DEPARTAMENTO DE FÍSICA
UNIVERSIDADE DE AVEIRO

Modelação de Sistemas Físicos
Ano Académico 2020/2021 - 2º Semestre

EXAME - Resolução
Parte Cálculo Computacional-Numérica

Data: 30 JUNHO 2021
Hora: 10H45

Duração: 2 horas
Disciplina: 41769
Salas: 23.2.10, 23.2.11, 23.2.12, 23.2.13, 23.2.14, 11.2.7, 11.2.22

Cotação:
1) 1 + 2 + 2 = 5 valores
2) 2 + 1.5 + 1.5 = 5 valores
3) 2 + 2 = 4 valores
4) 2 + 2 + 2 = 6 valores

NOTE: De consulta, sem acesso à Internet

a) Responda às perguntas, **justificando-as, na vossa folha de prova**
b) Indique claramente o sistema de eixos usado.
c) Esboce os gráficos, indicando univocamente os pontos importantes. Se gravar as figuras, salve-as em formato png.
d) Na vossa folha de prova indique os métodos, os algoritmos, passos, … usados.
e) Os ficheiros, com a identificação da pergunta e da alínea, devem ser copiados para a caneta de memória do docente presente na sala com o nome e número do aluno (para poderem ser consultados quando o docente tiver dúvidas durante a correção).
f) Tem de usar o seu computador portátil. Pode (e deve) usar os seus programas, assim como outros programas que tenha obtido.

As respostas não podem ser escritas a lápis

Justifique todas as respostas

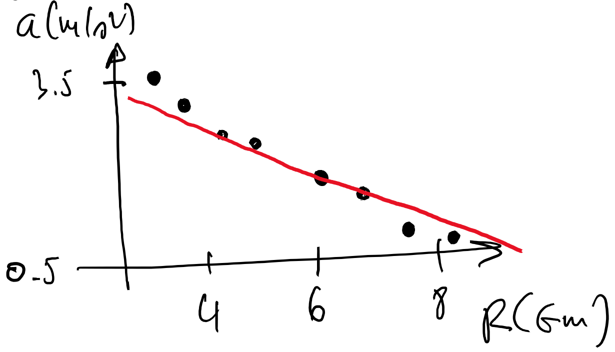
1. A aceleração da gravidade sentida por um corpo de 1 kg em órbita é $a = \frac{K}{R^2}$, onde K é o produto entre a constante gravitacional universal e a massa do planeta, $K = G \times M_P$, e R a distância ao centro do planeta. Foram feitas medições da aceleração a diferentes altitudes do planeta Marte. Os valores medidos estão registados na tabela:

R (10^6m)	a (m/s^2)
3.389	3.522
3.924	2.793
4.459	2.098
4.993	1.681
5.528	1.557
6.062	1.089
6.597	1.050
7.131	0.896
7.666	0.669
8.200	0.640

a) Trace o gráfico a em função de R, usando os dados da tabela, e faça um ajuste linear. Indique os valores do declive, e o seu erro, a ordenada na origem, e o seu erro, e o coeficiente de determinação r^2.
b) Trace o gráfico $\log(a)$ em função de $\log(R)$. Indique os valores do declive, e o seu erro, e do coeficiente de determinação r^2.
c) Pelos resultados obtidos nas alíneas anteriores, que conclui acerca da relação entre a aceleração (a) e a distância ao centro de Marte (R). Justifique. Faça um outro gráfico que mostre essa relação.

Resolução resumida:

a)



