

# Aplicação de Splines Fixas para Interpolar Tabelas de Fluxo Vertical Multifásico\*

Tiago C. A. Amorim<sup>2</sup>

<sup>a</sup>Petrobras, Av. Henrique Valadares, 28, Rio de Janeiro, 20231-030, RJ, Brasil

## Abstract

A construção de curvas de fluxo vertical multifásico para utilizar em simulação de fluxo em meios porosos pode ser uma tarefa computacionalmente custosa. Como uma tabela estática irá substituir um simulador de fluxo multifásico, é preciso um número adequado de parâmetros de entrada. A nuvem de pontos da tabela deve garantir que os valores a serem interpolados em uma simulação de fluxo em meios porosos sejam próximos dos valores reais.

Tradicionalmente os simuladores de fluxo em meio poroso utilizam interpolação linear entre os pontos tabelados. Um primeiro estudo verificou que usar splines naturais para interpolar os valores tabelados não resulta em melhora das estimativas. Um segundo estudo utilizou os dados tabelados para estimar valores para as derivadas da função  $P_{wf} = f(Q)$  no extremos do domínio, e assim poder construir splines fixadas. Os resultados mostraram que as splines fixadas conseguiram resultados melhores que os da interpolação com splines naturais ou linear.

**Keywords:** Splines, Simulação Numérica, Fluxo em Meio Poroso

## 1. Introdução

As tabelas de fluxo vertical multifásico, mais comumente conhecidas pela sigla do termo em inglês: VFP - *vertical flow performance*<sup>1</sup>, são a abordagem mais usual para acoplar uma simulação de fluxo em meios porosos com os limites da unidade de produção.

As tabelas de VFP associam diferentes variáveis de fluxo (vazões) com as pressões nos extremos do elemento modelado<sup>2</sup>. As tabelas são geradas com um número limitado de pontos, e invariavelmente o simulador de fluxo terá que buscar valores para condições de fluxo que não estão na tabela. O mais comum é realizar interpolação linear entre os pontos da tabela [1][2]. Uma avaliação anterior avaliou o uso de splines naturais para interpolar valores em tabelas de VFP, e concluiu que, para os testes realizados, a interpolação linear é melhor [3]. Este relatório revisita os mesmos exemplos e avalia a interpolação com splines fixas.

## 2. Metodologia

### 2.1. Tabelas de Fluxo Vertical Multifásico

Os simuladores de fluxo em meio poroso utilizam as tabelas de VFP para poder relacionar condições de fluxo

de fundo e de superfície. O comum é que a tabela de VFP relacione pressão de cabeça (WHP<sup>3</sup>) com as demais variáveis associadas ao poço (e que são calculadas pelo simulador de fluxo em meios porosos):

- Pressão de fundo:  $P_{wf}$  ou BHP<sup>4</sup>.
- Vazão: óleo, gás, água ou líquido<sup>5</sup>.
- Fração de água: WCUT<sup>6</sup> ou RAO<sup>7</sup>.
- Fração de gás: RGL<sup>8</sup> ou RGO<sup>9</sup>.
- Vazão de injeção de *gas-lift*.

No simulador de fluxo um poço terá sempre uma condição de produção especificada: vazão, pressão de fundo, pressão de cabeça ou vazão de grupo. Enquanto estiver em uma determinada condição de produção, os demais limitantes devem ser observados: pressão de fundo mínima, pressão de cabeça mínima, vazão de líquido máxima, vazão de óleo máxima, vazão de gás máxima<sup>10</sup>. Se algum limite não for satisfeito, o simulador irá mudar o controle de poço para o limite da condição violada e buscar uma nova solução para o problema. Este processo é realizado a cada passo de tempo da simulação, e a tabela de VFP será utilizada toda vez que for necessário calcular a pressão de cabeça do poço.

\*Relatório número 5 como parte dos requisitos da disciplina IM253: Métodos Numéricos para Fenômenos de Transporte.

