

# Aplicação do Método da Secante para Resolver o Cálculo Inverso do Método da Mínima Curvatura\*

Tiago C. A. Amorim<sup>2</sup>

<sup>a</sup>Petrobras, Av. Henrique Valadares, 28, Rio de Janeiro, 20231-030, RJ, Brasil

## Abstract

**Keywords:** Método da Mínima Curvatura, Método da Secante

## 1. Introdução

Foi desenvolvido um método de cálculo de parâmetros de perfuração ( $\Delta S$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ ) em função de coordenadas cartesianas ( $\Delta N$ ,  $\Delta E$ ,  $\Delta V$ ) da trajetória de um poço a partir da formulação do Método da Mínima [1]. A formulação desenvolvida é implícita, e tem a forma  $g(x) = x$ .

A primeira tentativa de resolver o problema proposto, neste relatório denominado de **Inverso da Mínima Curvatura**, foi com o Método da Bissecção. O Método da Bissecção conseguiu encontrar a resposta correta em todos os testes realizados. O segundo teste foi feito com o Método de Newton-Raphson que apresentou convergência mais que quadrática [2].

Neste terceiro relatório é aplicado o Método da Secante para resolver o mesmo problema.

## 2. Metodologia

### 2.1. Inverso da Mínima Curvatura

O algoritmo de cálculo do inverso da mínima curvatura é discutido em [1]. O algoritmo assume que para calcular os parâmetros de perfuração entre dois pontos quaisquer são conhecidos os parâmetros de perfuração do ponto inicial ( $\theta_1$ ,  $\phi_1$ ) e as distâncias cartesianas entre os pontos ( $\Delta N$ ,  $\Delta E$ ,  $\Delta V$ ). O objetivo é calcular  $\theta_2$ ,  $\phi_2$  e  $\Delta S$ . As fórmulas desenvolvidas são repetidas neste relatório para dar mais clareza.

$$\cos \theta_2 = 2 \frac{\Delta V}{\Delta S f(\alpha)} - \cos \theta_1 \quad (2.1a)$$

$$\sin \theta_2 = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_2} \quad (2.1b)$$

$$\begin{aligned} \sin \phi_2 &= \frac{-\Delta N}{\Delta H^2} \left( \frac{\Delta \Psi \sin \theta_1}{\sin \theta_2} \right) \\ &\quad + \frac{\Delta E}{\Delta H^2} \sqrt{\Delta H^2 - \left( \frac{\Delta \Psi \sin \theta_1}{\sin \theta_2} \right)^2} \end{aligned} \quad (2.1c)$$

$$\begin{aligned} \cos \phi_2 &= \frac{\Delta E}{\Delta H^2} \left( \frac{\Delta \Psi \sin \theta_1}{\sin \theta_2} \right) \\ &\quad + \frac{\Delta N}{\Delta H^2} \sqrt{\frac{1}{\Delta H^2} - \left( \frac{\Delta \Psi \sin \theta_1}{\sin \theta_2} \right)^2} \end{aligned} \quad (2.1d)$$

$$\Delta S f(\alpha) = 2 \sqrt{\frac{\Delta N^2 + \Delta E^2 + \Delta V^2}{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (2.1e)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta \Psi &= \Delta N \sin \phi_1 - \Delta E \cos \phi_1 \\ \Delta H^2 &= \Delta N^2 + \Delta E^2 \\ A &= \sin \theta_1 \cos \phi_1 + \sin \theta_2 \cos \phi_2 \\ B &= \sin \theta_1 \sin \phi_1 + \sin \theta_2 \sin \phi_2 \\ C &= \cos \theta_1 + \cos \theta_2 \end{aligned}$$

Em [1] são discutidos detalhes adicionais sobre a implementação deste algoritmo e seus limites. Em [2] é apresentada a derivação do problema em função da variável principal ( $\Delta S f(|\alpha|)$ ).

### 2.2. Método da Secante

O código desenvolvido foi baseado no pseudo-código de [3]. Uma forma simplificada é apresentada no Algoritmo 1. O Método da Secante deriva do Método de Newton-Raphson, e faz uma aproximação da derivada da função de interesse:  $f'(x) \approx \Delta f(x)/\Delta x$ . O método precisa de dois pontos iniciais, e, assim como o Método de Newton-Raphson, converge mais rápido que o Método da Bissecção, mas não tem garantia de encontrar uma raiz.