$m = -0.558 \quad 10^{-6}/s^2$

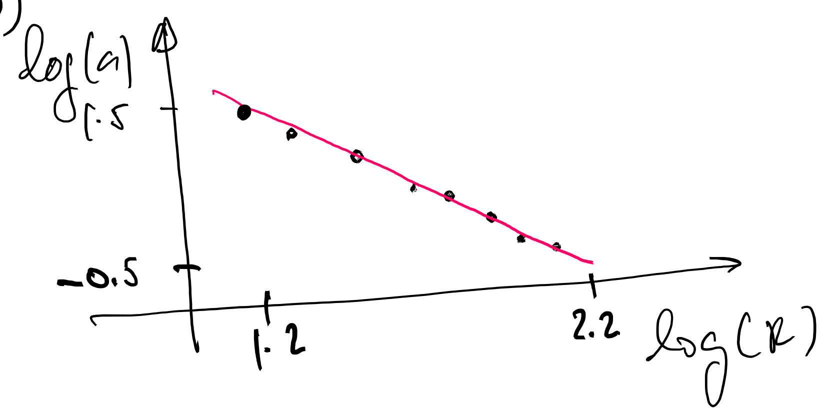
$\Delta m = 0.069 \quad 10^{-6}/s^2$

$r^2 = 0.891$

$b = 4.830 \quad m/s^2$

$\Delta b = 0.41 \quad m/s^2$

b)



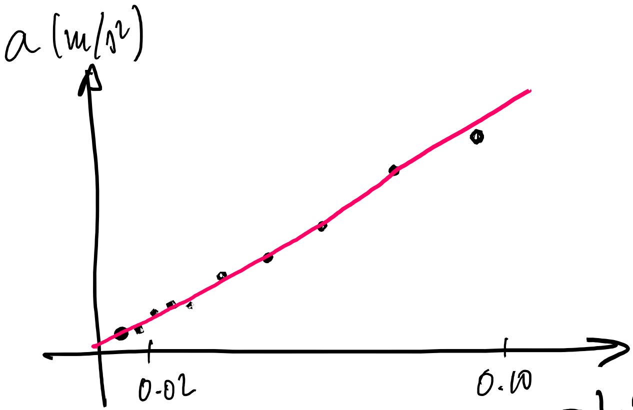
$m = -1.96$

$\Delta m = 0.074$

$r^2 = 0.989$

$a = C \ R^{-1.96}$

c)



$R^{-1.96}$ (R em 10^6 m)

$m = 38.96 \times 10^6 \ m/s^2 m^{-1.96}$

$\Delta m = 1.15$

$r^2 = 0.9931$

$b = 0.041$

$\Delta b = 0.05$

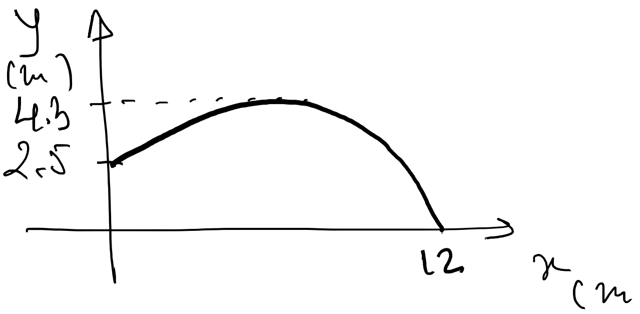
Relação $a = (39 \pm 2) \ R^{-1.96} + (0.04 \pm 0.05)$

c/ R em 10^6 m

$r^2 \sim 1$ indica um modelo muito fiel às medições.

2. Um volante de badmington é batido à altura de 2.5 m (a partir do chão), com velocidade 230 km/h e a fazer um ângulo de 15º com a horizontal. Considerando que a velocidade terminal é 6.80 m/s (e a resistência do ar)
a) Faça o gráfico da trajetória (altura em função da distância percorrida na horizontal).
b) Em que ponto cai no chão e quanto demorou?
c) Qual o ângulo com a horizontal que o jogador deve bater, para obter o máximo alcance?
Resolução resumida:

a)



$\delta t = 0.0001$ s

método de Euler

$$a_x = -\frac{g}{v_T^2}|\vec{v}|\, v_x$$

$$a_y = -g - \frac{g}{v_T^2}|\vec{v}|\, v_y$$

$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y = 2.5\text{ m} \end{cases}$

$v_x = 230 \cos 15°$
$v_y = 230 \sin 15°$ km/h

$v_T = 6.80$ m/s

b) Com função zero

volante no chão: $\begin{cases} x = 14.0\text{ m} \\ y = 0 \end{cases}$

tempo a atingir o chão 1.6 s

c) Ângulo para o qual o alcance é máximo.
"Loop" nos ângulos, entre

1º – 10° e 45°, com $\delta t = 0.01$

2º – 18° e 25°, com $\delta t = 0.001$
e $\delta\theta = 0.1$

R: 20.2°

3. Uma bola de ténis é batida jCunto ao solo (posição inicial $y = 0$) com a velocidade 140 km/h, a fazer um ângulo de 7º com a horizontal e no sentido positivo dum eixo horizontal OX, sendo OY eixo vertical. Considerando sempre a resistência do ar,

