

Proposta de Cálculo de Parâmetros de Perfuração de Poços de Petróleo a partir de Coordenadas Espaciais com o Método da Bissecção^{*}

Tiago C. A. Amorim²

^a*Petrobras, Av. Henrique Valadares, 28, Rio de Janeiro, 20231-030, RJ, Brasil*

Abstract

Escrever abstrato por último é mais legal!!! Escrever abstrato por último é mais legal!!!
Escrever abstrato por último é mais legal!!! Escrever abstrato por último é mais legal!!!
Escrever abstrato por último é mais legal!!! Escrever abstrato por último é mais legal!!!
Escrever abstrato por último é mais legal!!! Escrever abstrato por último é mais legal!!!
Escrever abstrato por último é mais legal!!! Escrever abstrato por último é mais legal!!!
Escrever abstrato por último é mais legal!!! Escrever abstrato por último é mais legal!!!

Keywords: Método da Mínima Curvatura, Método da Bissecção

1. Introdução

O desenvolvimento de técnicas para construção de poços direcionais na indústria do petróleo iniciou nos anos 1920 [1]. A construção de poços direcionais pode ter diferentes objetivos, desde acessar acumulações que seriam difíceis de serem alcançadas com poços verticais (áreas montanhosas, acumulações abaixo de leitos de rios etc.), para aumento da produtividade (maior exposição da formação portadora de hidrocarbonetos) ou até para interceptar outros poços (poços de alívio em situações de *blowout*¹).

O Método da Mínima Curvatura é largamente aceito como o método padrão para o cálculo de trajetória de poços [2]. Neste método a geometria do poço é descrita como uma série de arcos circulares e linhas retas. A transformação de parâmetros de perfuração (ΔS , θ , ϕ) em coordenadas cartesianas (ΔN , ΔE , ΔV) tem formulação explícita. A operação inversa, de coordenadas cartesianas em parâmetros de perfuração não tem formulação explícita.

No planejamento de novos poços de petróleo as coordenadas espaciais são conhecidas, e é necessário calcular os futuros parâmetros de perfuração. Os parâmetros de perfuração

^{*}Relatório integrante dos requisitos da disciplina IM253: Métodos Numéricos para Fenômenos de Transporte.

^{**}Atualmente cursando doutorado no Departamento de Engenharia de Petróleo da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP (Campinas/SP, Brasil).

Email address: t100675@dac.unicamp.br (Tiago C. A. Amorim)

¹Um *blowout* é um evento indesejado, de produção descontrolada de um poço.

são utilizados para diferentes análises, como o de máximo DLS (*dogleg severity*), que é uma medida da curvatura de um poço entre dois pontos de medida, usualmente expressa em graus por metro.

Este relatório apresenta uma proposta de metodologia para cálculo dos parâmetros de perfuração a partir das coordenadas cartesianas de pontos ao longo da geometria do poço. A formulação foi derivada das fórmulas utilizadas no Método da Mínima Curvatura, e é implícita. Para resolver o problema foi aplicado o Método da Bissecção.

2. Metodologia

2.1. Método da Mínima Curvatura

Ao longo da perfuração de um poço de petróleo são realizadas medições do comprimento perfurado (comumente chamado de comprimento medido), inclinação (ângulo com relação à direção vertical) e azimuth (ângulo entre a direção horizontal e o norte). A partir das coordenadas geográficas do ponto inicial do poço e deste conjunto de medições ao longo da trajetória, é possível calcular as coordenadas cartesianas (N, E, V) de qualquer posição do poço. A figura 1 apresenta um esquema dos parâmetros de perfuração de um poço direcional:

- ΔS : comprimento medido entre dois pontos ao longo da trajetória.
- θ : inclinação do poço no ponto atual.
- ϕ : azimuth do poço no ponto atual.
- α : curvatura entre dois pontos ao longo da trajetória.