\*Relatório número 3 como parte dos requisitos da disciplina IM253: Métodos Numéricos para Fenômenos de Transporte.

\*\*Atualmente cursando doutorado no Departamento de Engenharia de Petróleo da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP (Campinas/SP, Brasil).

Email address: t100675@dac.unicamp.br (Tiago C. A. Amorim)

---

**Algorithm 1** Método da Secante

---

**Entrada:**  $x_0, x_1$ **Se**  $|f(x_0)| < |f(x_1)|$  **então** $x_{\text{melhor}} \leftarrow x_0$ **Caso contrário** $x_{\text{melhor}} \leftarrow x_1$  $i \leftarrow 2$ **Repete** $x_i \leftarrow x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})} (x_{i-1} - x_{i-2})$ **Se**  $|f(x_{i+1})| < |f(x_{\text{melhor}})|$  **então** $x_{\text{melhor}} \leftarrow x_{i+1}$  $i \leftarrow i + 1$ **Até**  $|x_i - x_{i-1}| < \epsilon$ **Retorna:**  $x_{\text{melhor}}$ 

---

Foram adicionados critérios adicionais ao algoritmo para controlar o processo iterativo:

- Foram implementados dois métodos de cálculo do critério de convergência<sup>1</sup>: *Direto* e *Relativo*.
- É feito um término prematuro do processo iterativo caso algum  $|f(x)| < \epsilon$ . O valor padrão de  $\epsilon$  é  $10^{-7}$  (variável **epsilon** no código). Este teste também é feito antes de entrar no *loop*.
- A cada iteração é verificado se a função está variando muito pouco:  $|f(x_i) - f(x_{i-1})| < \epsilon$ . Em caso positivo é gerada uma mensagem e é encerrado o *loop*.
- Como o método não garante convergência, ao longo das iterações é guardado o melhor resultado ( $x$  tal que  $|f(x)|$  seja mínimo). Este é o resultado que é retornado.

### 3. Resultados

Para facilitar a análise da qualidade do código desenvolvido, foram criadas funções que realizam diversos testes onde a resposta exata é conhecida:

**tests\_newton\_raphson()** Testa o Método da Secante em diferentes funções: linear, quadrática, exponencial e trigonométrica. Também foram aplicados casos específicos para o algoritmo tratar: raiz no ponto inicial, ponto inicial muito próximo da raiz, ponto inicial em um ponto de mínimo da função (derivada nula), uso de critério de convergência relativo, função com derivada nula na raiz, função com vários mínimos e máximos locais.

**tests\_minimum\_curvature()** Testa o algoritmo proposto para resolver o inverso da mínima curvatura para diferentes geometrias de trecho de poço: poço vertical, horizontal, inclinado, em curva.

A implementação do Método da Secante foi adaptada, impondo limites máximo e mínimo para os pontos a serem testados. No problema do inverso da mínima curvatura a variável principal ( $\Delta Sf(\alpha)$ ) não pode ter um valor qualquer. Optou-se por não parar prematuramente o processo iterativo quando os limites são ultrapassados. Quando o novo valor da variável principal ultrapassa algum dos limites pré-estabelecidos, é utilizado o valor do limite que foi violado. Para o problema do inverso da mínima curvatura foi utilizado um limite inferior de  $\Delta Sf(\alpha)$  igual ao discutido em [1].

Como esperado, as funções lineares convergiram em uma iteração, pois a aproximação da derivada feita no Método da Secante é exatam neste exemplo. As demais funções polinomiais testadas convergiram rapidamente, mas com mais iterações que o Método de Newton Raphson (Tabela 1). O Método da Secante teve problemas de convergência com a função exponencial:  $e^{x^2-4} - 1$ . O método só conseguiu convergir quando foram definidos valores iniciais próximos da raiz. Como esta função *crece* muito rapidamente em  $x < -2$  e  $x > 2$ , o termo  $(f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))$  sofre com problemas numéricos, pois é a subtração de números com grandezas muito distintas.

