Modelação de Sistemas Físicos
Universidade de Aveiro 2020-2021

Problemas

Capítulo 7 Oscilações
Movimentos periódicos e caos

Osciladores Harmónicos Simples

1. Uma mola exerce uma força $F_x = -k\, x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m. Considere $k = 1$ N/m e $m = 1$ kg.

a) Mostre que a lei do movimento $x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)$ é solução da equação dinâmica de Newton do sistema mola-corpo, em que A e ϕ são constantes. Qual a lei de velocidade do corpo ligado à mola?

b) Calcule A e ϕ , no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m.

c) Calcule a energia mecânica do sistema mola-corpo.

R: a) $v_x(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi)$ b) 4 m; 0; c) 8 J

2. Uma mola exerce uma força $F_x = -k\, x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m. Considere $k = 1$ N/m e $m = 1$ kg.

a) Mostre que a lei do movimento $x(t) = A\sin(\omega\, t + \varphi)$, com $\omega = \sqrt{k/m}$, é solução da equação dinâmica de Newton do sistema mola-corpo, em que A e φ são constantes. Qual a lei de velocidade do corpo ligado à mola?

b) Calcule A e φ , no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m.

c) Calcule a energia mecânica do sistema mola-corpo.

R: a) $v_x(t) = A\sqrt{\frac{k}{m}}\ \cos(\omega\, t + \varphi)$ b) 4 m; $\frac{3}{2}\pi$; c) 8 J

3. Uma mola exerce uma força $F_x = -k\, x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m. Considere $k = 1$ N/m e $m = 1$ kg.

a) Mostre que a lei do movimento $x(t) = C\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + D\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t)$ é solução da equação dinâmica de Newton do sistema mola-corpo, em que C e D são constantes. Qual a lei de velocidade do corpo ligado à mola?

b) Calcule C e D , no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m.

c) Calcule a energia mecânica do sistema mola-corpo.

R: a) $v_x(t) = -C\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + D\;\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$ b) C=4 m e $D = 0$; c) 8 J

4. Uma mola exerce uma força $F_x = -k\,x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m. Considere $k = 1$ N/m e $m = 1$ kg. A mesma lei do movimento é descrita quer por

$$x(t) = A\sin(\sqrt{k/m}\,t + \varphi),$$

quer por

$x(t) = C\cos(\sqrt{k/m}\,t) + D\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{k/m}\,t)$. Encontre a relação entre as constantes A, φ e C, D.

Note: $\mathrm{sen}\,(x \pm y) = \sin x\,\cos y \pm \cos x\,\sin y$

R: $\begin{cases} C = A\sin\varphi \\ D = A\cos\varphi \end{cases}$ e $\begin{cases} A^2 = C^2 + D^2 \\ \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{C}{D} \end{cases}$

5. Um objeto de 500 g, preso a uma mola com k = 8 N/m, oscila num movimento com amplitude A =10 cm. Calcule:

a) a velocidade e aceleração máximas.

b) a velocidade e aceleração quando o objeto dista 6 cm da posição de equilíbrio.

c) o tempo necessário para o objeto partir de x=0 e chegar a x=8 cm.

R: a) 40 cm/s; 160 cm/s^2; b) $\pm$32 cm/s; -96 cm/s^2; c) 0.232 s

6. Uma mola exerce uma força $F_x = -k\,x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m. Considere $k = 1$N/m e $m = 1$ kg. Considerando a lei do movimento $x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi\right)$ calcule A e ϕ, sabendo:

a) que a velocidade inicial é nula e a posição inicial é 4 m.

b) que a velocidade inicial é -2 m/s e a posição inicial é 4 m.

c) que a velocidade inicial é 2 m/s e a posição inicial é 4 m.

d) que a velocidade inicial é -2 m/s e a posição inicial é 0 m.

R: a) 4m, 0 rad; b) 4.472 m, 0.463 rad; c) 4.472 m, 5.820 rad; d) 2 m, $\frac{\pi}{2}$ rad

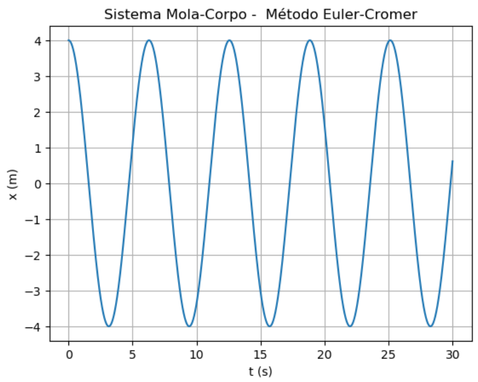
7. Uma mola exerce uma força $F_x = -k\ x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m. Considere $k = 1$ N/m e $m = 1$ kg.

a) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m.

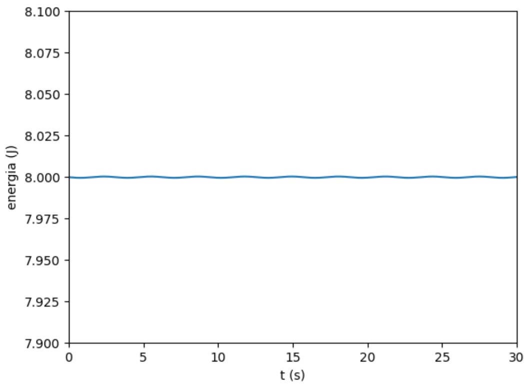
b) Calcule a amplitude do movimento e o seu período, usando os resultados numéricos.

c) Calcule a energia mecânica. É constante ao longo do tempo?

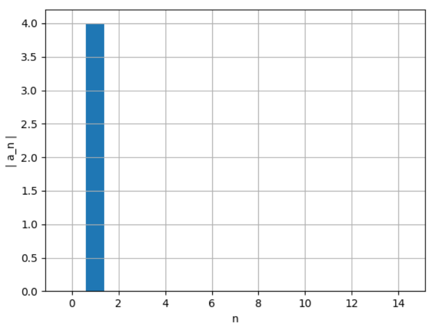
d) Calcule os coeficientes de Fourier e mostre que a lei do movimento é expressa pela função seno e/ou coseno.

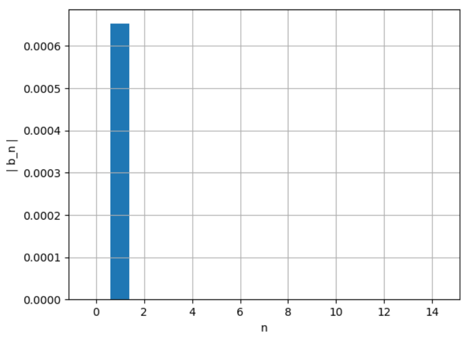
R: a) 

b) 4 m; 6.283 s;

c) 

A energia mecânica é constante ao longo do tempo.

d) 



$x(t) = a_1 \cos(\omega t) + 0$

8. Uma mola exerce uma força $F_x = -k\, x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m. Considere $k = 1$ N/m e $m = 1$ kg.

a) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial -3 m/s e a posição inicial 2 m.

b) Calcule a amplitude do movimento e o seu período.

c) Calcule a energia mecânica. É constante ao longo do tempo?

d) Calcule os coeficientes de Fourier e mostre que a lei do movimento é expressa pela função seno e/ou coseno.

Osciladores Não harmónicos

9. Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador cúbico. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo $x_{eq} = 0$ m, o oscilador tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2} k\ x^2 + \alpha\ x^3$$

exerce no corpo a força

$$F_x = -k\,x - 3\,\alpha\ x^2$$

Considere $k = 1$ N/m e $\alpha = -\,0.01$ N/m^2.

