Aplicação do Método de Euler para Resolver o Comportamento de Aquíferos Analíticos*

Tiago C. A. Amorim[2]

[a]*Petrobras, Av. Henrique Valadares, 28, Rio de Janeiro, 20231-030, RJ, Brasil*

Abstract

Fetkovich desenvolveu sua proposta de modelagem de aquífero analítico a partir de uma equação diferencial ordinária. Uma simplificação proposta leva o problema para uma EDO de 1^o grau que é resolvida analiticamente. Para aplicação no caso mais geral, Fetkovich propôs um método interativo. Este trabalho se propôs a não realizar a simplificação proposta por Fetkovich e resolver a EDO com o método de Euler. Os testes realizados mostraram que o limitante dos erros do método de Euler é *significativamente* maior que o erro real da aproximação. A aplicação do método de Aitken com 3 diferentes aproximações com o método de Euler gerou bons resultados. Na aplicação do problema proposto o método de Fetkovich se mostrou mais estável e com resultados melhores que o método de Euler associado ao método de Aitken.

Keywords: Método de Fetkovich, Método de Euler, Fluxo em Meio Poroso

1. Introdução

O método proposto por Fetkovich para descrever o influxo de um aquífero conectado a um reservatório parte de um modelo de aquífero simples e se desenvolve em uma equação diferencial ordinária (EDO). No método de Fetkovich é feita uma suposição forte, de que a pressão na interface entre o aquífero e o reservatório é constante, o que reduz o problema a uma EDO de 1^o grau. Para aplicação no caso mais geral é proposto um processo iterativo.

Este trabalho se propõe a não realizar a simplificação feita por Fetkovich e tentar resolver o mesmo problema utilizando o método de Euler para resolver a EDO.

2. Metodologia

2.1. Método de Fetkovich

Um dos modelos de aquífero analítico mais difundidos é o de Fetkovich [1] [2] [3]. O método de Fetkovich se baseia em um modelo transiente, e em muitos casos se aproxima das respostas do mais sofisticado método de van Everdingen-Hurst [4]. A vantagem do método de Fetkovich é a simplicidade de sua aplicação, pois não depende de técnicas de superposição.

O modelo de Fetkovich assume que a contribuição de um aquífero pode ser adequadamente modelada por um índice de produtividade, ou seja, que o influxo de água do aquífero para o reservatório é diretamente proporcional à diferença entre a pressão média do aquífero e a pressão na fronteira entre o reservatório e o aquífero [5]. O método negligencia quaisquer efeitos transientes no aquífero. O efeito desta premissa será maior em casos onde existe uma *rápida* variação na pressão na interface entre o reservatório e o aquífero, fazendo com que os resultados do método de Fetkovich se desviem dos resultados mais rigorosos do método de van Everdingen-Hurst [6]. Para problemas em que a variação desta pressão é mais gradual, o método de Fetkovich apresenta bons resultados.

O método primeiramente assume um índice de produtividade constante para o aquífero:

$$Q_w = \frac{dW_e}{dt} = J(p_{aq} - p_{res}) \tag{2.1}$$

A equação de balanço de massa assume que a compressibilidade do aquífero é constante, e que a depleção é proporcional à redução do volume de água:

$$W_e = c_{aq} W_{i,aq} (p_{i,aq} - p_{aq}) \tag{2.2}$$

A partir de 2.2 é possível encontrar uma equação para a pressão média do aquífero:

$$\begin{aligned} p_{aq} &= p_{i,aq} \left(1 - \frac{W_e}{c_{aq} W_{i,aq} p_{i,aq}}\right) \\ &= p_{i,aq} \left(1 - \frac{W_e}{W_{e,max}}\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Diferenciando 2.3 no tempo:

---

*Relatório número 5 como parte dos requisitos da disciplina IM253: Métodos Numéricos para Fenômenos de Transporte.

**Atualmente cursando doutorado no Departamento de Engenharia de Petróleo da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP (Campinas/SP, Brasil).