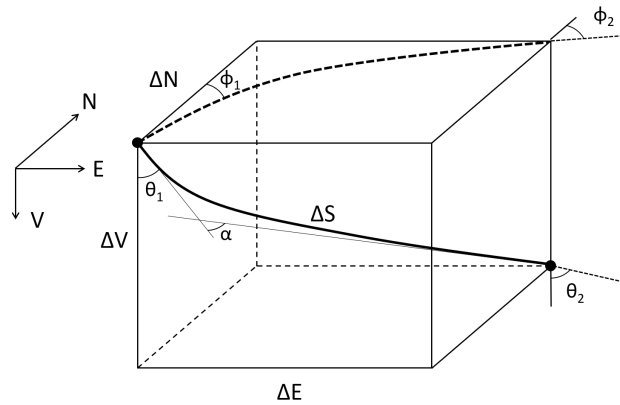


Figura 1: Parâmetros de perfuração entre dois pontos ao longo de um poço direcional.

As fórmulas que associam os parâmetros de perfuração e as coordenadas cartesianas de dois pontos ao longo de um poço direcional segundo o Método da Mínima Curvatura são [2]:

$$\Delta N = \frac{\Delta S}{2} f(\alpha) (\sin \theta_1 \cos \phi_1 + \sin \theta_2 \cos \phi_2) \quad (1)$$

$$\Delta E = \frac{\Delta S}{2} f(\alpha) (\sin \theta_1 \sin \phi_1 + \sin \theta_2 \sin \phi_2) \quad (2)$$

$$\Delta V = \frac{\Delta S}{2} f(\alpha) (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \quad (3)$$

$$\alpha = 2 \arcsin \sqrt{\sin^2 \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin^2 \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}} \quad (4)$$

$$f(\alpha) = \begin{cases} 1 + \frac{\alpha^2}{12} \{1 + \frac{\alpha^2}{10} [1 + \frac{\alpha^2}{168} (1 + \frac{31\alpha^2}{18})]\}, & \text{se } \alpha < 0,02 \\ \frac{2}{\alpha} \tan \frac{\alpha}{2}, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (5)$$

A proposta de método para calcular os parâmetros de perfuração a partir das coordenadas cartesianas parte de manipulações das equações 1, 2 e 3. É assumido que para calcular os parâmetros de perfuração entre dois pontos quaisquer são conhecidos os parâmetros de perfuração do ponto inicial² (θ_1, ϕ_1) e as distâncias cartesianas entre os pontos ($\Delta N, \Delta E, \Delta V$). O objetivo é calcular θ_1, ϕ_1 e ΔS .

É possível inverter a equação 3 para obter uma expressão para θ_2 :

$$\cos \theta_2 = 2 \frac{\Delta V}{\Delta S f(\alpha)} - \cos \theta_1 \quad (6)$$

Dividindo a equação 1 pela equação 2 obtém-se duas expressões para ϕ_2 :

$$\sin \phi_2 = \frac{-\Delta N \Delta \Psi}{\Delta H^2} \left(\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \right) + \Delta E \sqrt{\frac{1}{\Delta H^2} - \Delta \Psi^2 \left(\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \right)^2} \quad (7)$$

$$\cos \phi_2 = \frac{\Delta E \Delta \Psi}{\Delta H^2} \left(\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \right) + \Delta N \sqrt{\frac{1}{\Delta H^2} - \Delta \Psi^2 \left(\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \right)^2} \quad (8)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta \Psi &= \Delta N \sin \phi_1 - \Delta E \cos \phi_1 \\ \Delta H^2 &= \Delta N^2 + \Delta E^2 \end{aligned}$$

Fazendo a soma dos quadrados das equações 1, 2 e 3 é possível obter uma expressão para $\Delta S f(\alpha)$:

$$\Delta S f(\alpha) = 2 \sqrt{\frac{\Delta N^2 + \Delta E^2 + \Delta V^2}{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (9)$$

²Para o primeiro ponto da trajetória é assumido um poço na vertical: $\theta = 0, \phi = 0$.

