

Problemas

Capítulo 7 Oscilações Movimentos periódicos e caos

Osciladores Harmónicos Simples

1. Uma mola exerce uma força $F_x = -k x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m . Considere $k = 1 \text{ N/m}$ e $m = 1 \text{ kg}$.

a) Mostre que a lei do movimento $x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)$ é solução da equação dinâmica de Newton do sistema mola-corpo, em que A e ϕ são constantes. Qual a lei de velocidade do corpo ligado à mola?

b) Calcule A e ϕ , no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m.

c) Calcule a energia mecânica do sistema mola-corpo.

R: a) $v_x(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)$ b) 4 m; 0; c) 8 J

2. Uma mola exerce uma força $F_x = -k x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m . Considere $k = 1 \text{ N/m}$ e $m = 1 \text{ kg}$.

a) Mostre que a lei do movimento $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, com $\omega = \sqrt{k/m}$, é solução da equação dinâmica de Newton do sistema mola-corpo, em que A e φ são constantes. Qual a lei de velocidade do corpo ligado à mola?

b) Calcule A e φ , no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m.

c) Calcule a energia mecânica do sistema mola-corpo.

R: a) $v_x(t) = A\sqrt{\frac{k}{m}} \cos(\omega t + \varphi)$ b) 4 m; $\frac{3}{2}\pi$; c) 8 J

3. Uma mola exerce uma força $F_x = -k x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m . Considere $k = 1 \text{ N/m}$ e $m = 1 \text{ kg}$.

a) Mostre que a lei do movimento $x(t) = C \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$ é solução da equação dinâmica de Newton do sistema mola-corpo, em que C e D são constantes. Qual a lei de velocidade do corpo ligado à mola?

b) Calcule C e D , no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m.

c) Calcule a energia mecânica do sistema mola-corpo.

R: a) $v_x(t) = -C\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$ b) $C=4$ m e $D=0$; c) 8 J

4. Uma mola exerce uma força $F_x = -k x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m . Considere $k = 1$ N/m e $m = 1$ kg. A mesma lei do movimento é descrita quer por

$$x(t) = A \sin(\sqrt{k/m} t + \varphi),$$

quer por

$x(t) = C \cos(\sqrt{k/m} t) + D \sin(\sqrt{k/m} t)$. Encontre a relação entre as constantes A, φ e C, D .

Note: $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

R: $\begin{cases} C = A \sin \varphi \\ D = A \cos \varphi \end{cases}$ e $\begin{cases} A^2 = C^2 + D^2 \\ \tan \varphi = \frac{C}{D} \end{cases}$

5. Um objeto de 500 g, preso a uma mola com $k = 8$ N/m, oscila num movimento com amplitude $A = 10$ cm. Calcule:

a) a velocidade e aceleração máximas.

b) a velocidade e aceleração quando o objeto dista 6 cm da posição de equilíbrio.

c) o tempo necessário para o objeto partir de $x=0$ e chegar a $x=8$ cm.

R: a) 40 cm/s; 160 cm/s²; b) ± 32 cm/s; -96 cm/s²; c) 0.232 s

6. Uma mola exerce uma força $F_x = -k x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m . Considere $k = 1$ N/m e $m = 1$ kg. Considerando a lei do movimento $x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)$ calcule A e ϕ , sabendo:

a) que a velocidade inicial é nula e a posição inicial é 4 m.

b) que a velocidade inicial é -2 m/s e a posição inicial é 4 m.

c) que a velocidade inicial é 2 m/s e a posição inicial é 4 m.

d) que a velocidade inicial é -2 m/s e a posição inicial é 0 m.

R: a) 4m, 0 rad; b) 4.472 m, 0.463 rad; c) 4.472 m, 5.820 rad; d) 2 m, $\frac{\pi}{2}$ rad

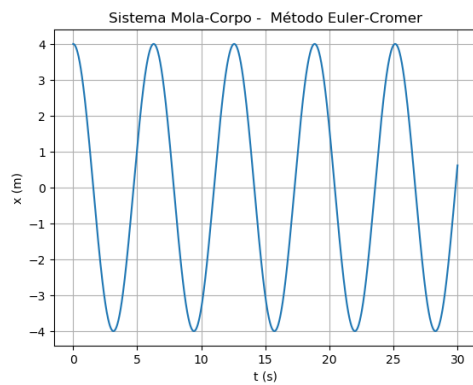
~~7.~~ Uma mola exerce uma força $F_x = -k x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m . Considere $k = 1$ N/m e $m = 1$ kg.

~~a)~~ Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m.

~~b)~~ Calcule a amplitude do movimento e o seu período, usando os resultados numéricos.

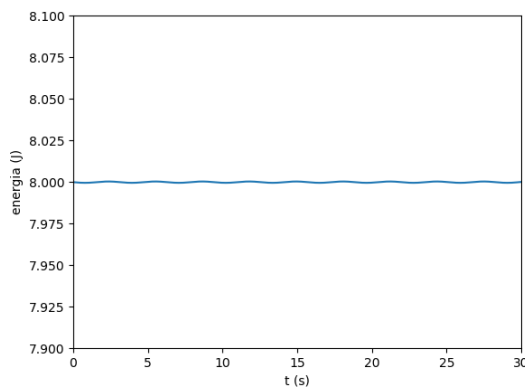
~~c)~~ Calcule a energia mecânica. É constante ao longo do tempo?

~~d)~~ Calcule os coeficientes de Fourier e mostre que a lei do movimento é expressa pela função seno e/ou coseno.



R: a)

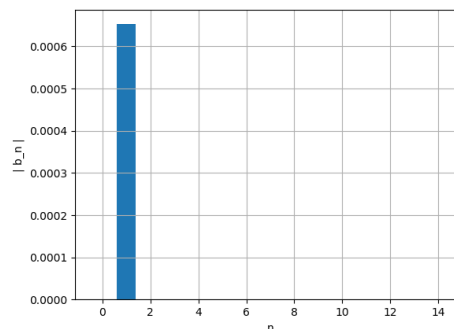
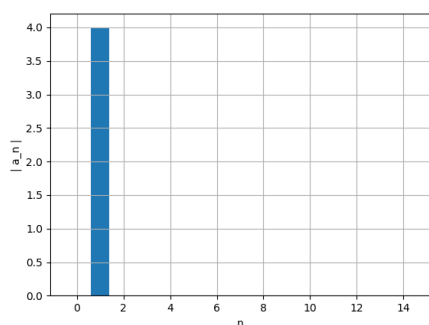
b) 4 m; 6.283 s;



c)

longo do tempo.

A energia mecânica é constante ao



d)

$$x(t) = a_1 \cos(\omega t) + 0$$

8. Uma mola exerce uma força $F_x = -k x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m . Considere $k = 1 \text{ N/m}$ e $m = 1 \text{ kg}$.

- Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial -3 m/s e a posição inicial 2 m .
- Calcule a amplitude do movimento e o seu período.
- Calcule a energia mecânica. É constante ao longo do tempo?
- Calcule os coeficientes de Fourier e mostre que a lei do movimento é expressa pela função seno e/ou coseno.

Osciladores Não harmónicos

9. Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador cúbico. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo $x_{eq} = 0 \text{ m}$, o oscilador tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 + \alpha x^3$$

exerce no corpo a força

$$F_x = -k x - 3 \alpha x^2$$

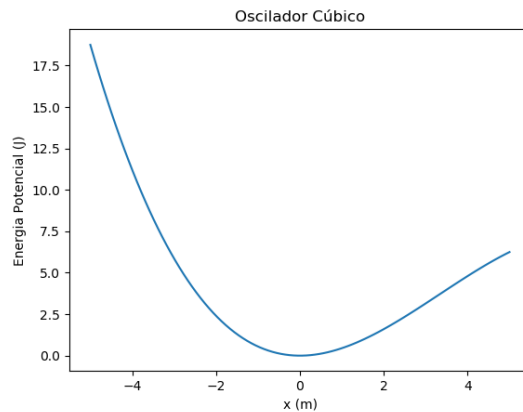
Considere $k = 1 \text{ N/m}$ e $\alpha = -0.01 \text{ N/m}^2$.