Email address: t100675@dac.unicamp.br (Tiago C. A. Amorim)

$$\frac{dp_{aq}}{dt} = -\frac{p_{i,aq}}{W_{e,max}}\frac{dW_e}{dt} \tag{2.4}$$

Isolando p_{aq} em 2.1 e diferenciando no tempo:

$$\frac{dp_{aq}}{dt} = \frac{1}{J}\frac{d^2W_e}{dt^2} + \frac{dp_{res}}{dt} \tag{2.5}$$

Igualando 2.4 e 2.5:

$$\frac{d^2W_e}{dt^2} = -\frac{Jp_{i,aq}}{W_{e,max}}\frac{dW_e}{dt} - J\frac{dp_{res}}{dt} \tag{2.6}$$

Assumindo uma pressão constante na interface entre o aquífero e o reservatório ($\frac{dp_{res}}{dt} = 0$) e lembrando que $p_{aq}(t=0) = p_{i,aq}$, é possível resolver a EDO 2.6:

$$\frac{dW_e}{dt} = J(p_{i,aq} - p_{res})e^{-\frac{Jp_{i,aq}}{W_{e,max}}t} \tag{2.7}$$

Integrando 2.7 no tempo com $W_e(t=0) = 0$:

$$W_e = \frac{W_{e,max}}{p_{i,aq}}(p_{i,aq} - p_{res})\left(1 - e^{-\frac{Jp_{i,aq}}{W_{e,max}}t}\right) \tag{2.8}$$

Como a suposição de pressão constante na interface entre o aquífero e o reservatório é muito forte, Fetkovich propõe aplicar 2.8 de maneira incremental. Para um tempo t_j com $j = 1, 2, \ldots, n$:

$$(\Delta W_e)_j = \frac{W_{e,max}}{p_{i,aq}}((\overline{p}_{i,aq})_{j-1} - (\overline{p}_{res})_j)\left(1 - e^{-\frac{Jp_{i,aq}}{W_{e,max}}\Delta t_j}\right) \tag{2.9}$$

onde

$$(\overline{p}_{res})_j = \frac{(p_{res})_j + (p_{res})_{j-1}}{2} \tag{2.10}$$

$$(\overline{p}_{i,aq})_j = p_{i,aq}\left(1 - \frac{(\Delta W_e)_j}{W_{e,max}}\right) \tag{2.11}$$

Com $(p_{res})_0 = p_{i,res}$ e $(\overline{p}_{i,aq})_0 = p_{i,aq}$.

Ao final do procedimento, o volume de água que passa do aquífero ao reservatório é a soma dos incrementos:

$$W_e = \sum_{j=1}^{n}(\Delta W_e)_j \tag{2.12}$$

O termo da pressão no aquífero é calculado no passo de tempo anterior. O único termo que não pode ser calculado diretamente é $(p_{res})_j$. Como este termo é normalmente função, entre outros, do influxo de água ($\sum_j(\Delta W_e)_j$), a cada passo de tempo é preciso resolver um problema do tipo $y = g(y)$.

2.2. Método de Euler

O objetivo do método de Euler é encontrar uma aproximação da solução de um problema de valor inicial bem posto (PVI):

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha \tag{2.13}$$

É possível usar o Teorema de Taylor para estimar o valor de $y(t_{j+1})$ a partir do valor de $y(t_j)$. Assumindo $y(t_{j+1}) - y(t_j) = h$ e com $\xi_j \,\epsilon\, (t_j, t_{j+1})$:

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + h\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_j} + \frac{h^2}{2}\left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{\xi_j} \tag{2.14}$$

Substituindo 2.13 em 2.14 e ignorando o resto, chega-se ao método de Euler. Fazendo $w_j \approx y(t_j)$, aplicando a discretização em t em n passos e a condição inicial:

$$\begin{aligned} h &= \frac{b-a}{n} \\ t_j &= a + hj \\ w_0 &= \alpha \\ w_j &= w_{j-1} + hf(t_{j-1}, w_{j-1}) \end{aligned} \tag{2.15}$$

É possível mostrar que o limitante do erro do método de Euler é dado por[1]:

$$|y(t_j) - w_j| \leq \frac{hM}{2L}\left[e^{L(t_j - t_0)} - 1\right] \tag{2.16}$$

onde

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))\right| \leq L \tag{2.17}$$

$$\left|\frac{d^2y}{dt^2}(t)\right| = \left|\frac{df}{dt}(t, y(t))\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))f(t, y(t))\right| \leq M \tag{2.18}$$

A estimativa do limitante do erro pode ser feita mesmo sem conhecer explicitamente a função $y(t)$. Neste caso os valores de L e M serão estimados com os valores aproximados w_j.

