Taller preparcial sobre señales

Nombre: Santiago Valencia García. **Código:** A00395902.

UNIDAD 1: SEÑALES PARA SISTEMAS CIBERFISICOS

PREGUNTAS: SEÑALES DE TIEMPO CONTINUO

1) Una señal es una función matemática que representa la evolución de una magnitud física, y corresponde a una **medida o valor de la variable dependiente** (rango de la señal) con respecto de una o varias variables independientes (dominio de la señal); generalmente el tiempo (t), espacio (x), frecuencia (f), longitud de onda (λ) etcétera y, además, contiene información sobre el comportamiento o la naturaleza del fenómeno físico que representa.

   a) Falso
   X Verdadero

2) Dependiendo del número de variables independientes del dominio de la señal, existen señales de 1D, 2D, 3D.

   a) Falso
   X Verdadero

3) Las señales es posible clasificarlas en función del conjunto de valores (continuos o discretos) que toman las **variables independientes (dominio)**, y la magnitud o conjunto de valores (continuos o discretos) que toma la **variable dependiente (rango)**.

   a) Falso
   X Verdadero

4) Una señal es de tiempo continuo, si la variable independiente t puede tomar cualquier valor real, y se denota por $x(t)$ donde $t \in \mathbb{C}$, siendo $\mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos.

   X Falso
   b) Verdadero

5) Una señal es de tiempo continuo, si la variable independiente t puede tomar cualquier valor real, y se denota por $x(t)$ donde $t \in \mathbb{R}$, siendo $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales.

   a) Falso
   X Verdadero

6) Time-continuous signals are used to model physical quantities that vary continuously over time (independent variable). These signals can be described mathematically using continuous functions, such as: sinusoids, polynomials, or exponential functions.

   a) False
   X True

7) La fórmula para calcular la distancia recorrida por un vehículo en una unidad de tiempo, viene dada por, $d(t) = v(m/s)t(s)$, es un ejemplo de una señal de tiempo continuo.

   a) Falso
   X Verdadero

8) La longitud de onda denotada por λ, de una onda electromagnética (OEM) representa la distancia recorrida por la onda en un periodo de tiempo T, y su ecuación viene dada por, $\lambda = vT$, es un ejemplo de una señal de tiempo continuo.

c) Falso
d) Verdadero

LABORATORIO: SIMULAR SEÑALES DE TIEMPO CONTINUO

9) Para el intervalo de tiempo t entre [0, 50] segundos y con resolución temporal $\Delta\tau$=0.001, Simular las siguientes señales de tiempo continuo: **i)** $x(t) = 2e^{-\alpha t}\sin(2t/3)$, **ii)** $x(t) = 2e^{\alpha t}\sin(2t/3)$, donde α se conoce como factor de crecimiento o decaimiento de la función exponencial. Simular con α=0.1. **PREGUNTAS**:

a) Para la señal i, encontrar el valor máximo y mínimo de la señal. **Bonus**: calcular el máximo y mínimo global de la función y comprobar con los valores de la gráfica.

b) Para la señal i, ¿a partir de qué valor de t, el valor de la señal se hace igual a cero?, es decir. para $x(t)$=0, ¿cuánto vale t?

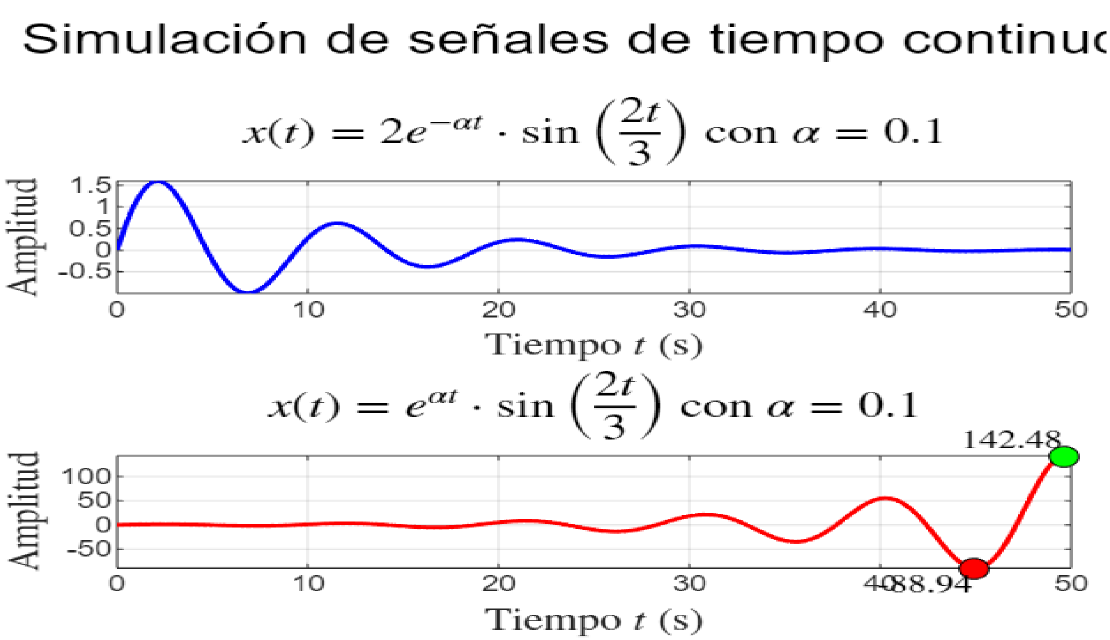
c) Para la señal ii, ¿Por qué los valores que toma $x(t)$ crecen? En el gráfico encontrar los valores máximos y mínimos de la señal.

