Modelação de Sistemas Físicos
Universidade de Aveiro 2020-2021

Problemas

Capítulo 2 Movimento a uma dimensão

1. Um carro A segue numa estrada à velocidade constante de 70 km/h onde o limite de velocidade é de 40 km/h. Ao passar por um carro patrulha, este último parte imediatamente em sua perseguição à aceleração constante de 2,0 m/s^2.

a) Faça o gráfico da lei do movimento do carro A e do carro patrulha, $x = x(t)$

b) Em que instante e qual a distância percorrida pelo carro patrulha alcança o carro em infração?

2. Um volante de badmington foi largado de uma altura considerável. A lei do movimento é

$$y(t) = \frac{v_T^2}{g} \log\left[\cosh\left(\frac{gt}{v_\mathrm{T}}\right)\right],$$

em que a terminal do volante v_T é 6.80 m/s.

a) Faça o gráfico da lei do movimento $y(t)$ de 0 a 4.0 s.

b) Determine a velocidade instantânea em função do tempo, usando cálculo simbólico. Faça o gráfico da velocidade em função do tempo de 0 a 4 s, usando o pacote matplotlib.

c) Determine a aceleração instantânea em função do tempo, usando cálculo simbólico. faça o gráfico da aceleração em função do tempo de 0 a 4 s, usando o pacote matplotlib.

d) Mostre que a aceleração $a_y(t) = g - \frac{g}{v_T^2}|v_y|v_y$ é equivalente à calculada na alínea anterior.

e) Se o volante for largado de uma altura de 20 m, quanto tempo demora a atingir o solo? Compare com o tempo que demoraria se não houvesse resistência do ar.

f) Nas condições da alínea anterior, qual o valor da velocidade e da aceleração quando o volante chega ao solo?

Nota:

- Para cálculo simbólico: para derivar pode usar as funções diff do pacote sympy
- Para cálculo numérico: Pode usar a função arccosh do pacote numpy.

$\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ e $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$;

$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$; $\tanh(\mathrm{x}) = \sinh(\mathrm{x}) / \cosh(\mathrm{x})$

3. Um objeto pequeno é largado de uma altura elevada. Considere a queda livre, sem resistência do ar. Considere $g = 9.80\ \mathrm{m}/s$

a) Qual a relação entre a velocidade e a aceleração instantânea?

b) Construa um programa que determine a velocidade do objeto, usando o método de Euler, no intervalo de tempo $[0, 4\ s]$. Qual a velocidade em 3 s?

c) Repita a alínea anterior, com um passo 10 vezes menor.

d) Compare o resultado obtido em b) e c) com o resultado exato. Que conclui?

e) Construa um programa que determine a posição do objeto, usando o método de Euler, no intervalo de tempo $[0, 4\ \mathrm{s}]$. Qual a posição no instante 2 s, se o objeto partiu da posição 0 m?

f) Repita a alínea anterior, com um passo 10 vezes menor.

g) Compare o resultado obtido em e) e f) com o resultado exato. Que conclui?

h) Calcule novamente a posição no instante 2 s, com o passo 10 vezes menor. Faça o gráfico do desvio do valor aproximado com o valor exato em função do passo. Como varia o erro com o passo?

4. Um volante de badmington foi disparado para baixo na vertical, a uma velocidade de 200 km/h, de uma altura considerável. Considere o valor medido da velocidade terminal $v_T = 6{,}80$ m/s.

a) Qual a aceleração a que está sujeito o volante durante o movimento? Faça o gráfico da aceleração em função do tempo.

b) Determine a velocidade instantânea, usando o método de Euler. Faça o gráfico da velocidade em função do tempo. Qual a velocidade do volante (em km/h) ao fim de 1 s?

c) Em quanto tempo tem o volante reduzida a sua velocidade em 50%?

d) Determine a lei do movimento $y(t)$, usando o método de Euler. Faça o gráfico da posição em função do tempo. Em quanto tempo percorre 4 m?

Note: Teste o programa para o caso $v_y(0) = 0$, em que se conhece a solução exata.

5. Um volante de badmington foi largado de uma altura considerável. Considere a aceleração $a_y(t) = g - Cv_y$, em que a resistência do ar ao movimento é linear na velocidade. Considere o valor medido da velocidade terminal $v_T = 6{,}80$ m/s.

a) Calcule a expressão da velocidade terminal em função de C.

b) Determine a velocidade instantânea, usando o método de Euler. Faça o gráfico da velocidade em função do tempo.

c) Determine a lei do movimento $y(t)$, usando o método de Euler. Faça o gráfico da posição em função do tempo.

d) Compare a posição instantânea obtida com os valores medidos, registados no ficheiro: data_cap2_queda_volante.txt.