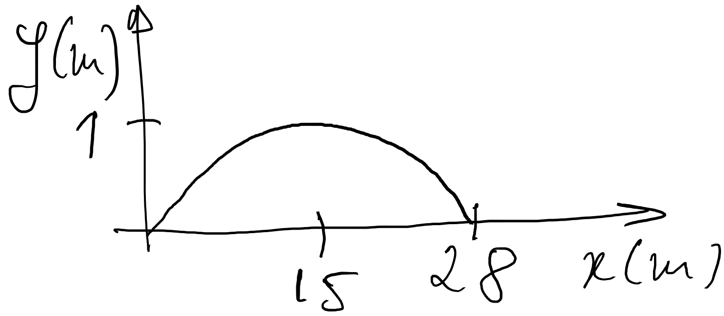
a) Calcule a trajetória da bola. Qual o alcance?

b) Calcule o trabalho efetuado pela força de resistência do ar desde que o jogador bateu a bola e esta atingiu o solo.

Use a aproximação trapezoidal para calcular os integrais. A velocidade terminal da bola de ténis é 100 km/h. A bola de ténis tem a massa 57 g.

Resolução resumida:

a)



Alcance = 28.79 m, $t_{solo} = 0.902\,s$

pelo Método de Euler, $\delta t = 0.0001\,s$

usando a função zeros.

b) $$W^{res} = \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}_{solo}} \vec{F}^{(res)} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_0^{t_{solo}} \vec{F}^{(res)} \cdot \vec{v}\, dt$$

$$= \int_0^{t_{solo}} \left(F_x^{(res)} v_x + F_y^{(res)} v_y\right) dt$$

Usando a Ap. trapezoidal

$$= -22.27\ J$$

Verificação:

$$W^{nc} = E_{inicial} - E_{solo}$$

$$= 43.10 - 20.21 \text{ J}$$

$$= +22.21 \text{ J}$$

4. Um corpo de massa 1.5 kg move-se num oscilador cúbico. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo $x_{eq} = 0$ m, o oscilador tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2}k\ x^2 +\ \alpha\ x^3$$

exerce no corpo a força

$$F_x = -k\,x -\ 3\,\alpha\ x^2$$

Considere $k = 1.2$ N/m e $\alpha = -\,0.01$ N/m^2.

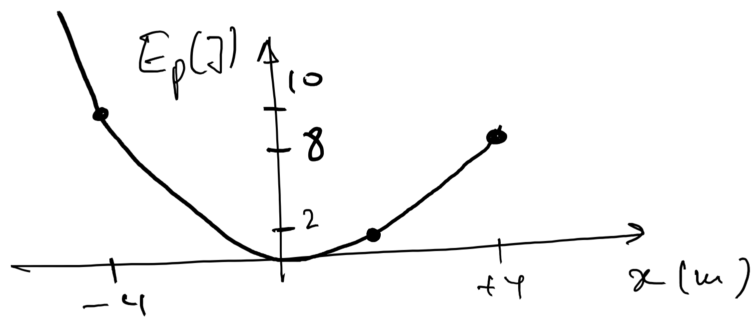
a) Faça o diagrama de energia desta energia potencial. Qual o movimento quando a energia total for menor que 2 J?

b) Calcule a lei do movimento, quando a posição inicial for 3.5 m e a velocidade inicial 2.0 m/s? Quanto é a energia mecânica? Entre que limites se efetua o movimento e a frequência e o período do movimento? Apresente os resultados com a precisão de 4 algarismos.

c) Faça a análise de Fourier da solução encontrada. Apresente o resultado como $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, sendo a_n e b_n os coeficientes de Fourier.