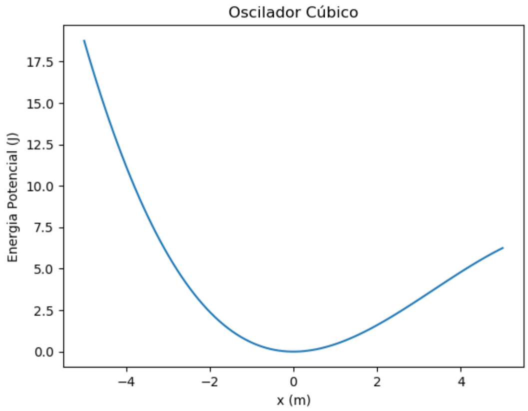
a) Faça o diagrama de energia desta energia potencial. Qual o movimento quando a energia total for menor que 1 J?

b) Calcule a lei do movimento, quando a posição inicial for 1.3 m e a velocidade inicial nula? Quanto é a energia mecânica? Entre que limites se efetua o movimento e a frequência do movimento?

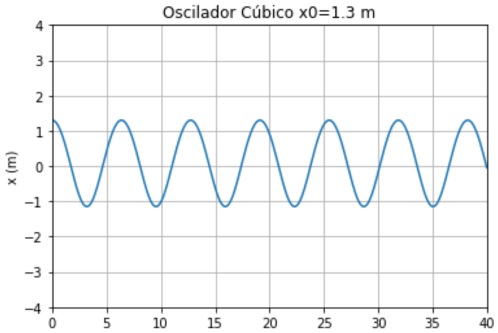
c) Calcule a lei do movimento, quando a posição inicial for 2.9 m e a velocidade inicial nula? Quanto é a energia mecânica? Entre que limites se efetua o movimento e a frequência do movimento?

d) Faça a análise de Fourier das solução encontrada na alínea c)

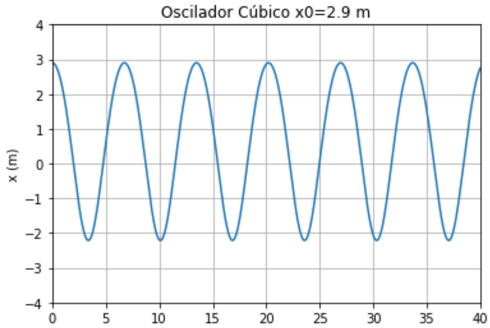
f) Faça a análise de Fourier das solução encontrada na alínea d)



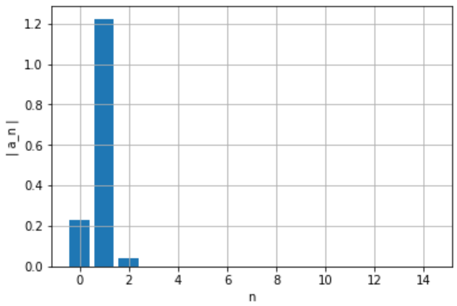
R: a) Movimento periódico

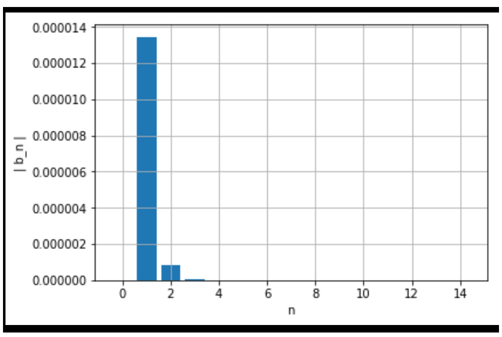


b) 0.735 J; 1.30 m e -1.15 ,; 0.157 Hz;

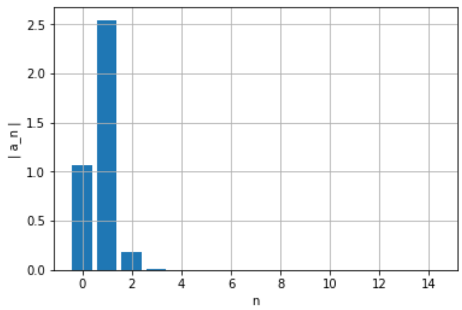
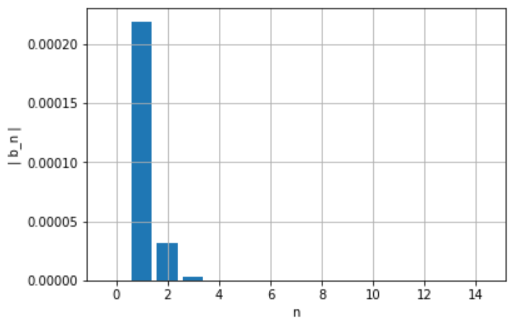


c) 2.99 J; 2.90 m e -2.21 m; 0.149 Hz;





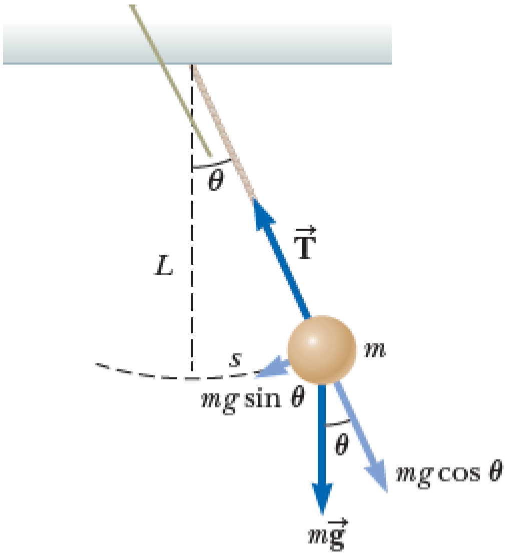
d)

e)  

10. Uma massa suspensa do teto por um fio de comprimento $L = 1$ m oscila à volta da sua posição de equilíbrio expressa por $\theta = 0$ rad, de acordo com a equação diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

θ é o ângulo que o fio faz com a vertical.



Calcule o período do movimento, com a precisão de 4 algarismos, quando for largado ($\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=0} = 0$) e o ângulo inicial for:

a) 1º

b) 5º

c) 10º

d) 15º

e) 20º

f) 30º

R: a) 2.007 s; b) 2.008 s; c) 2.011 s; d) 2.016 s; e) 2.022 s; f) 2.042 s

11. Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador duplo, com dois pontos de equilíbrio, $x_{eq} = 2$ m. O oscilador tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2}k(|x| - x_{eq})^2$$

exerce no corpo a força

$$F_x = \begin{cases} -(x - x_{eq}) & x > 0 \\ (-x - x_{eq}) & x < 0 \end{cases}$$

onde $k = 1$ N/m. A mola é esticada até à posição 3 m, e de seguida é largado.

a) Qual a sua energia mecânica?

b) Faça o gráfico da lei do movimento. Qual é o seu período?

c) Calcule a lei do movimento, quando a energia total for 0.75 J. Entre que limites se efetua o movimento e a frequência do movimento?

d) Calcule a lei do movimento quando a energia total for 1.5 J? Entre que limites se efetua o movimento e a frequência do movimento?

e) Calcule a lei do movimento quando a energia total for 3.0 J? Entre que limites se efetua o movimento e a frequência do movimento?