d) **Bonus**: Calcular el máximo y mínimo global de la señal ii, y comparar con los valores de la gráfica.

e) ¿Qué sucede cuando el factor de crecimiento o decaimiento α aumenta o disminuye? Explique para ambas señales.

f) ¿Qué puede decir en relación a los valores que toma la señal (ubicados en el eje vertical), son continuos o discretos? Explique

9.



a. Valor máximo y mínimo de la señal

$$x(t) = 2e^{-2t}\sin\left(\frac{2t}{3}\right)$$

$\sin\left(\frac{2t}{3}\right)$ varía entre -1 y 1, por lo tanto:

V. max:

$$2e^{-2t} \cdot 1 = 2e^{-2t}$$

$$2e^{-2 0} = 2 \rightarrow \text{en } t = 0$$

V. min:

$$2e^{-2t}(-1) = -2e^{-2t}$$

$$-2e^{-2 0} = -2 \rightarrow \text{en } t = 0$$

b.

$2e^{-2t} \rightarrow$ sera positivo para cualquier valor de t

$\sin\left(\frac{2t}{3}\right) = 0$; $\sin(x) = 0 \rightarrow x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{2t}{3} = n\pi \ ; \quad t = \frac{3n\pi}{2}$$

Primer valor:

$$t = \frac{3(0)\pi}{2} = 0$$

Segundo Valor:

$$t = \frac{3(1)\pi}{2} \approx 4{,}71 \text{ seg}$$

t vale 0, 4,71 ... y así sucesivamente para otros múltiplos de $\frac{3\pi}{2}$.

c. Los valores de x(t) crecen porque el término exponencial aumenta sin límites a medida que t crece. Aunque la parte sinusoidal oscila entre -1 y 1, la amplitud del crecimiento exponencial domina, haciendo que x(t) aumente en magnitud con el tiempo.

e.

Señal 1:

- **Aumento del factor de crecimiento o decaimiento:** La señal decae más rápido, reduciendo la amplitud de las oscilaciones y acercándose a cero rápidamente.
- **Disminución del factor de crecimiento o decaimiento:** La señal decae más lentamente, manteniendo una mayor amplitud por más tiempo.

Señal 2:

- **Aumento del factor de crecimiento o decaimiento:** El crecimiento es más rápido, alcanzando valores más altos y amplificando las oscilaciones.
- **Disminución del factor de crecimiento o decaimiento:** El crecimiento es más lento, limitando la magnitud máxima de la señal y haciendo las oscilaciones menos pronunciadas.

f. Los valores de las señales x(t) en el eje vertical son continuos porque están compuestas por funciones exponencial y sinusoidal, que son continuas en su dominio, se evalúan en un intervalo continuo (0, 50), y además, en la gráfica los puntos están conectados, indicando que cada valor se puede alcanzar sin interrupciones.