2.3. Modelo de Fetkovich como PVI

Uma forma de resolver o modelo proposto por Fetkovich sem ter que assumir uma pressão constante na interface entre o aquífero e o reservatório é transformá-lo em um problema de valor inicial.

[1] Prova completa em [7]

Vamos assumir um modelo simples de reservatório em que é alcançado equilíbrio hidrostático *instantaneamente*[2]. Por simplicidade é assumido que $Bw = 1$.

$$NBo + W_{res} = Pv \tag{2.19}$$

Serão assumidas correlações lineares do fator volume de formação do óleo com a pressão, e do volume poroso com a pressão.

$$NBo_b[1 + c_{o,b}(p_b - p_{res})] + W_{res} = Pv_i[1 - c_r(p_{i,res} - p_{res})] \tag{2.20}$$

Isolando p_{res} em 2.20:

$$p_{res} = \frac{NBo_b(1 + c_{o,b}p_b) + W_{res} - Pv_i(1 - c_r p_{i,res})}{NBo_b c_{o,b} + Pv_i c_r} \tag{2.21}$$

Derivando 2.21 no tempo:

$$\frac{dp_{res}}{dt} = \frac{\frac{dN}{dt}Bo_b(1 + c_{o,b}p_b) + \frac{dW_{res}}{dt}}{NBo_b c_{o,b} + Pv_i c_r} + - p_{res}\frac{\frac{dN}{dt}Bo_b c_{o,b}}{NBo_b c_{o,b} + Pv_i c_r} \tag{2.22}$$

Substituindo 2.22 em 2.6, e assumindo $\frac{dN}{dt} = f(t, p_{res})$, encontra-se um PVI da forma:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\alpha\frac{dy}{dt} - f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha \tag{2.23}$$

Para aplicar o método de Euler será preciso focar no caso específico em que não há produção de óleo ($\frac{dN}{dt} = 0$):

$$\frac{d^2W_e}{dt^2} = -J\left(\frac{p_{i,aq}}{W_{e,max}} + \frac{1}{NBo_b c_{o,b} + Pv_i c_r}\right)\frac{dW_e}{dt} \tag{2.24}$$

Como a condição inicial de $p_{aq}(t = 0) = p_{i,aq}$ se mantém, a EDO 2.24 tem solução analítica análoga a 2.7:

$$\frac{dW_e}{dt} = J(p_{i,aq} - p_{res})e^{-J\left(\frac{p_{i,aq}}{W_{e,max}} + \frac{1}{NBo_b c_{o,b} + Pv_i c_r}\right)t} \tag{2.25}$$

[2]Em um instante qualquer todo o reservatório estará na mesma pressão p_{res}.

3. Implementação

Todo o código utilizado nesta análise foi desenvolvido em C++. Foram criados objetos próprios para cada elemento integrante do problema proposto:

IVP Classe que define um problema de valor inicial na forma 2.13.

- O usuário precisa especificar $f(t, y)$, a (tempo inicial), b (tempo final), n (número de passos de tempo) e $y(a)$.
- Opcionalmente o usuário pode prover $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{df}{dt}$ para que seja estimado o limitante do erro de aproximação. O usuário também pode prover diretamente os valores de L e M.
- O usuário também pode especificar a função exata, para calcular o erro de aproximação do método de Euler.
- Além do método de Euler *tradicional*, foi implementada uma rotina que tenta melhorar as respostas utilizando o método de Aitken. Nesta última opção o método de Euler é feito com 3 diferentes passos de tempo: n, $2n$ e $3n$. Nos passos de tempo comuns entre as 3 resoluções é aplicado o método de Aitken[3]:

$$\widehat{w}_j = w_j^{(n)} - \frac{\left(w_{2j}^{(2n)} - w_j^{(n)}\right)^2}{w_{3j}^{(3n)} - 2w_{2j}^{(2n)} + w_j^{(n)}} \tag{3.1}$$

Spline Classe que constrói uma função interpoladora do tipo Spline natural a um conjunto de pontos (x, y) [8].