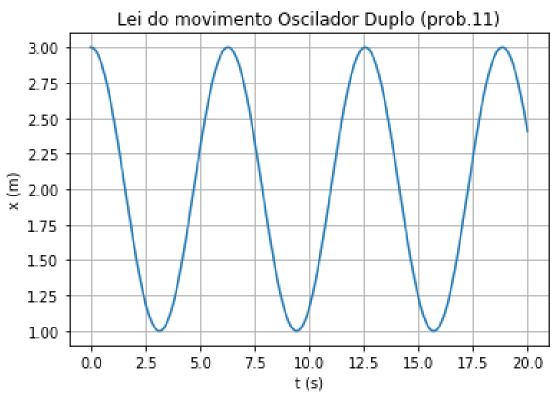
f) Faça a análise de Fourier das solução encontrada na alínea a)

g) Faça a análise de Fourier das solução encontrada na alínea c)

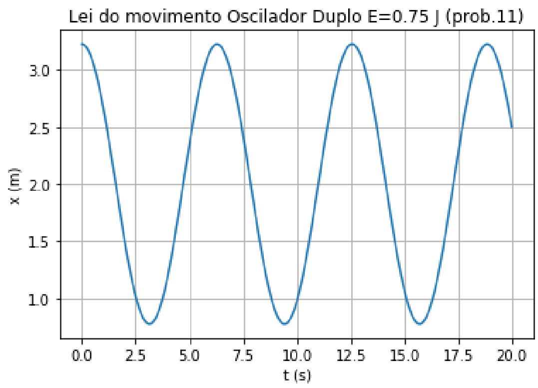
h) Faça a análise de Fourier das solução encontrada na alínea d)

i) Faça a análise de Fourier das solução encontrada na alínea d)

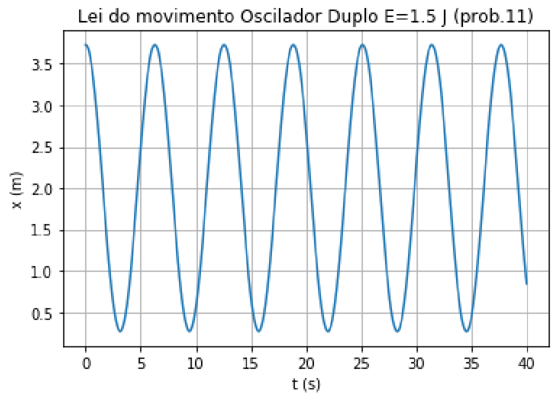
R: a) 0.5 J; b)



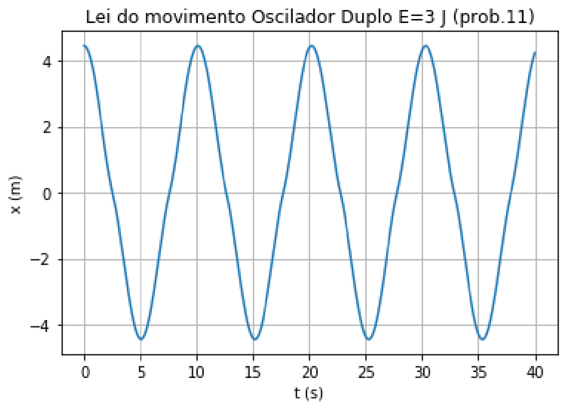
6.283 s;

c) 

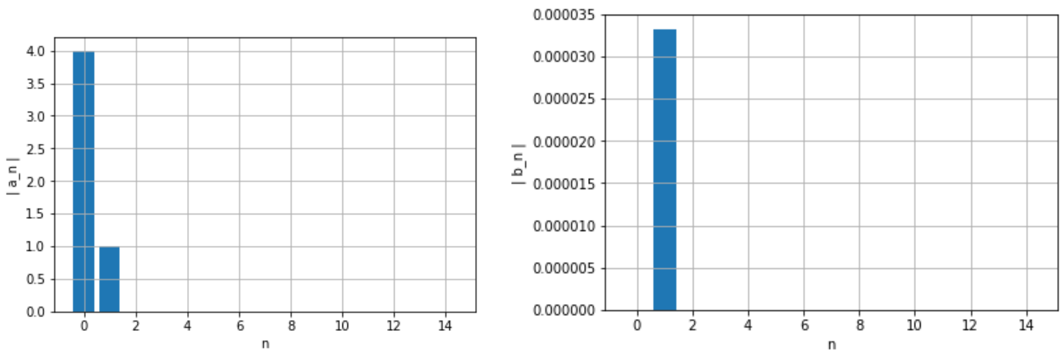
3.224 e 0.775 m; 0.159 s

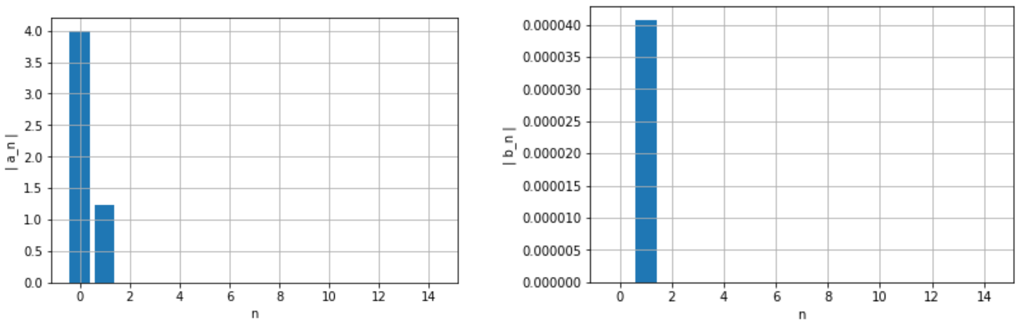
d) 

3.732 e 0.268 m; 0.159 Hz

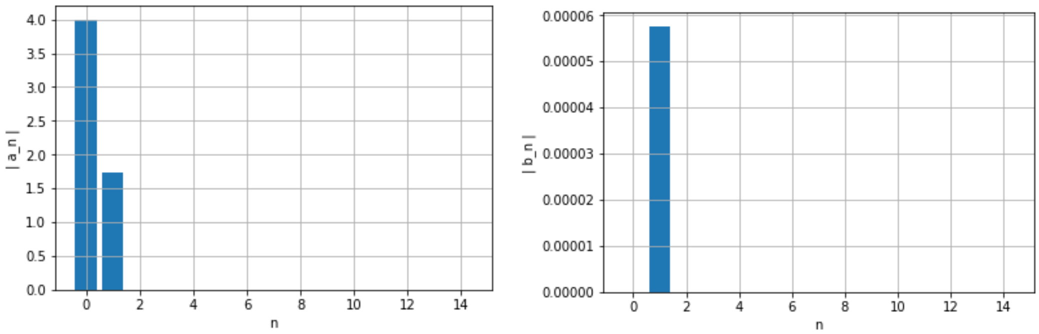
e) 

4.449 e - 4.449m; 0.0990 Hz

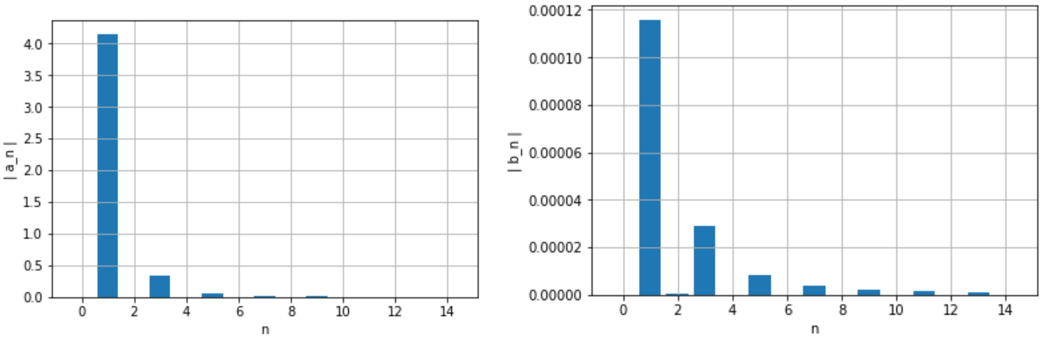
f) 



g)



h)



i)

12. Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador duplo, com dois pontos de equilíbrio, $x_{eq} = 1.5$ m. O oscilador tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2} k\left(x^2 - x_{eq}^2\right)^2$$

exerce no corpo a força

$$F_x = -2\, k\, \left(x^2 - x_{eq}^2\right) x$$

onde $k = 1$ N/m.

