



DEPARTAMENTO DE FÍSICA
UNIVERSIDADE DE AVEIRO

Modelação de Sistemas Físicos

Ano Académico 2021/2022 - 2º Semestre

1º TESTE - Resolução

Parte Cálculo Computacional-Numérico

Data: 8 ABRIL 2022

Hora: 17H00

Duração: 1 hora

Disciplina: 41769

Salas: 12.1.1 e 12.2.1.

Cotação: 1) $1.5 + 1.5 + 2 = 5$ valores

2) $2 + 3 = 5$ valores

NOTE:

- Responda às perguntas **na vossa folha de prova**, justificando-as,
- Indique claramente o sistema de eixos usado.
- Esboce os gráficos**, indicando univocamente os pontos importantes. Se gravar as figuras, salve-as em formato png.
- Na vossa folha de prova indique os métodos, os algoritmos, passos, ... usados.
- Os ficheiros** devem ser copiados para a caneta de memória do docente presente na sala com **o nome e número do aluno** (para poderem ser consultados quando o docente tiver dúvidas durante a correção).
- Tem de usar o seu computador portátil. Pode (e deve) usar os seus programas, assim como outros programas que tenha obtido.
- É um teste de consulta, mas não pode aceder à internet, incluindo para consultar documentos do python.**

As respostas não podem ser escritas a lápis

Justifique todas as respostas

1. Galileo Galilei realizou várias experiências de uma bola a descer (com atrito muito fraco) numa rampa inclinada. Numa recriação dessas experiências obteve-se os seguintes resultados

t (s)	s (cm)
0.5	0.1
1.5	1.4
2.5	1.7
3.5	6.5
4.5	7.7
5.5	10.4
6.5	19.5
7.5	26.1
8.5	26.5
9.5	45.9
10.5	52.5

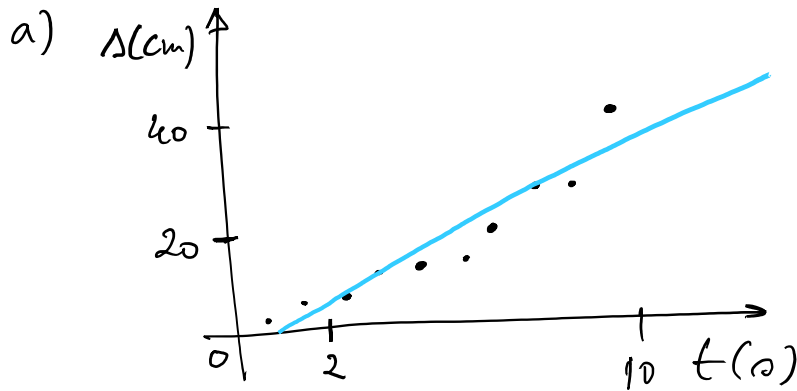
do percurso percorrido s e o tempo gasto t .

- Trace o gráfico s em função de t , usando os dados da tabela, e faça um ajuste linear. Indique os valores do declive, e o seu erro, a ordenada na origem, e o seu erro, e o coeficiente de determinação r^2 .

b) Trace o gráfico $\log(s)$ em função de $\log(t)$. Indique os valores do declive, e o seu erro, e o coeficiente de determinação r^2 .

c) Pelos resultados obtidos nas alíneas anteriores, que conclui acerca da relação entre a distância percorrida no plano inclinado (s) e o tempo gasto no percurso (t). Justifique. Faça um outro gráfico que mostre essa relação.