onde

$$\begin{aligned} A &= \sin \theta_1 \cos \phi_1 + \sin \theta_2 \cos \phi_2 \\ B &= \sin \theta_1 \sin \phi_1 + \sin \theta_2 \sin \phi_2 \\ C &= \cos \theta_1 + \cos \theta_2 \end{aligned}$$

Com as equações propostas é possível construir uma função do tipo $g(x) = x$:

1. Assumir um valor inicial de $\Delta Sf(\alpha)$.
2. Calcular $\cos \theta_2$ com a equação 6.
3. Calcular $\sin \phi_2$ com a equação 7.
4. Calcular $\cos \phi_2$ com a equação 8.
5. Calcular $\Delta Sf(\alpha)$ com a equação 9.

Ao utilizar $\Delta Sf(\alpha)$ como parâmetro principal, evita-se calcular α e $f(\alpha)$ durante o processo. O valor de ϕ_2 só precisa ser calculado ao final, evitando usar arccos ou arcsin muitas vezes. Alguns cuidados adicionais precisam ser tomados ao utilizar este algoritmo:

- O valor mínimo de $\Delta Sf(\alpha)$ é uma linha reta entre os pontos:

$$\Delta Sf(\alpha) \geq \sqrt{\Delta N^2 + \Delta E^2 + \Delta V^2}$$

- $\Delta Sf(\alpha)$ tem um segundo limite inferior a ser atendido, definido pelos valores limite da equação 6 quando $\Delta V \neq 0$:

$$\Delta Sf(\alpha) \geq \begin{cases} \Delta V \frac{2}{\cos \theta_1 + 1}, & \text{se } \Delta V > 0 \\ \Delta V \frac{2}{\cos \theta_1 - 1}, & \text{se } \Delta V < 0 \end{cases}$$

- Se $\theta_2 = 0$, então ϕ_2 fica indefinido. Neste caso a recomendação é fazer $\phi_2 = \phi_1$.
- Se $\Delta N = \Delta E = 0$ então $|\phi_1 - \phi_2| = \pi$.

2.2. Método da Bissecção

Uma equação do tipo $g(x) = x$ pode ser resolvida buscando a raiz de $f(x) = x - g(x)$. Nesta primeira tentativa foi implementado o Método da Bissecção para buscar o resultado do problema proposto. O algoritmo foi baseado no pseudo-código descrito em [3]. O Método da Bissecção baseia-se no teorema do valor médio. O intervalo de busca pela raiz é sucessivamente dividido em dois. O método tem garantia de que a raiz pertence ao intervalo ao manter os valores da função avaliada nos limites do intervalo com sinais opostos³.

De modo simplificado o Método da Bissecção pode ser descrito como:

³Assumindo que o intervalo inicial fornecido também tem esta propriedade.

1. Definir x_a e x_b de modo que $\text{senal}(f(x_a)) \neq \text{senal}(f(x_b))$.
2. Calcular $f(x_a)$ e $f(x_b)$.
3. Calcular $x_{\text{medio}} = x_a + \frac{x_b - x_a}{2}$ e $f(x_{\text{medio}})$.
4. Se $\text{senal}(f(x_{\text{medio}})) = \text{senal}(f(x_a))$ então $x_a = x_{\text{medio}}$.
5. Se $\text{senal}(f(x_{\text{medio}})) = \text{senal}(f(x_b))$ então $x_b = x_{\text{medio}}$.
6. Se não atingiu critério de convergência, retornar para passo 2.
7. Retornar x_{medio} .