PREGUNTAS: SEÑALES DE TIEMPO DISCRETO

1) Una señal es de tiempo discreto, si la variable independiente n puede tomar cualquier valor real, y se denota por $x[n]$ donde $n \in \mathbb{R}$, siendo $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales.

a) Falso
b) Verdadero

2) Si la variable independiente n solo toma valores en los números enteros, donde $n \in \mathbb{Z}$, siendo $\mathbb{Z}$ el anillo de los números enteros, se dice que la función $x[n]$ es una señal de tiempo discreto.

a) Falso
b) Verdadero

3) La siguiente función $X[n]=\sum_{l=1}^{\infty} a[l]\delta[n-l]$ es una señal de tiempo discreto, y corresponde al modelo matemático discreto que representa la secuencia binaria generada por una fuente de datos. Esta función representa una señal de tiempo continuo.

a) Falso
b) Verdadero

4) A discrete-time signal is represented by a sequence of numerical values at regular intervals (sampling interval o time $-T_s$-)). Unlike continuous-time signals, which can have an infinite number of values within a given time period, discrete-time signals have a limited number of values and represent the sampled version of a continuous-time signal.

a) False
b) True

5) Una señal de tiempo discreto $x[n]$ se puede obtener como la versión muestreada a intervalos (regulares o no) de una señal de tiempo continuo $x(t)$, es decir, $x[n]=x(t_n)$; $x[0],x[1],\ldots,x[n]$, donde $n\in\mathbb{Z}$, es decir $n=0,1,2,3,\cdots,n$

a) Falso
b) Verdadero

6) En una señal de tiempo discreto $x[n]$ obtenida a partir del muestro de una señal de tiempo continuo $x(t)$, se denomina a cada uno de los $x[n]=x[0],x[1],\ldots,x[n]$, muestras de $x(t)$, y al intervalo de separación entre cada muestra $x[n]$ intervalo o periodo de muestro T_s.

a) Falso
b) Verdadero

7) El mercado diario de valores en las bolsas, suele mostrar la evolución del comportamiento de una acción en intervalos regulares de tiempo (minutos, horas, días). ¿Se puede modelar la evolución de una acción en el mercado de valores como una señal de tiempo discreto?

a) Falso
b) Verdadero

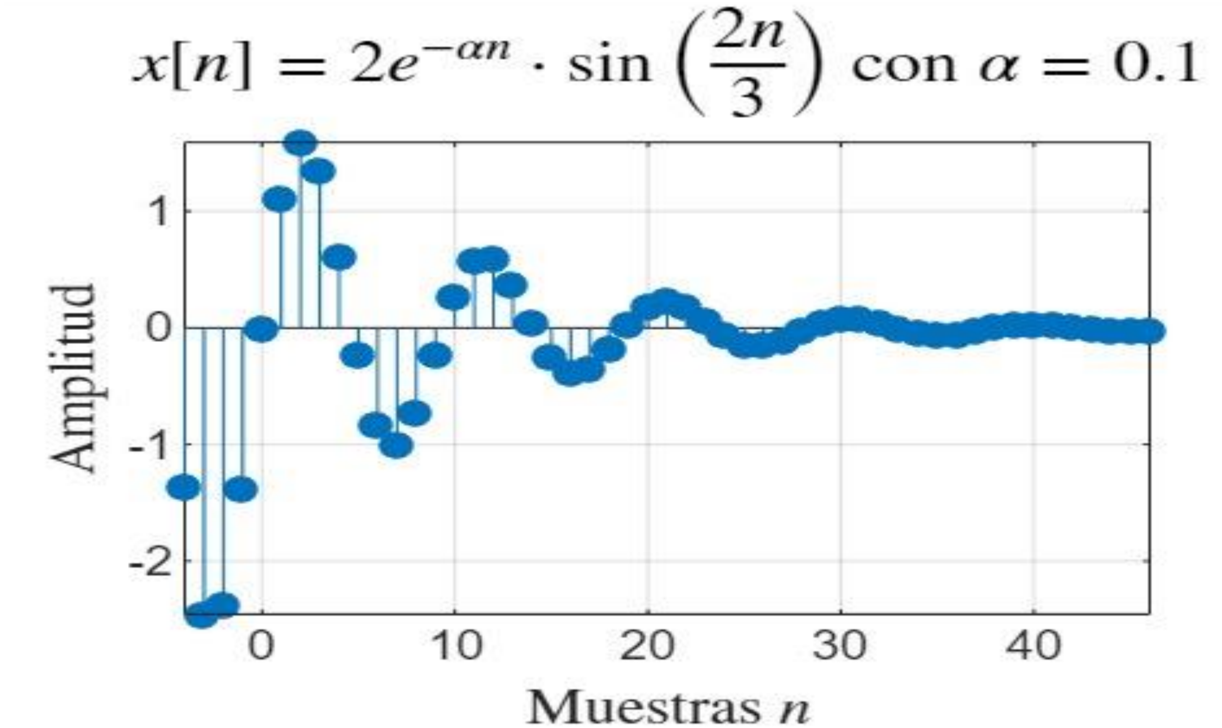
LABORATORIO: SIMULAR SEÑALES DE TIEMPO DISCRETO