\*\*Atualmente cursando doutorado no Departamento de Engenharia de Petróleo da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP (Campinas/SP, Brasil).

Email address: t100675@dac.unicamp.br (Tiago C. A. Amorim)

<sup>1</sup>Ou VLP - *vertical lift performance*.

<sup>2</sup>Poço, pedaço de linha de produção, *manifold* etc.

<sup>3</sup>WHP é *Well Head Pressure*.

<sup>4</sup>BHP é *Bottom Head Pressure*.

<sup>5</sup>Respectivamente  $Q_o$ ,  $Q_g$ ,  $Q_w$ ,  $Q_{liq}$ .

<sup>6</sup>WCUT é *Water Cut* ou corte de água ( $Q_w/Q_{liq}$ )

<sup>7</sup>RAO é razão água óleo ( $Q_g/Q_o$ ).

<sup>8</sup>RGL é razão gás líquido ( $Q_g/Q_{liq}$ ).

<sup>9</sup>RGO é razão gás óleo ( $Q_g/Q_o$ ).

<sup>10</sup>Para o caso de um produtor.

## 2.2. Splines

Dado um conjunto de  $n + 1$  pontos  $(x_i, y_i)$  para  $i = 0, 1, \dots, n$ , as splines são um método de interpolação que utiliza  $n$  equações cúbicas por partes na forma:

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

para  $x_j \leq x \leq x_{j+1}$

Os termos das equações são definidos de forma a garantir que os valores da função interpoladora ( $S(x)$ ) sejam exatos nos pontos dados ( $S(x_i) = y_i$ ), e que exista continuidade da função interpoladora, e de suas derivadas primeira e segunda. Duas condições adicionais precisam ser definidas para conseguir definir todos os termos da função interpoladora. Splines naturais tem derivada segunda nula nos extremos do domínio ( $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ ). Já as splines fixadas tem as derivadas primeiras nos extremos do domínio definidas:  $S'(x_0) = f'(x_0)$  e  $S'(x_n) = f'(x_n)$ . O código desenvolvido para as splines fixas é o apresentado em [4]. Uma forma simplificada do algoritmo das splines naturais é apresentada no Algoritmo 1.

---

### Algorithm 1 Splines Fixas

---

**Entrada:**  $x_i, y_i$  para  $i = 0, 1, \dots, n$ ;  $y'_0 = f'(x_0)$ ;  $y'_n = f'(x_n)$

**Para todos**  $i \in \{0, \dots, n\}$  **faça**

$a_i \leftarrow y_i$

**Para todos**  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  **faça**

$h_i \leftarrow x_{i+1} - x_i$

$\alpha_0 \leftarrow \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3y'_0$

$\alpha_n \leftarrow 3y'_n - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1})$

**Para todos**  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  **faça**

$\alpha_i \leftarrow \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1})$

$r_0 \leftarrow 2h_0$

$m_0 \leftarrow 0.5$

$z_0 \leftarrow \frac{\alpha_0}{r_0}$

**Para todos**  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  **faça**

$r_i \leftarrow 2(x_{i+1} - x_{i-1}) - h_{i-1}m_{i-1}$

$m_i \leftarrow \frac{h_i}{r_i}$

$z_i \leftarrow \frac{\alpha_i - h_{i-1}z_{i-1}}{r_i}$

$r_n \leftarrow h_{n-1}(2 - m_{n-1})$

$z_n \leftarrow \frac{\alpha_n - h_{n-1}z_{n-1}}{r_n}$

$c_n \leftarrow z_n$

**Para todos**  $i \in \{n-1, \dots, 0\}$  **faça**

$c_i \leftarrow z_i - m_i c_{i+1}$

$b_i \leftarrow \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - h_i \frac{c_{i+1} + 2c_i}{3}$

$d_i \leftarrow \frac{c_{i-1} - c_i}{3h_i}$

**Retorna:**  $a_i, b_i, c_i, d_i$  para  $i = 0, 1, \dots, n-1$

---

## 3. Resultados

Para facilitar a análise da qualidade do código desenvolvido, foram criadas funções que realizam diversos testes onde a resposta exata é conhecida:

**tests\_splines()** Testa as implementações de splines naturais e splines fixadas em dois exemplos: conjunto de 3 pontos e aproximação da integral da função exponencial (exemplos 1 a 4 do capítulo 3.5 de [4]).