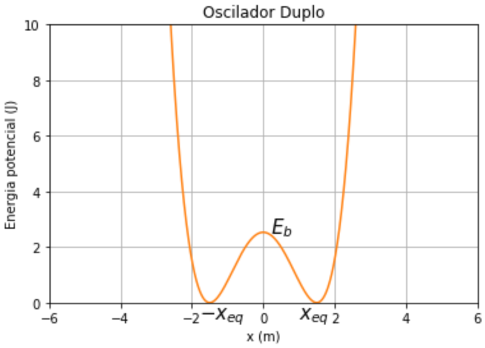
a) Faça o diagrama de energia desta energia potencial. Qual o movimento quando a energia total for menor que 1 J?

b) Calcule a lei do movimento, quando a energia total for 0.75 J. Entre que limites se efetua o movimento e a frequência do movimento?

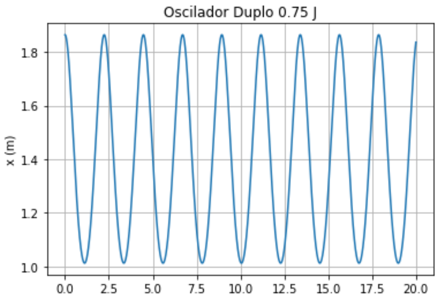
c) Calcule a lei do movimento quando a energia total for 3.0 J? Entre que limites se efetua o movimento e a frequência do movimento?

d) Faça a análise de Fourier das solução encontrada na alínea c)

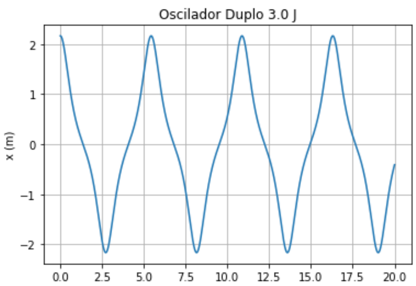
e) Faça a análise de Fourier das solução encontrada na alínea d)



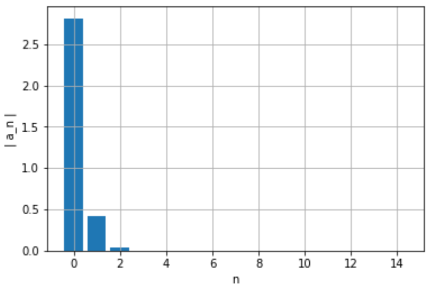
R: a) Movimento oscilatório periódico à volta do ponto x_{eq}=1.5 m

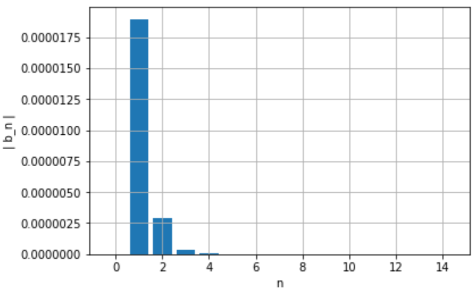


b) 1.86 m e 1.01 m; 0.448 Hz

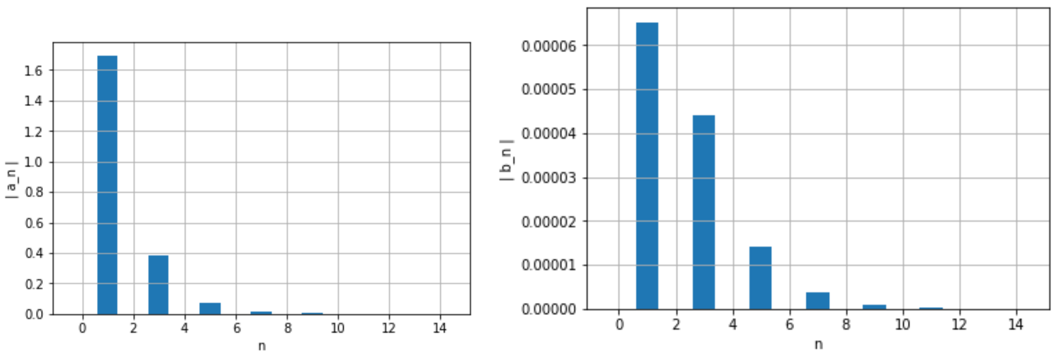


c) 2.17 m e -2.17 m; 0.184 Hz





d)

e) 

Osciladores Harmónicos Amortecidos

13. Um corpo de massa 1 kg preso a uma mola (k = 100 N/m) executa um movimento harmónico simples com amplitude igual a 10 cm. A oscilação tem início numa das posições extremas.

a) Determine a energia cinética e energia potencial elástica do oscilador no instante de tempo em que elas são iguais.

b) Determine o primeiro instante de tempo e a posição respetiva em que isso acontece.

c) De seguida, o oscilador fica sujeito a amortecimento (b = 2 kg/s). Determine a variação de energia mecânica no segundo ($\Delta t = 1$ s) seguinte.

R: a) $E_c = E_p = 0.25$ J; b) $t = \frac{\pi}{40}$ s; $x = 0.070710$ m; c) -0.4323 J

Osciladores Harmónicos Forçados

14. Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador harmónico forçado. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo $x_{eq} = 0$ m, o oscilador harmónico tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2} k \ x^2$$

e exerce no corpo a força

$$F_x = -k \, x$$

O oscilador é amortecido pela força $-bv_x$ e sujeito à força externa $F_0 \cos(\omega_f t)$. Considere $k = 1$ N/m, $b = 0.05$ kg/s, $F_0 = 7.5$ N e $\omega_f = 1.0$ rad/s.

a) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m. Tem confiança no seu resultado?

b) Calcule a amplitude do movimento e o seu período no regime estacionário, usando os resultados numéricos.

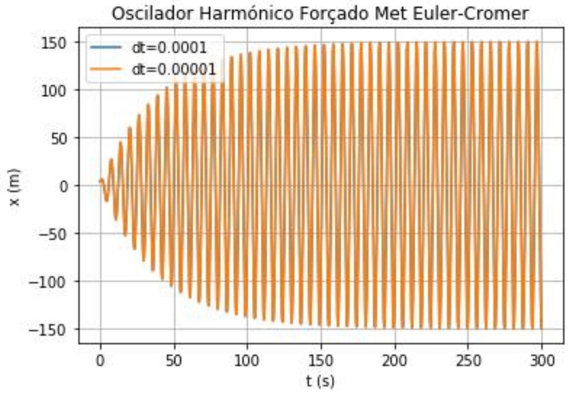
c) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é -4 m/s e a posição inicial -2 m.

d) Calcule a amplitude do movimento e o seu período no regime estacionário, usando os resultados numéricos calculados na alínea anterior.

e) Calcule a energia mecânica. É constante ao longo do tempo?

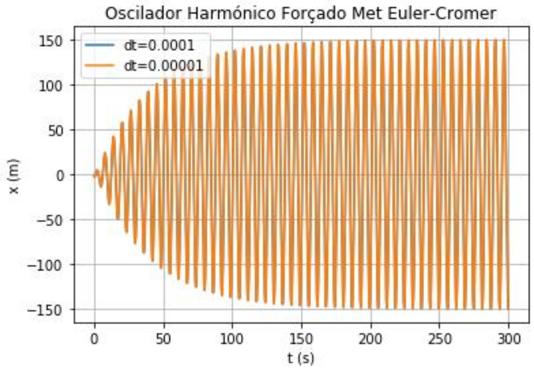
f) Calcule os coeficientes de Fourier do movimento do regime estacionário nas condições das alíneas a) e c). Que conclusões retira da lei do movimento do regime estacionário?