- Os valores das funções que definem L e M dependem de $y(t)$ (que é aproximado por w). Estas funções só podem ser avaliadas nos n valores de w_i que são calculados pelo método de Euler.
- Esta classe foi incluída no código para incrementar a busca pelos valores de L e M. São criadas splines a partir dos valores calculados de cada função, de modo que um número maior de pontos podem ser avaliados.

Fetkovich Classe resolve o comportamento de um aquífero como proposto por Fetkovich.

- O usuário precisa definir as características do aquífero e prover uma função que retorne a pressão na interface do aquífero com o reservatório. Esta função depende do tempo e do influxo acumulado de água do aquífero para o reservatório (W_e).

[3]$w_j^{(n)}$ é a aproximação de $y(t_j)$ de uma aplicação do método de Euler com n passos.

Para facilitar a estimativa de parâmetros de aquífero e reservatório foram implementadas algumas correlações *clássicas*:

- Newman [9]: Compressibilidade de rocha.
- Standing [10]: Pressão de bolha, compressibilidade do óleo na pressão de bolha e fator volume de formação do óleo na pressão de bolha.

4. Resultados

Antes de aplicar o método de Euler ao problema proposto, foram avaliados alguns problemas de valor inicial com resposta exata conhecida:

1. $y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0.5$
2. $y' = -2y + 3e^t, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 3.0$
3. $y' = 4cos(t) - 8sin(t) + 2y, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 3.0$

Os resultados exatos de cada problema são, respectivamente:

1. $y = (t+1)^2 - 0.5e^t$
2. $y = 2e^{-2t} + e^t$
3. $y = 4sin(t) + 3e^{2t}$

Todos os problemas foram resolvidos com 10 passos de tempo. As figuras 1, 2 e 3 mostram que o erro do método de Euler pode ser significativo. As figuras também mostram que o uso do método de Aitken teve um impacto positivo na qualidade das respostas.

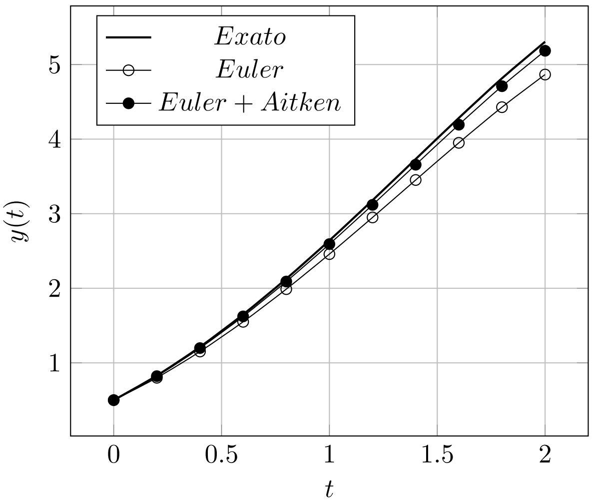

Figura 1: Aproximação com o método de Euler do PVI número 1.

A figura 4 mostra a diferença entre o erro real das aproximações feitas com o método de Euler e o limitante do erro. Observa-se que o limitante do erro é *significativamente* maior que o erro real. O limitante se mostrou uma pobre estimativa do erro.

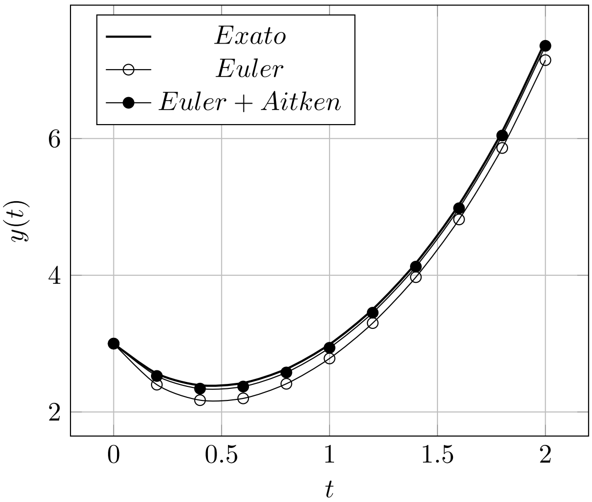

Figura 2: Aproximação com o método de Euler do PVI número 2.

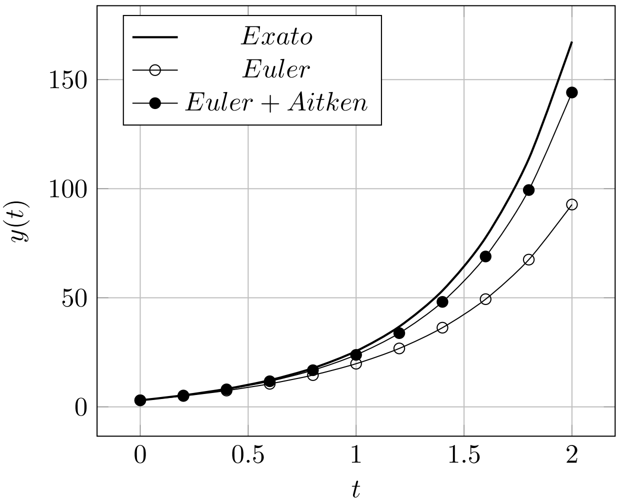

Figura 3: Aproximação com o método de Euler do PVI número 3.

Em função dos resultados dos testes iniciais o problema proposto foi resolvido utilizando o método de Euler com o método de Aitken. Foram utilizados os seguintes parâmetros de reservatório junto com as correlações listadas final da seção 3:

- Fluidos
  - $API = 25^o api$
  - $d_g = 0.6$
  - $RGO = 60\, m^3/m^3$
  - $T_{res} = 60^o C$
  - $Bw = 1$
- Parâmetros de reservatório
  - $N = 0.8\, 10^6\, m^3$
  - $W_{i,res} = 0.2\, 10^6\, m^3$
  - $p_{i,res} = 230\, bar$

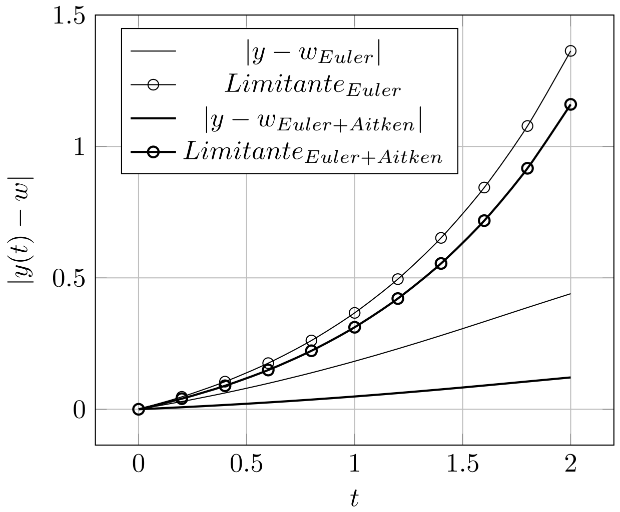

Figura 4: Estimativa do erro de aproximação com o método de Euler para o PVI número 1.