8) Discretizar la señal de tiempo continuo $x(t)=2e^{-\alpha t}\sin(2t/3)$, con 50 muestras iniciando en -4; es decir, simular $x[n]=2e^{-\alpha n}\sin(2n/3)$; $-4\leq n\leq 46$. Simular con α=0.1

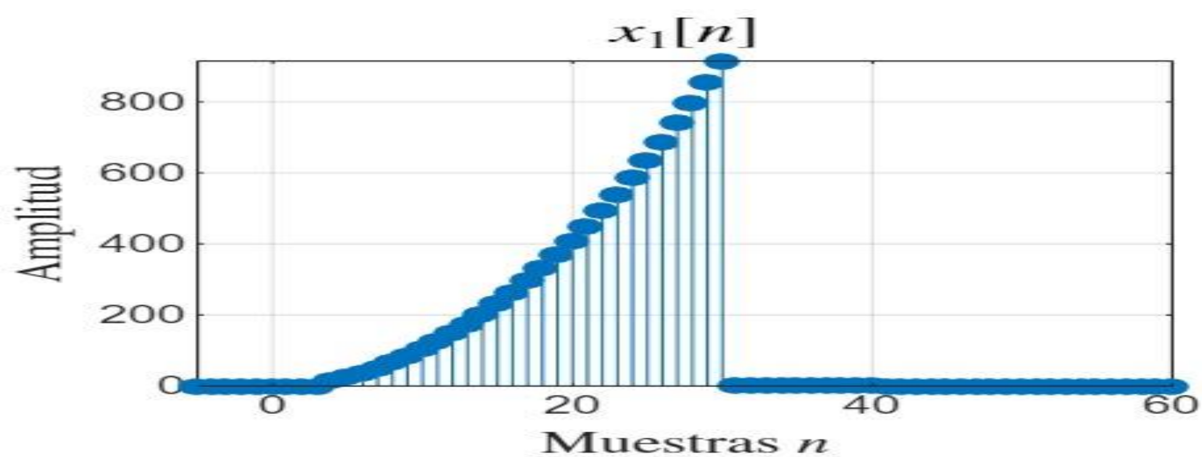
9) Simular en Matlab las siguientes señales discretas

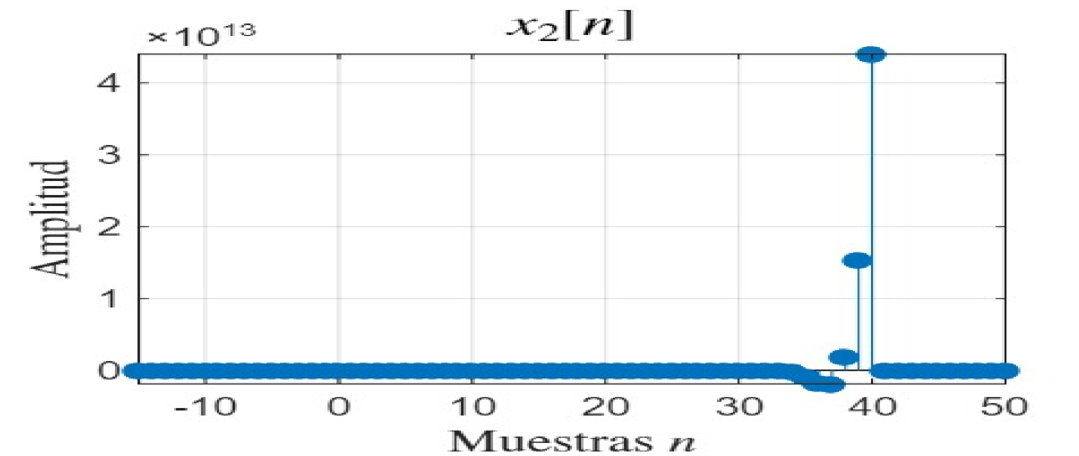
$$x_1[n] = \begin{cases} 0 & -5 \le n \le 3 \\ n^2 + 0.5n & 4 \le n \le 30 \\ 1.5 & 31 \le n \le 40 \\ 0 & 41 \le n \le 60 \end{cases}; \qquad x_2[n] = \begin{cases} 2\cos(2n\pi) & -15 \le n \le 8 \\ 0.5 & 9 \le n \le 17 \\ \exp\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)\sin\dfrac{2}{3}n & 18 \le n \le 40 \\ 0 & 41 \le n \le 50 \end{cases}$$

8.



