EJERCICIOS RESUELTOS TEMA 2

EJERCICIO 1

Minimiza las siguientes expresiones booleanas utilizando los postulados y propiedades del álgebra de Boole:

1. $f(a,b,c) = \overline{b.c}.\overline{a.\bar{b}.\bar{c}}.\overline{a.b.\bar{c}}$

2. $f(a,b,c,d) = a.b.c.d + \bar{a}.\bar{b} + a.b.\bar{c} + a.\bar{b} + a.\bar{c}$

(From [4] (see bibliography). With permission)

Un par de consideraciones previas:

1) Una primera aclaración: Dada una expresión booleana, en general, existen múltiples versiones mínimas de la misma. ***La respuesta al problema de la minimización de funciones booleanas no es única***.

2) El segundo punto que me gustaría comentar es ¿qué significa exactamente que una expresión sea mínima?. La definición de lo que significa "mínima" depende del entorno en que se utilice esta expresión. Por ejemplo, en la implementación llamémosla "convencional" de circuitos digitales con chips de pequeña escala de integración (esto es, chips que contienen típicamente entre 4-6 puertas cada uno), lo más costoso son las puertas y, en consecuencia, el objetivo de la minimización es obtener una expresión que requiera el mínimo número de puertas lógicas. Si por el contrario estamos pensando en una implementación mediante un circuito integrado, lo que prima es el área de silicio ocupada y, en este caso, el número de conexiones puede ser tan importante como el número de puertas.

Nosotros vamos a utilizar una definición matemática, "de compromiso" entre el número de puertas y el número de entradas de cada puerta, factor este último ligado al número de conexiones: Nuestro objetivo será llegar a una expresión booleana que contenga el mínimo número de operaciones de dos operandos. Como ejemplo, la expresión (1) del enunciado contiene 10 operaciones de estas características, como puede verse en el esquema siguiente:

$$f(a,b,c) = \underbrace{\underbrace{\overline{b.c}}_{2}.\underbrace{\overline{a.\bar{b}.\bar{c}}}_{3}.\underbrace{\overline{a.b.\bar{c}}}_{3}}_{10}$$

Dicho esto, vamos a minimizar las expresiones que nos piden:

1. $f(a,b,c) = \overline{b.c}.\overline{a.\bar{b}.\bar{c}}.\overline{a.b.\bar{c}}$

Esta expresión puede resultar un tanto confusa si no se tiene claro el orden en el que se ejecutan las operaciones booleanas: La operación "complementar" tiene prioridad sobre el producto lógico, que a su vez tiene prioridad sobre la suma lógica. Teniendo esto en cuenta, y para mayor claridad, la expresión a minimizar podemos escribirla como:

$$f(a,b,c) = \overline{(b.c)}.\overline{(a.\overline{b}.\overline{c})}.\overline{(a.b.\overline{c})}$$

Aplicamos la ley de De Morgan a cada uno de los tres paréntesis:

$$f(a,b,c) = \left(\overline{b} + \overline{c}\right).(\overline{a} + b + c).(\overline{a} + \overline{b} + c)$$

Multiplicamos los dos últimos paréntesis:

$$(\overline{a} + b + c).\left(\overline{a} + \overline{b} + c\right) = \overline{a}.\overline{a} + \overline{a}.\overline{b} + \overline{a}.c + \overline{a}.b + b.\overline{b} + b.c + \overline{a}.c + \overline{b}.c + c.c$$

Teniendo en cuenta que $x.x = x$ y que $x.\overline{x} = 0$ la expresión anterior nos queda como:

$$(\overline{a} + b + c).\left(\overline{a} + \overline{b} + c\right) = \overline{a}.\overline{a} + \overline{a}.\overline{b} + \overline{a}.c + \overline{a}.b + \cancel{b.\overline{b}} + b.c + \overline{a}.c + \overline{b}.c + c.c$$

$$= \overline{a} + \overline{a}.\overline{b} + \overline{a}.c + \overline{a}.b + b.c + \overline{b}.c + c$$

Los términos $\overline{a}.\overline{b}$, $\overline{a}.c$, $\overline{a}.b$ quedan absorbidos por $\overline{a}$ y pueden eliminarse. Asimismo, los términos $b.c$, $\overline{b}.c$ quedan absorbido por c :

$$\overline{a} + \cancel{\overline{a}.\overline{b}} + \cancel{\overline{a}.c} + \cancel{\overline{a}.b} + \cancel{b.c} + \cancel{\overline{b}.c} + c = \overline{a} + c$$