R: a)

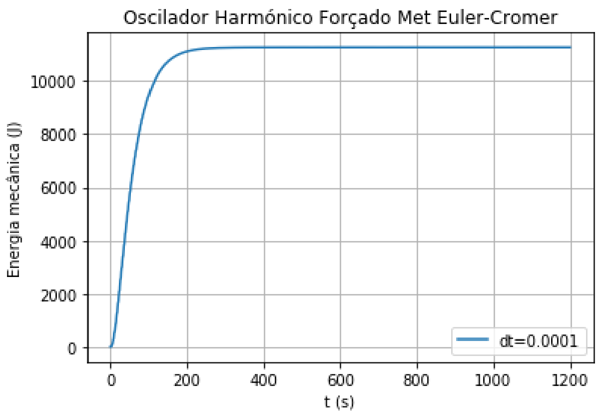


Temos confiança, porque a lei do movimento obtida por dois passos temporais diferentes é a mesma. Como também os dois passo temporais produzem o mesmo resultado para o tempo final considerado $t = 300.0000$ s $x = -149.881$ m; b) 150.00 m; 6.283 s

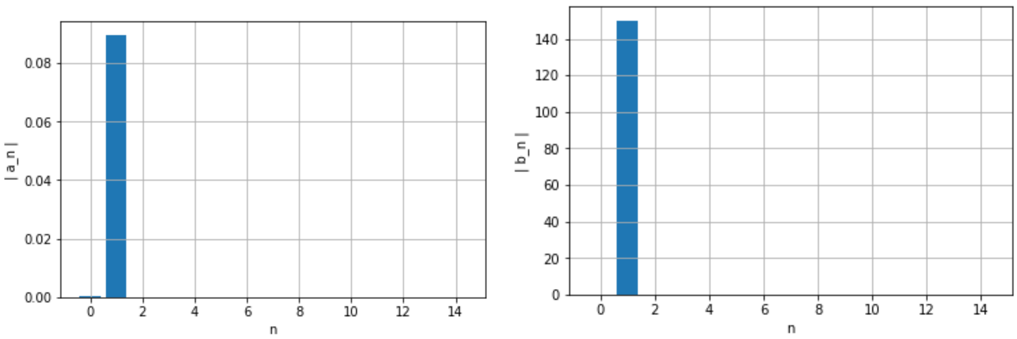
c)



d) 150.00 m; 6.283 s;



e) Não conserva a energia mecânica



f)

$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = 150.00$ m.

A solução estacionária apresenta iguais valores dos coeficientes de Fourier, o que mostra que as duas soluções estacionárias são iguais, independente dos valores iniciais.

15. Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador harmónico forçado. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo $x_{eq} = 0$ m, o oscilador harmónico tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2} k\ x^2$$

e exerce no corpo a força

$$F_x = -k\,x$$

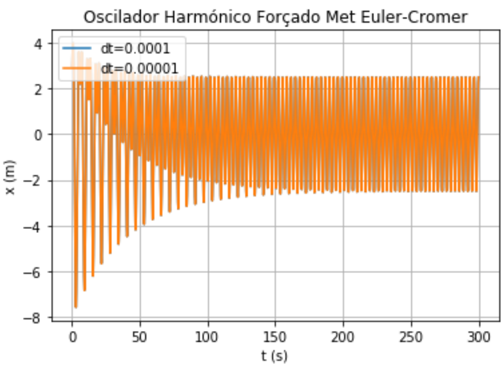
O oscilador é amortecido pela força $-bv_x$ e sujeito à força externa $F_0 \cos(\omega_f t)$. Considere $k = 1$ N/m, $b = 0.05$ kg/s, e $F_0 = 7.5$ N e $\omega_f = 2.0$ rad/s.

a) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m.

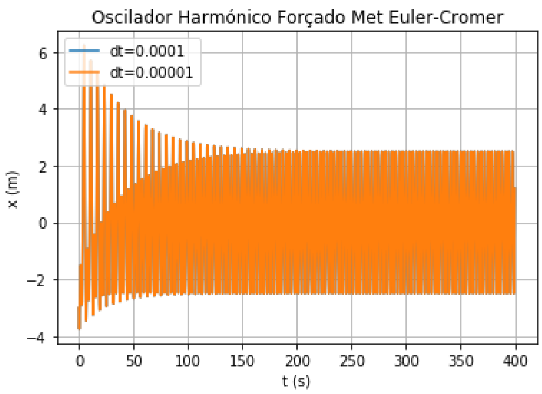
b) Calcule a amplitude do movimento e o seu período no regime estacionário, usando os resultados numéricos.

c) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é -3 m/s e a posição inicial -4 m..

d) Calcule a amplitude do movimento e o seu período no regime estacionário, usando os resultados numéricos calculados na alínea anterior.

R: a) 

b) .498 m; 3.142 s

c) 

d) 2.498 m; 3.142 s

16. Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador harmónico forçado. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo $x_{eq} = 0$ m, o oscilador harmónico tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2}k\ x^2$$

e exerce no corpo a força

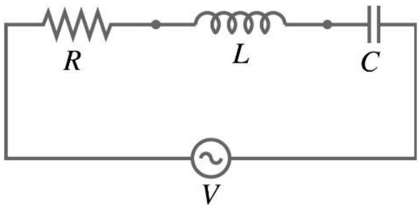
$$F_x = -k\,x$$

O oscilador é amortecido pela força $-bv_x$ e sujeito à força externa $F_0\cos(\omega_f t)$. Considere $k = 1$ N/m, $b = 0.05$ kg/s, e $F_0 = 7.5$ N. Qual a frequência angular ω_f da força externa para se alcançar uma amplitude de 50.00 m no regime estacionário? Apresente o resultado com precisão de 4 algarismos.

Pista: Encontre as raízes (zeros) de $A(\omega_f) - 50.00 = 0$ rad/s.

R: 0.9230 rad/s e 1.0714 rad/s

17. Um circuito elétrico constituído por uma bobina, uma resistência e um condensador em série alimentado por uma fonte externa é um sistema onde os eletrões estão sujeitos a oscilações harmónicas amortecidas e forçadas. R é a resistência, L a indutância da bobine e C a capacidade do condensador. $V = V_0 \sin(\omega t + \phi)$ é o potencial elétrico aplicado, que nas tomadas das nossa casas é caraterizado por $\omega = 2\pi \times 40$ Hz e $V_0 = \sqrt{2} \times 220$ V.



A intensidade $I(t)$ da corrente elétrica (carga por unidade de tempo) neste circuito varia (oscila) de acordo com a equação diferencial de 2ª ordem

$$L\frac{d^2I(t)}{dt^2} + R\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C}I(t) = \frac{d}{dt}(V_0 \sin(\omega t + \phi))$$

Por comparação das parâmetros do sistema mecânico $\left(k,\ m\ , b, F_0 \text{ e } \omega_f\right)$ e do sistema elétrico ($L,\ R,\ C, V_0$ e ω), encontre a expressão da frequência angular de ressonância para no circuito RLC em série. O oscilador mecânico Harmónico Forçado a equação diferencial é

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_0 \cos\left(\omega_f t\right) .$$

R: $\sqrt{\frac{1}{LC}}$

Oscilador Não harmónico Forçado

18. Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador quártico forçado. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo $x_{eq} = 0$ m, o oscilador quártico tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2}k\ x^2(1 +\ \alpha\ x^2)$$

e exerce no corpo a força

$$F_x = -k\,x\,(1 + 2\alpha x^2).$$

O oscilador é amortecido pela força $-bv_x$ e sujeito à força externa $F_0 \cos(\omega_f t)$. Considere $k = 1$ N/m, $b = 0.05$ kg/s, $\alpha = 0.002$ N/m^2, $F_0 = 7.5$ N e $\omega_f = 1.0$ rad/s.

a) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 3 m. Tem confiança no seu resultado?

