signo, se presenta atracción.



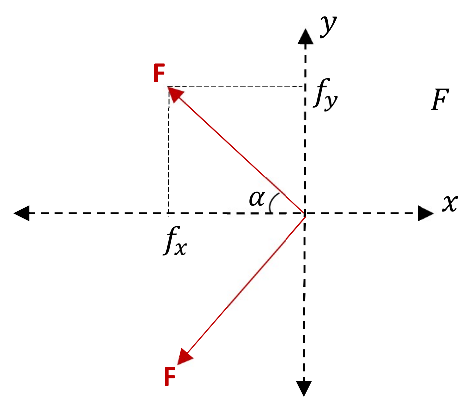
Según el principio de superposición

$$\vec{F} = \sum_{i} \vec{F}i$$

Luego se pintan las fuerzas como si cada carga q interactuara por separado con la carga de interés $q´$ y luego se suma vectorialmente. Las fuerzas sobre la carga de interés se ilustran en la siguiente figura, al igual que las distancias entre q y $q´$ expresadas en términos de las cantidades conocidas.



$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}}$$



$$F = \frac{k|q||q'|}{(x^2 + d^2)}$$

Para la suma, se expresan los dos vectores fuerza, en la base usual

$$\vec{F} = -f_x\hat{\imath} + f_y\hat{\jmath}$$
$$\vec{F} = -f_x\hat{\imath} - f_y\hat{\jmath}$$
$$\overrightarrow{F_R} = -2f_x\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$$

Se efectúa la suma vectorial y se obtiene

$$\overrightarrow{F_R} = -2f_x\hat{\imath}$$

Escribiendo explícitamente la componente f_x

$$\overrightarrow{F_R} = -2Fcos\alpha\ \hat{\imath}$$

A continuación, se sustituyen los valores encontrados arriba para la magnitud de la fuerza, la distancia entre q y $q´$y, el coseno del ángulo considerado y se obtiene

$$\overrightarrow{F_R} = -2\frac{k|q||q'|}{(x^2+d^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}\hat{\imath}$$

$$\overrightarrow{F_R} = \frac{-2k\ |q||q'|\ x}{(x^2+d^2)^{3/2}}\hat{\imath}$$

Aquí se encontró la fuerza sobre la carga q'. Ahora bien, en el caso en que

$$x \ll d \tag{1}$$

si x es mucho menor que d, x^2 es todavía mucho más pequeño que d^2, es decir, es despreciable y,

$$x^2 + d^2 \cong d^2,$$

se encuentra que la fuerza resultante es igual a:

$$\overrightarrow{F_R} = \frac{-2k\ |q||q'|\ x}{d^3}\hat{\imath}$$

Observe que

$$\eta = \frac{2k\ |q||q'|}{d^3}$$

Es una cantidad constante. Entonces la fuerza resultante se puede expresar de la siguiente manera

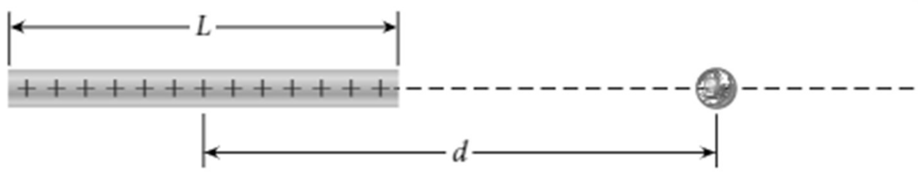
$$\overrightarrow{F_R} = -\eta x\hat{\imath}$$

$$\overrightarrow{F_R} = -\eta\vec{x}$$

Esto es, la fuerza eléctrica sobre la carga de interés es una fuerza proporcional al desplazamiento y de sentido contrario, las fuerzas de este tipo son llamadas fuerzas de restitución. Como $\overrightarrow{F_R}$ es una fuerza de restitución, bajo la suposición (1), al liberar la carga $q´$ después de ser desplazada la distancia x, el movimiento de q' se puede aproximar a una oscilación armónica.