Para as diferentes funções testadas, o Método da Bissecção convergiu linearmente em uma razão de aproximadamente 2 [1], o Método de Newton-Raphson em geral teve convergência quadrática [2]. Com o Método da Secante a convergência foi aproximadamente quadrática, em geral um pouco pior que o Método de Newton-Raphson (Figura 3).

O Método de Newton-Raphson se mostrou instável para algumas das funções de teste [2], ficando muito dependente do ponto inicial para conseguir convergir. Uma função especialmente complicada para o Método de Newton-Raphson foi  $3x + x^2 \sin^2 \frac{x\pi}{10}$ . Com o Método da Secante não foi observado este problema, e diferentes valores iniciais conseguiram convergir para a raiz do problema. Os valores de  $x_i$  não convergiram monotonicamente para a raiz, mas conseguiram encontrar o resultado correto (Apêndice A).

A função  $\cos x + \sin x$  tem muitas raízes, e o resultado do Método de Newton-Raphson se mostrou muito dependente do ponto inicial. Para conseguir encontrar a raiz de uma determinada região foi preciso definir um ponto inicial *bem próximo* da raiz. Já a função  $3x + x^2 \sin^2 \frac{x\pi}{10}$  mostrou muita instabilidade, e em muitos casos não conseguiu convergir ao fazer pequenas mudanças no valor do ponto inicial.

Na aplicação do Método de Newton para resolver o inverso da mínima curvatura os resultados foram muito bons. Nenhum dos testes teve problemas de convergência, e convergiram com um número de iterações menor que o do Método da Bissecção. O formato da função de construída favorece o uso do Método de Newton-Raphson, pois tem a forma próxima de uma reta (ver Apêndice A).

Para o problema proposto foram testados alguns valores distintos de ponto inicial, mas o impacto no resultado

---

<sup>1</sup>Maiores detalhes em [1].

Tabela 1: Comparação entre o número de iterações necessários para um mesmo critério de convergência usando os Métodos da Bissecção, Newton-Raphson e Secante.

Função	Raiz	Bissecção			Newton-Raphson		Secante		
		$x_a$	$x_b$	Iter.	$x_0$	Iter.	$x_0$	$x_1$	Iter.
Linear	0.3	0.	2.	11	0.	1	0	1	1
Quadrática	-0.1	-0.25	1.	11	0.25	4	0.25	1.	6
Exponencial	2.	0.	10.	14	5.	25	2.5	3.	9
Trigonométrica	$3\pi/4$	0.	5.	13	3.	3	0	3	4
1/4 círculo horizontal	20	14.1421	120.417	17	14.4743	1	21.2132	15.5563	1
Seção 2 do poço em S	131.652	130.526	1111.4	20	133.592	11	195.789	143.579	4
Poço 3D	10.3144	9.84918	83.8634	17	10.0805	4	14.7738	10.8341	3