Foram adicionados critérios adicionais ao algoritmo para controlar o processo iterativo:

- Foram implementados dois métodos de cálculo do critério de convergência:
 - Critério *Direto*: $|x_i - x_{i-1}|$.
 - Critério *Relativo*⁴: $\frac{|x_i - x_{i-1}|}{|x_i|}$.
- No início do código é verificado se $|x_b - x_a| < \zeta$, onde ζ é calculado em função do critério de convergência estabelecido⁵. Se for *verdadeiro*, não é feito o *loop* do método.
- Se $\text{senal}(f(x_a)) = \text{senal}(f(x_b))$ o código apresenta uma mensagem de alerta e não é feito o *loop* do método. Optou-se por não gerar um erro, e mesmo neste caso é retornado um valor.
- É feito um término prematuro do processo iterativo caso algum $|f(x)| < \epsilon$. O valor padrão de ϵ é 10^{-7} (variável `epsilon` no código). Este teste também é feito antes de entrar no *loop*.
- Antes de sair da função, são comparados os três últimos resultados guardados ($f(x_a)$, $f(x_b)$, $f(x_{\text{medio}})$) e é retornado o valor de x com $f(x)$ mais próximo de zero.

3. Resultados

Para facilitar a análise da qualidade do código desenvolvido, foram criadas funções que realizam diversos testes onde a resposta exata é conhecida:

tests_bisection() Testa o Método da Bissecção em diferentes funções: linear, quadrática, exponencial e com sen/cos. Também foram apicados casos específicos para o algoritmo tratar: raiz em um dos limites, uso de critério de convergência relativo, saída do *loop* sem atingir o critério de convergência, má definição do intervalo inicial ($\text{senal}(f(x_a)) = \text{senal}(f(x_b))$) e intervalo inicial muito pequeno ($|x_b - x_a| < \zeta$).

⁴Caso $|x_i| < \epsilon$, é utilizado $|x_{i-1}|$ no denominador. E se também $|x_{i-1}| < \epsilon$ o valor da convergência é considerado *zero*!

⁵Definindo c_{lim} o limite de convergência, se for utilizado o critério de convergência *direto* então $\zeta = c_{lim}$. Se for utilizado o critério de convergência relativo então $\zeta = c_{lim} \min |x_a|, |x_b|$ (a avaliação do menor valor segue as mesmas regras do cálculo do critério de convergência, ignorando qualquer $|x| < \epsilon$ e retorna *zero* caso ambos sejam valores pequenos).

tests_minimum_curvature() Testa as funções implementadas para cálculo de coordenadas cartesianas em função de parâmetros de perfuração (cálculo direto), e de parâmetros de perfuração em função de coordenadas cartesianas (cálculo iterativo).

Algumas definições que foram feitas no código que implementa o Método da Bissecção são resultado dos testes realizados.

A definição de um critério de parada prematura se mostrou importante para evitar que o método continue buscando uma raiz quando já encontrou uma solução *aceitável*. A definição deste limite $|f(x)| < \epsilon = 10^{-7}$ foi empírica e deve ser revista para problemas com valores usuais de $f(x)$ com ordem de grandeza diferente da que foi utilizada nos testes ($\approx 10^1$). Um exemplo é o da função $f(x) = -3x + 0.9$, que tem raiz em 0.3. A função implementada retorna $f(0.3) \approx 1.11022 \cdot 10^{-16}$, de modo que é preciso levar em conta erros de aritmética de máquina na definição do critério de parada prematura.

Todas as funções foram definidas para trabalhar com números do tipo **double**. Inicialmente as funções estavam definidas para trabalhar com **float**, mas estes mostraram não conseguirem trabalhar com valores de convergência muito baixos. A avaliação da função $f(x) = -3x + 0.9$ na sua raiz foi testada usando diferentes tipos de números de ponto flutuante:

- **float**: $f(0.3) \approx -3.57628 \cdot 10^{-8}$
- **double**: $f(0.3) \approx 1.11022 \cdot 10^{-16}$
- **long double**: $f(0.3) \approx 5.35872 \cdot 10^{-312}$

Mesmo que o **long double** consiga o melhor resultado, considerou-se que trabalhar com **double** já é *suficiente*.

