Modelação de Sistemas Físicos
UA 2020-2021

Capítulo 2 Movimento a uma dimensão

2. Um volante de badmington foi largado de uma altura considerável. A lei do movimento é

$$y(t) = \frac{v_T^2}{g}\log\left[\cosh\left(\frac{gt}{v_\mathrm{T}}\right)\right],$$

em que a terminal do volante v_T é 6.80 m/s.

a) Faça o gráfico da lei do movimento $y(t)$ de 0 a 4.0 s.

b) Determine a velocidade instantânea em função do tempo, usando cálculo simbólico. Faça o gráfico da velocidade em função do tempo de 0 a 4 s, usando o pacote matplotlib.

c) Determine a aceleração instantânea em função do tempo, usando cálculo simbólico. faça o gráfico da aceleração em função do tempo de 0 a 4 s, usando o pacote matplotlib.

d) Mostre que a aceleração $a_y(t) = g - \frac{g}{v_T^2}v_y|v_y|$ é equivalente à calculada na alínea anterior.

e) Se o volante for largado de uma altura de 20 m, quanto tempo demora a atingir o solo? Compare com o tempo que demoraria se não houvesse resistência do ar.

f) Nas condições da alínea anterior, qual o valor da velocidade e da aceleração quando o volante chega ao solo?

Nota:

- Para cálculo simbólico: para derivar pode usar as funções diff do pacote sympy
- Para cálculo numérico: Pode usar a função arccosh do pacote numpy.

$\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ e $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$;

$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$; $\tanh(x) = \sinh(x) / \cosh(x)$

Resolução:

a) ver ficheiro prob2.2-volante.py

b) ver ficheiros prob2.2-volante-symbol.py

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_T \, \mathrm{tgh}\left(\frac{gt}{v_t}\right)$$

ver ficheiro prob2.2-volante.py

c) Como em b)

$$a_y = g/\cosh^2\left(\frac{gt}{v_T}\right)$$

d)
$$a_y = g - \frac{g}{v_T^2}\, v_y |v_y|$$

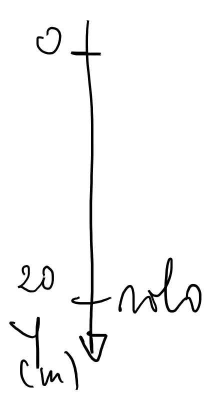
$$= g - \frac{g}{v_T^2}\, v_T^2\, \mathrm{tgh}^2\left(\frac{gt}{v_T}\right)$$

$$= g\left(1 - \frac{\sinh^2(gt/v_T)}{\cosh^2(gt/v_T)}\right)$$

$$= g\left(\frac{\cosh^2(gt/v_T) - \sinh^2(gt/v_T)}{\cosh^2\left(\frac{gt}{v_T}\right)}\right)$$

$$= g\left(\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{gt}{v_T}\right)}\right)$$

$$= g/\cosh^2\left(\frac{gt}{v_T}\right)$$

e) 

$$y = \frac{v_T^2}{g}\log\left(\cosh\left(\frac{gt}{v_T}\right)\right)$$

$$y_{solo} = \frac{v_T^2}{g}\log\left(\cosh\left(\frac{g\, t_{solo}}{v_T}\right)\right)$$

$$\log\left(\cosh\left(\frac{g t_{solo}}{v_T}\right)\right) = y_{solo}\,\frac{g}{v_T^2}$$

$e^{\,}$:

$$\cosh\left(\frac{g t_{solo}}{v_T}\right) = e^{y_{solo}\, g/v_T^2}$$

$$\frac{g t_{solo}}{v_T} = \operatorname{arccosh}\left(e^{y_{solo}\, g/v_T^2}\right)$$

$$t_{solo} = \frac{v_T}{g}\operatorname{arccosh}\left(e^{y_{solo}\, g/v_T^2}\right)$$

$$= 3{,}4\,s$$

sem resistência do ar $\qquad y(t) = \frac{1}{2} g t^2$

$$y_{solo} = \frac{1}{2} g t_{so}^2$$

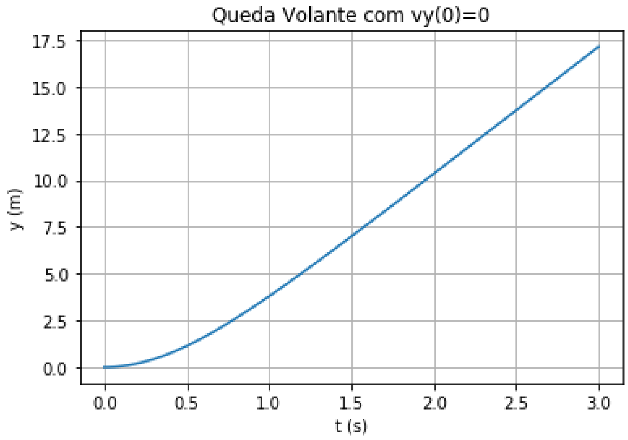
$$t_{so}^2 = \frac{2 y_o}{g}$$

$$t_{so} = 2{,}0\,s$$

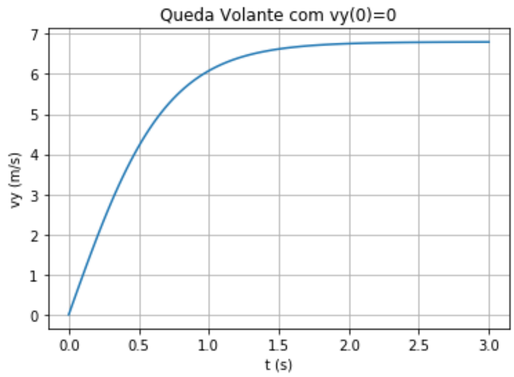
f) $$v_x(t_{solo}) = v_T \operatorname{tgh}\left(\frac{g t_{solo}}{v_T}\right) = 0{,}8\,m/s$$

$$a_x(t_{solo}) = \frac{g}{\cosh^2\left(\frac{g t_{solo}}{v_T}\right)} = 0{,}002\,m/s^2$$

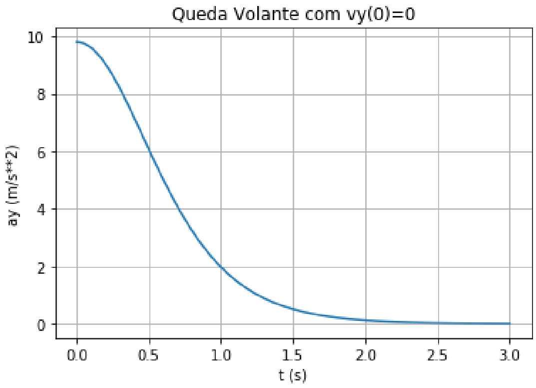
Soluções Problemas Cap. 2



2. a)



b) $v_x(t) = v_{\mathrm{T}} \tanh \frac{gt}{v_{\mathrm{T}}}$;



c) $a_x(t) = \frac{g}{\cosh^2\left(\frac{gt}{v_{\mathrm{T}}}\right)}$;

e) com resistência do ar 3.4 s; sem resistência 2,0 s; f) 6.8 m/s e 0.002 m/s^2.