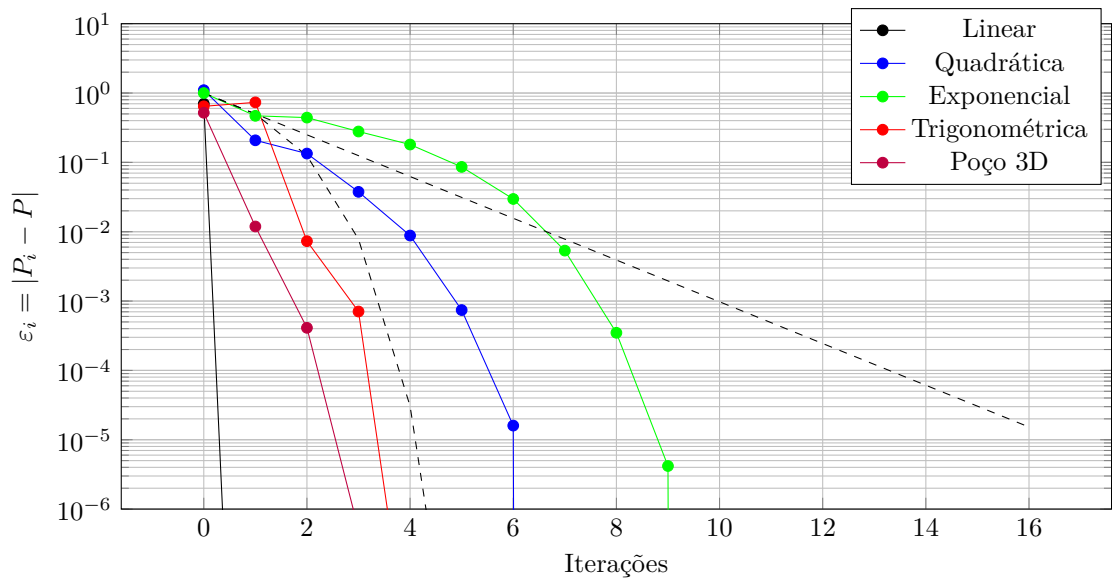


Figura 1: Evolução do erro do Método de Newton-Raphson com diferentes funções (linhas tracejadas representam  $\varepsilon_{i+1}/\varepsilon_i = 0.5$  e  $\varepsilon_{i+1}/\varepsilon_i^2 = 0.5$ ).

não é expressivo. Um valor inicial *melhor* resultou em uma ou duas iterações a menos (Figura 3). Inicializar no valor mínimo de  $\Delta Sf(\alpha)$  não teve um resultado muito bom em alguns dos testes realizados, pois nesta região a derivada tem maior variação. No código foi utilizado por padrão um valor 10% maior que o mínimo.

No exemplo da Figura 3 a resposta exata é aproximadamente 4.7% maior que  $\Delta Sf(\alpha)_{min}$ , e os pontos iniciais mais próximos convergem mais rápido. O principal resultado deste gráfico é mostrar que para o problema do inverso da mínima curvatura a definição do ponto inicial tem pouco impacto no número de iterações que o Método de Newton-Raphson precisará para alcançar o critério de convergência definido.

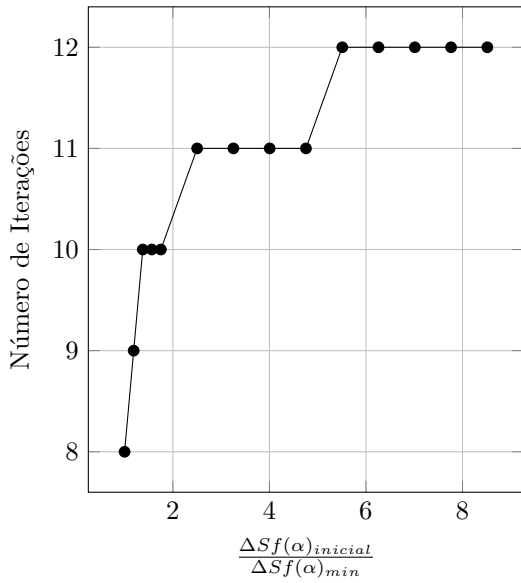


Figura 2: Número de iterações em função do valor inicial da variável do problema.

O código de ambos métodos foi implementado em um único arquivo, e pode ser encontrado em <https://github.com/TiagoCAAmorim/numerical-methods>.

#### 4. Conclusão

O Método de Newton-Raphson se mostrou adequado para fazer o cálculo de parâmetros de perfuração em função de coordenadas cartesianas. Foi necessário adaptar o Método de Newton-Raphson para conseguir continuar o processo iterativo caso o novo valor de teste não esteja na região de validade da função. Com este ajuste todos os testes realizados alcançaram o critério de convergência com um número de iterações menor do que o que foi alcançado com o Método da Bissecção.

#### Apêndice A. Funções de Teste

Nos gráficos a seguir as curvas contínuas são as funções de teste e as tracejadas são as respectivas derivadas. A

raiz (ou raízes) está denotada pelo quadrado azul. São apresentadas apenas algumas das funções de teste. Em vermelho estão os pontos avaliados ao longo de um dos testes realizados.