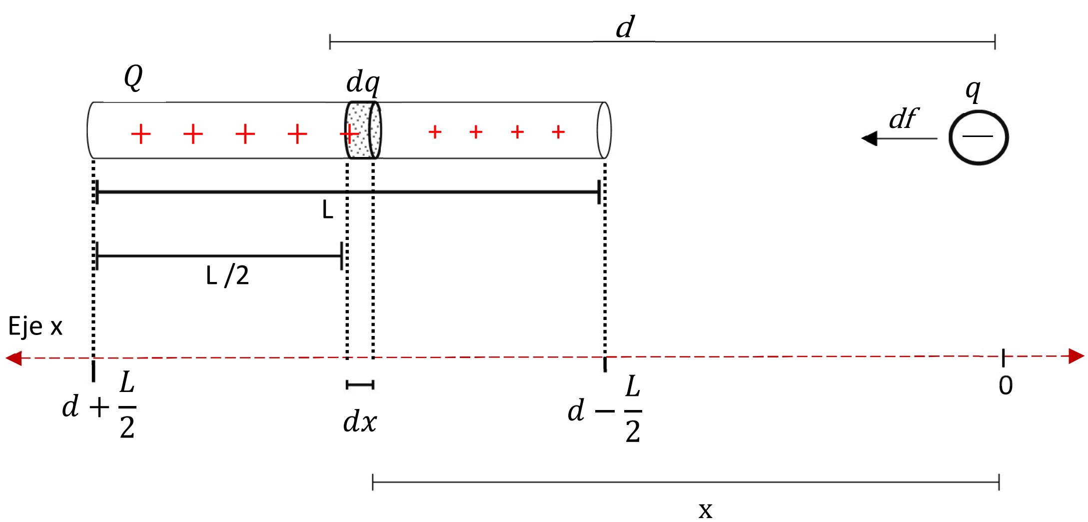
<u>Problema</u>

La figura muestra una barra delgada de longitud L, cargada uniformemente con una carga total Q. Encuentre una expresión para la magnitud de la fuerza electrostática que actúa sobre un electrón ubicado sobre el eje de la barra a una distancia d del punto medio de la barra.



<u>Solución</u>

Asumiendo que la carga de la barra es positiva la siguiente figura ilustra el análisis de la situación.



El Principio de superposición establece que

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}i$$

Para una distribución de carga continúa:

$$\vec{F} = \int_{distribución} d\vec{F}$$

Aquí, la distribución continúa es la barra cargada.

Densidad lineal de carga:

$$\lambda = \frac{dq}{ds} \qquad \text{en este caso,} \qquad \lambda = \frac{dq}{dx} \qquad dq = \lambda(dx) \qquad (1)$$

Si es una densidad uniforme, como en este caso, entonces λ se puede conocer y es

$$\lambda = \frac{Q}{L}$$

Se debe poner la base para el análisis vectorial en la carga de interés. Como λ es conocido, se identifica un elemento de carga dq en la barra, tal como se observa en la figura anterior. El elemento de fuerza df entre el elemento de carga dq y la carga q es:

$$df = k\frac{q(dq)}{x^2}$$

Además, de la relación (1) se tiene que $dq = \lambda dx$; así,

$$df = k\frac{q\lambda(dx)}{x^2}$$

Y al llevar a la integral

$$F = \int_{d-\frac{L}{2}}^{d+\frac{L}{2}} k\frac{q\lambda(dx)}{x^2}$$

$$F = kq\lambda\int_{\frac{2d-L}{2}}^{\frac{2d+L}{2}} \frac{dx}{x^2}$$

$$d \pm \frac{L}{2} = \frac{2d \pm L}{2}$$

$$F = -kq\lambda \frac{1}{x} \Bigg|_{\frac{2d - L}{2}}^{\frac{2d + L}{2}}$$

$$F = -kq\lambda \left[\frac{2}{2d + L} - \frac{2}{2d - L}\right]$$

$$F = -2kq\lambda \left[\frac{2d - L - (2d + L)}{4d^2 - L^2}\right]$$

$$F = \frac{4kq\lambda L}{4d^2 - L^2}$$

$$F = \frac{4kqQ}{4d^2 - L^2}$$

<u>Problemas</u>

1. Dos esferas cargadas están inicialmente separadas por una distancia d. La magnitud de la fuerza sobre cada esfera es F. Se acercan de modo que la magnitud de la fuerza entre sí sea 9F. ¿Por qué factor ha cambiado la distancia entre las dos esferas?

2. Los científicos que contribuyeron primero a la comprensión de la fuerza electrostática en el siglo XVIII estaban muy bien enterados de la ley de gravitación de Newton. ¿Cómo podían deducir que la fuerza que estaban estudiando no era una variante o alguna manifestación de la fuerza gravitacional?

3. Dos esferas cargadas están separadas por 8.00 cm. Se aproximan una a la otra lo suficiente para que la fuerza sobre cada una aumente cuatro veces. ¿A qué distancia están ahora?

4. Dos partículas cargadas idénticas, separadas por una distancia de 1.00 m, se repelen entre sí con una fuerza de 1.00 N. ¿Cuál es la magnitud de las cargas?

5. Calcule la magnitud de la fuerza electrostática que los dos quarks arriba, dentro de un protón, ejercen entre sí cuando la distancia entre ellos es de 0.900 fm.