Así:

$$f(a,b,c) = \left(\overline{b} + \overline{c}\right).(\overline{a} + c) = \overline{a}.\overline{b} + \overline{b}.c + \overline{a}.\overline{c} + c.\overline{c} = \overline{a}.\overline{b} + \overline{b}.c + \overline{a}.\overline{c}$$

Aunque parezca que no podemos simplificar más la expresión, no es cierto. Vamos a multiplicar el término $\overline{a}.\overline{b}$ por $(c + \overline{c})$, cosa que podemos hacer porque $c + \overline{c} = 1$:

$$f(a,b,c) = \overline{a}.\overline{b}.(c + \overline{c}) + \overline{b}.c + \overline{a}.\overline{c} = \overline{a}.\overline{b}.c + \overline{a}.\overline{b}.\overline{c} + \overline{b}.c + \overline{a}.\overline{c}$$

El término $\overline{a}.\overline{b}.c$ queda absorbido por $\overline{b}.c$ puesto que $\overline{a}.\overline{b}.c + \overline{b}.c = \overline{b}.c.(\overline{a} + 1) = \overline{b}.c$, y por la misma razón el término $\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}$ queda absorbido por $\overline{a}.\overline{c}$. Finalmente:

$$f(a,b,c) = \overline{b}.c + \overline{a}.\overline{c}$$

(La expresión mínima requiere 3 operaciones de 2 operandos, que se pueden implementar utilizando 2 puertas AND de 2 entradas, y puerta OR de 2 entradas y 3 inversores)

2. $f(a,b,c,d) = a.b.c.d + \overline{a}.\overline{b} + a.b.\overline{c} + a.\overline{b} + a.\overline{c}$

Sacamos factor común $a.b$ del primer y tercer términos producto, y $\overline{b}$ del segundo y del cuarto; cosa que podemos hacer gracias a la propiedad distributiva:

$$f(a,b,c,d) = a.b.(c.d + \overline{c}) + \overline{b}.(\overline{a} + a) + a.\overline{c}$$

Sabemos que se cumple que $x + \overline{x}.y = x + y$. Aplicando esta propiedad a $c.d + \overline{c}$, y teniendo en cuenta que $\overline{a} + a = 1$, la expresión anterior queda:

$$f(a,b,c,d) = a.b.(d + \overline{c}) + \overline{b} + a.\overline{c}$$

Podemos volver a aplicar la propiedad $x + \bar{x}.y = x + y$ a los dos primeros términos. Si consideramos $x = \bar{b}$ y $y = a.(d + \bar{c})$, entonces:

$$f(a, b, c, d) = a.(d + \bar{c}) + \bar{b} + a.\bar{c}$$

Finalmente, aplicando la propiedad distributiva al término $a.(d + \bar{c})$, la función nos queda como:

$$f(a, b, c, d) = a.d + a.\bar{c} + \bar{b} + a.\bar{c} = a.d + a.\bar{c} + \bar{b}$$

En este caso hemos pasado de una expresión booleana que requería 9 operaciones de 2 operandos a una expresión equivalente que requiere 4. La versión simplificada puede implementarse con dos puertas AND de 2 entradas, 1 puerta OR de 3 entradas (o 2 puertas OR de 2 entradas) y 2 inversores.

EJERCICIO 2

Dibuja los circuitos que implementan directamente las siguientes funciones booleanas (nota: ***No simplifiques*** previamente la función):

1. $f(a, b, c) = \overline{b.c}.\overline{a.\bar{b}.\bar{c}}.\overline{a.b.\bar{c}}$

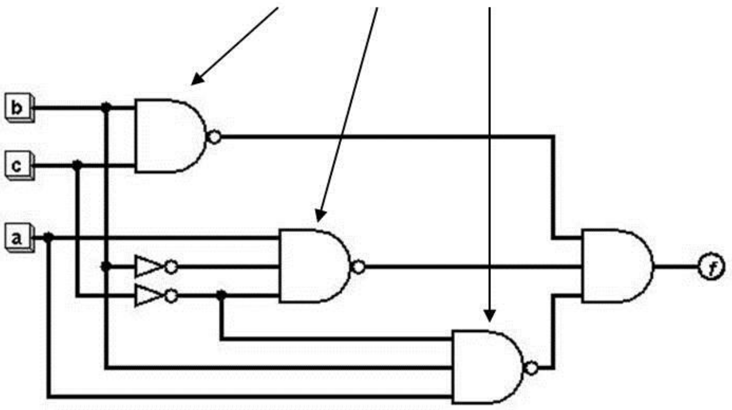
2. $f(a, b, c, d) = a.b.c.d + \bar{a}.\bar{b} + a.b.\bar{c} + a.\bar{b} + a.\bar{c}$