6. Queda de um paraquedista

Um paraquedista salta de um avião, a uma altitude de 1 km. As velocidades terminais típicas são 60.0 e 5.0 m/s para o salto livre e para o paraquedas aberto, respetivamente. Estas velocidades terminais correspondem à massa volúmica do ar à superfície do solo $\rho = 1.225$ kg/m^3.

a) Quanto tempo demoraria a chegar ao solo com o paraquedas fechado? E a que velocidade?

b) Quanto tempo demora a chegar ao solo com o paraquedas aberto, considerando numa aproximação pouco fiel, que o para-quedas é aberto imediatamente quando o paraquedista salta do avião?

c) Considere a alínea anterior, considerando que o paraquedas fica aberto 20 s depois do salto do avião.

d) Resolva novamente a questão anterior tendo em consideração que a densidade do ar varia de acordo com

$$\rho(h) = 1.225\ e^{-0.1378\, h} \text{ kg/m}^3$$

para alturas h até 90 km, sendo a altura medida em quilómetros. Considere que o coeficiente de resistência do ar é proporcional à densidade do ar.

7. Uma bola é lançada verticalmente para cima com a velocidade 10 m/s.

a) Encontre analiticamente a lei do movimento $y = y(t)$, se não considerar a resistência do ar. Faça o gráfico de y em função do tempo.

b) Qual a altura máxima e o instante em que ocorre, no caso da alínea a)?

c) Em que instante volta a passar pela posição inicial, no caso da alínea a)? Qual a velocidade nesse instante?

d) Resolva as alíneas anteriores, considerando a resistência do ar. Resolva usando o método de Euler. A velocidade terminal da bola no ar é de 100 km/h.

8. Uma bola de ténis, de massa 58 g, e um volante de badmington, de massa igual 58 g, são largados do cimo de um prédio de 5m de altura. Qual deles chega primeiro ao solo? Calcule o instante em que cada objeto chega ao solo. A velocidade terminal é de 6,80 m/s e 100 km/h para o volante de badmington e a bola de ténis, respetivamente.

9. O método de Euler de integração numérica de uma equação diferencial de 1ª ordem apresenta um erro global inversamente proporcional ao número de passos N, em que se dividiu o tempo final total, t_f, em pequenos intervalos de tempo $\delta t = \frac{t_f - t_0}{N}$, sendo t_0 o instante inicial. Este método, integra as equações, $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$ e $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$, como

$$x(t + \delta t) = x(t) + v_x(t) \times \delta t$$
$$v_x(t + \delta t) = x(t) \times \delta t$$

se souber $x(t_0) = x_0$ e $v_x(t_0) = v_{0x}$.

O método de Feynman-Newton integra as mesmas equações diferenciais do movimento $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$ e $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$, fazendo a aproximação:

$$x(t + \delta t) = x(t) + v_x\left(t + \frac{\delta t}{2}\right) \times \delta t$$
$$v_x\left(t + \frac{\delta t}{2}\right) = v_x\left(t - \frac{\delta t}{2}\right) + a_x(t) \times \delta t,$$

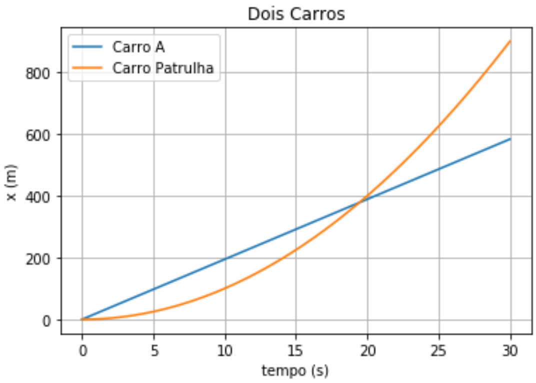
se souber $x(t_0) = x_0$ e $v_x(t_0) = v_{x0}$.

a) Calcule o erro de truncatura local do método de Feynman-Newton.

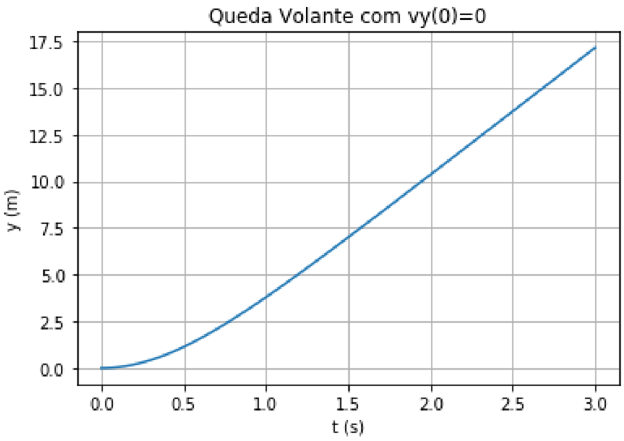
b) Calcule o erro de truncatura global do método de Feynman-Newton.