- Faça o diagrama de energia desta energia potencial. Qual o movimento quando a energia total for menor que 1 J ?
- Calcule a lei do movimento, quando a posição inicial for 1.3 m e a velocidade inicial nula? Quanto é a energia mecânica? Entre que limites se efetua o movimento e a frequência do movimento?

c) Calcule a lei do movimento, quando a posição inicial for 2.9 m e a velocidade inicial nula? Quanto é a energia mecânica? Entre que limites se efetua o movimento e a frequência do movimento?

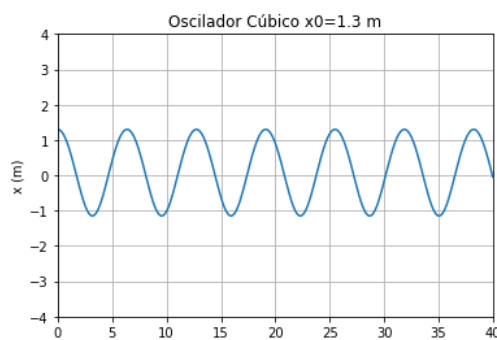
~~d)~~ Faça a análise de Fourier das solução encontrada na alínea c)

f) Faça a análise de Fourier das solução encontrada na alínea d)



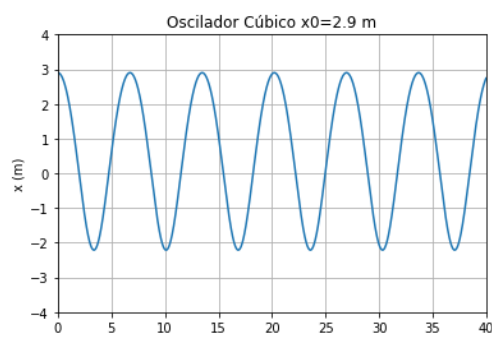
R: a)

Movimento periódico



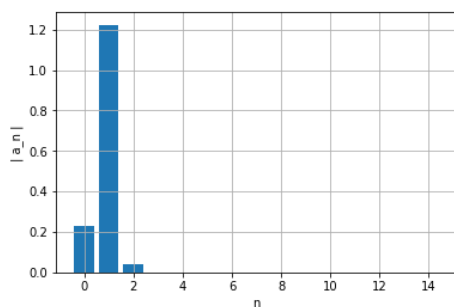
b)

0.735 J; 1.30 m e -1.15 ; 0.157 Hz;

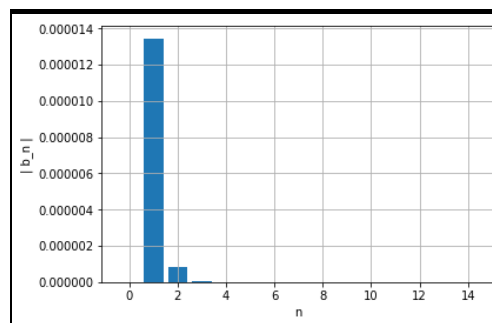


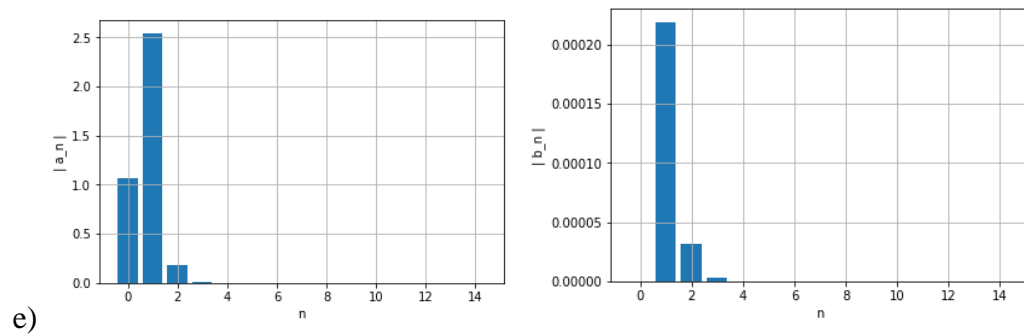
c)

2.99 J; 2.90 m e -2.21 m; 0.149 Hz;



d)

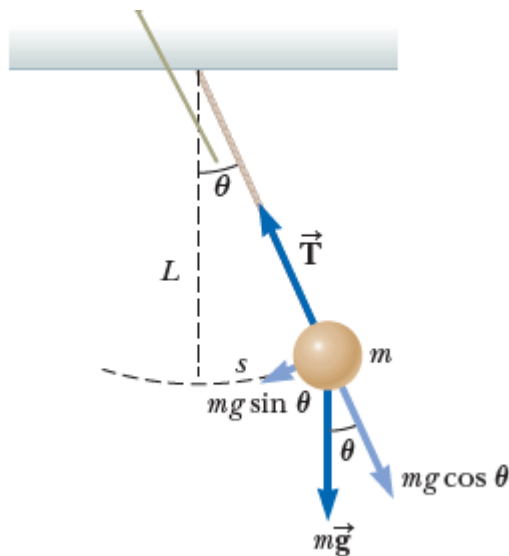




10. Uma massa suspensa do teto por um fio de comprimento $L = 1$ m oscila à volta da sua posição de equilíbrio expressa por $\theta = 0$ rad, de acordo com a equação diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

θ é o ângulo que o fio faz com a vertical.



Calcule o período do movimento, com a precisão de 4 algarismos, quando for largado

($\frac{d\theta}{dt}\bigg|_{t=0} = 0$) e o ângulo inicial for:

- a) 1°
- b) 5°
- c) 10°
- d) 15°
- e) 20°
- f) 30°

R: a) 2.007 s; b) 2.008 s; c) 2.011 s; d) 2.016 s; e) 2.022 s; f) 2.042 s

11. Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador duplo, com dois pontos de equilíbrio, $x_{eq} = 2$ m. O oscilador tem a energia potencial

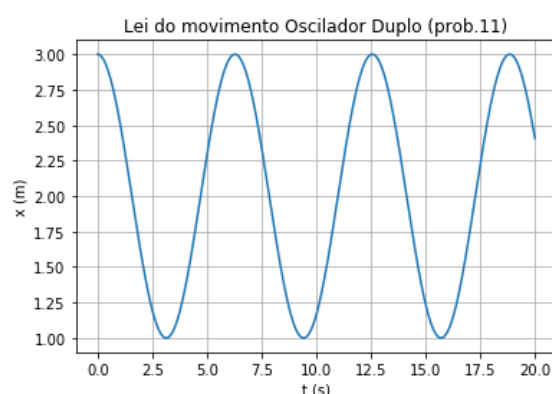
$$E_p = \frac{1}{2} k(|x| - x_{eq})^2$$

exerce no corpo a força

$$F_x = \begin{cases} -(x - x_{eq}) & x > 0 \\ (-x - x_{eq}) & x < 0 \end{cases}$$

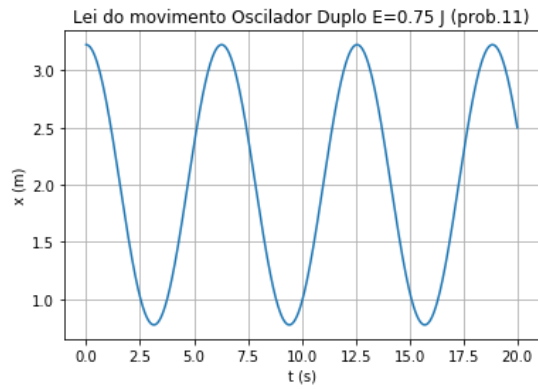
onde $k = 1$ N/m. A mola é esticada até à posição 3 m, e de seguida é largado.