**tests\_vfp\_interpolation()** Compara o uso de interpolação linear e interpolação com splines naturais e fixas de pontos de uma tabela de VFP.

Os testes que utilizam os exemplos de [4] tiveram resultado igual ao do livro. O exemplo mais interessante é o da função exponencial, que é aproximada por splines nos pontos  $x \in \{0, 1, 2, 3\}$  (Figura 1). O exemplo demonstra que a aproximação com spline fixada, impondo as derivadas da função original no primeiro ponto e no último ponto, melhora a estimativa da integral no intervalo aproximado por splines (Figura 2).

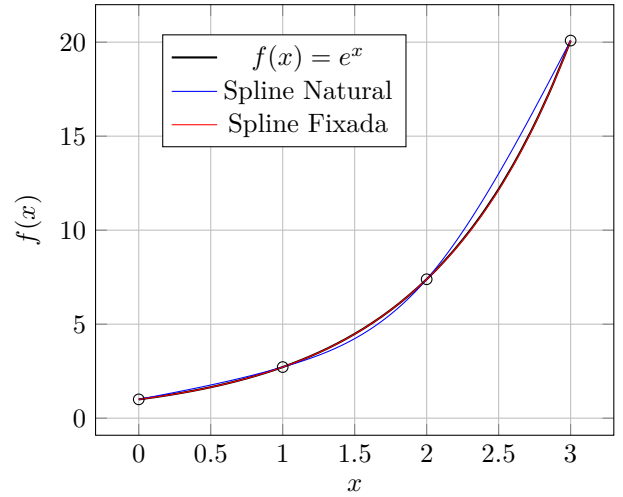


Figura 1: Aproximação com splines da função exponencial:  $f(x) = e^x$ .

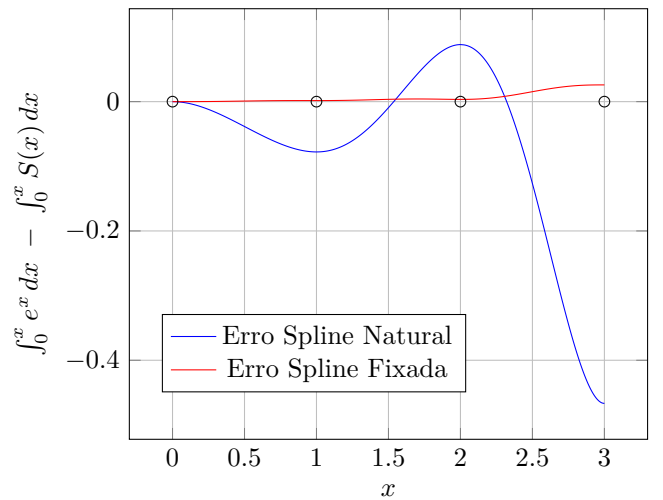


Figura 2: Erro da integral das aproximações com splines da função exponencial, entre 0 e  $x$ .

Para realizar o teste proposto foi utilizada uma das tabelas de VFP do modelo Unisim-II-H [5]. A tabela escolhida é de produção e tem os seus parâmetros descritos na Tabela 1.

O teste realizado é o mesmo descrito em [3]. Para diferentes combinações dos parâmetros GLR, WCUT, LFG e WHP foram construídas funções interpoladoras dos pontos (LIQ, BHP). Em cada teste um dos pontos (LIQ, BHP) foi excluído. Este mesmo ponto foi posteriormente estimado com a função interpoladora.