9.





PREGUNTAS: SEÑALES ANALÓGICAS, DIGITALES Y TEOREMA DEL MUESTREO.

1) Si la variable dependiente (valor, magnitud o rango) de la señal puede tomar en un instante t o n, **un valor entre un conjunto infinito de valores**, se dice que es una señal analógica, y se denota por $x(t)$ (tiempo continuo) ~~o $x[n]$ (tiempo discreto)~~. Esto no va.

   a) Falso
   b) Verdadero

2) Si la variable dependiente (valor, magnitud o rango) de la señal puede tomar en un instante n, **solo un valor entre un conjunto finito de valores**, se dice que es una señal digital, y se denota por $x[n]$ (tiempo discreto).

   c) Falso
   d) Verdadero

3) Una secuencia o ristra de bits (conjunto de dígitos binarios: 0, 1) se pueden obtener a partir del muestreo de una señal de tiempo continuo, obteniendo como resultado una señal de valor digital (solo toma los valores 0 y 1) y tiempo discreto $x[n]$.

   a) Falso
   b) Verdadero

4) El siguiente gráfico muestra un código de línea utilizado en transmisiones bandabase (Ej: desde un sensor digital a un microcontrolador), calcular la tasa de transmisión binaria $R_b=1/T_b$ (bits/seg), y la tasa de transmisión de símbolos $R_s=1/T_s$ (símbolos/seg), sabiendo que el tamaño de los símbolos o mensajes digitales m_i=2 (bits/símbolo).

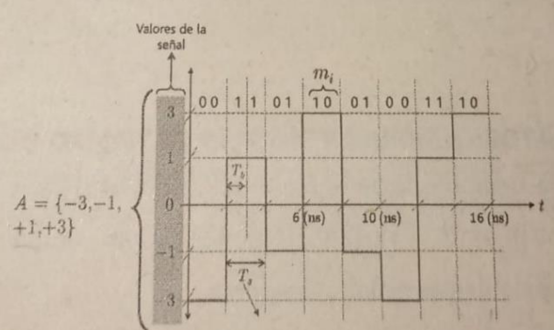


Gráfico de un código de línea

4. Cada símbolo contiene 2 bits. El periodo de símbolo (T_s) es de 2ns, esto se puede obtener observando el gráfico. Como hay 2 bits por símbolo, el tiempo por bit T_b es:

$$T_b = \frac{T_s}{m_i} = \frac{2ns}{2} = 1ns$$

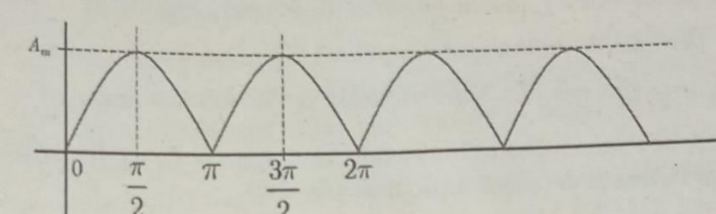
Tasa de transmisión binaria:

$$R_b = \frac{1}{T_b} = \frac{1}{1 \times 10^{-9}} = 1 \times 10^{9} \text{ bits/seg}$$
$$= 1000 \text{ Mbits/seg}$$

Tasa de transmisión de símbolos:

$$R_s = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{2 \times 10^{-9}} = 0{,}5 \times 10^{9} \text{ Sim/seg}$$
$$= 500 \text{ Msim/seg}$$

5) Calcular y simule el valor medio y valor rms de la siguiente onda rectificada de onda completa con $T_0 = 2\pi$, y un voltaje máximo A_m.



$$\bar{x}(t) = \langle x(t) \rangle \doteq \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,dt; \quad x_{r.m.s} = \sqrt{\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x^2(t)\,dt}$$

$$A(\theta) = A_m \sin\theta \rightarrow \theta \in (0, 2\pi]$$

5. Calculo del valor medio:

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A_m |\sin(t)|\, dt$$

En $[0, \pi]$

$$\int_0^{\pi} A_m |\sin(t)|\, dt = \int_0^{\pi} A_m \sin(t)\, dt$$

Sin(t) es positivo

En $[\pi, 2\pi]$:

$$\int_{\pi}^{2\pi} A_m (-\sin(t))\, dt$$

Sin(t) es negativo, por lo tanto: $|\sin(t)| = -\sin(t)$

Por lo tanto, la integral que queda es:

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} A_m \sin(t)\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} A_m(-\sin(t))\, dt\right)$$

