



DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
UNIVERSIDADE DE AVEIRO

# Modelação de Sistemas Físicos

Ano Académico 2021/2022 - 2º Semestre

## 1º TESTE - resolução Parte Cálculo Analítico

Data: 8 ABRIL 2022

Hora: 16H30

Duração: 1/2 hora

Disciplina: 41769

Salas: 12.1.1 e 12.2.1.

Cotação: 1) 1 + 1 + 1 = 3 valores

2) 2 + 1 = 3 valores

3) 2 + 2 = 4 valores

*Só é permitido o uso de máquina de calcular científica*

*As respostas não podem ser escritas a lápis*

*Justifique todas as respostas*

1. Foram medidos dois comprimentos de uma mesa:

$$L = 35.22 \pm 0.01 \text{ cm}$$

$$P = 10.00 \pm 0.05 \text{ cm}$$

a) Calcule a soma das duas quantidades  $S = L + P$

b) Calcule a diferença das duas quantidades  $D = L - P$

c) Calcule a área  $A = P \cdot L$

**Resolução resumida**

$$\begin{aligned} a) \quad S = L + P &= (35.22 + 10.00) \pm (0.01 + 0.05) \text{ cm} \\ &= 45.22 \pm 0.06 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad D = L - P &= (35.22 - 10.00) \pm (0.01 + 0.05) \text{ cm} \\ &= 25.22 \pm 0.06 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$c) \quad \left| \frac{\Delta A}{A} \right| = \left| \frac{\Delta P}{P} \right| + \left| \frac{\Delta L}{L} \right|$$

$$A = 35.22 \times 10.00 = 352.2$$

$$\begin{aligned} \Delta A &= 352.2 \left[ \frac{0.01}{35.22} + \frac{0.05}{10.00} \right] = 352.2 \times 0.00529 \\ &= 1.862 \\ A &= 352 \pm 2 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

## 2. O método de Euler integra as equações diferenciais do movimento

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad a_x(t) = \frac{dv_x}{dt},$$

ao fazer a aproximação:

$$x(t + \delta t) = x(t) + v_x(t) \times \delta t$$

$$v_x(t + \delta t) = v_x(t) + a_x(t) \times \delta t,$$

e se souber  $x(t_0) = x_0$  e  $v_x(t_0) = v_{x0}$ .

a) Calcule o erro de truncatura local do método de Euler.

b) Calcule o erro de truncatura global do método de Euler.

### Resolução resumida

$$\begin{aligned} a) \quad x^{\text{Euler}}(t + \delta t) &= x(t) + v_x \delta t \\ x^{\text{Exato}}(t + \delta t) &= x(t) + \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{= v_x(t)} \cdot \delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2 x}{dt^2} \delta t^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 x}{dt^3} \delta t^3 + O(\delta t^4) \end{aligned}$$

---


$$\text{erro local: } \epsilon^{\text{local}} = 0 + 0 - \frac{1}{2} \frac{d^2 x}{dt^2} \delta t^2 + O(\delta t^3)$$

$$\epsilon_x^{\text{local}} \propto \delta t^2$$

$$v_x^{\text{Exato}}(t + \delta t) = v_x(t) + \frac{dv_x}{dt} \bigg|_t \cdot \delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2 v_x}{dt^2} \bigg|_t \delta t^2 + O(\delta t^3)$$

---


$$v_x^{\text{Euler}}(t + \delta t) = v_x(t) + a_x(t) \cdot \delta t$$

---


$$\text{erro local } \epsilon_{v_x}^{\text{local}} = 0 + 0 + \frac{1}{2} \frac{d^2 v_x}{dt^2} \bigg|_t \delta t^2 + O(\delta t^3)$$

$$\epsilon_{v_x}^{\text{local}} \propto \delta t^2$$

b) ao fim de  $N$  passos, o erro acumula em cada passo,

$$\text{e} \quad \epsilon_x^{\text{global}} \propto N \cdot \delta t^2 = \frac{t_f - t_i}{\delta t} \cdot \delta t^2 \propto \delta t$$

$$\epsilon_{v_x}^{\text{global}} \propto N \cdot \delta t^2 = \frac{t_f - t_i}{\delta t} \cdot \delta t^2 \propto \delta t$$

3. A lei da velocidade de um objeto de massa 0.1 kg é  $v_x(t) = 10 \cos \omega t$  m/s, e no instante inicial estava na posição  $x = 2$  m, em que  $\omega = 5$  rad/s é uma constante.

a) Calcule a lei da aceleração  $a_x(t)$ .

b) Calcule a lei do movimento  $x(t)$ .

**Resolução resumida**

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} (10 \cos \omega t) = -10 \cdot \omega \cdot \sin \omega t \\ &= -50 \sin 5t \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad x(t) - x(0) &= \int_0^t 10 \cos \omega t \, dt \\ &= \frac{10}{\omega} \sin \omega t \Big|_0^t \\ &= 2 \sin 5t \end{aligned}$$

## Formulário

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$v_x(t + \delta t) = v_x(t) + \left. \frac{dv_x}{dt} \right|_t \delta t + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2v_x}{dt^2} \right|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3v_x}{dt^3} \right|_t \delta t^3 + o(\delta t^4)$$

### Grandezas físicas e conversões:

$$1 \text{ polegada} = 1 \text{ in} = 0,39370 \text{ m}$$

$$1 \text{ pé} = 1 \text{ ft} = 2,54 \text{ cm}$$

$$1 \text{ milha} = 1,609344 \text{ km}$$

$$1 \text{ rad} = 57.29578 \text{ graus}$$

$$1 \text{ cv (cavalo – vapor métrico)} = 735,4975 \text{ W}$$

$$1 \text{ hp (cavalo – vapor inglês)} = 745,715 \text{ W}$$

$$M_{\text{Sol}} = M = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$1 \text{ AU} = 1.489 \times 10^{11} \text{ m}$$

$$1 \text{ ano} = 365,24 \text{ dias}$$

$$g = 9,80 \text{ m/s}^2$$

$$G = 6.67408 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2) = 4\pi^2 \text{ AU}^3/(\text{M} \cdot \text{ano}^2) \quad R_{\text{Terra}} = 6371 \text{ km}$$

### Sistema Internacional de Unidades (SI):

Quantidades básicas

Quantidade	unidade	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Temperatura	kelvin	K
Corrente elétrica	ampere	A

Outras quantidades importantes

Quantidade	unidade	Símbolo
Velocidade	metro/segundo	m/s
Aceleração	metro/segundo <sup>2</sup>	m/s <sup>2</sup>
Força	kilograma $\times$ metro/segundo <sup>2</sup> = newton	N
Energia	kilograma $\times$ metro <sup>2</sup> /segundo <sup>2</sup> = joule	J
Potência	kilograma $\times$ metro <sup>2</sup> /segundo <sup>3</sup> = watt	W