Resolução resumida:

a)



Energia potencial não simétrica

Corpo c/ Energia ≤ 2J

Movimento periódico:

Corpo oscila entre 2 extremos não simétricos.

em que a posição média não coincide

com a posição de equilíbrio,

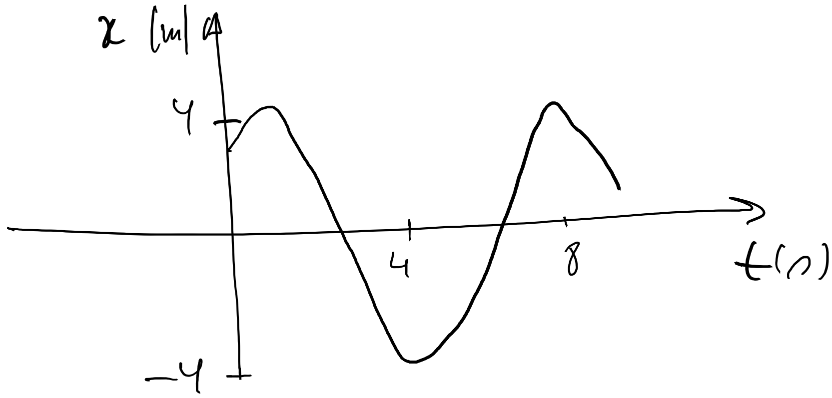
na, a energia potencial na zona positiva de x

é menor do que na zona negativa,

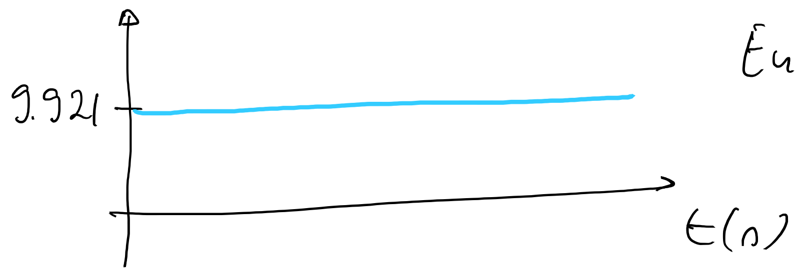
o que faz o corpo passar mais tempo

na parte positiva.

b) Pelo movimento ser periódico, usamos o método de Euler-Cromer para integrar a eq. diferencial de Newton (de valor inicial).



$E = E_c + E_p$ (J)



Energia mecânica mantem-se constante

$E = 9.921$ J

Limites: Usando a função maximo para determinar os máximos e os mínimos de $x(t)$

δt (s)	Limite esq. (m)	Limite direita (m)
0.01	-3.9318	+4.2089
0.001	-3.9384	+4.2164
0.0001	-3.9391	+4.2173
0.00001	-3.9391	+4.2173