Primera integral:

$$A_m \int_0^{\pi} \sin(t)\, dt$$

$$A_m \left[-\cos(t)\right]\Big|_0^{\pi} = A_m\left(-\cos(\pi) - (\cos(0))\right)$$

$$\left[-A_m \cos(\pi) - (-A_m \cos(0))\right] = -A_m \cdot (-1) + A_m$$

$$= 2A_m$$

Segunda integral:

$$\int_{\pi}^{2\pi} A_m(-\sin(t))\,dt = -A_m\int_{\pi}^{2\pi} \sin(t)\,dt$$

$$= -A_m\left[-\cos(t)\right]\Big|_{\pi}^{2\pi} = -A_m\left(-\cos(2\pi) - \left(-\cos(\pi)\right)\right)$$

$$= -A_m\left(-1 - \left(-(-1)\right)\right) = -A_m(-2) = 2A_m$$

Suma de las integrales:

$$2A_m + 2A_m = 4A_m$$

Valor medio de la señal:

$$\frac{1}{2\pi} \times 4A_m = \frac{2A_m}{\pi}$$

Valor rms:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} A_m^2 \sin^2(t)\, dt}$$

Como $\sin^2(t)$ es simétrico podemos hallarla en $[0,\pi]$ y multiplicarla por 2

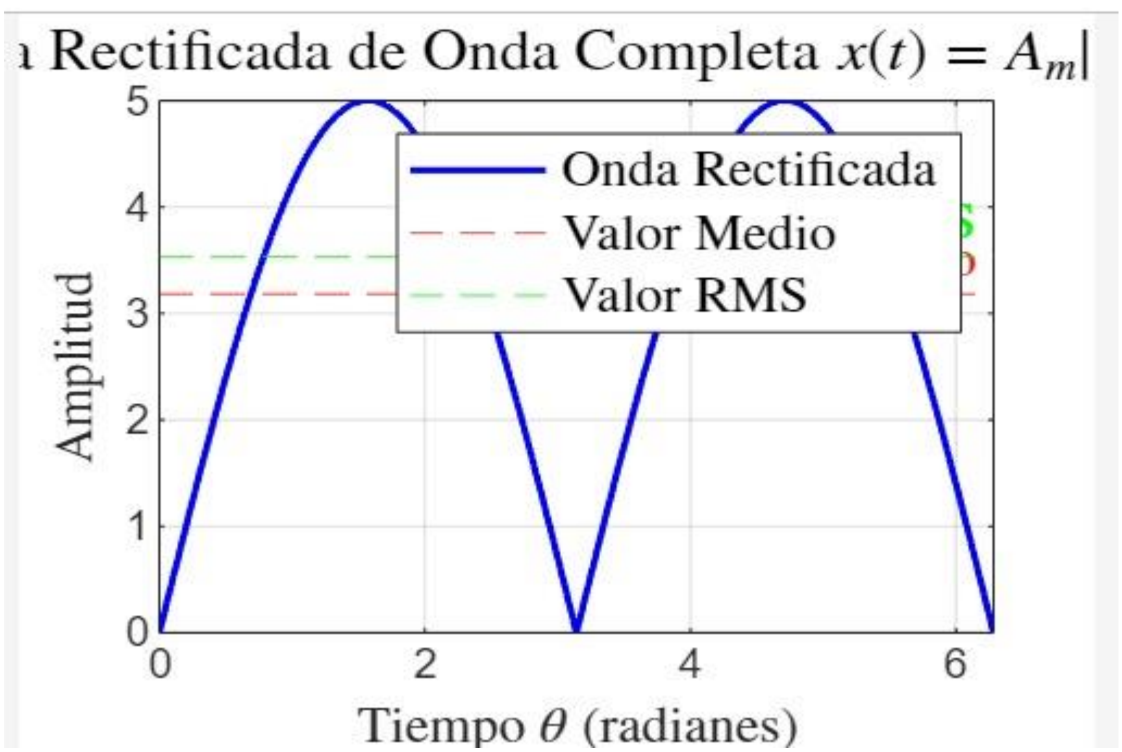
$$V_{rms} = \sqrt{\frac{A_m^2}{2\pi}\cdot 2\int_0^{\pi} \sin^2(t)\, dt}$$

Aplicando la identidad trigonométrica $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$

$$\int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\pi - \frac{\sin(2\pi)}{2}\right] - \left[0 - \frac{\sin(0)}{2}\right]\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{A_m^2}{2\pi}\cdot 2\,\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{A_m^2}{2\pi}\cdot \pi} = \sqrt{\frac{A_m^2}{2}} = \frac{A_m}{\sqrt{2}}$$



```
Valor medio: 3.1831
Valor RMS: 3.5355
```