1. $f(a, b, c) = \overline{b.c}.\overline{a.\bar{b}.\bar{c}}.\overline{a.b.\bar{c}}$

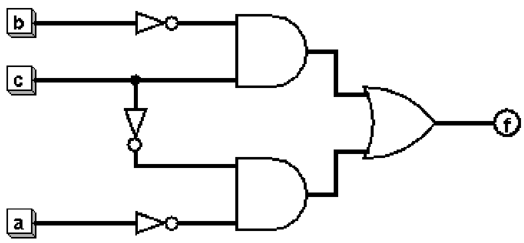
Para mayor claridad escribimos la función como $f(a, b, c) = \overline{(b.c)}.\overline{(a.\bar{b}.\bar{c})}.\overline{(a.b.\bar{c})}$

Su implementación directa con puertas AND, OR e INV es muy sencilla y auto-explicativa:

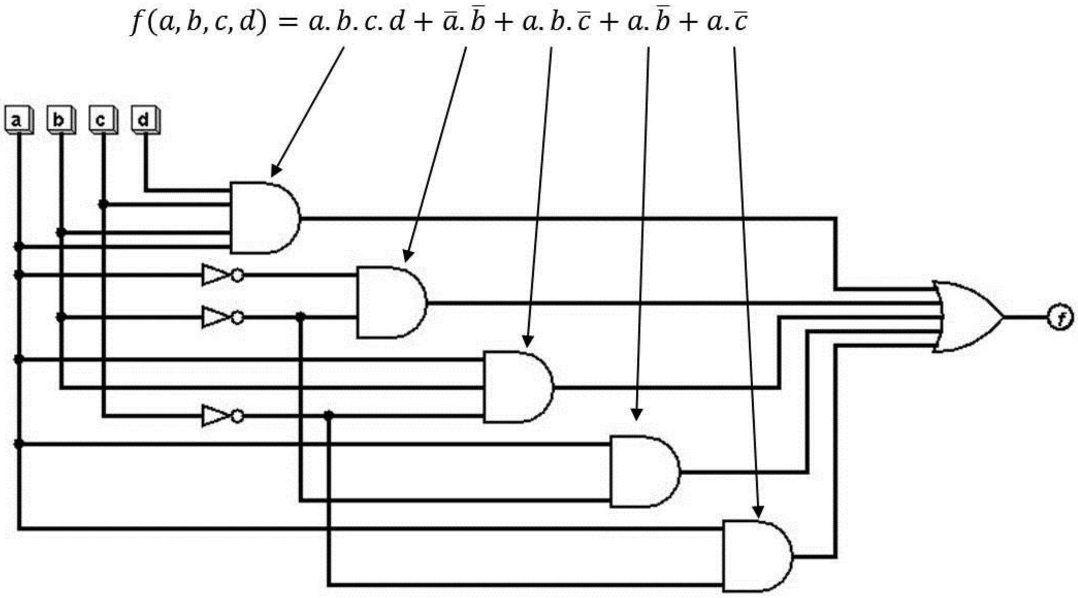
$$f(a, b, c) = \overline{(b.c)}.\overline{(a.\bar{b}.\bar{c})}.\overline{(a.b.\bar{c})}$$



En el ejercicio 1 minimizamos esta misma expresión booleana y dedujimos que era equivalente a $f(a, b, c) = \bar{b}.c + \bar{a}.\bar{c}$. Por tanto, el circuito que acabamos de dibujar es equivalente a este otro, que sólo requiere 2 AND de 2 entradas, 1 OR de 2 entradas y 3 INV:



2. $f(a,b,c,d) = a.b.c.d + \bar{a}.\bar{b} + a.b.\bar{c} + a.\bar{b} + a.\bar{c}$



De nuevo, en el ejercicio 1 simplificamos esta función booleana como $f(a,b,c,d) = a.d + a.\bar{c} + \bar{b}$. Por tanto, el circuito anterior es equivalente a este otro, que sólo requiere 2 AND de 2 entradas, 1 OR de 3 entradas y dos INV: