Uso de Métodos de Runge-Kutta para Resolver o Aquífero Analítico de Fetkovich*

Tiago C. A. Amorim[2]

[a] *Petrobras, Av. Henrique Valadares, 28, Rio de Janeiro, 20231-030, RJ, Brasil*

Abstract

O Método de Fetkovich para prever o comportamento de um aquífero analítico ainda é útil mais de 50 anos após o seu desenvolvimento. Em avaliações anteriores, alguns métodos numérico conseguiram resultados de equivalente qualidade para um problema simples. Ao comparar o Método de Fetkovich com o Método de Runge-Kutta de quarta ordem para um problema de teste de produção, o Método de Fetkovich mostrou-se muito superior.

Keywords: Método de Fetkovich, Métodos de Runge-Kutta, Fluxo em Meio Poroso

1. Introdução

Este trabalho se propõe a avaliar a adequação dos métodos de Runge-Kutta para resolver o modelo de aquífero analítico proposto por Fetkovich [1]. Em avaliações anteriores [2][3][4] foram testados diferentes métodos numéricos de resolução de equações diferencias. Nestas avaliações foi aplicada a forma *original* dos métodos, ou seja, que resolve apenas uma equação diferencial de primeira ordem ($\frac{dy}{dt} = f(t, y)$). Esta limitação levou a uma restrição nos tipos de problemas que podem ser resolvidos.

Neste relatório será avaliada a forma dos métodos de Runge-Kutta que resolvem sistemas de equações lineares. Com esta modificação a gama de problemas que podem ser resolvidas aumenta substancialmente. Foi avaliado um problema mais próximo de uma aplicação real. Foi modelado o problema de um poço que produz óleo durante certo tempo a uma vazão constante e que posteriormente é fechado, o que representa um teste de produção.

2. Metodologia

2.1. Métodos de Runge-Kutta

Os métodos de Runge-Kutta para resolver numericamente sistemas de equações diferenciais tem a mesma forma de suas respectivas versões para resolver uma equação diferencial. A diferença para o problema de resolver um sistema de equações diferenciais é que os parâmetros k_i serão resolvidos para cada equação [5].

Dado um sistema de m equações diferenciais na forma:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= f_1(t, \overrightarrow{y}) \\
\frac{dy_2}{dt} &= f_2(t, \overrightarrow{y}) \\
&\vdots \\
\frac{dy_m}{dt} &= f_m(t, \overrightarrow{y})
\end{aligned} \tag{2.1}$$

com

$$\overrightarrow{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$$

e condições iniciais

$$y_1(t_0) = \alpha_1,\ y_1(t_0) = \alpha_2,\ \dots,\ y_m(t_0) = \alpha_m$$

Um Método de Runge-Kutta com r parâmetros k, para resolver 2.1 com $w_{j,i} \approx y_i(t_j)$ em n passos de tempo, tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
w_{0,i} &= \alpha_i \\
k_{1,i} &= hf_j\left(t_j, \overrightarrow{w}_j\right) \\
k_{2,i} &= hf_j\left(t_j + \beta_2 h, \overrightarrow{w}_j + \gamma_{2,1}\overrightarrow{k}_1\right) \\
k_{3,i} &= hf_j\left(t_j + \beta_3 h, \overrightarrow{w}_j + \gamma_{3,1}\overrightarrow{k}_1 + \gamma_{3,2}\overrightarrow{k}_2\right) \\
&\vdots \\
k_{r,i} &= hf_j\left(t_j + \beta_r h, \overrightarrow{w}_j + \sum_{s=1}^{r-1}\gamma_{r,s}\overrightarrow{k}_s\right) \\
\overrightarrow{w}_{j+1} &= \overrightarrow{w}_j + \sum_{s=1}^{r}\lambda_s\overrightarrow{k}_s
\end{aligned} \tag{2.2}$$

*Relatório número 9 como parte dos requisitos da disciplina IM253: Métodos Numéricos para Fenômenos de Transporte.

**Atualmente cursando doutorado no Departamento de Engenharia de Petróleo da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP (Campinas/SP, Brasil).

Email address: t100675@dac.unicamp.br (Tiago C. A. Amorim)

com

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{w}_j &= \{w_{j,1}, w_{j,2}, \ldots, w_{j,m}\} \\
\overrightarrow{k}_s &= \{k_{s,1}, k_{s,2}, \ldots, k_{s,m}\} \\
h &= \frac{t_n - t_0}{n} \\
i &= 1, \ldots, m \\
j &= 0, 1, \ldots, n-1
\end{aligned}
$$

Os parâmetros β, γ e λ dependem da escolha da versão do método de Runge-Kutta a ser utilizado. Usualmente são apresentados de forma tabular:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
\beta_2 & \gamma_{2,1} & & & & \\
\beta_3 & \gamma_{3,1} & \gamma_{3,2} & & & \\
\vdots & \vdots & & \ddots & & \\
\beta_r & \gamma_{r,1} & \gamma_{r,2} & \cdots & \gamma_{r,r-1} & \\
\hline
 & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{r-1} & \lambda_r
\end{array}
$$

Foram implementados métodos de Runge-Kutta de diferentes ordens (com as respectivas tabelas de parâmetros):

- Runge-Kutta de 1^a ordem: Método de Euler.

$$
\begin{array}{c|c}
0 & \\
\hline
 & 1
\end{array}
$$

- Runge-Kutta de 2^a ordem: Método do Ponto Médio.

$$
\begin{array}{c|cc}
0 & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\
\hline
 & 0 & 1
\end{array}
$$

- Runge-Kutta de 3^a ordem: Método de Heun.

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\
\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \\
\hline
 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4}
\end{array}
$$

- Runge-Kutta de 4^a ordem: Versão *clássica.*

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

- Runge-Kutta de 5^a ordem: Primeira fórmula do Método de Runge-Kutta-Fehlberg.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & & & \\
\frac{3}{8} & \frac{3}{32} & \frac{9}{32} & & & & \\
\frac{12}{13} & \frac{1932}{2197} & -\frac{7200}{2197} & \frac{7296}{2197} & & & \\
1 & \frac{439}{216} & -8 & \frac{3680}{513} & -\frac{845}{4104} & & \\
\frac{1}{2} & -\frac{8}{27} & 2 & -\frac{3544}{2565} & \frac{1859}{4104} & -\frac{11}{40} & \\
\hline
 & \frac{16}{135} & 0 & \frac{6656}{12825} & \frac{28561}{56430} & -\frac{9}{50} & \frac{2}{55}
\end{array}
$$

2.2. Aquífero de Fetkovich como Sistema de Equações Diferenciais

Uma maior discussão sobre o modelo de aquífero proposto por Fetkovich e o método de resolução que leva seu nome é apresentada em [2]. De forma resumida, o comportamento do modelo de aquífero tem a seguinte forma:

$$
\frac{d^2 W_e}{dt^2} = -\frac{J p_{i,aq}}{W_{e,max}} \frac{dW_e}{dt} - J \frac{dp_{res}}{dt} \tag{2.3}
$$

Definindo $\frac{dW_e}{dt}$ como $y_1(t)$ e W_e como $y_2(t)$, podemos reescrever 2.3 como um sistema de duas equações diferenciais:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= -\frac{J p_{i,aq}}{W_{e,max}} y_1 - J \frac{dp_{res}}{dt} \\
\frac{dy_2}{dt} &= y_1
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

com condições iniciais:

$$
\begin{aligned}
y_1(t_0) &= J(p_{i,aq} - p_{i,res}) \\
y_2(t_0) &= 0
\end{aligned}
$$

2.3. Modelo de Reservatório Proposto

O termo $\frac{dp_{res}}{dt}$ será função do modelo de reservatório proposto. Para um reservatório em que o equilíbrio hidrostático é alcançado *instantaneamente*[1] é possível demonstrar que[2]:

$$
p_{res} = \frac{NBo_b(1 + c_{o,b} p_b) + W_{res} - Pv_i(1 - c_r p_{i,res})}{NBo_b c_{o,b} + Pv_i c_r} \tag{2.5}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
N &= N_i - Np \\
W_{res} &= W_{i,res} + W_e
\end{aligned}
$$

Derivando 2.5 no tempo:

[1] Este comportamento é equivalente a um reservatório com altas permeabilidades, bem conectado e com óleo pouco compressível.