6) Sabiendo que el parámetro RSSI (*Received Signal Strength Indicator*) mide la **intensidad** de la señal en el receptor Rx, y el parámetro SNR (*signal-to-noise-ratio*) o relación señal a ruido, mide la **calidad** de la calidad señal en el receptor Rx. Y sus ecuaciones vienen dadas por

$$RSSI\,(\text{dBm}) = P_r\,(\text{dBm}) = 10\log_{10}\left(\frac{p_r\,(mW)}{1\,(mW)}\right),\quad SNR \triangleq \frac{\overline{p}_r\,(\text{mW})}{p_N\,(\text{mW})} = \frac{\overline{p}_r\,(\text{mW})}{N_0 BW\,(\text{mW})} = \frac{RSSI}{N_0 BW\,(\text{mW})}$$

a) Un sistema de comunicación inalámbrico Wi-Fi, exige una relación SNR de 37 dB, si el ancho de banda del canal es de BW=22 MHz, ¿Cuál deberá ser la intensidad de la señal $RSSI$ en el receptor? Expresar en escala logarítmica y escala lineal.

b) La comunicación entre un microcontrolador remoto de baja potencia (*End Device*), y el Gateway central, se realiza utilizando la tecnología de comunicación inalámbrica LoRaWAN, que ofrece un ancho de banda de 125 kHz, y una sensitividad o potencia recibida mínima o $RSSI$=−123 dBm. ¿Cuál es la relación SNR para este enlace?

6.

a.

SNR de dB a escala lineal:

$$SNR\,(dB) = 10\log_{10}\left(\frac{\overline{P}_r}{P_N}\right)$$

$$SNR\,(\text{lineal}) = 10^{37/10} = 10^{3,7} = 5011,87$$

Calculo de P_N:

$$P_N = N_0 \cdot BW \; ; \quad N_0 = \underbrace{10^{-9}\,mW/Hz}_{\text{Lo asumo}}$$

$$BW = 22 \times 10^{6}\,Hz$$

$$P_N = 2,2 \times 10^{-2}\,mW$$

Potencia promedio:

$$\bar{P}_r = SNR(\text{lineal}) \cdot P_N$$

$$\bar{P}_r = 5011,87 \times 2,2 \times 10^{-2} = 110,26\,mW$$

Calculo del RSSI en dBm:

$$RSSI\,(dBm) = 10 \log_{10}\left(\frac{\bar{P}_r\,(mW)}{1\,mW}\right)$$

$$RSSI\,(dBm) = 10 \log_{10}(110,26) = 20,42\,dBm$$

Escala logaritmica: 20,42 dBm

Escala lineal: 110,26 mW

b. $RSSI\,(mW) = 10^{-123/10} = 10^{-12,3}\,mW = 5,01 \times 10^{-13}\,mW$

$P_N = N_0 \cdot BW$, asumo $N_0 = 10^{-9}\,mW/Hz$

Ancho de banda de LoRaWAN $(BW) = 125\,KHz$

$$= 125 \times 10^{3}\,Hz$$

$$P_N = (10^{-9})(125 \times 10^{3}) = 1,25 \times 10^{-4}\,mW$$

Calculo de SNR:

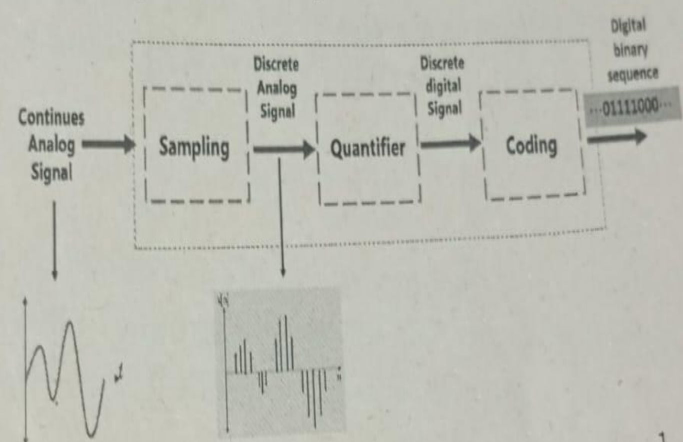
$$SNR = \frac{\bar{P}_r\ (mW)}{P_N\ (mW)}$$

$$SNR = \frac{5{,}01 \times 10^{-13}}{1{,}25 \times 10^{-4}} = 4{,}008 \times 10^{-9}$$