- Qual a sua energia mecânica?
- Faça o gráfico da lei do movimento. Qual é o seu período?
- Calcule a lei do movimento, quando a energia total for 0.75 J. Entre que limites se efetua o movimento e a frequência do movimento?
- Calcule a lei do movimento quando a energia total for 1.5 J? Entre que limites se efetua o movimento e a frequência do movimento?
- Calcule a lei do movimento quando a energia total for 3.0 J? Entre que limites se efetua o movimento e a frequência do movimento?
- Faça a análise de Fourier das solução encontrada na alínea a)
- Faça a análise de Fourier das solução encontrada na alínea c)
- Faça a análise de Fourier das solução encontrada na alínea d)
- Faça a análise de Fourier das solução encontrada na alínea d)



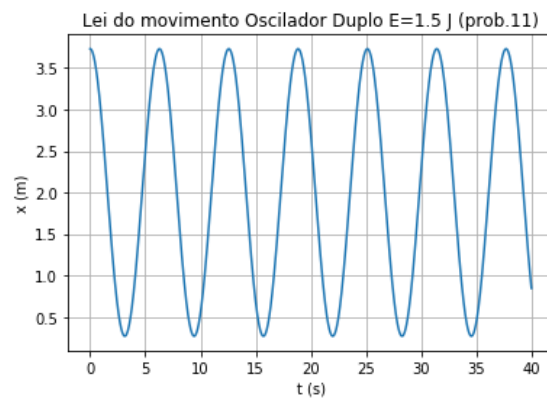
R: a) 0.5 J; b)

6.283 s;



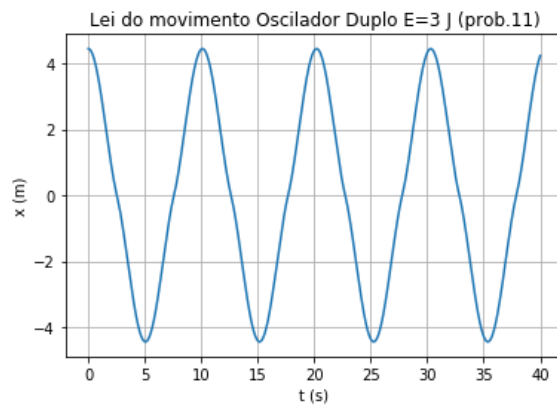
c)

3.224 e 0.775 m; 0.159 s



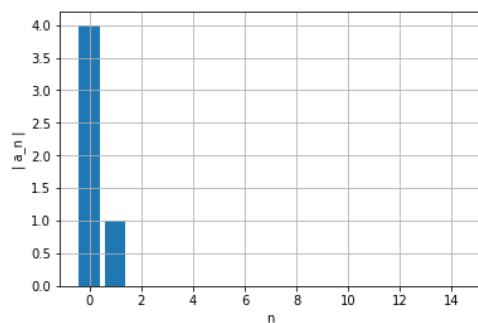
d)

3.732 e 0.268 m; 0.159 Hz

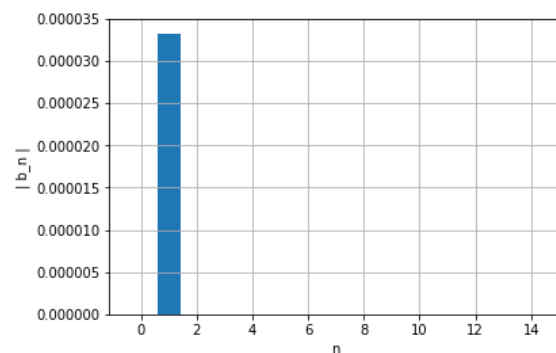


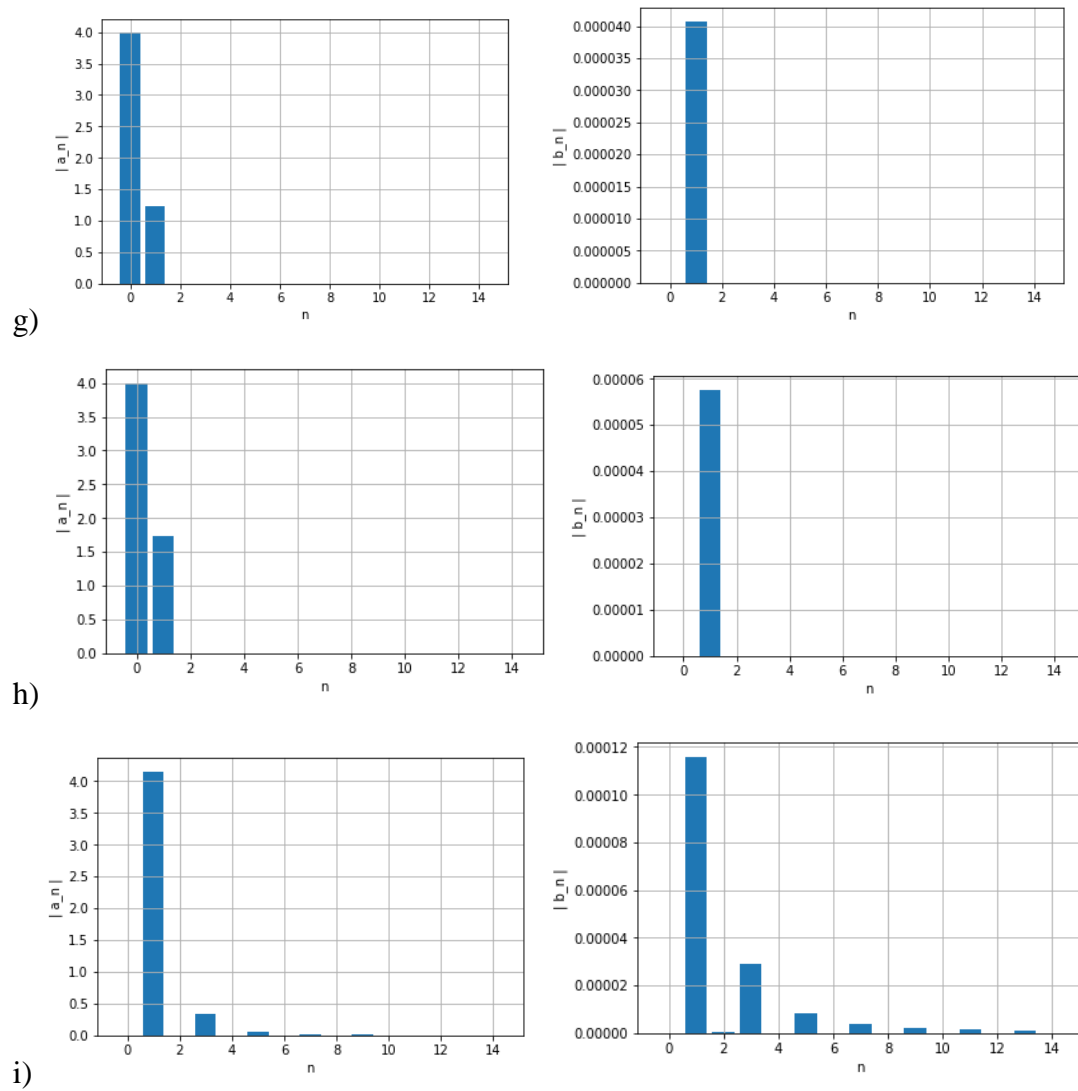
e)

4.449 e - 4.449m; 0.0990 Hz



f)





12. Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador duplo, com dois pontos de equilíbrio, $x_{eq} = 1.5$ m. O oscilador tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2} k (x^2 - x_{eq}^2)^2$$

exerce no corpo a força

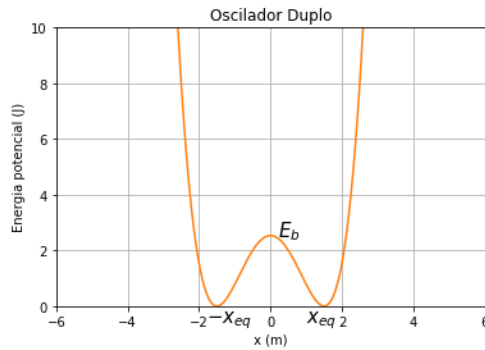
$$F_x = -2 k (x^2 - x_{eq}^2) x$$

onde $k = 1$ N/m.

a) Faça o diagrama de energia desta energia potencial. Qual o movimento quando a energia total for menor que 1 J?