[2] Maiores detalhes em [2]

$$\frac{dp_{res}}{dt} = \frac{\frac{dNp}{dt} Bo_b[c_{o,b}(p_{res} - p_b) - 1] + \frac{dW_e}{dt}}{(N_i - Np)Bo_b c_{o,b} + Pv_i c_r} \quad (2.6)$$

Estas equações são inseridas em 2.4 para resolver o problema proposto. No caso de um teste de produção, em que a vazão de óleo ($\frac{dNp}{dt}$) e a produção acumulada (Np) são conhecidas, serão necessárias apenas duas equações diferenciais. Para um problema em que a vazão de óleo é função da pressão no reservatório, duas novas equações diferenciais são adicionadas, governando $\frac{dNp}{dt}$ e Np.

3. Implementação

Todo o código utilizado nesta análise foi desenvolvido em C++. Foram criados objetos próprios para cada elemento integrante do problema proposto:

IVPSystem Classe que define um problema de valor inicial na forma 2.1.

- O usuário precisa especificar $f_i(t, \overrightarrow{y})$, a (tempo inicial), b (tempo final), n (número de passos de tempo) e $y_i(a)$ (valores iniciais).
- O usuário também pode especificar as soluções exatas ($y_i = f_i(t)$), para calcular o erro de aproximação.

Fetkovich Classe que resolve o comportamento de um aquífero como proposto por Fetkovich.

- O usuário precisa definir as características do aquífero e prover uma função que retorne a pressão na interface do aquífero com o reservatório. Esta função depende do tempo e do influxo acumulado de água do aquífero para o reservatório (W_e).
- Uma modificação foi feita na Implementação do Método de Fetkovich com relação aos testes apresentados nos relatórios anteriores.
  - Como existe um termo implícito a ser resolvido no método, anteriormente foi admitido realizar um cálculo com até 20 iterações.
  - Aplicando a mesma filosofia dos métodos preditor-corretor, este limite agora é de apenas uma iteração. E nos testes realizados os resultados foram muito parecidos.
  - Desta forma o Método de Fetkovich agora tem apenas duas avaliações da função de pressão a cada passo de tempo.

4. Resultados

Nesta avaliação o foco foi no método de Runge-Kutta de quarta ordem. Foram utilizados os mesmos três problemas de valor inicial dos relatórios anteriores. As aproximações de $y(t)$ foram, como esperado, iguais às da aplicação do método de Runge-Kutta com uma equação diferencial. A diferença foi a estimativa da integral de $y(t)$. Anteriormente este cálculo foi feito com os métodos de Simpson e do Trapézio compostos[3]. Agora este cálculo foi inserido no método de Runge-Kutta.

1. $y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0.5$
2. $y' = -2y + 3e^t, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 3.0$
3. $y' = 4cos(t) - 8sin(t) + 2y, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 3.0$

Os resultados exatos de cada problema são, respectivamente:

1. $y = (t+1)^2 - 0.5e^t$
2. $y = 2e^{-2t} + e^t$
3. $y = 4sin(t) + 3e^{2t}$

Observa-se nas figuras 1, 2 e 3 que os resultados da integral de $y(t)$ incluída nos cálculos de Runge-Kutta tem um comportamento mais suave, sem as oscilações da integração numérico com Simpson e Trapézio composto.

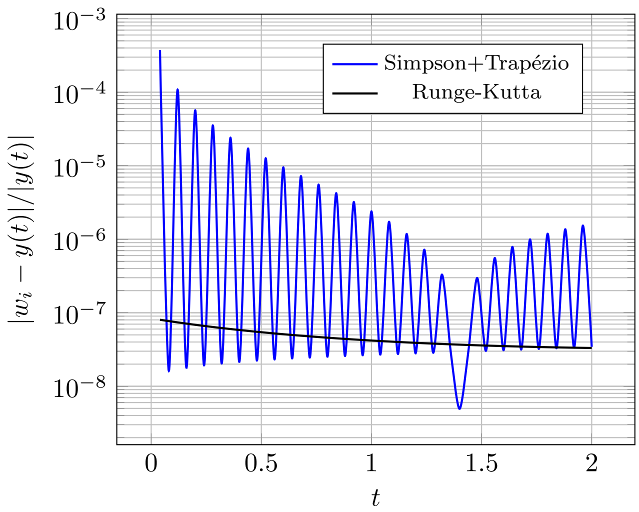

Figura 1: Erro da aproximação da acumulada de $y(t)$ com o método de Runge-Kutta de quarta ordem e por integração numérica com Simpson e Trapézio Composto, do PVI número 1.