Para usar splines fixas é preciso fornecer a derivada da função a ser aproximada. A estimativa das derivadas nos extremos da função foi feita com os pares de valores conhecidos nos extremos (Figura 3):

$$f'(x_0) \approx \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \beta_0$$

$$f'(x_n) \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \beta_n$$

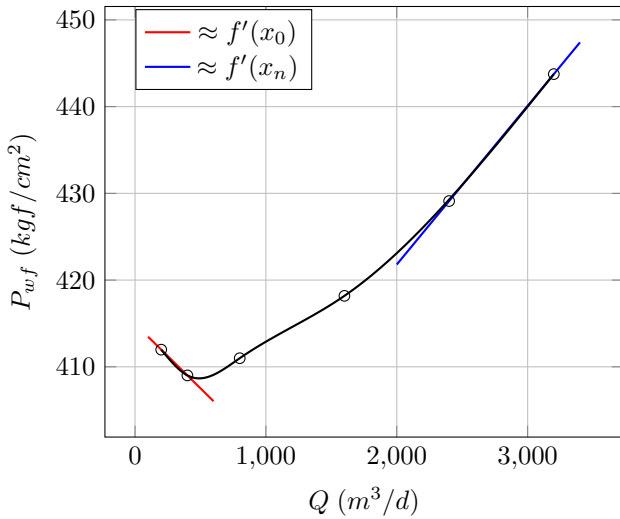


Figura 3: Aproximação das derivadas nos extremos do domínio.

Como as derivadas foram estimadas utilizando os dois primeiros e os dois últimos pontos de (LIQ, BHP), avaliou-se que não faria sentido avaliar pontos fora do domínio inicial. Desta forma, foram realizados 4 testes para cada combinação dos demais parâmetros, excluindo apenas pontos internos.

Os parâmetros  $\beta$  foram utilizados para buscar uma melhor estimativa destas derivadas. Foram feitas sensibilidades do erro médio e do desvio padrão do erro em função de  $\beta_0$  e  $\beta_n$ .

As Figuras 4 e 5 mostram que, como esperado, as estimativas mais afetadas pelo valor de  $\beta_0$  são os pontos LIQ=400 e 800. Existe uma tendência de redução do erro médio com valores baixos de  $\beta_0$ . Já o gráfico do desvio padrão dos erros mostra que existe uma região ótima aproximadamente entre 1.4 e 2.4. Não existe um valor único

que minimiza o desvio padrão dos erros de cada valor de LIQ. Optou-se por usar um valor intermediário:  $\beta_0 = 1.8$ . Com este valor os desvios padrão de LIQ=400 e 800 ficam aproximadamente iguais ou melhores que os valores com interpolação linear ou com splines naturais.

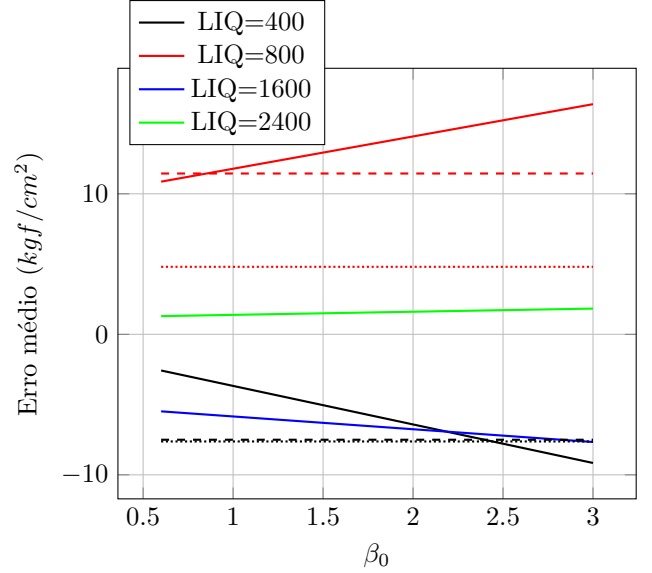


Figura 4: Média dos erros de BHP com splines fixas em função do valor de  $\beta_0$ . Resultados da interpolação linear em pontilhado e splines naturais em tracejado.

