

## Problemas

### Capítulo 5 Trabalho e energia

1. Um átomo move-se numa superfície (horizontal) de um cristal. O cristal exerce a força

$$F_x = -F_0 \sin \frac{2\pi x}{b}$$

em que  $x$  é a posição do átomo e  $b$  a distância interatômica dos átomos na superfície do cristal. Se o átomo partir da posição  $x_0$  com velocidade  $v_{0x}$ , qual a dependência da velocidade em função da posição? É possível integrar analiticamente e desse modo calcular a lei do movimento e a lei da velocidade?

$$R: v_x = \pm \sqrt{v_{0x}^2 + \frac{b F_0}{\pi m} \left[ \cos \frac{2\pi x}{b} - \cos \frac{2\pi x_0}{b} \right]}, \text{ Não}$$

2 A relação entre a força conservativa e a energia potencial é

$$\begin{cases} F_x = -\frac{dE_p}{dx} \\ F_y = -\frac{dE_p}{dy} \\ F_z = -\frac{dE_p}{dz} \end{cases}$$

Calcule a força associada à energia potencial:

a) elástica  $E_p = \frac{1}{2} k x^2$

b) gravítica superfície da Terra  $E_p = m g y$

c) elástica do oscilador duplo  $E_p = \frac{1}{2} k (x^2 - x_{eq}^2)^2$

d) gravítica  $E_p = -G \frac{m M}{|\vec{r}|} = -G \frac{m M}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

e) da carga elétrica  $q$  originada pela carga  $Q$ ,  $E_p = -K \frac{q Q}{|\vec{r}|}$

R: a)  $-kx$  b)  $-mg$  c)  $-2k(x - x_{eq})x$  d)  $-G \frac{m M}{|\vec{r}|^3} \vec{r}$  e)  $-K \frac{q Q}{|\vec{r}|^3} \vec{r}$

3. O método numérico de integração numérica de um integral definido

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

de menor precisão é a aproximação retangular (ver apêndice).

- a) Determine como varia o erro de truncatura local com o passo  $\delta x$ .  
 b) Determine como varia o erro de truncatura global com o passo  $\delta x$ .

R: a)  $\sigma(\delta x^2)$  b)  $\sigma(\delta x)$

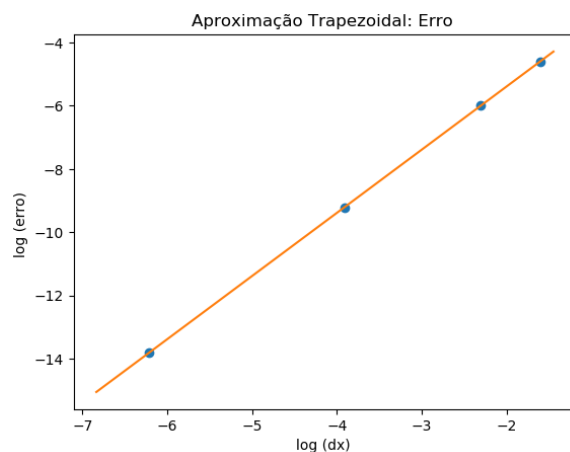
**4.** Como teste de integração numérica, calcule usando a aproximação trapezoidal o integral

$$I = \int_0^2 \frac{x^3}{4} dx$$

que é igual a 1. Use vários passos  $\delta x$  e verifique que o erro é proporcional a  $\delta x^2$ .

R:

$\delta x$	Integral	erro
0.2	1.01	0.01
0.1	1.0025	0.0025
0.02	1.0001	0.0001
0.002	1.000001	0.000001



declive=2,  $r^2 = 0.9999999999$

**5.** Uma bola de ténis é batida junto ao solo (posição inicial  $y = 0$ ) com a velocidade 100 km/h, a fazer um ângulo de  $10^\circ$  com a horizontal e no sentido positivo dum eixo horizontal OX, sendo OY eixo vertical.

- a) Calcule a energia mecânica em qualquer instante, no caso de não considerar a resistência do ar.  
 b) Considerando a resistência do ar, calcule a energia mecânica nos três instantes

$$t_0 = 0, t_1 = 0.4 \text{ s e } t_2 = 0.8 \text{ s.}$$

c) Considerando a resistência do ar, calcule o trabalho realizado pela força de resistência do ar até às posições nos três instantes

$$t_0 = 0, t_1 = 0.4 \text{ s e } t_2 = 0.8 \text{ s.}$$

Use a aproximação trapezoidal para calcular os integrais. A velocidade terminal da bola de ténis é 100 km/h. A bola de ténis tem a massa 57 g.