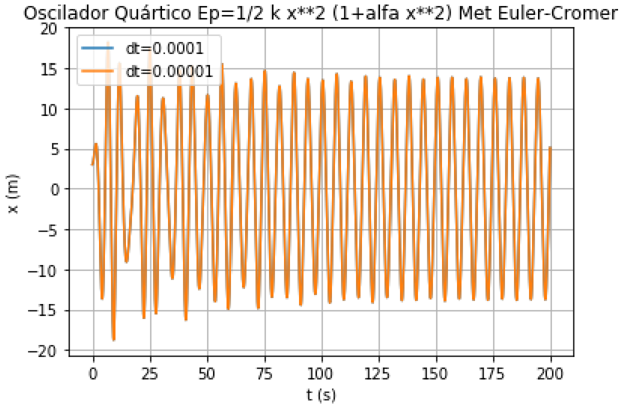
b) Calcule a amplitude do movimento e o seu período no regime estacionário, usando os resultados numéricos.

c) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é -4 m/s e a posição inicial -2 m.

d) Calcule a amplitude do movimento e o seu período no regime estacionário, usando os resultados numéricos calculados na alínea anterior.

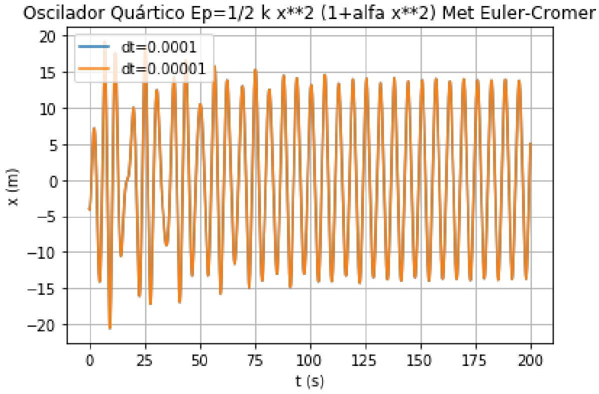
e) Calcule a energia mecânica. É constante ao longo do tempo?

f) Calcule os coeficientes de Fourier do movimento do regime estacionário nas condições das alíneas a) e c). Que conclusões retira da lei do movimento do regime estacionário?

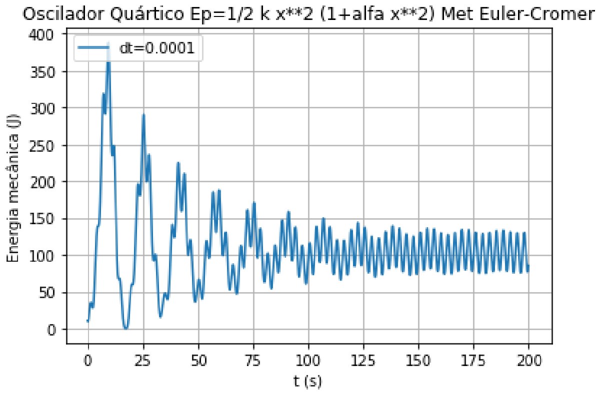
R: a) 

Sim! Confiança porque a solução é idêntica para passos temporais diferentes.

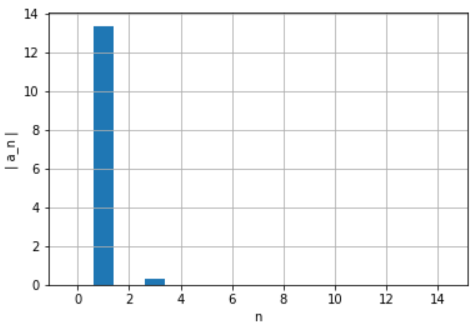
b) 13.791 m; 6.283 s

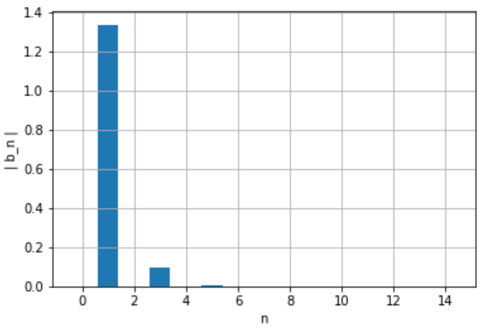
c) 

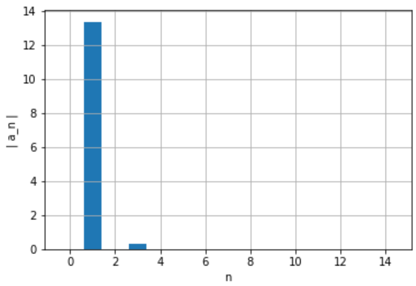
d) 13.791 m; 6.283 s

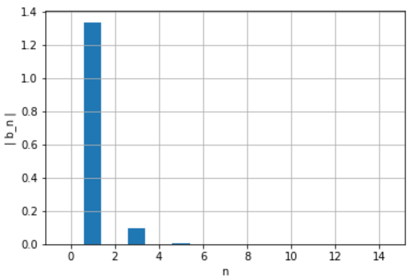
e) 

Não é. O sistema recebe energia realizada pela força externa e dissipa energia devido à resistência do meio.

f)a) 



f) 



Os coeficientes de Fourier são iguais nos dois casos, o que mostra que a lei do movimento é igual nos dois casos, no regime estacionário.

19. Implemente o método de Runge-Kutta de 4ª ordem para calcular a velocidade com que um volante de badmington atinge 2 s depois de ser largado. A velocidade terminal do volante é de 6.80 m/s, e a aceleração é

$$a_y(t) = g - \frac{g}{v_T^2}|v_y|v_y \, .$$

Compare o valor obtido com o valor exato, de acordo com a lei $v_y(t) = v_T \tanh(\frac{g\,t}{v_T})$.

O método de Runge-Kutta de 4ª ordem determina a velocidade num instante posterior usando a seguinte aproximação:

$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + \frac{1}{6}[c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4] \times \delta t$$

em que $c_1 = a_x\big(t, v_x(t)\big)$

$$c_2 = a_x\left(t + \frac{\delta t}{2}, v_x(t) + c_1\frac{\delta t}{2}\right)$$

$$c_3 = a_x\left(t + \frac{\delta t}{2}, v_x(t) + c_2\frac{\delta t}{2}\right)$$

$$c_4 = a_x(t + \delta t, v_x(t) + c_3\delta t)$$

a partir da equação diferencial $\begin{cases} \frac{dv_x(t)}{dt} = a_x(t, v_x) \\ v_x(t=0) = v_{x0} \end{cases}$

R:

δt (s)	$v_y(2\ s)$ (m/s) Método de Euler (m)	$v_y(2\ s)$ (m/s) Método de Runge-Kutta 4
0.1	6.7802962	6.75746827
0.01	6.7601201	6.75747944
0.001	6.7577469	6.75747944
0.0001	6.7575062	
0.00001	6.7574821	
exato	6.75747944	6.75747944

20. Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador quártico forçado. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo $x_{eq} = 0$ m, o oscilador quártico tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2}k\ x^2(1 + \alpha\ x^2)$$

e exerce no corpo a força

$$F_x = -k\,x\,(1 + 2\alpha x^2).$$

O oscilador é amortecido pela força $-bv_x$ e sujeito à força externa $F_0\cos(\omega_f t)$. Considere $k = 1$ N/m, $b = 0.05$ kg/s, $\alpha = 1.00$ N/m^2, $F_0 = 7.5$ N e $\omega_f = 1.0$ rad/s.

a) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 3 m. Tem confiança no seu resultado?