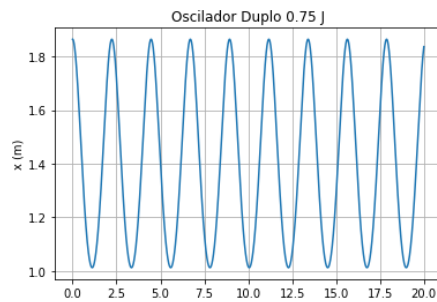
b) Calcule a lei do movimento, quando a energia total for 0.75 J. Entre que limites se efetua o movimento e a frequência do movimento?

- c) Calcule a lei do movimento quando a energia total for 3.0 J? Entre que limites se efetua o movimento e a frequência do movimento?
- d) Faça a análise de Fourier das solução encontrada na alínea c)
- e) Faça a análise de Fourier das solução encontrada na alínea d)



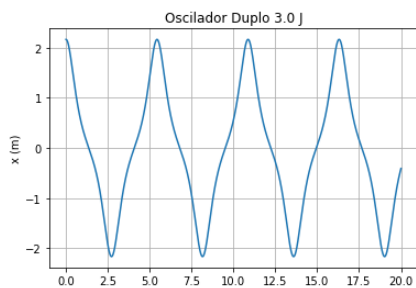
R: a)

Movimento oscilatório periódico à volta

do ponto $x_{eq}=1.5$ m

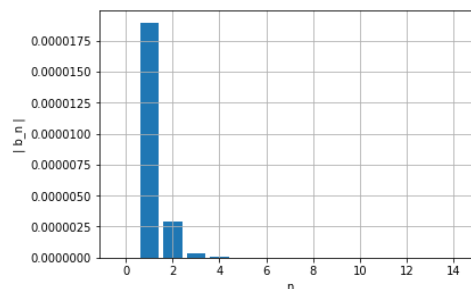
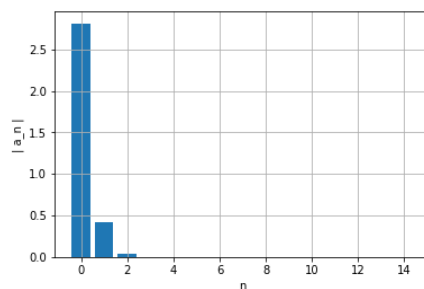
b)

1.86 m e 1.01 m; 0.448 Hz

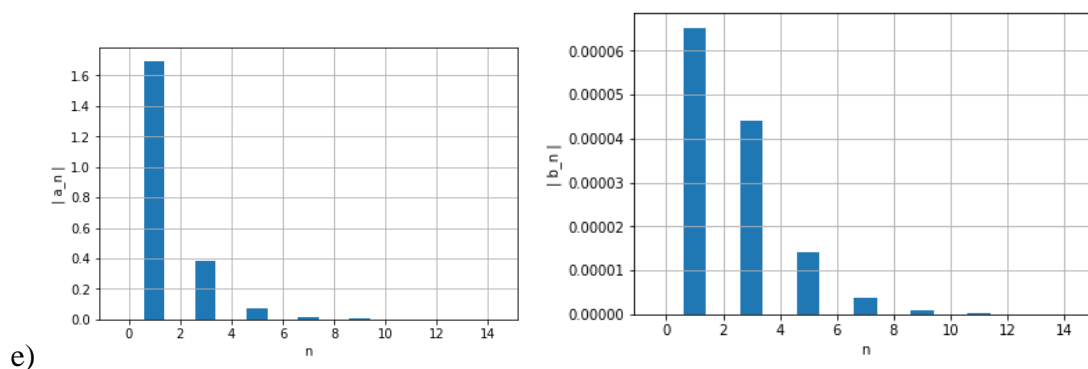


c)

2.17 m e -2.17 m; 0.184 Hz



d)



Osciladores Harmónicos Amortecidos

13. Um corpo de massa 1 kg preso a uma mola ($k = 100 \text{ N/m}$) executa um movimento harmónico simples com amplitude igual a 10 cm. A oscilação tem início numa das posições extremas.

- Determine a energia cinética e energia potencial elástica do oscilador no instante de tempo em que elas são iguais.
- Determine o primeiro instante de tempo e a posição respetiva em que isso acontece.
- De seguida, o oscilador fica sujeito a amortecimento ($b = 2 \text{ kg/s}$). Determine a variação de energia mecânica no segundo ($\Delta t = 1 \text{ s}$) seguinte.

R: a) $E_c = E_p = 0.25 \text{ J}$; b) $t = \frac{\pi}{40} \text{ s}$; $x = 0.070710 \text{ m}$; c) -0.4323 J

Osciladores Harmónicos Forçados

14. Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador harmónico forçado. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo $x_{eq} = 0 \text{ m}$, o oscilador harmónico tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

e exerce no corpo a força

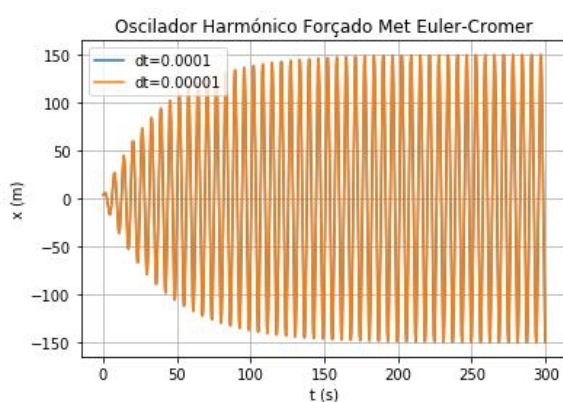
$$F_x = -k x$$

O oscilador é amortecido pela força $-bv_x$ e sujeito à força externa $F_0 \cos(\omega_f t)$.

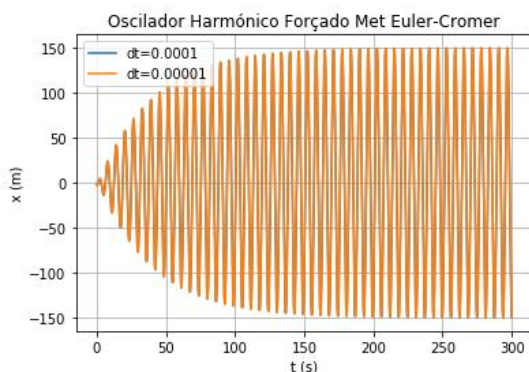
Considere $k = 1 \text{ N/m}$, $b = 0.05 \text{ kg/s}$, $F_0 = 7.5 \text{ N}$ e $\omega_f = 1.0 \text{ rad/s}$.

- Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m. Tem confiança no seu resultado?