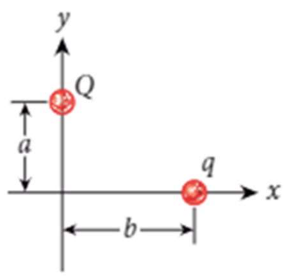
6. Dos esferas metálicas idénticas que inicialmente no tienen carga, 1 y 2, están conectadas por un resorte aislante (longitud sin estirar Lo = 1.00 m, la constante del

resorte es de k = 25.0 N/m). Luego, las esferas se cargan con +q y -q y el resorte se contrae hasta una longitud L = 0.635 m. Recuerde que la fuerza ejercida por un resorte es $F_S = k\Delta x$, donde Δxes el cambio de longitud del resorte a partir de su posición de equilibrio. Determine la carga q. Si el resorte se recubre con metal para hacerlo conductor, ¿cuál es la nueva longitud del resorte?

7. En cada uno de los vértices de un rectángulo que mide 2.00 m por 3.00 m se colocan cargas puntuales idénticas Q. Si $Q = 32.0\,\mu C$, ¿cuál es la magnitud de la fuerza electrostática sobre cualquiera de las cargas?

8. La carga $q_2 = 1.40 \cdot 10^{-8}\,C$ se coloca en el origen. Las cargas $q_2 = -1.80 \cdot 10^{-8}\,C$ y $q_3 = -2.10 \cdot 10^{-8}\,C$ se colocan en los puntos (0.180 m, 0.000 m) y (0.000 m, 0.240 m), respectivamente. Determine la fuerza electrostática neta (magnitud y dirección) sobre la carga q_3.

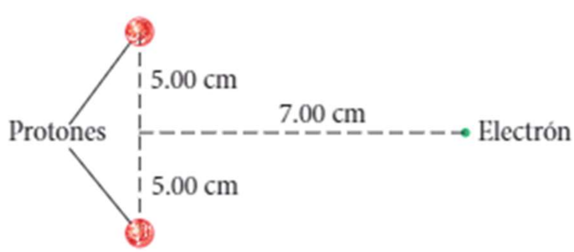
9. Una carga positiva Q está sobre el eje y a una distancia a del origen, y otra carga positiva q está sobre el eje x a una distancia b del origen.



a) ¿Para qué valor(es) de b la componente x de la fuerza sobre q es mínima?

b) ¿Para qué valor(es) de b la componente x de la fuerza sobre q es máxima?

10. Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza electrostática sobre el electrón en la figura.



11. Una bola pequeña con una masa de 30.0 gy carga de $-0.200\mu C$ está suspendida del techo por una cuerda. La bola cuelga a una distancia de 5.00 cm por arriba de un piso aislante. Si una segunda bola pequeña con masa 50.0g y carga de 0.400μC rueda directamente debajo de la primera bola, ¿la segunda bola abandona el piso? ¿Cuál es la tensión en la cuerda cuando la segunda bola está directamente abajo de la primera?

12. Dos cargas negativas de la misma magnitud $-q$ *y* $-q$, están fijas en las coordenadas (*-d, 0*) y (*d, 0*). Una carga positiva de la misma magnitud, q, y de masa m, está colocada en la coordenada (*0, 0*), a la magnitud del camino entre las dos cargas negativas. Si la

carga positiva se mueve a una distancia $\delta \ll d$ en la dirección y positiva y luego se suelta, el movimiento resultante es el de un oscilador armónico simple: la carga positiva oscila entre las coordenadas $(0, \delta)$ y $(0, -\delta)$. Encuentre la fuerza neta que actúa sobre la carga positiva cuando se mueve $(0, \delta)$ y use el desarrollo del binomio $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, para $x \ll 1$, a fin de encontrar una expresión para la frecuencia de la oscilación resultante. (*Sugerencia:* Mantenga sólo los términos que sean lineales en δ)

13. En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, el electrón se mueve alrededor del núcleo de un protón en órbitas circulares de radios bien determinados, dados por

$$r_n = n^2 a_B,$$

donde $n = 1, 2, 3, \ldots$ es un entero que define la órbita y $a_B = 5.29 \cdot 10^{-1}\ m$ es el radio de la primera (mínima) órbita , denominado *radio de Bohr.* Calcule la fuerza de la interacción electrostática entre el electrón y el protón en el átomo de hidrógeno para cuatro órbitas. Compare la intensidad de esta interacción con la interacción gravitacional entre el protón y el electrón.

14. Algunos de los primeros modelos atómicos sostenían que la velocidad orbital de un electrón en un átomo podría correlacionarse con el radio del átomo. Si el radio del átomo de hidrógeno es $5.29 \cdot 10^{-11} m$ y la fuerza electrostática es responsable del movimiento circular del electrón, ¿cuál es la energía cinética de este electrón orbital?