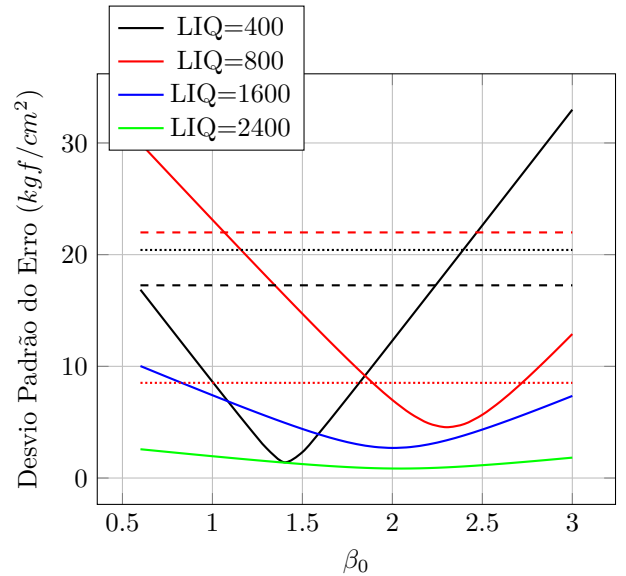


Figura 5: Desvio padrão dos erros de BHP com splines fixas em função do valor de  $\beta_0$ . Resultados da interpolação linear em pontilhado e splines naturais em tracejado.

Como os pontos conhecidos se aproximam de uma reta para valores altos de LIQ, decidiu-se por utilizar  $\beta_n = 1$ . Para os valores baixos de vazão a variação da derivada é mais brusca, de modo que foram testados três valores de  $\beta_0$ : 1, 2 e 3. Os melhores resultados foram com  $\beta_0 = 2$

Tabela 1: Parâmetros da tabela de VFP utilizada nas comparações. O parâmetro principal (BHP) é em  $kgf/cm^2$ .

Variável	Descrição	Unidade	Valores	Mínimo	Máximo
LIQ	Vazão de líquido	$m^3/d$	6	200	3200
GLR	Razão gás líquido	$m^3/m^3$	8	30	240
WCUT	Corte de água	$m^3/m^3$	6	0	0.9
LFG	Vazão de <i>gas-lift</i>	$m^3/d$	3	0	20 000
WHP	Pressão de cabeça	$kgf/cm^2$	3	10	30

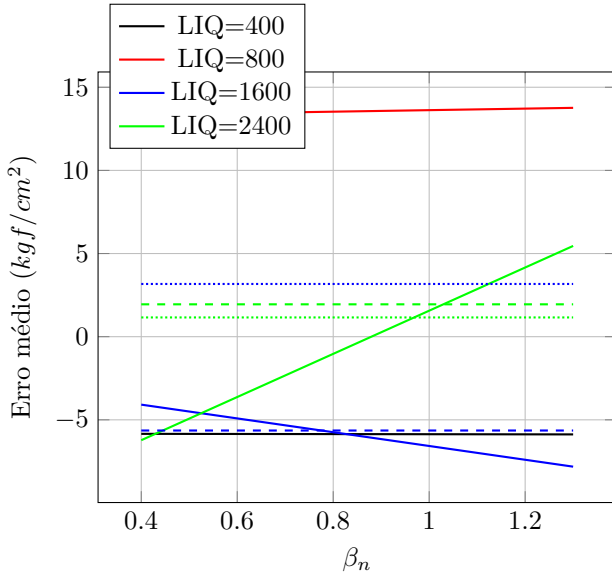


Figura 6: Média dos erros de BHP com splines fixas em função do valor de  $\beta_n$ . Resultados da interpolação linear em pontilhado e splines naturais em tracejado.