R: a) 21.99 J; b) 21.99 J; 17.01 J; 13.61 J; c) 0 J; -4.98 J; - 8.38 J

6. Nas condições do problema 4.6:

Uma mola exerce uma força  $F_x = -k x(t)$ , em que  $k$  é a constante elástica da mola, num corpo de massa  $m$ . Considere  $k = 1 \text{ N/m}$  e  $m = 1 \text{ kg}$ .

a) Calcule a energia total, do sistema com as condições iniciais:  $x_0 = 4 \text{ m}$  e  $v_{0x} = 0$ .

b) Compare o cálculo de energia total se integrar numericamente as equações

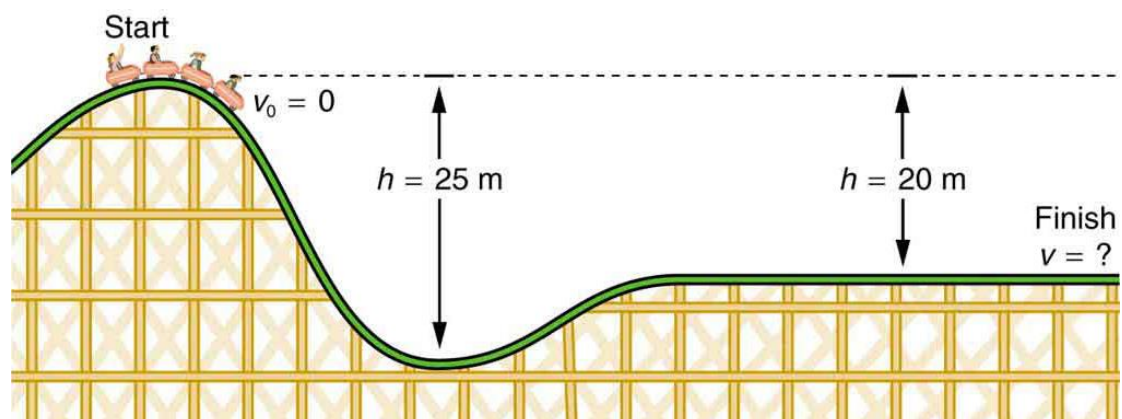
$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} \quad \text{e} \quad v_x(t) = \frac{dx}{dt}$$

para encontrar a lei do movimento, usando o método de Euler e o método de Euler-Cromer.

7. Se na montanha russa esquematizada na figura abaixo, a carruagem com os passageiros tiver a massa de 1000 kg, qual a velocidade

a) no ponto mais baixo?

b) na zona plana?



R:  $|\vec{v}|^2 = 2 g (y_0 - y)$  a) 22.1 m/s; b) 19.8 m/s

**8.** Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador duplo, com dois pontos de equilíbrio,  $x_{eq} = 2$  m. O oscilador tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2}k(|x| - x_{eq})^2$$

exerce no corpo a força

$$F_x = \begin{cases} -(x - x_{eq}) & x > 0 \\ (-x - x_{eq}) & x < 0 \end{cases}$$

onde  $k = 1$  N/m.

a) Faça o diagrama de energia desta energia potencial.

b) Qual o movimento quando a energia mecânica é 1J?

c) Calcule a lei do movimento, quando a energia total for 0.75 J. Qual a amplitude e a frequência do movimento?

d) Calcule a lei do movimento quando a energia total for 1.5 J? Qual a amplitude e a frequência do movimento?

**9.** Qual a potência desenvolvida por um ciclista de massa 75 kg para manter a velocidade uniforme, na horizontal,

a) a 30 km/h?

b) a 40 km/h?

c) a 296.010 km/h?

O coeficiente de resistência  $\mu$  de um piso liso de alcatrão é de 0.004, o coeficiente de resistência do ar é  $C_{res} = 0.9$ , de área frontal  $0.30 \text{ m}^2$  e densidade do ar  $\rho_{ar} = 1.225 \text{ kg/m}^3$ .