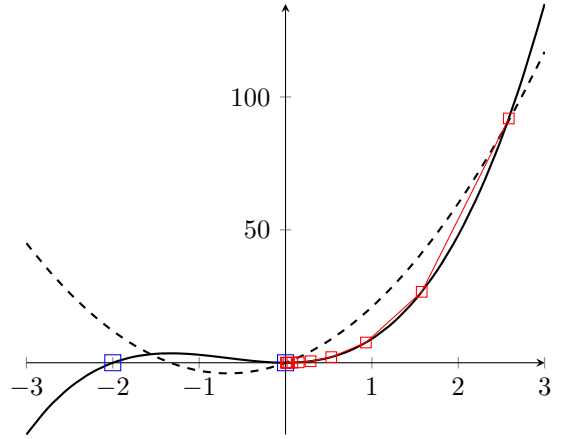


Figura A.3: Polinômio de 3º grau:  $3x^3 + 2x^2$ .

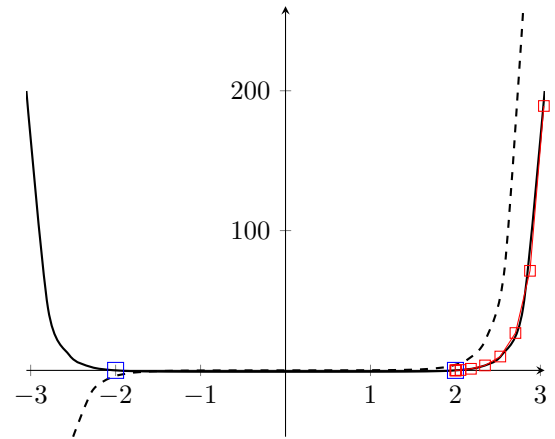


Figura A.4: Função exponencial:  $e^{x^2-4} - 1$ .

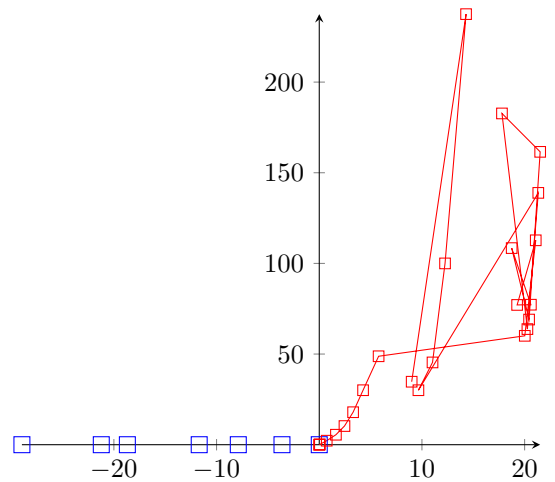


Figura A.5: Função trigonométrica:  $3x + x^2 \sin^2 \frac{x\pi}{10}$ .

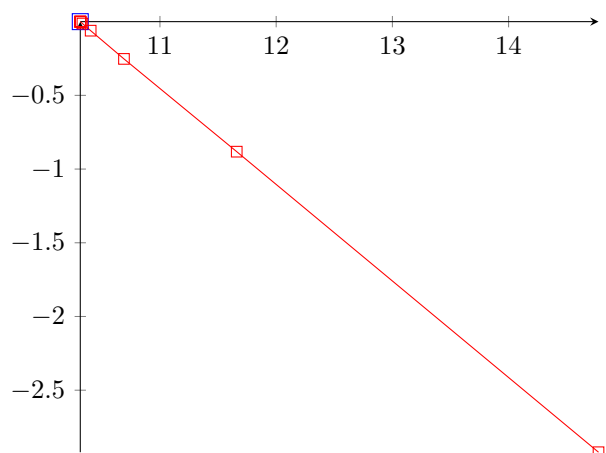


Figura A.6: Função de erro de  $\Delta S f(\alpha)$  para o caso Poço 3D.

## Referências

- [1] T. C. A. Amorim, Proposta de cálculo de parâmetros de perfuração de poços de petróleo a partir de coordenadas espaciais com o método da bissecção, Relatório número 1 da disciplina IM253: Métodos Numéricos para Fenômenos de Transporte (08 2023).
- [2] T. C. A. Amorim, Aplicação do método de newton raphson para resolver o cálculo inverso do método da mínima curvatura, Relatório número 2 da disciplina IM253: Métodos Numéricos para Fenômenos de Transporte (09 2023).
- [3] R. L. Burden, J. D. Faires, A. M. Burden, Análise numérica, Cengage Learning, 2016.