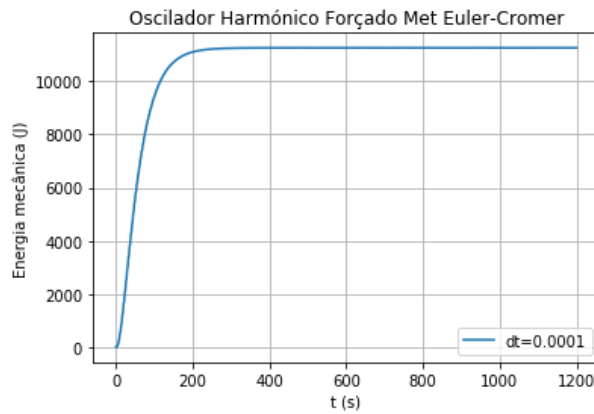
- b) Calcule a amplitude do movimento e o seu período no regime estacionário, usando os resultados numéricos.
- c) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é -4 m/s e a posição inicial -2 m.
- d) Calcule a amplitude do movimento e o seu período no regime estacionário, usando os resultados numéricos calculados na alínea anterior.
- e) Calcule a energia mecânica. É constante ao longo do tempo?
- f) Calcule os coeficientes de Fourier do movimento do regime estacionário nas condições das alíneas a) e c). Que conclusões retira da lei do movimento do regime estacionário?



R: a) Temos confiança, porque a lei do movimento obtida por dois passos temporais diferentes é a mesma. Como também os dois passos temporais produzem o mesmo resultado para o tempo final considerado $t = 300.0000$ s $x = -149.881$ m; b) 150.00 m; 6.283 s

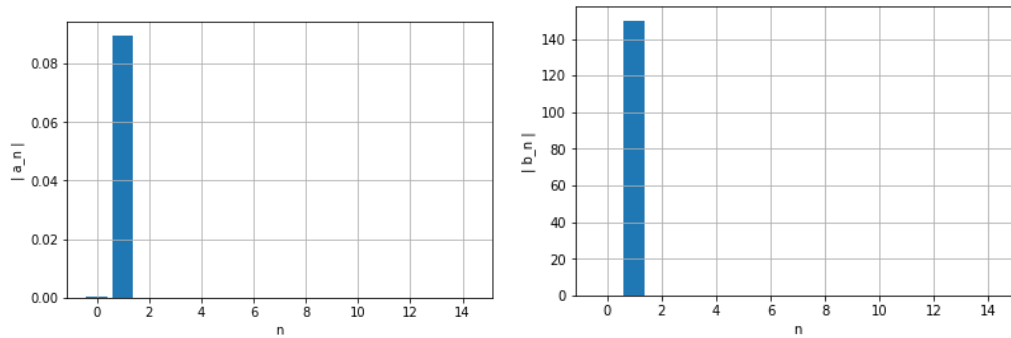


c) d) 150.00 m; 6.283 s;



e)

Não conserva a energia mecânica



f)

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = 150.00 \text{ m.}$$

A solução estacionária apresenta iguais valores dos coeficientes de Fourier, o que mostra que as duas soluções estacionárias são iguais, independente dos valores iniciais.

15. Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador harmónico forçado. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo $x_{eq} = 0$ m, o oscilador harmónico tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

e exerce no corpo a força

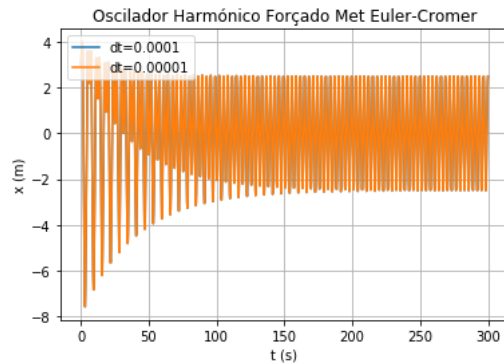
$$F_x = -k x$$

O oscilador é amortecido pela força $-bv_x$ e sujeito à força externa $F_0 \cos(\omega_f t)$. Considere $k = 1$ N/m, $b = 0.05$ kg/s, e $F_0 = 7.5$ N e $\omega_f = 2.0$ rad/s.

a) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m.

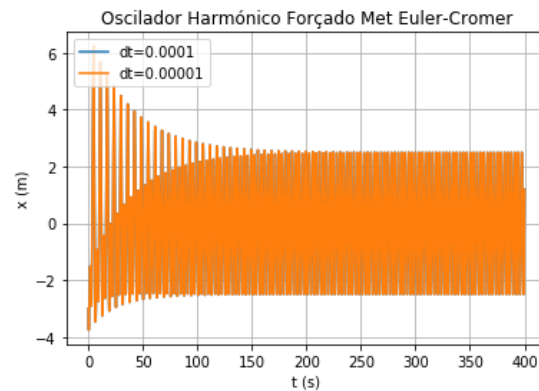
b) Calcule a amplitude do movimento e o seu período no regime estacionário, usando os resultados numéricos.

- c) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é -3 m/s e a posição inicial -4 m..
- d) Calcule a amplitude do movimento e o seu período no regime estacionário, usando os resultados numéricos calculados na alínea anterior.



R: a)

b) .498 m; 3.142 s



c)

d) 2.498 m; 3.142 s

16. Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador harmónico forçado. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo $x_{eq} = 0$ m, o oscilador harmónico tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

e exerce no corpo a força

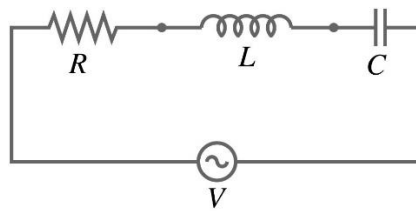
$$F_x = -k x$$

O oscilador é amortecido pela força $-bv_x$ e sujeito à força externa $F_0 \cos(\omega_f t)$. Considere $k = 1$ N/m, $b = 0.05$ kg/s, e $F_0 = 7.5$ N. Qual a frequência angular ω_f da força externa para se alcançar uma amplitude de 50.00 m no regime estacionário? Apresente o resultado com precisão de 4 algarismos.

Pista: Encontre as raízes (zeros) de $A(\omega_f) - 50.00 = 0$ rad/s.

R: 0.9230 rad/s e 1.0714 rad/s

17. Um circuito elétrico constituído por uma bobina, uma resistência e um condensador em série alimentado por uma fonte externa é um sistema onde os eletrões estão sujeitos a oscilações harmónicas amortecidas e forçadas. R é a resistência, L a indutância da bobine e C a capacidade do condensador. $V = V_0 \sin(\omega t + \phi)$ é o potencial elétrico aplicado, que nas tomadas das nossa casas é caracterizado por $\omega = 2\pi \times 40 \text{ Hz}$ e $V_0 = \sqrt{2} \times 220 \text{ V}$.