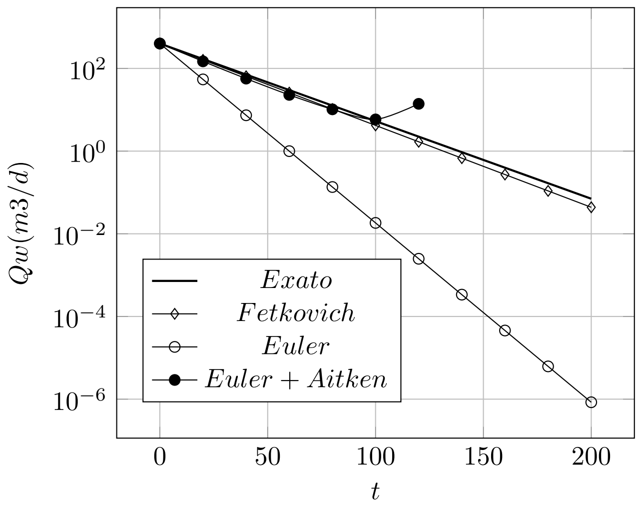

Figura 5: Aproximação com o método de Fetkovich e com o método de Euler de um aquífero conectado a um reservatório de óleo.

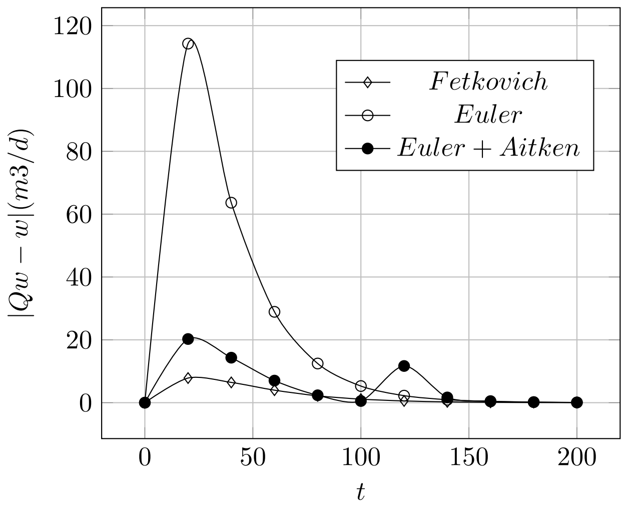

Figura 6: Erro das aproximações com o método de Fetkovich e com o método de Euler de um aquífero conectado a um reservatório de óleo.

  - $\phi = 20\%$ (para cálculo da compressibilidade de rocha)

- Parâmetros do aquífero
  - $J = 20\, m^3/d/bar$
  - $\phi = 3\%$ (para cálculo da compressibilidade de rocha)
  - $W_{i,aq} = 1.0\, 10^6\, m^3$
  - $p_{i,aq} = 250\, bar$

Foi avaliado o comportamento do aquífero até 200 dias, em 10 passos de tempo. As figuras 5 e 6 mostram que o melhor resultado foi com o método de Fetkovich. O método de Euler teve um resultado muito ruim. O procedimento do Método de Euler associado ao método de Aitken teve resultados comparáveis ao método de Fetkovich até *metade* do período avaliado, quando começou a divergir do resultado exato e depois estimou valores de vazão negativos.

O código foi implementado em C++ e em um único arquivo. Pode ser encontrado em https://github.com/TiagoCAAmorim/numerical-methods.

5. Conclusão

Os resultados indicaram que o método de Euler fornece resultados pobres e com pouco controle da qualidade das respostas. Os limitantes dos erros se mostraram muito grandes e de pouca utilidade. Os erros do método de Euler se mostraram significativos para o número de passos utilizado. O método de Aitken se mostrou efetivo na melhora das respostas estimadas com o método de Euler.

Para um mesmo número de passos de tempo, os resultados do método de Fetkovich se mostraram muito melhores que os resultados do método de Euler. O método de Fetkovivh tem a vantagem de utizar relações constitutivas entre as variáveis do problema para melhorar as suas estimativas.

Apêndice A. Lista de Variáveis

Bo: Fator volume de formação do óleo no reservatório (m^3/m^3).

Bo_b: Fator volume de formação do óleo no reservatório na pressão de bolha (m^3/m^3).

Bw: Fator volume de formação da água no reservatório (m^3/m^3).

c_r: Compressibilidade do volume poroso ($1/bar$).