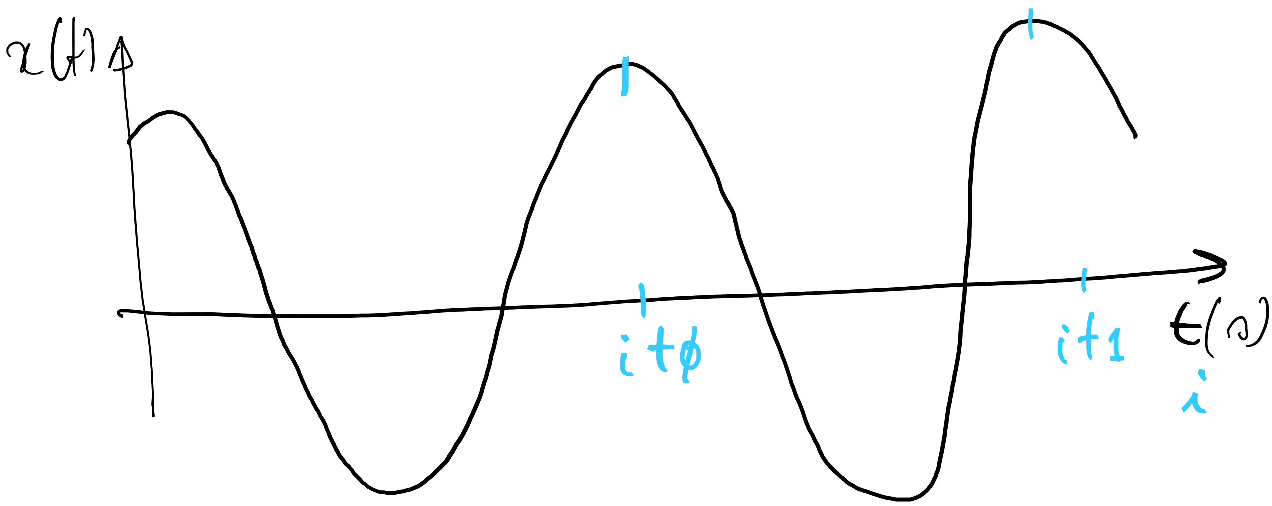
C/ precisão de 4 algarismos

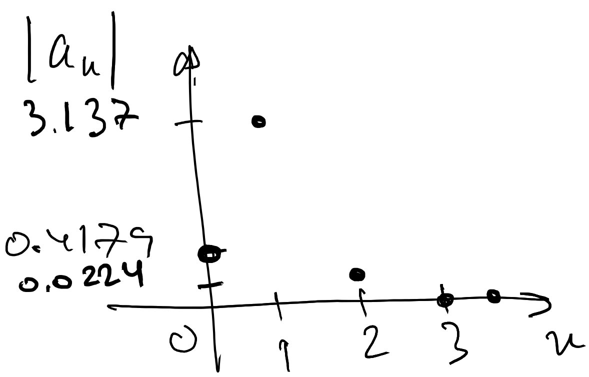
$x_{\text{limite à esquerda}} = -3.939$ m

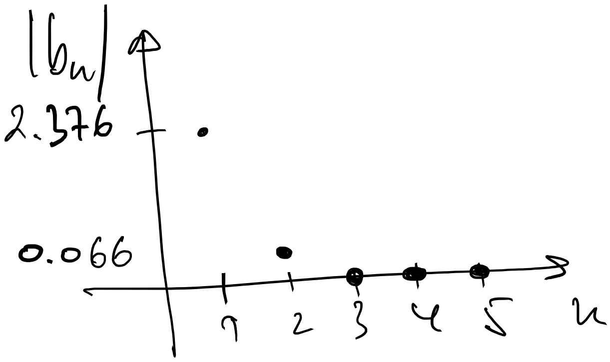
$x_{\text{limite à direita}} = +4.217$ m

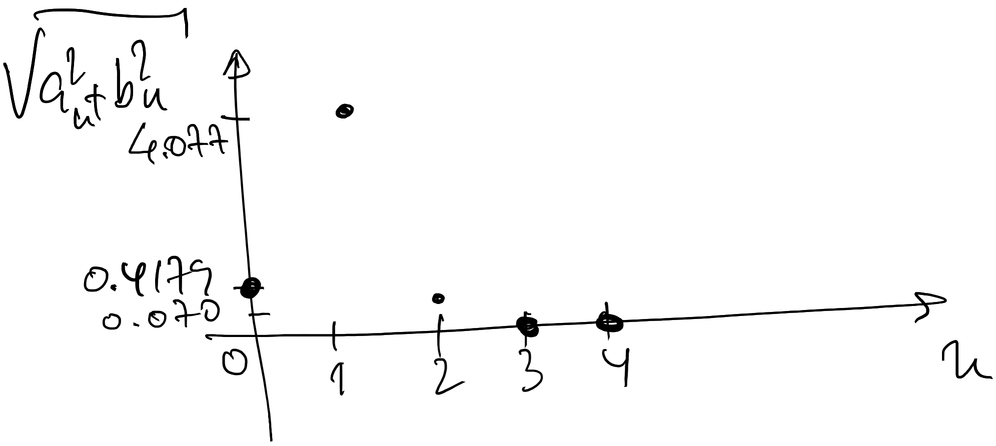
c) Para $\delta t = 0.0001$ s $\Rightarrow T = 7.056$ s

$\delta t = 0.00001$ s $\quad f = 0.1417$ Hz


x(t)
it0
it1
t(s)
i


|a_n|
3.137
0.4179
0.0224
0
1
2
3
n


|b_n|
2.376
0.066
1
2
3
4
5
n


√(a_n^2+b_n^2)
4.077
0.4179
0.070
0
1
2
3
4
n