É sempre feita uma verificação ao final do código para avaliar qual é o valor entre x_a , x_b e x_{medio} que minimiza $|f(x)|$. O método da bisecção tem garantia de convergência, mas não é garantido que o melhor resultado será o x_{medio} da última interação. Um exemplo prático deste efeito é visto na Tabela 3, onde o melhor resultado é alcançado na 8ª interação, mas o critério de convergência⁶ só é alcançado na 11ª interação.

A metodologia proposta para o cálculo de parâmetros de perfuração com o Método da Mínima Curvatura tem algumas particularidades, como a sua indefinição quando é testado com um valor muito baixo de $\Delta Sf(\alpha)$. A definição do intervalo de busca é direta, mas, devido a erros de aritmética de máquina, não é possível garantir que $signal(f(x_a)) \neq signal(f(x_b))$ quando a resposta está muito próxima de um dos limites. Desta forma, ao invés de gerar uma mensagem de erro quando $signal(f(x_a)) = signal(f(x_b))$, é gerada uma mensagem e o código retorna o valor de x (igual a x_a ou x_b) que minimizar $|f(x)|$.

Este problema ficou evidente no cálculo do 4º trecho do poço em 'S' descrito nos testes de **tests_minimum_curvature()**. O valor exato de θ_2 e zero (o 5º trecho é reto e vertical). Neste caso, o valor mínimo de $\Delta Sf(\alpha)$ é limitado pela equação 6, e é igual à resposta exata.

Tabela 1: Busca pela raiz de $5x^2 + 3x - 0.25$ no intervalo $[-0.25; 1]$ pelo Método da Bissecção.

Int.	x_a	$f(x_a)$	x_b	$f(x_b)$	x_{medio}	$f(x_{medio})$
1	-0.25	-0.1875	1	8.25	0.375	2.07812
2	-0.25	-0.1875	0.375	2.07812	0.0625	0.457031
3	-0.25	-0.1875	0.0625	0.457031	-0.09375	0.0126953
4	-0.25	-0.1875	-0.09375	0.0126953	-0.171875	-0.11792
5	-0.171875	-0.11792	-0.09375	0.0126953	-0.132812	-0.0602417
6	-0.132812	-0.0602417	-0.09375	0.0126953	-0.113281	-0.0256805
7	-0.113281	-0.0256805	-0.09375	0.0126953	-0.103516	-0.00696945
8	-0.103516	-0.00696945	-0.09375	0.0126953	-0.0986328	0.00274372
9	-0.103516	-0.00696945	-0.0986328	0.00274372	-0.101074	-0.00214267
10	-0.101074	-0.00214267	-0.0986328	0.00274372	-0.0998535	0.000293076
11	-0.101074	-0.00214267	-0.0998535	0.000293076	-0.100464	-0.000926659

Neste ponto o algoritmo calcula $f(263.305) \approx -2.58273 \cdot 10^{-7}$, que não atinge o critério de parada prematura, mas tem o mesmo sinal de $f(\Delta Sf(\alpha)_{max})$.

Foi implementada uma função para estimar o número de interações necessárias para alcançar o critério de convergência definido (equação 10). Quando o critério de convergência (c_{lim}) é *direto*, a estimativa se mostrou exata (exceto nos casos em que há parada prematura). Buscou-se realizar a mesma estimativa para o caso de uso do critério de convergência *relativo*, e neste caso as estimativas não exatas, mas boas aproximações (ver Tabela 3).

$$n_{int} = \left\lceil \frac{\log \frac{|x_b - x_a|}{|x_{referencia}|} \frac{1}{c_{lim}}}{\log 2} \right\rceil \quad (10)$$

onde

$$x_{referencia} = \begin{cases} 1, & \text{se Critério de convergência direto} \\ \min(|x_a|, |x_b|), & \text{c.c.} \end{cases}$$

4. Conclusão

Referências

- [1] I. A. of Drilling Contractors (IADC), IADC Drilling Manual, International Association of Drilling Contractors (IADC), 2015, prévia do livro em <https://iadc.org/wp-content/uploads/2015/08/preview-dd.pdf> (accessado em 28/08/2023).
- [2] A Compendium of Directional Calculations Based on the Minimum Curvature Method, Vol. All Days of SPE Annual Technical Conference and Exhibition. arXiv:<https://onepetro.org/SPEATCE/proceedings-pdf/03ATCE/All-03ATCE/SPE-84246-MS/2895686/spe-84246-ms.pdf>, doi:10.2118/84246-MS. URL <https://doi.org/10.2118/84246-MS>
- [3] R. L. Burden, J. D. Faires, A. M. Burden, Análise numérica, Cengage Learning, 2016.