Resolução resumida



Pelo método dos mínimos quadrados obtém-se

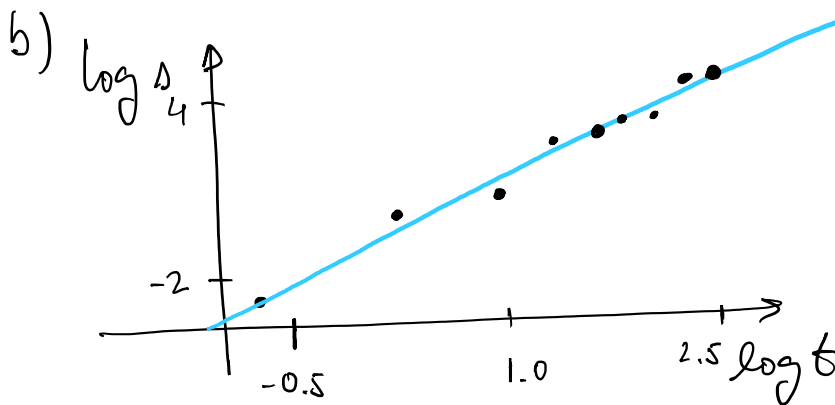
$$m = 5.14 \text{ cm/s}$$

$$\Delta m = 0.60 \text{ cm/s}$$

$$b = -10.2 \text{ cm}$$

$$\Delta b = 3.8 \text{ cm}$$

$$r^2 = 0.89$$



$$m = 2.011$$

$$\Delta m = 0.084$$

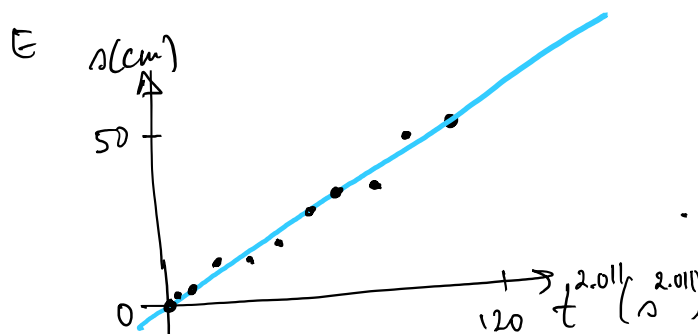
$$b = -0.864$$

$$\Delta b = 0.14$$

$$r^2 = 0.985$$

c) A regressão linear no gráfico (\log, \log) fornece $r^2 = 0.985 \approx 1$, o que significa um bom ajuste linear. Assim

$$\Delta = C t^{2.011}$$



$$m = 0.46 \text{ cm/s}^{2.011}$$

$$\Delta m = 0.02 \text{ cm/s}^{2.011}$$

$$b = -1.0 \text{ cm}$$

$$\Delta b = 1.33$$

$$\therefore \Delta = (0.46 \pm 0.02) t^{2.011 \pm 0.09} - (1 \pm 2)$$

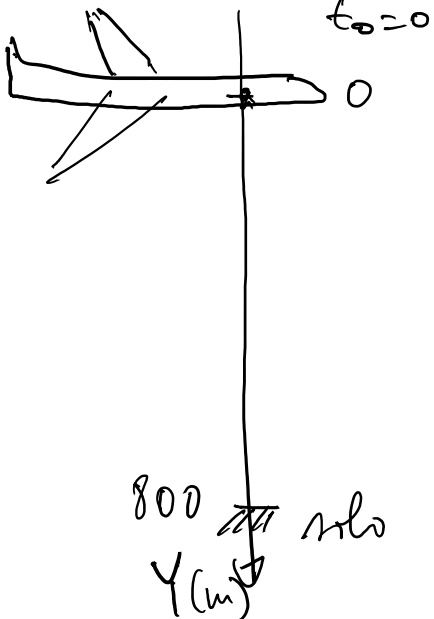
2. Um paraquedista salta de um avião, a uma altitude de 800 m. As velocidades terminais típicas são 60.0 e 5.0 m/s para o salto livre e para o paraquedas aberto, respetivamente. Estas velocidades terminais correspondem à massa volúmica do ar à superfície do solo $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$.

a) Quanto tempo demoraria a chegar ao solo com o paraquedas fechado? E a que velocidade?

b) Quanto tempo demora a chegar ao solo com o paraquedas aberto, considerando que o paraquedas abre (instantaneamente) 10 s depois do salto do avião.

Resolução resumida

a)



$$a_y^{\text{res}} = - \frac{g}{v_T^2} |v_x| v_x$$

$$a_y = g - \frac{g}{v_T^2} |v_x| v_x$$

$$v_T = 5 \text{ m/s}$$

$$c/ t_f = 300 \text{ s}, y_f > 800 \text{ m}$$

$\delta t (\text{s})$	$y_{\text{solo}} (\text{m})$	$t (\text{s})$	$v_y (\text{m/s})$
0.01	800.03	17.56	59.62
0.001	800.03	17.56	59.61
0.0001	800.02	17.56	59.61

Consideramos o tempo de chegada ao solo, o instante (uma vez que $t_0=0$) correspondente ao y_{solo} mais perto de 800 m.