A intensidade $I(t)$ da corrente elétrica (carga por unidade de tempo) neste circuito varia (oscila) de acordo com a equação diferencial de 2ª ordem

$$L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = \frac{d}{dt} (V_0 \sin(\omega t + \phi))$$

Por comparação dos parâmetros do sistema mecânico (k, m, b, F_0 e ω_f) e do sistema elétrico (L, R, C, V_0 e ω), encontre a expressão da frequência angular de ressonância para no circuito RLC em série. O oscilador mecânico Harmónico Forçado a equação diferencial é

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\omega_f t).$$

R: $\sqrt{\frac{1}{LC}}$

Oscilador Não harmónico Forçado

18. Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador quártico forçado. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo $x_{eq} = 0 \text{ m}$, o oscilador quártico tem a energia potencial

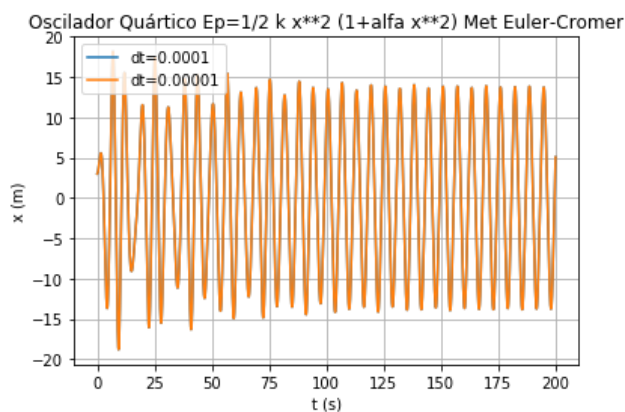
$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 (1 + \alpha x^2)$$

e exerce no corpo a força

$$F_x = -k x (1 + 2\alpha x^2).$$

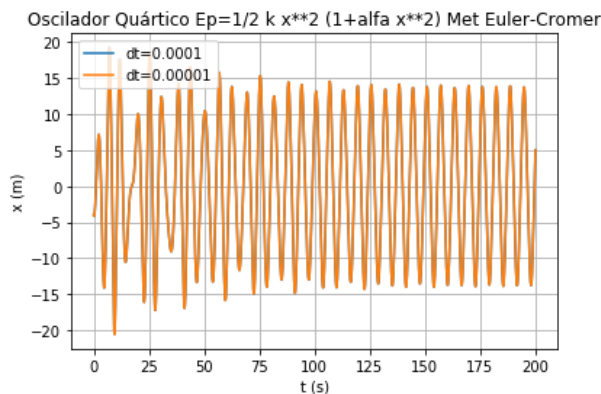
O oscilador é amortecido pela força $-bv_x$ e sujeito à força externa $F_0 \cos(\omega_f t)$. Considere $k = 1 \text{ N/m}$, $b = 0.05 \text{ kg/s}$, $\alpha = 0.002 \text{ N/m}^2$, $F_0 = 7.5 \text{ N}$ e $\omega_f = 1.0 \text{ rad/s}$.

- Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 3 m. Tem confiança no seu resultado?
- Calcule a amplitude do movimento e o seu período no regime estacionário, usando os resultados numéricos.
- Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é -4 m/s e a posição inicial -2 m .
- Calcule a amplitude do movimento e o seu período no regime estacionário, usando os resultados numéricos calculados na alínea anterior.
- Calcule a energia mecânica. É constante ao longo do tempo?
- Calcule os coeficientes de Fourier do movimento do regime estacionário nas condições das alíneas a) e c). Que conclusões retira da lei do movimento do regime estacionário?



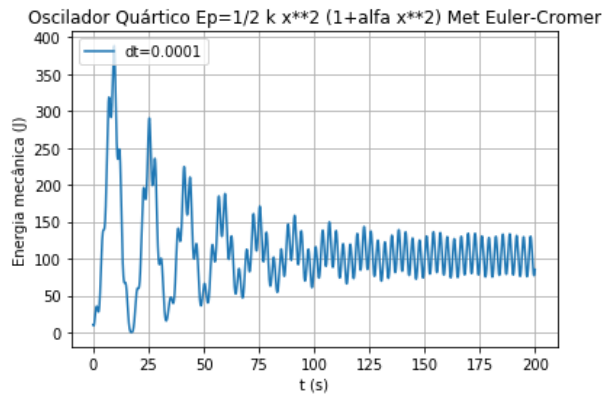
R: a) Sim! Confiança porque a solução é idêntica para passos temporais diferentes.

b) 13.791 m; 6.283 s

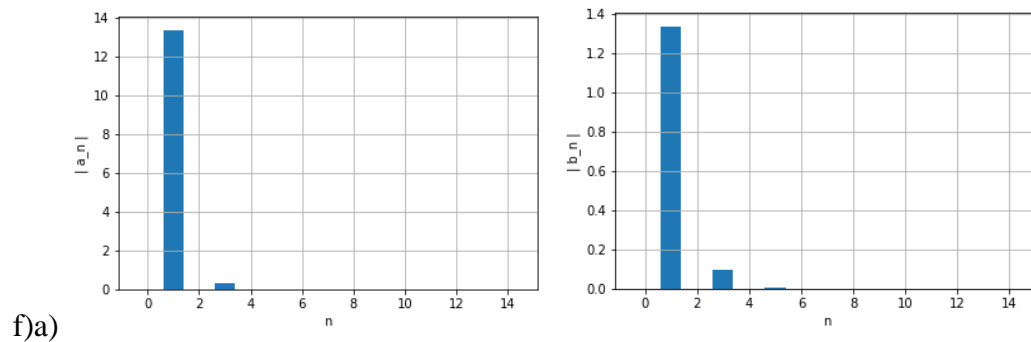


c)

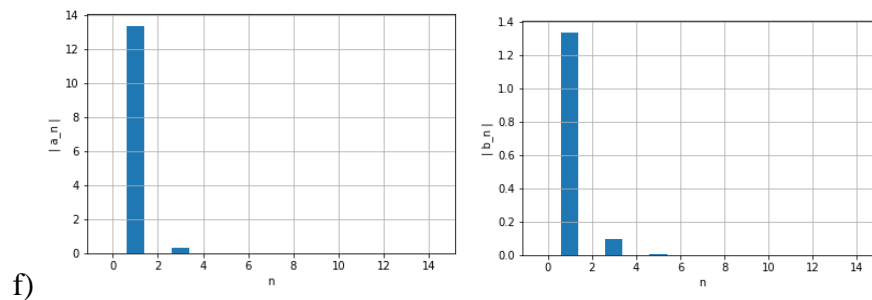
d) 13.791 m; 6.283 s



e) Não é. O sistema recebe energia realizada pela força externa e dissipa energia devido à resistência do meio.



f)a)



f)

Os coeficientes de Fourier são iguais nos dois casos, o que mostra que a lei do movimento é igual nos dois casos, no regime estacionário.

19. Implemente o método de Runge-Kutta de 4ª ordem para calcular a velocidade com que um volante de badminton atinge 2 s depois de ser largado. A velocidade terminal do volante é de 6.80 m/s, e a aceleração é

$$a_y(t) = g - \frac{g}{v_T^2} |v_y| v_y .$$

Compare o valor obtido com o valor exato, de acordo com a lei $v_y(t) = v_T \tanh\left(\frac{g t}{v_T}\right)$.

O método de Runge-Kutta de 4ª ordem determina a velocidade num instante posterior usando a seguinte aproximação:

$$v_x(t + \delta t) = v_x(t) + \frac{1}{6} [c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4] \times \delta t$$

em que

$$c_1 = a_x(t, v_x(t))$$

$$c_2 = a_x\left(t + \frac{\delta t}{2}, v_x(t) + c_1 \frac{\delta t}{2}\right)$$

$$c_3 = a_x\left(t + \frac{\delta t}{2}, v_x(t) + c_2 \frac{\delta t}{2}\right)$$

$$c_4 = a_x(t + \delta t, v_x(t) + c_3 \delta t)$$

a partir da equação diferencial $\begin{cases} \frac{dv_x(t)}{dt} = a_x(t, v_x) \\ v_x(t=0) = v_{x0} \end{cases}$

R:

δt (s)	$v_y(2 \text{ s})$ (m/s) Método de Euler (m)	$v_y(2 \text{ s})$ (m/s) Método de Runge-Kutta 4
0.1	6.7802962	6.75746827
0.01	6.7601201	6.75747944
0.001	6.7577469	6.75747944
0.0001	6.7575062	
0.00001	6.7574821	
exato	6.75747944	6.75747944

20. Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador quártico forçado. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo $x_{eq} = 0$ m, o oscilador quártico tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 (1 + \alpha x^2)$$

e exerce no corpo a força

$$F_x = -k x (1 + 2\alpha x^2).$$

O oscilador é amortecido pela força $-bv_x$ e sujeito à força externa $F_0 \cos(\omega_f t)$.