O problema proposto a ser resolvido pelo Método de Fetkovich e com o Método de Runge-Kutta de quarta ordem é o de um aquífero inicialmente em equilíbrio com o reservatório ($p_{i,aq} = p_{i,res}$). É feito um teste de produção de 30 dias, com o poço produzindo $500m^3/d$. Em seguida o poço é fechado por um longo tempo. Este problema é numericamente mais complicado que o avaliado nos relatórios anteriores, pois há uma mudança brusca de comportamento no momento em que o poço fecha. Não há solução analítica.

Os parâmetros do aquífero e do reservatório seguem os mesmos valores apresentados em [2]. A exceção é $p_{i,aq}$,

[3] O expediente utilizado para calcular esta integral numérica está descrito em [3]

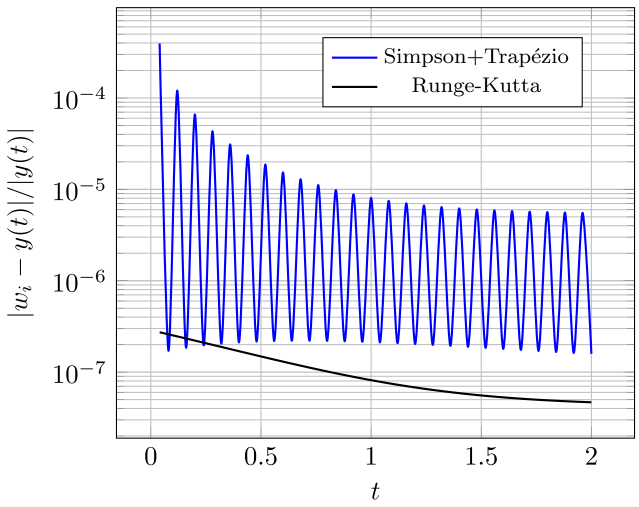

Figura 2: Erro da aproximação da acumulada de $y(t)$ com o método de Runge-Kutta de quarta ordem e por integração numérica com Simpson e Trapézio Composto, do PVI número 2.

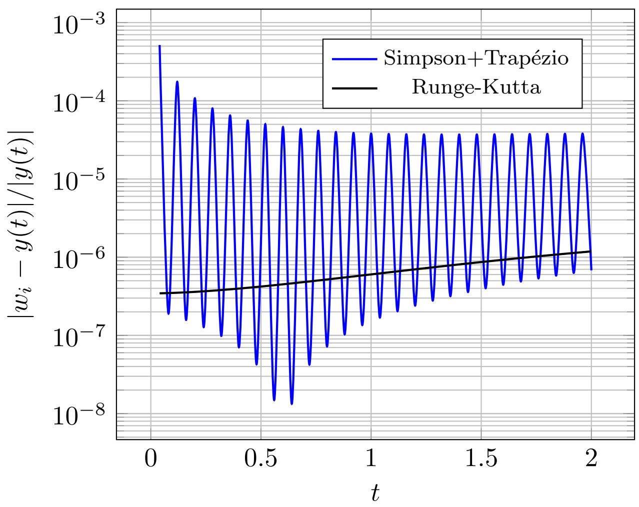

Figura 3: Erro da aproximação da acumulada de $y(t)$ com o método de Runge-Kutta de quarta ordem e por integração numérica com Simpson e Trapézio Composto, do PVI número 3.

que, como comentado acima, agora tem o mesmo valor que a pressão inicial do reservatório.

Os testes foram realizados de modo que o número de avaliações da função de pressão fosse a mesma entre os métodos, ou seja, o Método de Fetkovich utilizou passos de tempo duas vezes menores que o de Runge-Kutta. Observa-se nas figuras 4 e 5 que as respostas foram próximas, mas diferentes. A maior diferença aparece na estimativa de volume de água que passou do aquífero para o reservatório.

Para avaliar a qualidade das respostas do Método de Runge-Kutta de quarta ordem para o problema proposto, foi feita uma estimativa com um Método de Runge-Kutta de quinta ordem com 100 vezes mais passos de tempo. A figura 6 compara o erro de aproximação real (comparando com a resposta exata) com o erro de aproximação