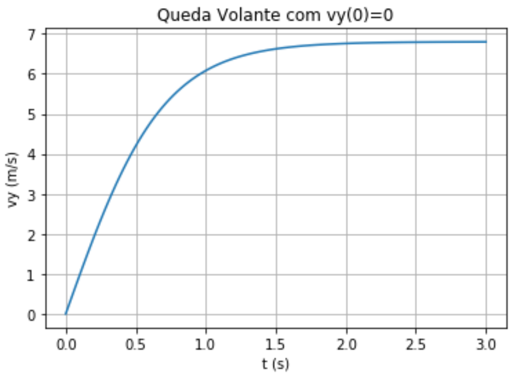
c) Para iniciar o cálculo das velocidades tem de conhecer $v_x\left(\frac{\delta t}{2}\right)$. Encontre uma expressão que permita calcular esta última quantidade. Considere $t_0 = 0$.

Soluções Problemas Cap. 2

1. a) 

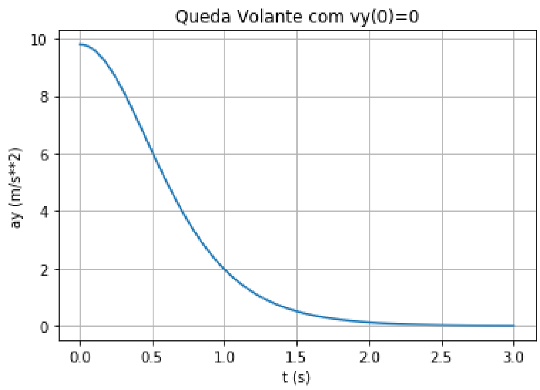
b) 19 s, 378 m.

2. a) 

b) $v_x(t) = v_\mathrm{T} \tanh \frac{gt}{v_\mathrm{T}}$ 

;

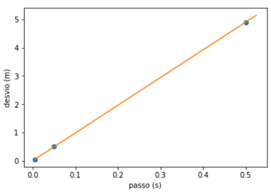
c) $a_x(t) = \dfrac{g}{\cosh^2\left(\frac{gt}{v_T}\right)}$



;

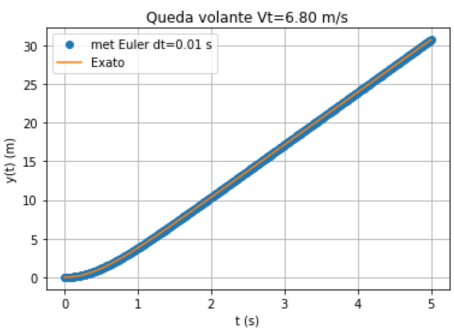
e) com resistência do ar 3.4 s; sem resistência 2,0 s; f) 6.8 m/s e 0.002 m/s^2.

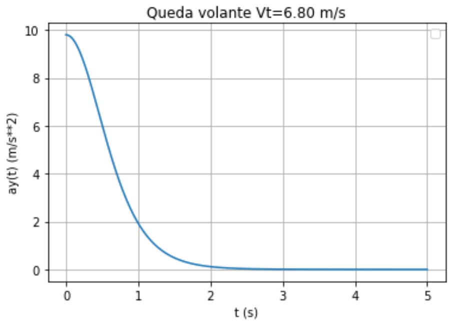
3. a) $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$; b) 29.4 s; c) 29.4 s (neste caso não altera); d) todas os valores são iguais; e) passo=0.5 s, $x(2s) = 14.7$ m; f) passo=0.05 s, $x(2s) = 19.1$ m; g) $x_{exato}(2s) = 19.6$ m, passo diminui o valor aproximado aproxima-se do valor exato;