Os valores convergem quando δt diminui.

tempo de chegada ao solo: 17.56 s

velocidade de chegada ao solo: 59.61 $\approx v_T$

Note: no qual está resolvido exatamente, por um método numérico

b)

$$v_t = \begin{cases} 5.0 & t < 10s \\ 60.0 & t > 10s \end{cases}$$

$$t_f = 100s \Rightarrow y_f > 800m$$

for i in range(n):

$$t[i+1] = t[i] + dt$$

$$d = g / \text{rtfchado} ** 2$$

$$\text{if } t[i] > 10:$$

$$d = g / \text{rtaberto} ** 2$$

$$ares = -d * \text{uf} \cdot \text{abs}(v_y[i]) * v_y[i]$$

$$a_y = g + ares$$

$$v_y[i+1] = v_y[i] + a_y * dt$$

$$y[i+1] = y[i] + v_y[i] * dt$$

$t(s)$	$y_{\text{rolo}}(m)$	$t(s)$	$v_y(m/s)$
0.01	799.98	97.22	5.000
0.001	800.001	97.253	5.000
0.0001	800.000	97.256	5.000
0.00005	800.000	97.256	5.000

Os valores convergem!

tempo chegada ao rolo 97.3s
velocidade 5.000

a) Resolução exata:

$$0 \quad v_0 = 0 \quad y(t) = \frac{v_T^2}{g} \log \left(\cosh \left(\frac{gt}{v_T} \right) \right) \quad (1)$$

800 + solo para quedas fechadas $v_T = 60 \text{ m/s}$

$$y \downarrow \quad e \quad v_y(t) = v_T \tanh \left(\frac{gt}{v_T} \right)$$

Quer-se t_{solo} e $v_{y \text{ solo}}$ quando $y(\text{solo}) = y_{\text{solo}} = 800$

De (1)
$$y_{\text{solo}} = \frac{v_T^2}{g} \log \left(\cosh \left(\frac{gt}{v_T} \right) \right)$$

$$\frac{y_{\text{solo}} g}{v_T^2} = \log \left(\cosh \left(\frac{gt_{\text{solo}}}{v_T} \right) \right)$$

$$e^{\frac{y_{\text{solo}} \cdot g}{v_T^2}} = \cosh \left(\frac{gt_{\text{solo}}}{v_T} \right)$$

$$\frac{gt_{\text{solo}}}{v_T} = \text{arcosh} \left(e^{\frac{y_{\text{solo}} \cdot g}{v_T^2}} \right)$$

$800 \cdot 9.8 / 60^2$

$$t_{\text{solo}} = \frac{v_T}{g} \text{arcosh } e$$

$$= \frac{60}{9.8} \times 2.8627 = 17.557 \text{ s}$$

$$v(t_{\text{solo}}) = 60 \cdot \tanh \left(\frac{800 \cdot 9.8}{60^2} \right) = 59.614 \text{ m/s}$$

b) As expressões usadas acima só são válidas quando $v_0 = 0$. Não podem ser usadas para o movimento quando o paraquedas está aberto.

Formulário

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$v_x(t + \delta t) = v_x(t) + \left. \frac{dv_x}{dt} \right|_t \delta t + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2v_x}{dt^2} \right|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3v_x}{dt^3} \right|_t \delta t^3 + o(\delta t^4)$$

Grandezas físicas e conversões:

$$1 \text{ polegada} = 1 \text{ in} = 0,39370 \text{ m}$$

$$1 \text{ pé} = 1 \text{ ft} = 2,54 \text{ cm}$$

$$1 \text{ milha} = 1,609344 \text{ km}$$

$$1 \text{ rad} = 57.29578 \text{ graus}$$

$$1 \text{ cv (cavalo – vapor métrico)} = 735,4975 \text{ W}$$

$$1 \text{ hp (cavalo – vapor inglês)} = 745,715 \text{ W}$$

$$M_{Sol} = M = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$1 \text{ AU} = 1.489 \times 10^{11} \text{ m}$$

$$1 \text{ ano} = 365,24 \text{ dias}$$

$$g = 9,80 \text{ m/s}^2$$

$$G = 6.67408 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2) = 4\pi^2 \text{ AU}^3/(\text{M} \cdot \text{ano}^2) \quad R_{Terra} = 6371 \text{ km}$$

Sistema Internacional de Unidades (SI):

Quantidades básicas

Quantidade	unidade	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Temperatura	kelvin	K
Corrente elétrica	ampere	A

Outras quantidades importantes

Quantidade	unidade	Símbolo
Velocidade	metro/segundo	m/s
Aceleração	metro/segundo ²	m/s ²
Força	kilograma \times metro/segundo ² = newton	N
Energia	kilograma \times metro ² /segundo ² = joule	J
Potência	kilograma \times metro ² /segundo ³ = watt	W