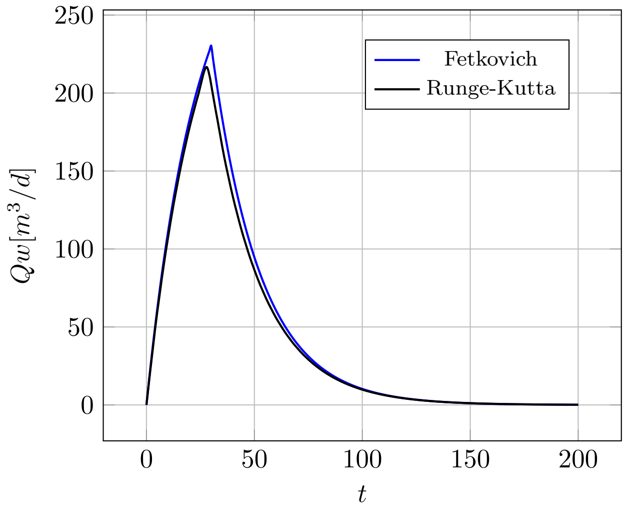

Figura 4: Vazão de água com o Método de Fetkovich e com o Método de Runge-Kutta de quarta ordem.

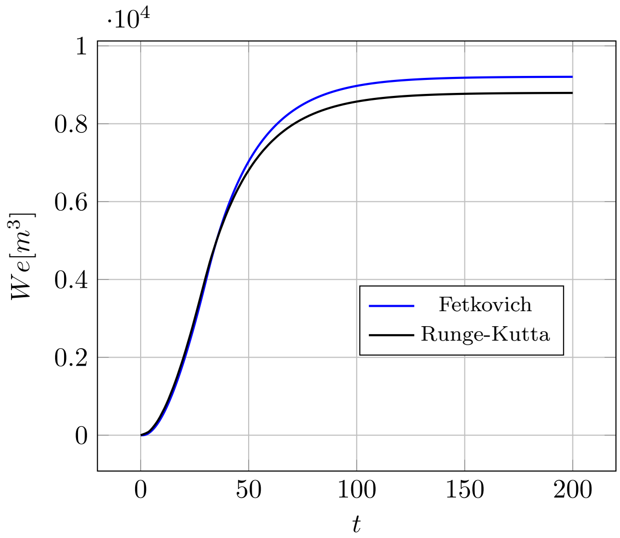

Figura 5: Acumulada de água com o Método de Fetkovich e com o Método de Runge-Kutta de quarta ordem.

estimado (comparando com a resposta do Runge-Kutta de quinta ordem). Observa-se que a estimativa de erro está na mesma *ordem de grandeza* do erro real.

Ao comparar as resposta de Fetkovich e Runge-Kutta de quarta ordem com os resultados de aplicar o método de Runge-Kutta de quinta ordem com um maior número de passos de tempo (figura 7) fica claro que o Método de Fetkovich tem resultados melhores.

O código foi implementado em C++ e em um único arquivo. Pode ser encontrado em https://github.com/TiagoCAAmorim/numerical-methods.

5. Conclusão

Foi possível testar problemas mais desafiadores ao passar de métodos de aproximação numérica de uma equação

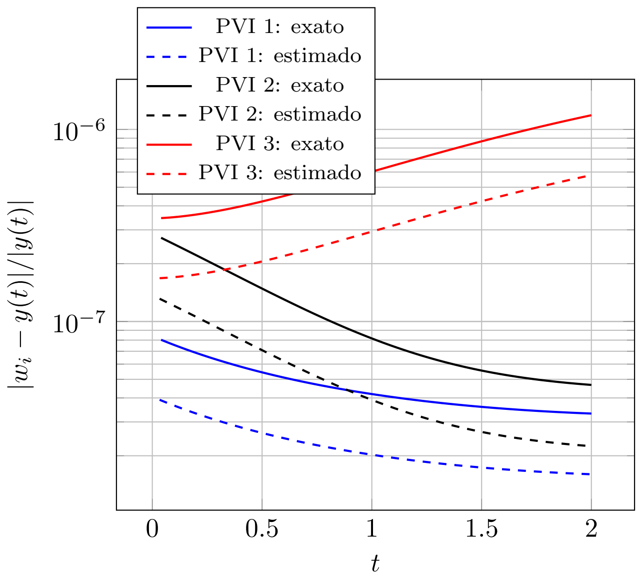

Figura 6: Erro real e estimado da aproximação da acumulada de $y(t)$ com o método de Runge-Kutta de quarta ordem para os três PVI de teste.