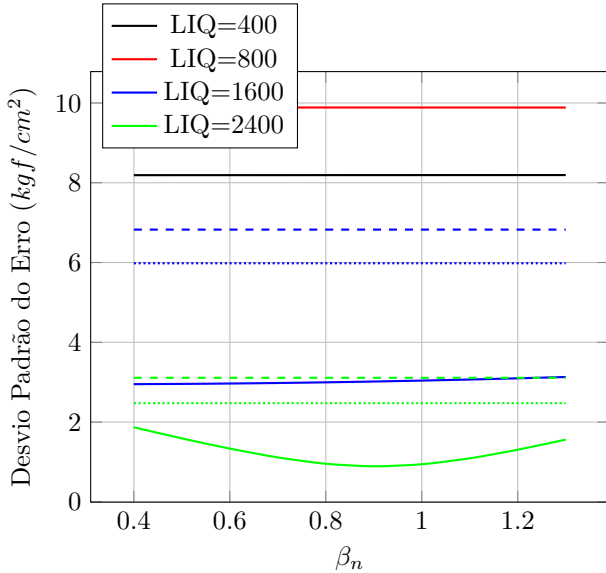


Figura 7: Desvio padrão dos erros de BHP com splines fixas em função do valor de  $\beta_n$ . Resultados da interpolação linear em pontilhado e splines naturais em tracejado.

(Figura 10). O uso de splines fixas melhorou as estimativas dos pontos excluídos tanto na região de baixas vazões como

de alta vazões.

As Figuras 8 e 9 mostram uma estatística simplificada dos erros das funções interpoladoras no ponto que foi excluído, para as interpolações com splines e linear, respectivamente. Algumas conclusões podem ser tiradas destes gráficos:

- Não há significativa vantagem em utilizar interpolação com splines naturais em comparação com a interpolação linear. Na faixa intermediária (LIQ=800), a interpolação linear teve resultados melhores que as splines naturais.
- Os maiores erros estão associados a quando as funções interpoladoras são utilizadas para extrapolar valores baixos de vazão (LIQ=200).
- Para valores altos de vazão (LIQ=1600 e LIQ=2400) as funções interpoladoras tem um menor erro associado, indicando que esta região tem uma forma mais próxima de uma reta. Até mesmo quando as funções extrapolam (LIQ=3200), os erros são relativamente baixos.
- A maior dificuldade de interpolação é na região de vazões baixas (LIQ=400), notadamente associado à grande variação na derivada dos pontos, como no exemplo da Figura 3.

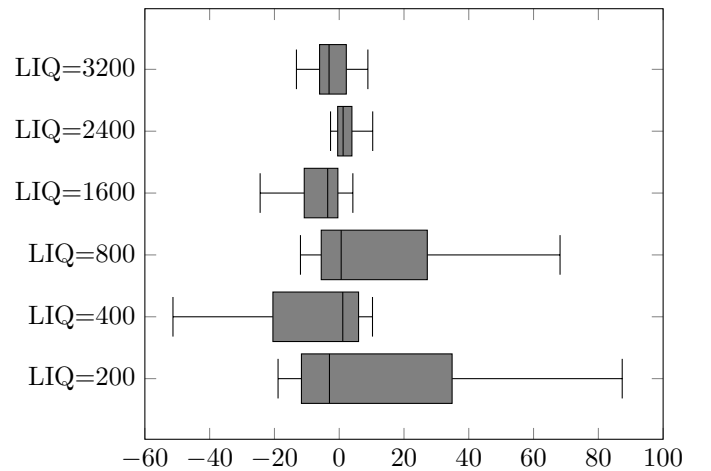


Figura 8: Erros na estimativa de BHP com splines naturais, em função do valor de LIQ excluído.