⁶A coluna com os valores da convergência foi omitida por falta de espaço na página

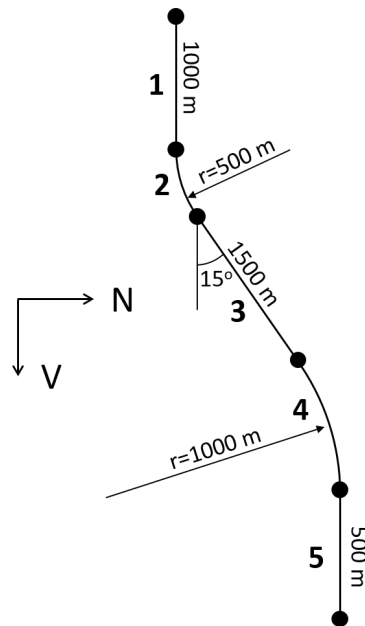


Figura 2: Esquema do poço em 'S' descrito nos testes de `tests_minimum_curvature()`.

Tabela 2: Comparação entre o número de interações previsto e realizado para diferentes testes.

Função	x_a	x_b	Critério <i>Direto</i>		Critério <i>Relativo</i>	
			Previsão	Feitas	Previsão	Feitas
Linear	0.	2.	11	11	11	13
Quadrática	-0.25	1.	11	11	11	14
Exponencial	0.	10.	14	14	14	13
Trigonométrica	0.	5.	13	13	13	12
1/4 círculo horizontal	14.1421	120.417	17	17	13	13
Seção 2 do poço em S	130.526	1111.4	20	20	13	13
Poço 3D	9.84918	83.8634	17	17	13	13

Apêndice A. Código em C

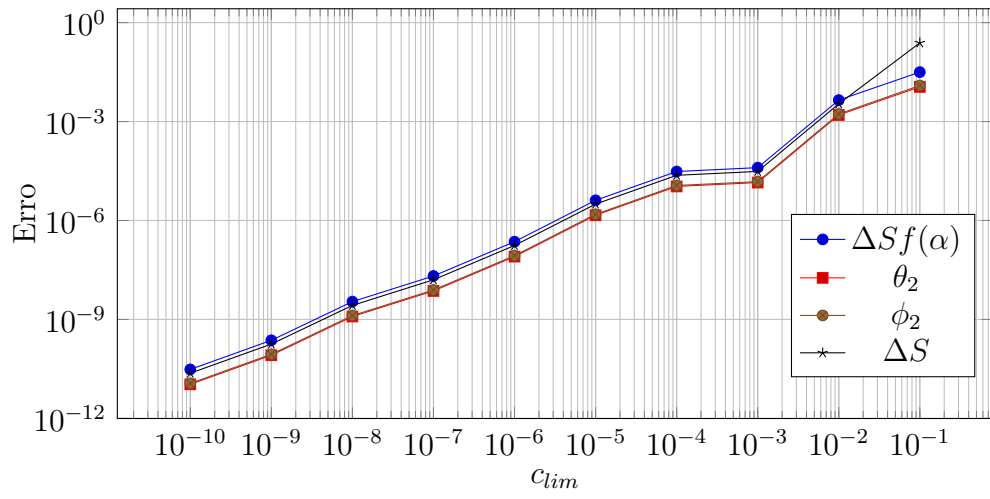


Figura 3: Erro das variáveis de interesse em função do limite de convergência.