Aplicação do Método de Newton-Raphson para Resolver o Cálculo Inverso do Método da Mínima Curvatura*

Tiago C. A. Amorim[2]

[a]*Petrobras, Av. Henrique Valadares, 28, Rio de Janeiro, 20231-030, RJ, Brasil*

Abstract

Keywords: Método da Mínima Curvatura, Método de Newton-Raphson

---

1. Introdução

O Método da Mínima Curvatura possibilita o cálculo de cooordenadas cartesianas (ΔN, ΔE, ΔV) a partir de parâmetros perfuração (ΔS, θ, ϕ) assumindo que a trajetória de um poço direcional pode ser descrita como uma série de arcos [1]. Não existe formulação direta para o cálculo inverso, isto é, dos parâmetros de perfuração em função das coordenadas cartesianas.

No primeiro relatório desta série [2] foi apresentada uma proposta de metodologia para cálculo dos parâmetros de perfuração a partir das coordenadas cartesianas de pontos ao longo da geometria do poço. O algoritmo proposto tem formulação implícita e foi organizado como um problema do tipo $g(x) = x$. O problema foi resolvido com o Método da Bissecção, encontrando bons resultados.

Neste segundo relatório é aplicado o método de Newton-Raphson de para resolver o mesmo problema.

2. Metodologia

2.1. Derivada do Algoritmo Proposto

A seguir são apresentadas as fórmulas que foram do algoritmo proposto para cálculo de parâmetros de perfuração em função de coordenadas cartesianas [2]. O algoritmo assume que para calcular os parâmtros de perfuração entre dois pontos quaisquer são conhecidos os parâmetros de perfuração do ponto inicial[1] (θ_1, ϕ_1) e as distâncias cartesianas entre os pontos (ΔN,ΔE, ΔV). O objetivo é calcular θ_2, ϕ_2 e ΔS:

---

*Relatório número 2 como parte dos requisitos da disciplina IM253: Métodos Numéricos para Fenômenos de Transporte.

**Atualmente cursando doutorado no Departamento de Engenharia de Petróleo da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP (Campinas/SP, Brasil).

Email address: `t100675@dac.unicamp.br` (Tiago C. A. Amorim)

[1]Para o primeiro ponto da trajetória é assumido um poço na vertical: $\theta = 0$, $\phi = 0$.

$$\cos\theta_2 = 2\frac{\Delta V}{\Delta S f(\alpha)} - \cos\theta_1 \tag{1}$$

$$\sin\phi_2 = \frac{-\Delta N \Delta\Psi}{\Delta H^2}\left(\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\right) + \frac{\Delta E}{\Delta H^2}\sqrt{\Delta H^2 - \Delta\Psi^2\left(\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\right)^2} \tag{2}$$

$$\cos\phi_2 = \frac{\Delta E \Delta\Psi}{\Delta H^2}\left(\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\right) + \frac{\Delta N}{\Delta H^2}\sqrt{\frac{1}{\Delta H^2} - \Delta\Psi^2\left(\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\right)^2} \tag{3}$$

onde

$$\Delta\Psi = \Delta N \sin\phi_1 - \Delta E \cos\phi_1$$
$$\Delta H^2 = \Delta N^2 + \Delta E^2$$

$$\Delta S f(\alpha) = 2\sqrt{\frac{\Delta N^2 + \Delta E^2 + \Delta V^2}{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{4}$$

onde

$$A = \sin\theta_1 \cos\phi_1 + \sin\theta_2 \cos\phi_2$$
$$B = \sin\theta_1 \sin\phi_1 + \sin\theta_2 \sin\phi_2$$
$$C = \cos\theta_1 + \cos\theta_2$$

Com as equações propostas é possível construir uma função do tipo $g(x) = x$:

1. Assumir um valor inicial de $\Delta S f(\alpha)$.
2. Calcular $\cos\theta_2$ com a equação 1.
3. Calcular $\sin\phi_2$ com a equação 2.
4. Calcular $\cos\phi_2$ com a equação 3.
5. Calcular $\Delta S f(\alpha)$ com a equação 4.

Em [2] são discutidos detalhes adicionais sobre a implementação deste algoritmo.

