Capítulo 2 Movimento a uma dimensão

3. Um objeto pequeno é largado de uma altura elevada. Considere a queda livre, sem resistência do ar. Considere $g = 9.80 \text{ m}/s$

a) Qual a relação entre a velocidade e a aceleração instantânea?

b) Construa um programa que determine a velocidade do objeto, usando o método de Euler, no intervalo de tempo $[0, 4\ s]$. Qual a velocidade em $3s$?

c) Repita a alínea anterior, com um passo 10 vezes menor.

d) Compare o resultado obtido em b) e c) com o resultado exato. Que conclui?

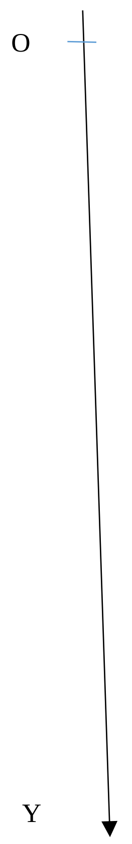
e) Construa um programa que determine a posição do objeto, usando o método de Euler, no intervalo de tempo $[0, 4\ \text{s}]$. Qual a posição no instante 2 s, se o objeto partiu da posição 0 m?

f) Repita a alínea anterior, com um passo 10 vezes menor.

g) Compare o resultado obtido em e) e f) com o resultado exato. Que conclui?

h) Calcule novamente a posição no instante 2 s, com o passo 10 vezes menor. Faça o gráfico do desvio do valor aproximado com o valor exato em função do passo. Como varia o erro com o passo?

Resolução resumida:



a) $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$

b)

```
import numpy as np
dt=0.001               # INPUT
tf=4.0
t0=0
n=np.int((tf-t0)/dt+0.1)
print('n',n)

t=np.zeros(n+1)
vy=np.zeros(n+1)

g=9.80
v0y=0
t[0]=t0
vy[0]=v0x
y[0]=y0

# b
for i in range(n):   # Método de Euler
    t[i+1]=t[i]+dt
    vy[i+1]=vy[i]+g*dt

for i in range(n):
    if t[i+1] > 3-2*dt and  t[i+1] < 3+2*dt:
        print('dt, t, vy= ',dt,t[i+1],vy[i+1])
```

output:

```
dt, t, vy=  0.01 2.9899999999999802 29.301999999999914
dt, t, vy=  0.01 2.99999999999998 29.399999999999913
dt, t, vy=  0.01 3.00999999999998 29.497999999999912
dt, t, vy=  0.01 3.0199999999999796 29.59599999999991
```

c)

```
dt, t, vy=  0.001 2.9989999999997807 29.39019999999819
dt, t, vy=  0.001 2.9999999999997806 29.39999999999819
dt, t, vy=  0.001 3.0009999999997805 29.40979999999819
dt, t, vy=  0.001 3.0019999999997804 29.419599999998187
```

R: t=3s, vy=29.4 m/s valor convergiu

d) exato: vy=g*t   vy(3)= 29.4
os resultados anteriores estão em completo acordo com o valor exato.
Neste problema, o método de Euler não apresenta erro porque a aceleração é constante, e as derivadas de ordem superior da velocidade são nulas.

e) f) Linhas adicionadas a carregado

```
…
t=np.zeros(n+1)
vy=np.zeros(n+1)
y=np.zeros(n+1)

g=9.80
v0y=0
y0=0
t[0]=t0
vy[0]=v0x
y[0]=y0
# b
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    vy[i+1]=vy[i]+g*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt

for i in range(n):
    if t[i+1] > 2-2*dt and  t[i+1] < 2+2*dt:
        print('dt, t, y = ',dt,t[i+1],y[i+1])
```

```
output:
dt, t, y=  0.1 1.8000000000000005 14.994000000000003
dt, t, y=  0.1 1.9000000000000006 16.758000000000003
dt, t, y=  0.1 2.0000000000000004 18.620000000000005
dt, t, y=  0.1 2.1000000000000005 20.580000000000005

dt, t, y =  0.01 1.9800000000000015 19.112940000000027
dt, t, y =  0.01 1.9900000000000015 19.306980000000028
dt, t, y =  0.01 2.0000000000000013 19.502000000000027
dt, t, y =  0.01 2.010000000000001 19.69800000000003

dt, t, y =  0.001 1.9989999999998906 19.57060980000014
dt, t, y =  0.001 1.9999999999998905 19.590200000000138
dt, t, y =  0.001 2.0009999999998906 19.60980000000014
dt, t, y =  0.001 2.0019999999998905 19.62940980000014

t, t, y =  0.0001 1.9998999999997962 19.597060098002014
dt, t, y =  0.0001 1.9999999999997962 19.599020000002014
dt, t, y =  0.0001 2.0000999999997964 19.600980000002014
dt, t, y =  0.0001 2.0001999999997966 19.602940098002016
```

dt (s)	y(2 s) / m
0.1	18.62
0.01	19.31
0.001	19.61
0.0001	19.60

g) exato y=1/2 g t**2   y(2 s)= 19.6000

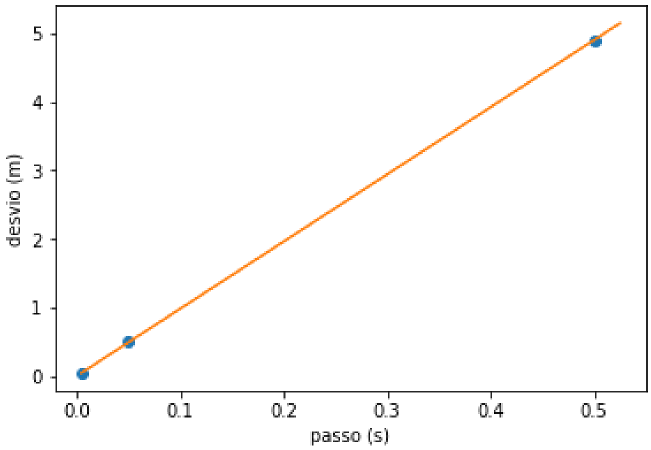
Solução

3. a) $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$; b) 29.4 s; c) 29.4 s (neste caso não altera);

d) todas os valores são iguais; e) passo=0.5 s, $y(2s) = 14.7$ m;

f) passo=0.05 s, $y(2s) = 19.1$ m;

g) $y_{exato}(2s) = 19.6$ m, o valor aproximado converge para o valor exato à medida que o passo temporal diminui;

h) 

desvio é proporcional ao passo