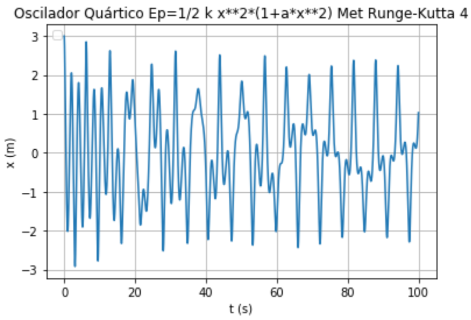
b) Se existir regime estacionário, calcule os limites do movimento (amplitude), o seu período, faça o gráfico no espaço da fase e a análise de Fourier.

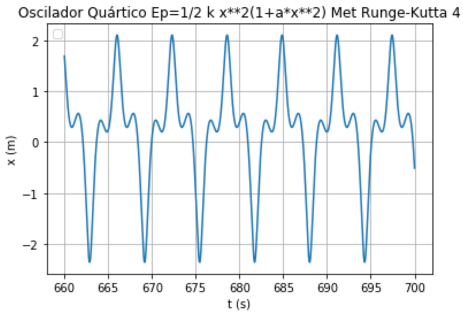
c) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial -3 m/s e a posição inicial -3 m.

d) Se existir regime estacionário, calcule os limites do movimento (amplitude), o seu período, faça o gráfico no espaço da fase e a análise de Fourier.

e) Calcule a energia mecânica nos casos da alínea a) e b). É constante ao longo do tempo?

f) Face aos resultados obtidos como carateriza as soluções deste oscilador forçado?



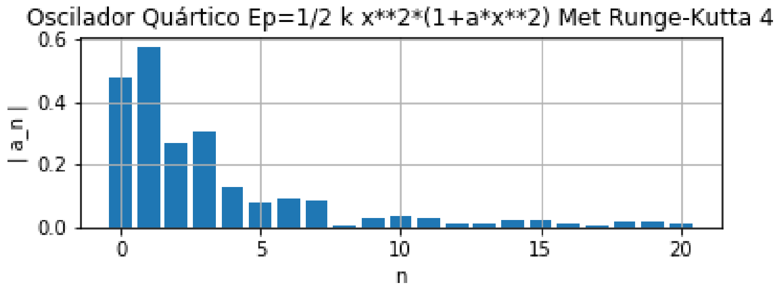


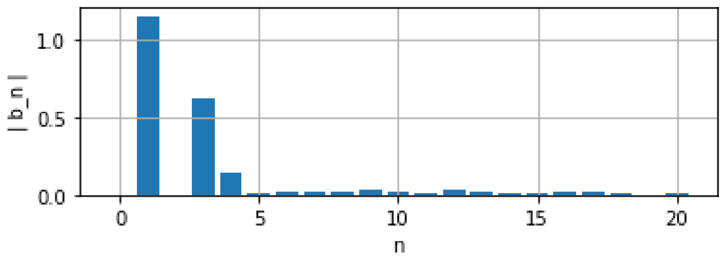
R: a)

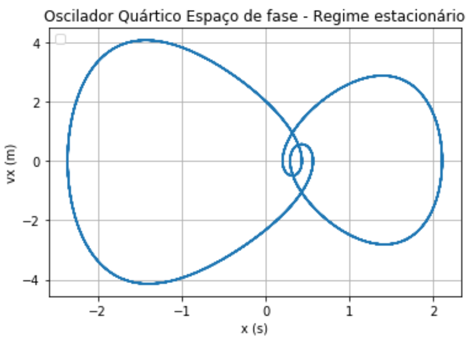
dt=0.01 s produz x(700 s) = -1.1222008 m e

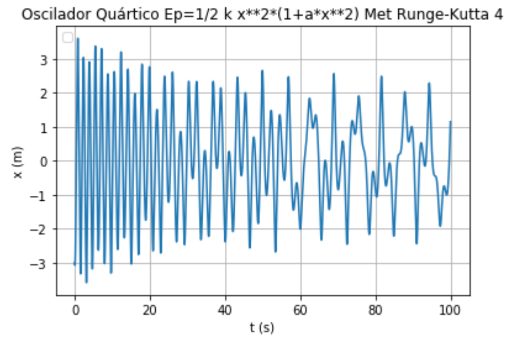
dt=0.001 s produz o mesmo resultado que o passo mais pequeno x(700 s)= -1.1222008 m

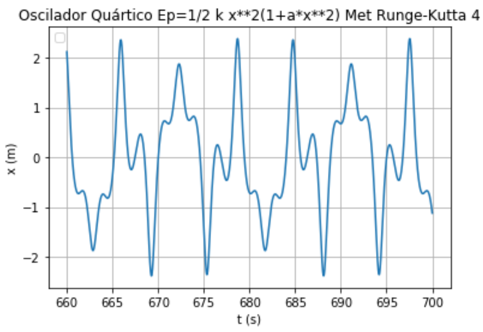
b) Regime estacionário de amplitudes 2.1066 m e -2.3606 m e período 12.57 s.





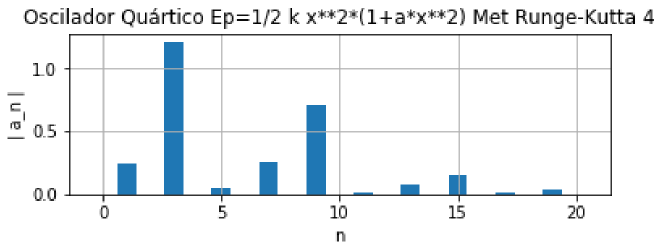


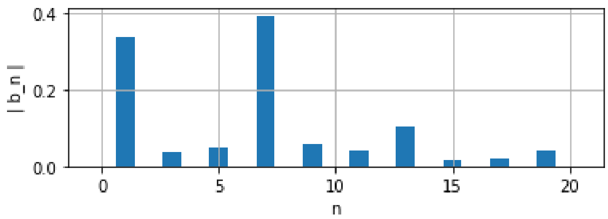


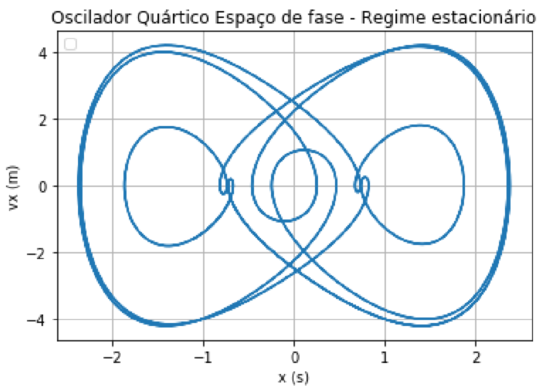


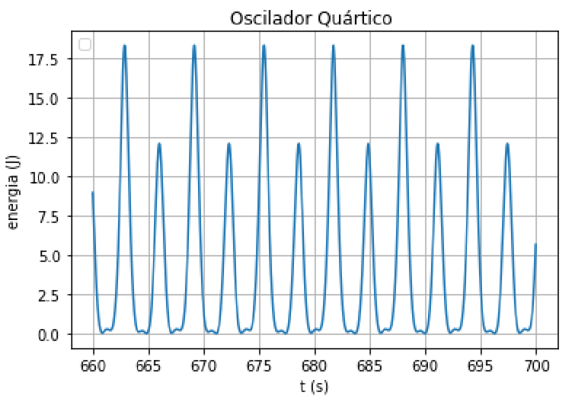
c)

d) Regime estacionário de amplitudes 2.3800 m e -2.3800 m e período 18.85 s.