Para utilizar o método de Newton-Raphson para resolver o problema proposto, será preciso encontrar a derivada da função com relação a x de $f(x) = g(x) - x$. Para facilitar a leitura, $\Delta S f(\alpha)$ é substituído por x na equação 4, e então é definida a função $f(x)$[2]:

$$f(x) = 2\sqrt{\frac{\Delta N^2 + \Delta E^2 + \Delta V^2}{A(x)^2 + B(x)^2 + C(x)^2}} - x \tag{5}$$

[2] Os termos que dependem de ΔS serão explicitados usando (x).

onde

$$A(x) = \sin\theta_1 \cos\phi_1 + \sin\theta_2(x)\cos\phi_2(x)$$
$$B(x) = \sin\theta_1 \sin\phi_1 + \sin\theta_2(x)\sin\phi_2(x)$$
$$C(x) = \cos\theta_1 + \cos\theta_2(x)$$

Derivando $f(x)$:

$$f(x)' = -\frac{2}{\Delta S^2}\left(\frac{\Delta N^2 + \Delta E^2 + \Delta V^2}{A(x)^2 + B(x)^2 + C(x)^2}\right)^{3/2} [A(x)A(x)' + B(x)B(x)' + C(x)C(x)'] - 1 \quad (6)$$

onde

$$A(x)' = \sin\theta_2(x)'\cos\phi_2(x) + \sin\theta_2(x)\cos\phi_2(x)'$$
$$B(x)' = \sin\theta_2(x)'\sin\phi_2(x) + \sin\theta_2(x)\sin\phi_2(x)'$$
$$C(x)' = \cos\theta_2(x)'$$

Os demais termos das equações são obtidos derivando as equações 1, 2 e 3:

$$\cos\theta_2(x)' = -\frac{2\Delta V}{x^2} \quad (7)$$

$$\sin\phi_2(x)' = \frac{\frac{\Delta\Psi \sin\theta_1}{\sin\theta_2(x)}}{\Delta H^2}\left(\Delta N + \Delta E \frac{\frac{\Delta\Psi \sin\theta_1}{\sin\theta_2(x)}}{\sqrt{\Delta H^2 - \left(\frac{\Delta\Psi \sin\theta_1}{\sin\theta_2(x)}\right)^2}}\right)\frac{\sin\theta_2(x)'}{\sin\theta_2(x)} \quad (8)$$

$$\cos\phi_2(x)' = \frac{\frac{\Delta\Psi \sin\theta_1}{\sin\theta_2(x)}}{\Delta H^2}\left(\Delta E - \Delta N \frac{\frac{\Delta\Psi \sin\theta_1}{\sin\theta_2(x)}}{\sqrt{\Delta H^2 - \left(\frac{\Delta\Psi \sin\theta_1}{\sin\theta_2(x)}\right)^2}}\right)\frac{\sin\theta_2(x)'}{\sin\theta_2(x)} \quad (9)$$

onde $\Delta\Psi$ e ΔH^2 seguem as mesmas definições das equações 2 e 3.
A definição de $\sin\theta_2(x)'$ pode ser desenvolvida a partir de $\cos^2\theta_2(x) + \sin^2\theta_2(x) = 1$:

$$\sin\theta_2(x)' = -\frac{\frac{2\Delta V}{x}(\cos\theta_1 - \frac{2\Delta V}{x})}{x\sqrt{1 - \left(\cos\theta_1 - \frac{2\Delta V}{x}\right)^2}} \quad (10)$$

2.2. Método de Newton-Raphson

O código desenvolvido foi baseado no pseudo-código de [3]. O Método de Newton-Raphson faz uso da derivada da função de interesse. O método precisa apenas de um ponto inicial, e converge mais rápido que o Método da Bissecção, mas não tem garantia de encontrar uma raiz.

De modo simplificado o Método de Newton-Raphson pode ser descrito como:

1. Definir x_0.
2. Iniciar contagem de iterações com $i = 0$.
3. Calcular $f(x_i)$ e $f(x_i)'$.
4. Calcular $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(x_i)'}$.
5. Incrementar a contagem de iterações: $i = i + 1$.
6. Se não atingiu critério de convergência, retornar para passo 3.
7. Retornar x_{i+1}..

Foram adicionados critérios adicionais ao algoritmo para controlar o processo iterativo:

- Foram implementados dois métodos de cálculo do critério de convergência[3]: *Direto* e *Relativo*.

- É feito um término prematuro do processo iterativo caso algum $|f(x)| < \epsilon$. O valor padrão de ϵ é 10^{-7} (variável `epsilon` no código). Este teste também é feito antes de entrar no *loop*.

- A cada iteração é verificado se a derivada da função está muito próxima de zero: $|f(x)'| < \epsilon$. Em caso positivo é gerada uma mensagem e é encerrado o *loop*.

- Como o método não garante convergência, ao longo das iterações é guardado o melhor resultado (x tal que $|f(x)|$ seja mínimo). Este é o resultado que é retornado.

3. Resultados

Para facilitar a análise da qualidade do código desenvolvido, foram criadas funções que realizam diversos testes onde a resposta exata é conhecida:

tests_newton_raphson() Testa o Método de Newton-Raphson em diferentes funções: linear, quadrática, exponencial e trigonométrica. Também foram apicados casos específicos para o algoritmo tratar: raiz no ponto inicial, ponto inicial muito próximo da raiz, ponto inicial em um ponto de mínimo da função (derivada nula), uso de critério de convergência relativo, função com derivada nula na raiz, função com vários mínimos e máximos locais.