Considere $k = 1$ N/m, $b = 0.05$ kg/s, $\alpha = 1.00$ N/m², $F_0 = 7.5$ N e $\omega_f = 1.0$ rad/s.

a) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 3 m. Tem confiança no seu resultado?

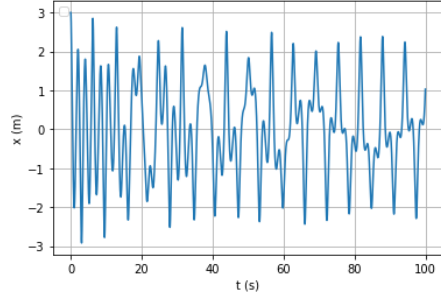
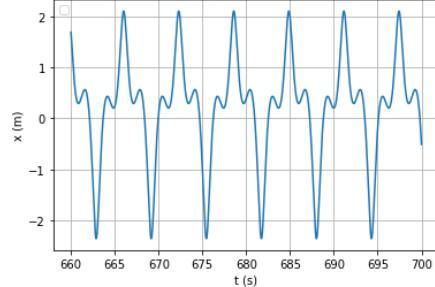
b) Se existir regime estacionário, calcule os limites do movimento (amplitude), o seu período, faça o gráfico no espaço da fase e a análise de Fourier.

c) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial -3 m/s e a posição inicial -3 m.

d) Se existir regime estacionário, calcule os limites do movimento (amplitude), o seu período, faça o gráfico no espaço da fase e a análise de Fourier.

e) Calcule a energia mecânica nos casos da alínea a) e b). É constante ao longo do tempo?

f) Face aos resultados obtidos como caracteriza as soluções deste oscilador forçado?

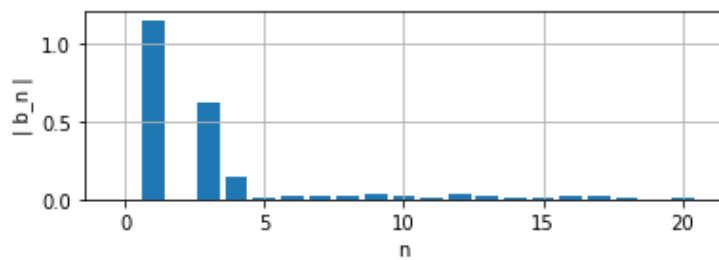
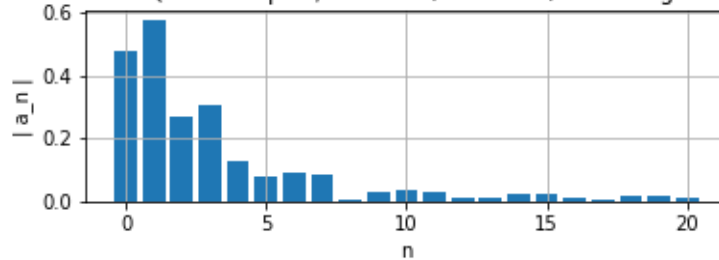
Oscilador Quártico $E_p = 1/2 k x^{**2} (1 + a x^{**2})$ Met Runge-Kutta 4Oscilador Quártico $E_p = 1/2 k x^{**2} (1 + a x^{**2})$ Met Runge-Kutta 4

R: a)

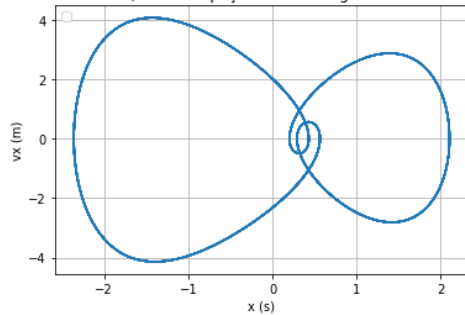
$dt=0.01$ s produz $x(700 \text{ s}) = -1.1222008 \text{ m}$ e

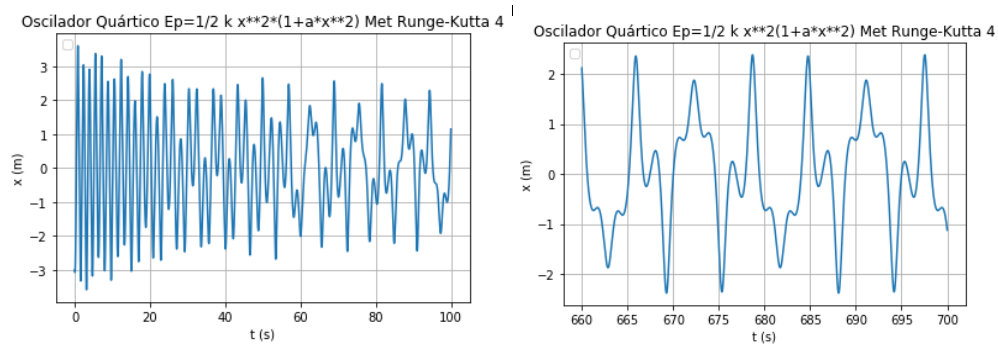
$dt=0.001$ s produz o mesmo resultado que o passo mais pequeno $x(700 \text{ s}) = -1.1222008 \text{ m}$

b) Regime estacionário de amplitudes 2.1066 m e -2.3606 m e período 12.57 s.

Oscilador Quártico $E_p = 1/2 k x^{**2} (1 + a x^{**2})$ Met Runge-Kutta 4

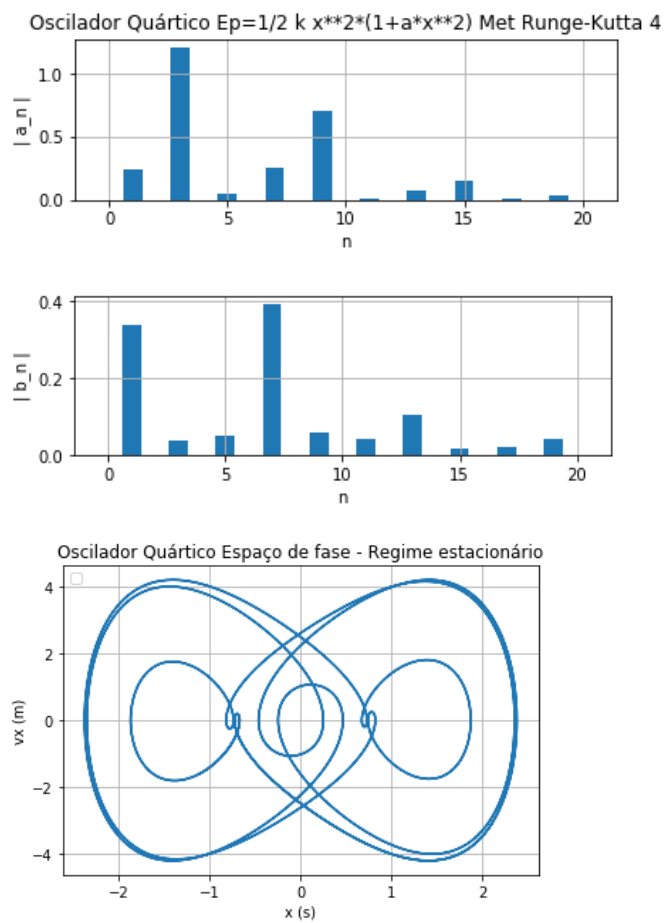
Oscilador Quártico Espaço de fase - Regime estacionário