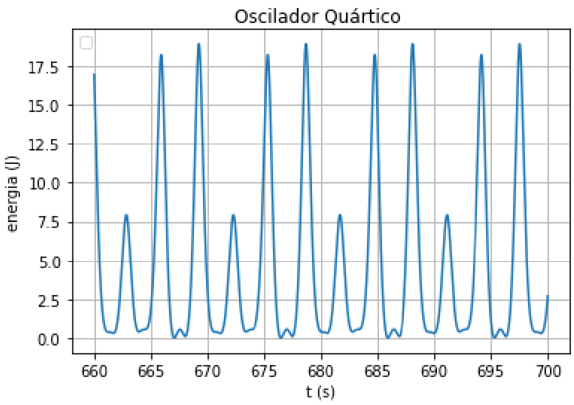






e)a) 

e)c)



Não é constante.

f) O sistema tem um comportamento transiente, no início, e passado algum tempo, apresenta um comportamento estacionário periódico. A solução do regime estacionário não é sinusoidal. E é dependente das condições iniciais.

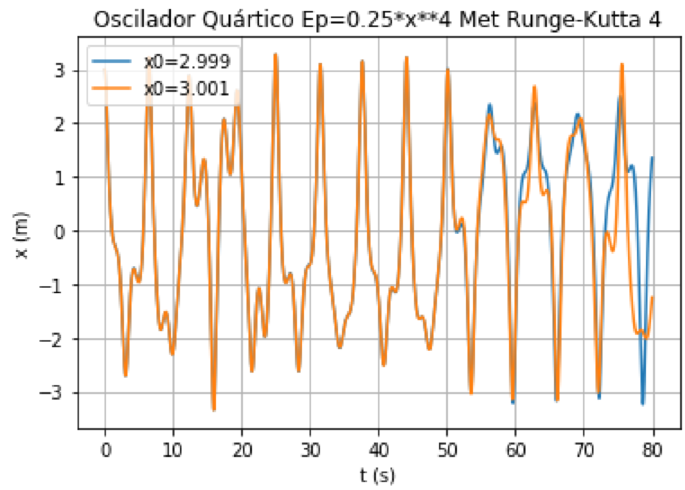
21. Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador quártico forçado. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo $x_{eq} = 0$ m, o oscilador quártico tem a energia potencial

$$E_p = \alpha \; x^4$$

e exerce no corpo a força

$$F_x = -\,4\,\alpha \; x^3\,.$$

O oscilador é amortecido pela força $-bv_x$ e sujeito à força externa $F_0\cos(\omega_f t)$. Considere $k = 1$ N/m, $b = 0.05$ kg/s, $\alpha = 0.25$ N/m^2, $F_0 = 7.5$ N e $\omega_f = 1.0$ rad/s. Este oscilador pode apresentar regime caótico. Calcule até que instante pode calcular univocamente a lei do movimento, sabendo que a posição inicial é 3.000 ± 0.001 m e a velocidade inicial é nula. Considere todas as quantidades, exceto a posição inicial, medidas com uma precisão elevada.

R: 

até ~73 s.

22. Diga quais dos seguintes sistemas modelados pelas equações diferencias de valor incial:

a) Oscilador Harmónico Amortecido

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x$$

b) Oscilador Harmónico Amortecido e Forçado

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x + \frac{F_0}{m}\cos(\omega_f t)$$

c) Oscilador Quártico Amortecido e Forçado

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4\alpha x^3 - \frac{b}{m}v_x + \frac{F_0}{m}\cos(\omega_f t)$$

d) Oscilador de Lorenz

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma\,(y - x) \\ \dfrac{dy}{dt} = r\,x\, - y - xz \\ \dfrac{dz}{dt} = xy\, - bz \end{cases}$$

e) Oscilador de Van der Pol

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x - \varepsilon(x^2 - 1)\,\frac{dx}{dt}$$

f) Pêndulo Amortecido e Forçado

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta + \frac{F_0}{m}\cos(\omega_f t)$$

g) oscilador de uma palheta de clarinete

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + \alpha\,\frac{dx}{dt} - \beta\left(\frac{dx}{dt}\right)^3$$

Podem apresentar soluções caóticas?

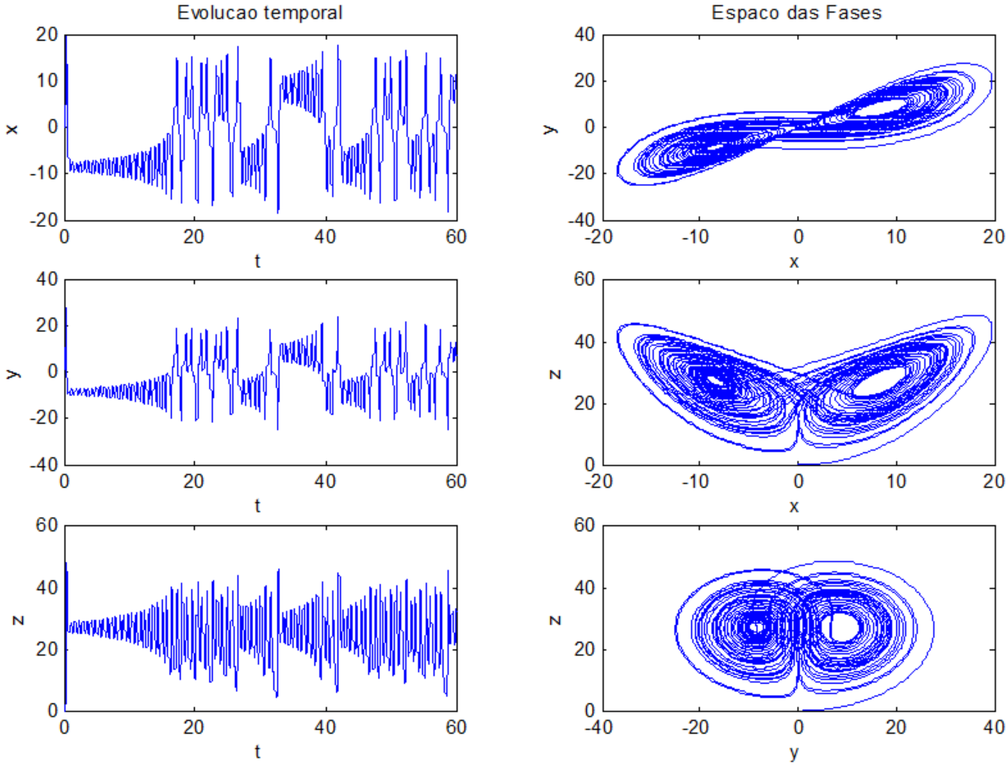
a) Não b) Sim c) Sim d) Sim e) Não f) Sim g) Não

23. Ao modelar a dinâmica da convecção dum fluido por um modelo muito simples, Edward Lorenz, obteve três equações diferenciais de 1ª ordem de valor inicial,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma\,(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = r\,x\, - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = xy\, - bz \\ x(t = 0) = x_0 \\ y(t = 0) = y_0 \\ z(t = 0) = z_0 \end{cases}$$

em que os coeficientes e as variáveis não têm um significado físico direto. Determine a evolução temporal, quando $\sigma = 10; b = \frac{8}{3}; r = 28$ e $x(t = 0) = z(t = 0) = 0$ e $y(t = 0) = 1$. Tem confiança nos seus resultados?

R:


Evolucao temporal
Espaco das Fases
x
y
z
t
x
y
z
x
y
20
10
0
-10
-20
40
60

Soluções Problemas Cap. 7

1. a