$c_{o,b}$: Compressibilidade do óleo na pressão de bolha ($1/bar$).

c_{aq}: Compressibilidade total do aquífero ($1/bar$).

J: Índice de produtividade do aquífero ($m^3/d/bar$).

L: Constante de Lipschitz.

M: Limitante da derivada 2^a.

N: Volume de óleo no reservatório medido em condições padrão (m^3).

p_{aq}: Pressão média do aquífero (bar).

$p_{i,aq}$: Pressão inicial do aquífero (bar).

$(\overline{p}_{i,aq})_j$: Pressão média do aquífero no tempo t_j (bar).

p_b: Pressão de bolha do óleo (bar).

p_{res}: Pressão na interface entre o aquífero e o reservatório (bar).

$p_{i,res}$: Pressão inicial na interface entre o aquífero e o reservatório (bar).

$(\overline{p}_{res})_j$: Pressão média na interface entre o aquífero e o reservatório entre os tempos t_{j-1} e t_j (bar).

Pv: Volume poroso no reservatório (m^3).

Pv_i: Volume poroso no reservatório na pressão inicial (m^3).

Q_w ou $\frac{dW_e}{dt}$: Vazão de água do aquífero para o reservatório (m^3/d).

Δt_j: Diferença entre os tempos t_{j-1} e t_j (d).

W_e: Volume de água acumulado do aquífero para o reservatório (m^3).

$W_{e,max}$: Máximo influxo de água *possível*[4] do aquífero para o reservatório (m^3).

$(\Delta W_e)_j$: Influxo de água entre os tempos t_{j-1} e t_j (m^3).

$W_{i,aq}$: Volume inicial do aquífero (m^3).

W_{res}: Volume de água no reservatório (m^3).

$W_{i,res}$: Volume inicial de água no reservatório (m^3).

Referências

[1] E. U. M. SCHLUMBERGER, Technical description, Schlumberger Ltd (2009) 519–538.

[2] C. M. G. L. (CMG), Cmg imex user's manual, CMG Calgary, Canada, 2022.

[3] A. J. Rosa, R. de Souza Carvalho, J. A. D. Xavier, Engenharia de reservatórios de petróleo, Interciência, 2006.

[4] A. Van Everdingen, W. Hurst, The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs, Journal of Petroleum Technology 1 (12) (1949) 305–324. `arXiv:https://onepetro.org/JPT/article-pdf/1/12/305/2239068/spe-949305-g.pdf`, `doi:10.2118/949305-G`. URL `https://doi.org/10.2118/949305-G`

[5] M. J. Fetkovich, A simplified approach to water influx calculations-finite aquifer systems, Journal of petroleum technology 23 (07) (1971) 814–828.

[6] T. Ahmed, Chapter 10 - water influx, in: T. Ahmed (Ed.), Reservoir Engineering Handbook (Fifth Edition), fifth edition Edition, Gulf Professional Publishing, 2019, pp. 663–750. `doi:https://doi.org/10.1016/B978-0-12-813649-2.00010-4`. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128136492000104`

[7] R. L. Burden, J. D. Faires, A. M. Burden, Análise numérica, Cengage Learning, 2016.

[8] T. C. A. Amorim, Avaliação do uso de splines para interpolar tabelas de fluxo vertical multifásico, Relatório número 4 da disciplina IM253: Métodos Numéricos para Fenômenos de Transporte (09 2023).

[9] G. Newman, Pore-Volume Compressibility of Consolidated, Friable, and Unconsolidated Reservoir Rocks Under Hydrostatic Loading, Journal of Petroleum Technology 25 (02) (1973) 129–134. `arXiv:https://onepetro.org/JPT/article-pdf/25/02/129/2672963/spe-3835-pa.pdf`, `doi:10.2118/3835-PA`. URL `https://doi.org/10.2118/3835-PA`

[10] M. B. Standing, Volumetric and phase behavior of oil field hydrocarbon systems, Society of petroleum engineers of AIME, 1952.

[4]Equivale ao influxo quando $p_{aq} = 0$ em 2.2.