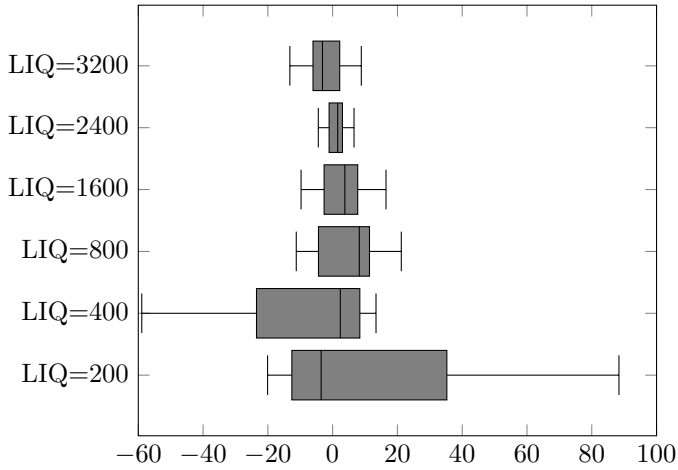


Figura 9: Erros na estimativa de BHP com interpolação linear, em função do valor de LIQ excluído.

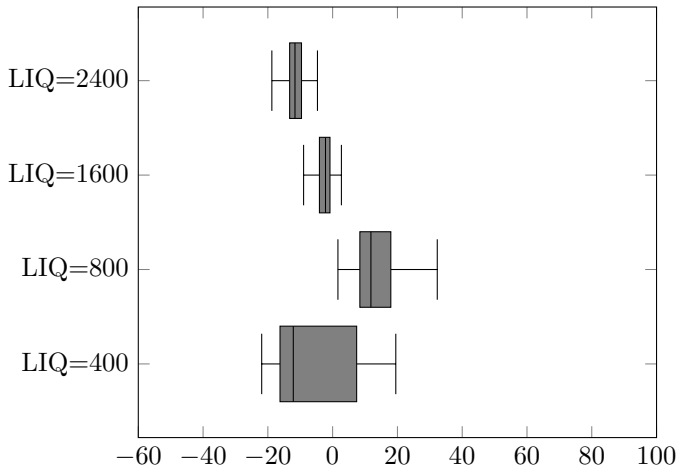


Figura 10: Erros na estimativa de BHP com splines fixas, em função do valor de LIQ excluído.

O código foi implementado em C e em um único arquivo. Pode ser encontrado em <https://github.com/TiagoCAAmorim/numerical-methods>.

#### 4. Conclusão

O desempenho de splines naturais para interpolar valores de pressão de fundo a partir de uma tabela de VFP foi, em geral, pior que o da interpolação linear. Ambos métodos apresentaram dificuldade em estimar corretamente valores na região de baixas vazões. Uma primeira tentativa de uso de splines fixas se mostrou promissora. Foram utilizados os próprios pontos da tabela de VFP original para estimar as derivadas nos extremos da função, gerando resultados superiores aos da interpolação linear ou com splines naturais.

#### Referências

- [1] C. M. G. L. (CMG), Cmg imex user's manual, CMG Calgary, Canada, 2022.
- [2] E. U. M. SCHLUMBERGER, Technical description, Schlumberger Ltd (2009) 519–538.
- [3] T. C. A. Amorim, Avaliação do uso de splines para interpolar tabelas de fluxo vertical multifásico, Relatório número 4 da disciplina IM253: Métodos Numéricos para Fenômenos de Transporte (09 2023).
- [4] R. L. Burden, J. D. Faires, A. M. Burden, Análise numérica, Cengage Learning, 2016.
- [5] C. Maschio, A. Santos, M. Correia, D. J. Schiozer, Case study for field history matching and uncertainties reduction based on unisim-ii (2018).