R: a) 120 W = 0.163 cv; b) 260 W = 0.353 cv; c) 92177 W = 125 cv,

**10.** Um ciclista no pelotão varre uma área eficaz 30% inferior à do ciclista à frente do pelotão.

a) Calcule a potência a desenvolver pelos dois ciclistas quando rolarem a uma velocidade de 40 km/h.

b) Calcule a potência a desenvolver pelos dois ciclistas quando rolarem a uma velocidade de 50 km/h?

Considere as mesmas condições do ciclista do problema anterior.

**11.** Muitos ciclistas amadores conduzem com o tronco levantado. Esta posição aumenta a área de varrimento para o dobro.

- a) Calcule a potência a desenvolver pelo ciclista se a velocidade for 30 km/h.
- b) E se a velocidade for de 40 km/h, qual a potência desenvolvida pelo ciclista?

Considere as mesmas condições do ciclista do problema anterior.

**12.** Determine a evolução temporal da velocidade de um ciclista, se este produzir continuamente a potência 0.4 cv e partir com um empurrão de 1 m/s?

- a) Qual a sua velocidade terminal?
- b) Ao fim de quanto tempo atinge 90% da sua velocidade terminal?
- c) Quanto tempo leva a percorrer 2 km?

Considere as mesmas condições do ciclista do problema anterior.

R: a) 11.63 m/s; b) 23.66 s; c) 180.9 s = 477.3 s = 3' 0.9"

**13.** O ciclista do problema anterior sobe uma colina com uma inclinação de  $5^\circ$ .

- a) Quanto tempo demora a percorrer 2 km?
- b) Qual a sua velocidade terminal?

Considere as mesmas condições do ciclista do problema anterior.

R: a) 4.21 m/s; b) 477.3 s = 7' 57.3"

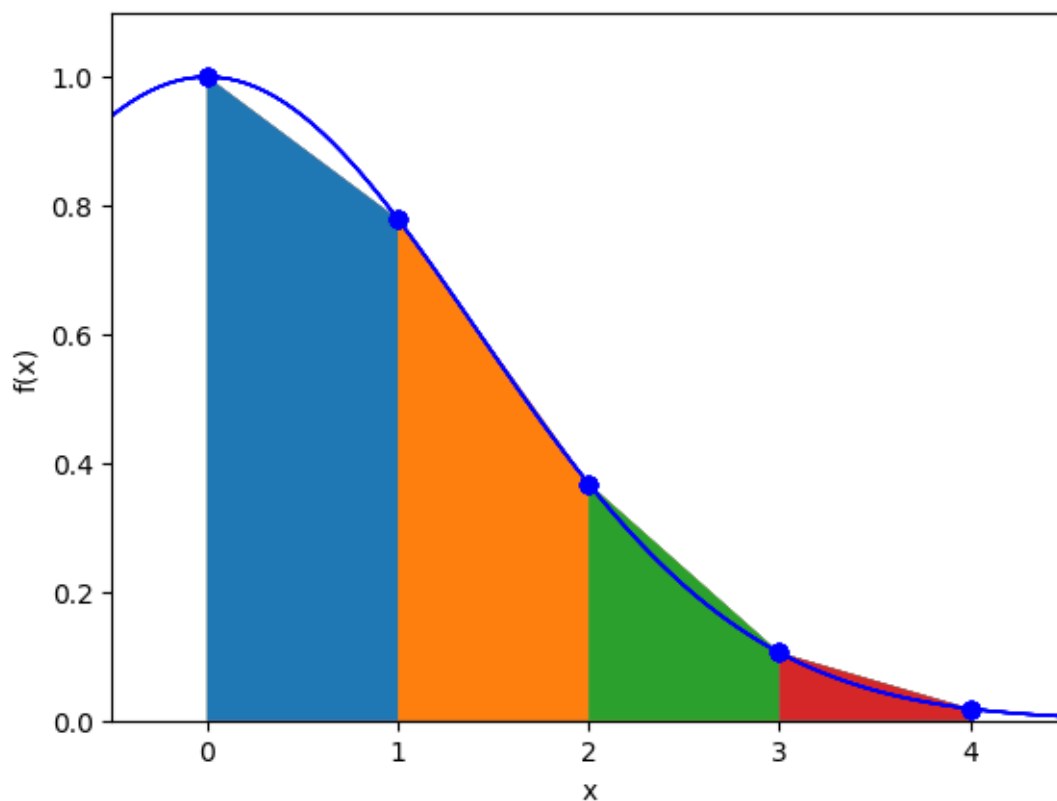
**Integração numérica a 1 dimensão:**

Quando temos uma função  $f(x)$  expressa só em pontos  $x_i$ , de índices  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ , igualmente espaçados por  $\delta x$ , num total de  $n + 1$  elementos. O integral desta função de pontos discretos, entre dois pontos  $a$  e  $b$

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

e onde  $n = (b - a)/\delta x$  e  $x_i = a + i \delta x$ , obtêm-se facilmente por integração numérica.