Conversión a dB:

$$SNR\ (dB) = 10 \log_{10}(4{,}008 \times 10^{-9}) = -83{,}97\ dB$$

7) El siguiente diagrama de bloques muestra el proceso de un convertidor análogo/digital



Conociendo que el teorema del muestreo establece que $f_s > 2f_m \rightarrow \frac{1}{T_s} > 2f_m \rightarrow T_s < \frac{1}{2f_m}$;

responda las siguientes preguntas:

a) Los seres humanos pueden escuchar sonidos audibles, cuyo espectro de frecuencias, se encuentra en el rango [20 Hz a 20 kHz]. A) ¿Cuál es el valor del intervalo de muestreo T_s, y de la frecuencia de muestreo f_s, que debe ser utilizado para muestrear la señal análoga, y que no se presente perdida de información audible? B) ¿Cuántas muestras n tendrá la señal discretizada $x[n]$ para que sea una representación fiel de la señal análoga?

b) Para la señal $x_a(t)$ análoga calcular el intervalo de muestreo T_s , la frecuencia de muestreo f_s, y el numero de muestras n de la señal discretizada $x[n]$.

$$x_a(t) = 3\cos 40\pi t + 4\sin 100\pi t + 6\sin 80\pi t + 4\cos 120\pi t$$

Simular en Matlab la señal análoga $x_a(t)$ y la señal muestreada $x[n]$, y encontrar el factor de sobremuestreo que hace que la señal discreta $x[n]$ represente fielmente la señal análoga $x_a(t)$.

7.

A).

Frecuencia de muestreo:

$$f_s > 2f_m \rightarrow f_s > 2 \times 20.000\ Hz = 40.000\ Hz$$

Intervalo de muestreo:

$$T_s = \frac{1}{f_s} \rightarrow T_s = \frac{1}{40.000}\ s = 25\ \mu s$$

B). Para hallar el número de muestras usamos:

$n = f_s \times T$, donde T es la duración total de la señal en segundos

Asumiendo $T = 1\ s$:

$n = 40.000$ muestras/seg $\times$ 1seg $= 40.000$ muestras

7.

b.

Con base a $\omega = 2\pi f \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$, encontramos la frecuencia para cada componente:

$$\omega = 40\pi \rightarrow f = \frac{40\pi}{2\pi} = 20\ Hz$$

$$\omega = 100\pi \rightarrow f = \frac{100\pi}{2\pi} = 50\ Hz$$

$$\omega = 80\pi \rightarrow f = \frac{80\pi}{2\pi} = 40\ Hz$$

$$\omega = 120\pi \rightarrow f = \frac{120\pi}{2\pi} = 60\ Hz \rightarrow f_m$$

$$f_s > 2f_m = 2 \times 60 = 120\ Hz$$

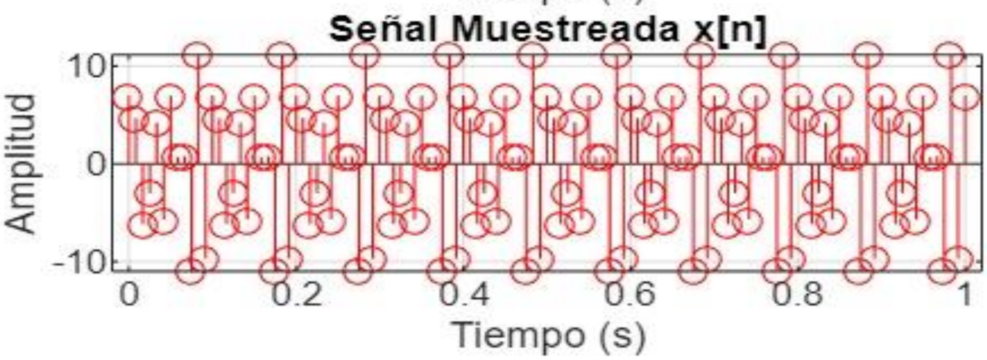
Intervalo de muestreo:

$$T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{120} \approx 0{,}00833s\ (8{,}33\ ms)$$

Número de muestras:

$$n = f_s \times T = 120 \times 1 = 120 \text{ muestras.}$$


Señal Analógica $x_a(t)$
Amplitud
Tiempo (s)
10
0
-10
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


Señal Muestreada x[n]
Amplitud
Tiempo (s)
10
0
-10
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1