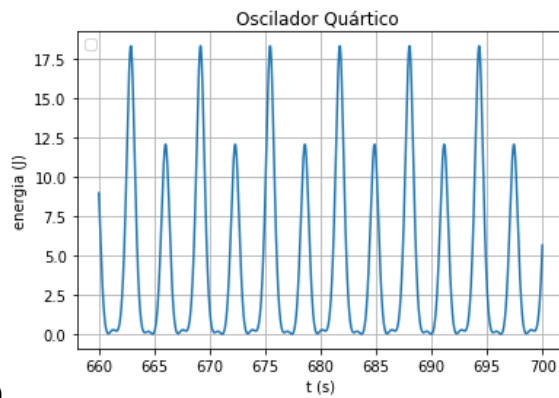




c)

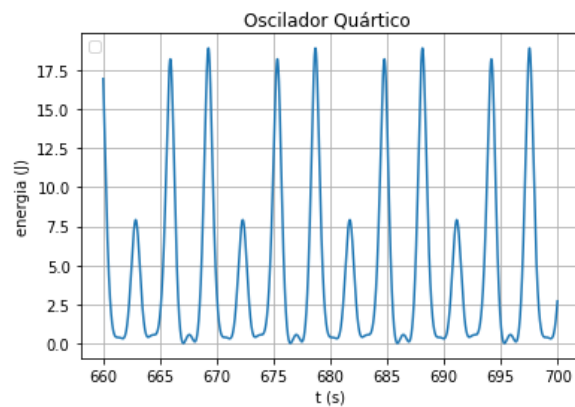
d) Regime estacionário de amplitudes 2.3800 m e -2.3800 m e período 18.85 s.





e)a),

e)c)



Não é constante.

f) O sistema tem um comportamento transiente, no início, e passado algum tempo, apresenta um comportamento estacionário periódico. A solução do regime estacionário não é sinusoidal. E é dependente das condições iniciais.

21. Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador quártico forçado. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo $x_{eq} = 0$ m, o oscilador quártico tem a energia potencial

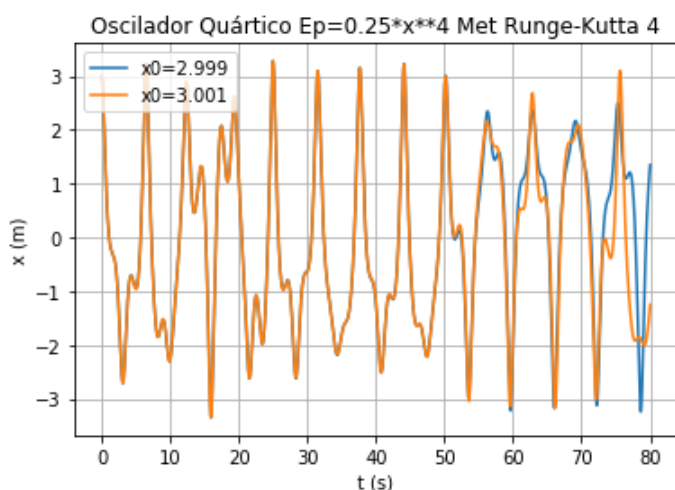
$$E_p = \alpha x^4$$

e exerce no corpo a força

$$F_x = -4\alpha x^3.$$

O oscilador é amortecido pela força $-bv_x$ e sujeito à força externa $F_0 \cos(\omega_f t)$. Considere $k = 1$ N/m, $b = 0.05$ kg/s, $\alpha = 0.25$ N/m², $F_0 = 7.5$ N e $\omega_f = 1.0$ rad/s.

Este oscilador pode apresentar regime caótico. Calcule até que instante pode calcular univocamente a lei do movimento, sabendo que a posição inicial é 3.000 ± 0.001 m e a velocidade inicial é nula. Considere todas as quantidades, exceto a posição inicial, medidas com uma precisão elevada.



R: até ~73 s.

22. Diga quais dos seguintes sistemas modelados pelas equações diferenciais de valor inicial:

a) Oscilador Harmónico Amortecido

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x$$

b) Oscilador Harmónico Amortecido e Forçado

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x + \frac{F_0}{m}\cos(\omega_f t)$$

c) Oscilador Quártico Amortecido e Forçado

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4\alpha x^3 - \frac{b}{m}v_x + \frac{F_0}{m}\cos(\omega_f t)$$

d) Oscilador de Lorenz

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = r x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$

e) Oscilador de Van der Pol

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x - \varepsilon(x^2 - 1) \frac{dx}{dt}$$

f) Pêndulo Amortecido e Forçado

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta + \frac{F_0}{m}\cos(\omega_f t)$$

g) oscilador de uma palheta de clarinete

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + \alpha \frac{dx}{dt} - \beta \left(\frac{dx}{dt}\right)^3$$

Podem apresentar soluções caóticas?

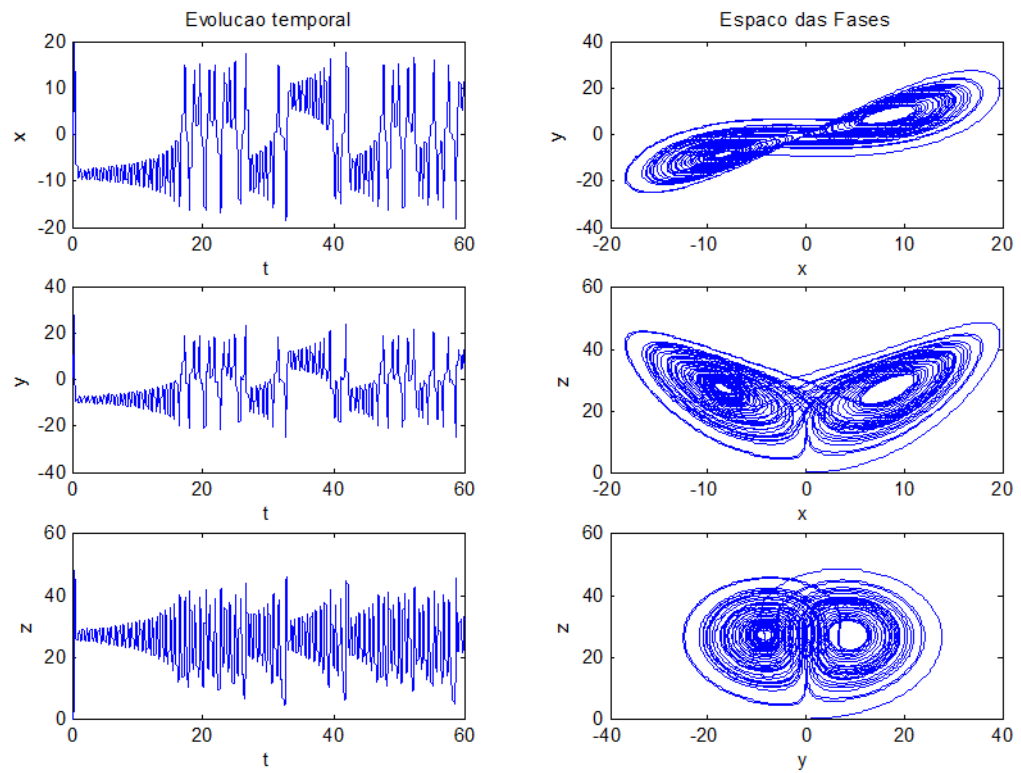
a) Não b) Sim c) Sim d) Sim e) Não f) Sim g) Não

23. Ao modelar a dinâmica da convecção dum fluido por um modelo muito simples, Edward Lorenz, obteve três equações diferenciais de 1ª ordem de valor inicial,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = r x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \\ x(t=0) = x_0 \\ y(t=0) = y_0 \\ z(t=0) = z_0 \end{cases}$$

em que os coeficientes e as variáveis não têm um significado físico direto. Determine a evolução temporal, quando $\sigma = 10$; $b = \frac{8}{3}$; $r = 28$ e $x(t=0) = z(t=0) = 0$ e $y(t=0) = 1$. Tem confiança nos seus resultados?

R:



Soluções Problemas Cap. 7

1. a