[3] Ver descrição em [2].

tests_minimum_curvature() Testa as funções implementadas para cálculo de coordenadas cartesianas em função de parâmetros de perfuração (cálculo direto), e de parâmetros de perfuração em função de coordenadas cartesianas (cálculo iterativo).

A implementação do Método de Newton-Raphson teve uma alteração adicional em função dos resultados dos testes realizados. Nas fórmulas do problema proposto fica evidente que a variável principal ($\Delta Sf(\alpha)$) não pode ter um valor qualquer. Para evitar simplesmente parar o processo iterativo quando o próximo ponto é menor que o limite inferior, foi implementada uma verificação adicional no método: caso o novo valor de x estiver fora dos limites pré-estabelecidos, usará o valor do limite que foi violado. Desta forma é dada uma *chance* para o processo iterativo conseguir convergir para uma resposta melhor. Para os cálculos de parâmetros de perfuração foi utilizado um limite inferior de $\Delta Sf(\alpha)$ igual ao discutido em [2].

Como esperado, o Método de Newton-Raphson se mostrou mais rápido que o Método da Bissecção (Tabela 1). O único teste em que o Método da Bissecção teve uma convergência melhor foi na função exponencial: $\exp^{x^2-4} - 1$. Enquanto o Método da Bisseção tem convergência linear, o Método de Newton-Raphson teve convergência aproximadamente quadrática ().

Tabela 1: Comparação entre o número de iterações necessários para um mesmo critério de convergência usando os Métodos da Bissecção e Newton-Raphson.

Função	Raiz	Bissecção			Newton-Raphson	
		x_a	x_b	Iter.	x_0	Iter.
Linear	0.3	0.	2.	11	0.	1
Quadrática	-0.1	-0.25	1.	11	0.25	4
Exponencial	2.	0.	10.	14	5.	25
Trigonométrica	$3\pi/4$	0.	5.	13	3.	3
1/4 círculo horizontal	20	14.1421	120.417	17	14.4743	1
Seção 2 do poço em S	131.652	130.526	1111.4	20	133.592	11
Poço 3D	10.3144	9.84918	83.8634	17	10.0805	4

Na aplicação do Método de Newton com o algoritmo desenvolvido para cálculo de parâmetros de perfuração os resultados foram muito bons. Nenhum dos testes teve problemas de convergência, e convergiram com um número de iterações menor que o do Método da Bissecção ().

Para algumas funções o Método de Newton-Raphson se mostrou instável, ficando muito dependente do ponto inicial para conseguir convergir. A função $\cos x + \sin x$ tem muitas raízes, e o resultado do Método de Newton-Raphson se mostrou muito dependente do ponto inicial. Para conseguir encontrar a raiz de uma determinada região foi preciso definir um ponto inicial *bem próximo* da raiz. Já a função $3x + x^2 \sin^2 \frac{x\pi}{10}$ mostrou muita instabilidade, em muitos casos não conseguindo convergir.

Para o problema proposto foram testados alguns valores distintos de ponto inicial (Tabela).

4. Conclusão

O algoritmo proposto para o cálculo de parâmetros de perfuração em função das coordenadas cartesianas de pontos ao longo do se mostrou eficaz. Foram feitos ajustes ao código implementado de forma a evitar o uso de funções trigonométricas ao longo do processo iterativo. O Método da Bisseção se mostrou adequado para uso com o algoritmo proposto. As funções propostas não são válidas para quaisquer valores de entrada, e a delimitação de uma região de busca foi importante para garantir a convergência do problema.

Referências

[1] A Compendium of Directional Calculations Based on the Minimum Curvature Method, Vol. All Days of SPE Annual Technical Conference and Exhibition. `arXiv:https://onepetro.org/SPEATCE/proceedings-pdf/03ATCE/All-03ATCE/SPE-84246-MS/2895686/spe-84246-ms.pdf`, `doi:10.2118/84246-MS`.
URL `https://doi.org/10.2118/84246-MS`

[2] T. C. A. Amorim, Proposta de cálculo de parâmetros de perfuração de poços de petróleo a partir de coordenadas espaciais com o método da bissecção, Relatório número 1 da disciplina IM253: Métodos Numéricos para Fenômenos de Transporte (08 2023).

[3] R. L. Burden, J. D. Faires, A. M. Burden, Análise numérica, Cengage Learning, 2016.

Apêndice A. Código em C

O código de ambos métodos foi implementado em um único arquivo. O código é apresentado em duas partes neste documento para facilitar a leitura. O código pode ser encontrado em https://github.com/TiagoCAAmorim/numerical-methods.

Apêndice A.1. Método de Newton-Raphson

Apêndice A.2. Método da Mínima Curvatura