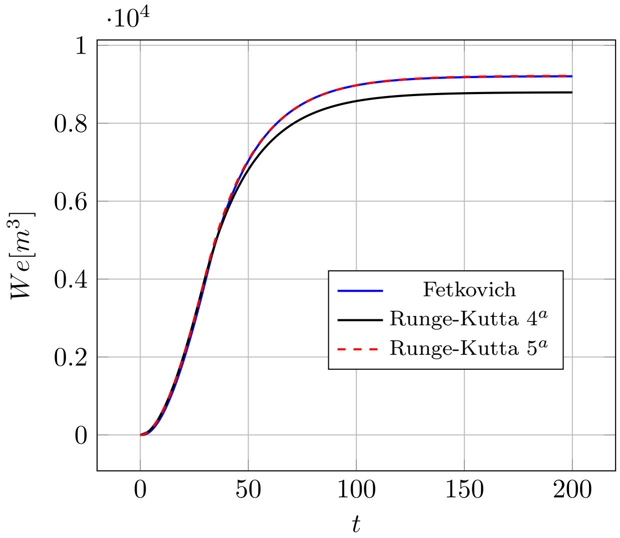

Figura 7: Acumulada de água com o Método de Fetkovich e com o Métodos de Runge-Kutta de quarta e quinta ordem.

diferencial de primeira ordem para métodos que resolvem um sistema de equações. Para o problema proposto o Método de Runge-Kutta teve desempenho pior que o do Método de Fetkovich.

Apêndice A. Lista de Variáveis

Bo: Fator volume de formação do óleo no reservatório (m^3/m^3).

Bo_b: Fator volume de formação do óleo no reservatório na pressão de bolha (m^3/m^3).

Bw: Fator volume de formação da água no reservatório (m^3/m^3).

c_r: Compressibilidade do volume poroso ($1/bar$).

$c_{o,b}$: Compressibilidade do óleo na pressão de bolha ($1/bar$).

c_{aq}: Compressibilidade total do aquífero ($1/bar$).

J: Índice de produtividade do aquífero ($m^3/d/bar$).

N: Volume de óleo no reservatório, medido em condições padrão (m^3).

N_i: Volume de óleo no reservatório inicial, medido em condições padrão (m^3).

Np: Volume de óleo produzido, medido em condições padrão (m^3).

p_{aq}: Pressão média do aquífero (bar).

$p_{i,aq}$: Pressão inicial do aquífero (bar).

p_b: Pressão de bolha do óleo (bar).

p_{res}: Pressão na interface entre o aquífero e o reservatório (bar).

$p_{i,res}$: Pressão inicial na interface entre o aquífero e o reservatório (bar).

Pv: Volume poroso no reservatório (m^3).

Pv_i: Volume poroso no reservatório na pressão inicial (m^3).

Q_o ou $\frac{dNp}{dt}$: Vazão de óleo produzido (m^3/d).

Q_w ou $\frac{dW_e}{dt}$: Vazão de água do aquífero para o reservatório (m^3/d).

Δt_j: Diferença entre os tempos t_{j-1} e t_j (d).

W_e: Volume de água acumulado do aquífero para o reservatório (m^3).

$W_{e,max}$: Máximo influxo de água *possível* do aquífero para o reservatório (m^3).

$(\Delta W_e)_j$: Influxo de água entre os tempos t_{j-1} e t_j (m^3).

$W_{i,aq}$: Volume inicial do aquífero (m^3).

W_{res}: Volume de água no reservatório (m^3).

$W_{i,res}$: Volume inicial de água no reservatório (m^3).

Referências

[1] M. J. Fetkovich, A simplified approach to water influx calculations-finite aquifer systems, Journal of petroleum technology 23 (07) (1971) 814–828.

[2] T. C. A. Amorim, Aplicação do método de euler para resolver o comportamento de aquíferos analíticos, Relatório número 6 da disciplina IM253: Métodos Numéricos para Fenômenos de Transporte (09 2023).

[3] T. C. A. Amorim, Aplicação dos métodos de runge-kutta para resolver o comportamento de aquíferos analíticos, Relatório número 7 da disciplina IM253: Métodos Numéricos para Fenômenos de Transporte (11 2023).

[4] T. C. A. Amorim, Aplicação de métodos de múltiplo passo para resolver o comportamento de aquíferos analíticos, Relatório número 8 da disciplina IM253: Métodos Numéricos para Fenômenos de Transporte (11 2023).

[5] R. L. Burden, J. D. Faires, A. M. Burden, Análise numérica, Cengage Learning, 2016.