A interpretação geométrica do integral é a área limitada pela função entre os dois pontos extremos  $a$  e  $b$ . Na figura abaixo  $a = 0$  e  $b = 4$ .



Essa área pode ser considerada como uma soma de  $n$  fatias de espessura  $x_{i+1} - x_i = \delta x$ , em que estamos a considerar todas as espessuras iguais.

Essa área pode ser considerada como uma soma de  $n$  fatias de espessura  $x_{i+1} - x_i = \delta x$ , em que estamos a considerar todas as espessuras iguais. Assim  $\delta x = (b - a)/n$

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$$

Aproximação retangular:  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx f(x_i) \delta x$

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \delta x = \delta x \times \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Aproximação trapezoidal:  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2} \delta x$

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2} \delta x =$$

$$= \delta x \times \left( \frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right)$$

Em python podemos obter o integral da função  $f(x)$  pela aproximação trapezoidal:

$$\text{Integral} = dx * ((f[0]+f[n])*0.5+np.sum(f[1:n]))$$

Note que temos  $n + 1$  elementos da função.

Em termos da dimensão do vetor a integrar, ou seja de  $n + 1 = n_{dim}$

a integração trapezoidal é calculada por

$$\text{integral} = dx * ((f[0]+f[n_{dim}-1])*0.5+np.sum( f[1: n_{dim} - 1]))$$

### Erro de truncatura (local) da aproximação trapezoidal:

$$\text{erro} = \left| \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \right)_{\text{exato}} - \left( \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} \delta x \right)_{\text{ap. trap}} \right|$$

A função  $f(x)$  pela série de Taylor à volta de  $x_i$

$$f(x) = f(x_i) + \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_i} (x - x_i) + \frac{1}{2} \frac{d^2f}{dx^2} \Big|_{t=t} (x - x_i)^2 + \sigma((x - x_i)^3)$$

Subst. em

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ f(x_i) + \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_i} (x - x_i) + \frac{1}{2} \frac{d^2f}{dx^2} \Big|_{t=t} (x - x_i)^2 + \sigma((x - x_i)^3) \right] dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ f(x_i) + \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_i} (x - x_i) + \frac{1}{2} \frac{d^2f}{dx^2} \Big|_{t=t} (x - x_i)^2 + \sigma((x - x_i)^3) \right] dx$$

$$\begin{aligned}
&= f(x_i) (x_{i+1} - x_i) + \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_i} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} + \sigma((x_{i+1} - x_i)^3) \\
&= f(x_i) \delta x + \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \sigma(\delta x^3)
\end{aligned}$$

E, por sua vez

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_i} (x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{t=t} (x_{i+1} - x_i)^2 + \sigma((x_{i+1} - x_i)^3)$$

o que faz

$$\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} = f(x_i) + \frac{1}{2} \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_i} \delta x + \frac{1}{4} \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{t=t} \delta x^2 + \sigma(\delta x^3)$$

Subst. no erro que se pretende calcular

$$\begin{aligned}
\text{erro} &= \left| \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \right)_{\text{exato}} - \left( \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} \delta x \right)_{\text{ap. trap}} \right| \\
&= \left| f(x_i) \delta x + \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \sigma(\delta x^3) \right. \\
&\quad \left. - \left( \left( f(x_i) + \frac{1}{2} \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_i} \delta x + \frac{1}{4} \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{t=t} \delta x^2 + \sigma(\delta x^3) \right) \delta x \right) \right| \\
&= \sigma(\delta x^3)
\end{aligned}$$

O erro de truncatura de um integral de uma fatia é da  $\sigma(\delta x^3)$ .

O erro global do integral completo, que é um somatório de  $n$  fatias, é o acumular dos erros locais

$$n \sigma(\delta x^3) = \frac{b-a}{\delta x} \sigma(\delta x^3) = \sigma(\delta x^2).$$



Soluções Problemas Cap. 5

1. a
- 2.