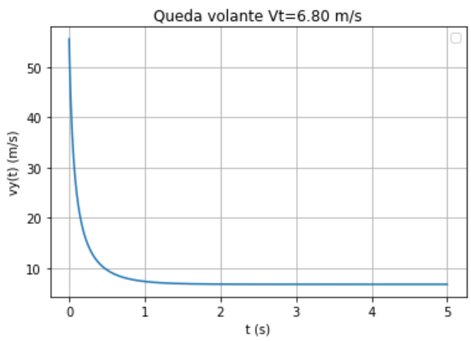
h) 

desvio é proporcional ao passo

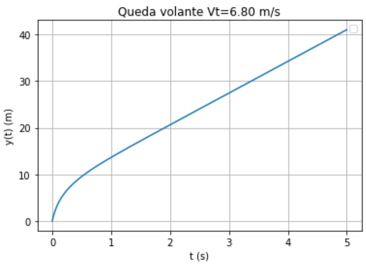
4. teste



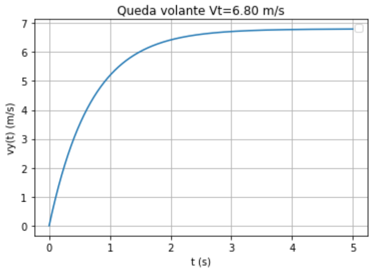
a) 

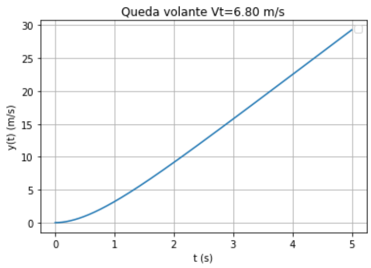
b) 

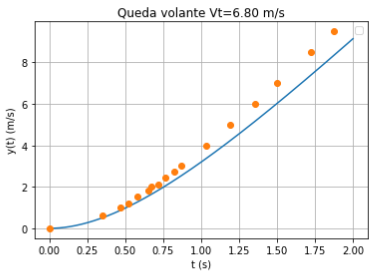
26.5 km/h; c) 0.089 s;

d) 

0.11 s

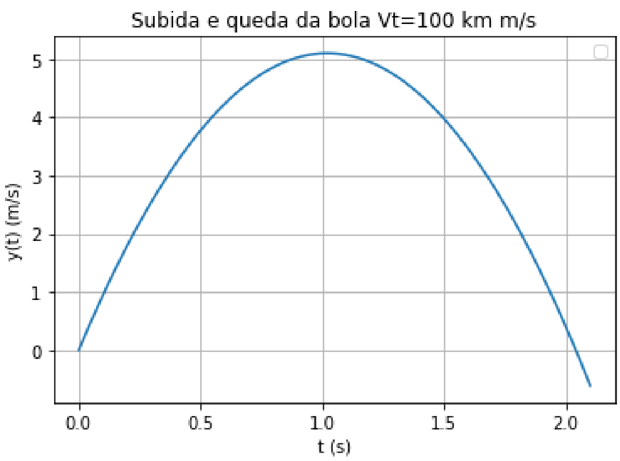
5. a) $v_T = g/C$; b) 

c) 

d) 

Não há acordo com os dados experimentais. Logo a hipótese da aceleração devida à resistência do ar ser linear e oposta à velocidade está errada.

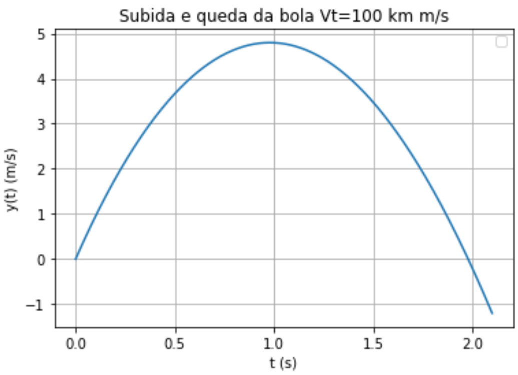
6. a) 20.9 s; 215 km/h; b) 3.3 minutos; 18 km/h; c) 29.9 s; 18 km/h; d) 3.5 minutos; 17 km/h



7. a) $y(t) = +10\,t - \frac{1}{2} g t^{\,2}$;

b) $t_m = 1.02$ s, $y_m = 5.10$ m; c) $t_{solo} = 2.04$ s; $v_{solo,y} = -10.0$ m/s

d) $t_m = 0.979$ s, $y_m = 4.798$ m , $t_{solo} = 1.979$ s, $v_{solo,y} = -9.41$ m/s



8. A bola ténis chega ao solo em 1.02 s e o volante badmington 1.19 s. Chega 1º a bola de ténis

9. a) $\mathcal{O}(\delta t^3)$; b) $\mathcal{O}(\delta t^2)$;

c) $v_x(\delta t/2) = v_x(0) + \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_{t=0} \delta t/2 + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2v_x}{dt^2}\right|_{t=0} \delta t^2/4 + \mathcal{O}(\delta t^3)$