

# Aplicação do Método de Newton-Raphson para Resolver o Cálculo Inverso do Método da Mínima Curvatura\*

Tiago C. A. Amorim<sup>2</sup>

<sup>a</sup>Petrobras, Av. Henrique Valadares, 28, Rio de Janeiro, 20231-030, RJ, Brasil

## Abstract

A partir da formulação do Método da Mínima Curvatura, foi desenvolvido um algoritmo para fazer o cálculo de parâmetros de perfuração em função de coordenadas cartesianas. Este algoritmo tem formulação implícita, e pode ser resolvido utilizando métodos de busca de raiz de funções de uma variável. Neste relatório foi aplicado o Método de Newton-Raphson para resolver este problema. Com um ajuste ao método foi possível encontrar soluções para este problema com uma taxa de convergência duas vezes maior que aquela conseguida com o Método da Bissecção.

**Keywords:** Método da Mínima Curvatura, Método de Newton-Raphson

## 1. Introdução

O Método da Mínima Curvatura possibilita o cálculo de coordenadas cartesianas ( $\Delta N$ ,  $\Delta E$ ,  $\Delta V$ ) a partir de parâmetros de perfuração ( $\Delta S$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ ) assumindo que a trajetória de um poço direcional pode ser descrita como uma série de arcos [1]. Não existe formulação direta para o cálculo inverso, isto é, dos parâmetros de perfuração em função das coordenadas cartesianas.

No primeiro relatório desta série [2] foi apresentada uma proposta de metodologia para cálculo dos parâmetros de perfuração a partir das coordenadas cartesianas de pontos ao longo da geometria do poço, neste relatório denominado de **Inverso da Mínima Curvatura**. O algoritmo proposto tem formulação implícita e foi organizado como um problema do tipo  $g(x) = x$ . O problema foi resolvido com o Método da Bissecção, encontrando bons resultados.

Neste segundo relatório é aplicado o método de Newton-Raphson para resolver o mesmo problema.

## 2. Metodologia

### 2.1. Derivada do Inverso da Mínima Curvatura

O algoritmo de cálculo do inverso da mínima curvatura é discutido em [2]. O algoritmo assume que para calcular os parâmetros de perfuração entre dois pontos quaisquer

são conhecidos os parâmetros de perfuração do ponto inicial ( $\theta_1$ ,  $\phi_1$ ) e as distâncias cartesianas entre os pontos ( $\Delta N$ ,  $\Delta E$ ,  $\Delta V$ ). O objetivo é calcular  $\theta_2$ ,  $\phi_2$  e  $\Delta S$ . As fórmulas desenvolvidas são repetidas neste relatório para dar mais clareza.

$$\cos \theta_2 = 2 \frac{\Delta V}{\Delta S f(\alpha)} - \cos \theta_1 \quad (2.1a)$$

$$\sin \theta_2 = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_2} \quad (2.1b)$$

$$\sin \phi_2 = \frac{-\Delta N}{\Delta H^2} \left( \frac{\Delta \Psi \sin \theta_1}{\sin \theta_2} \right) + \frac{\Delta E}{\Delta H^2} \sqrt{\Delta H^2 - \left( \frac{\Delta \Psi \sin \theta_1}{\sin \theta_2} \right)^2} \quad (2.1c)$$

$$\cos \phi_2 = \frac{\Delta E}{\Delta H^2} \left( \frac{\Delta \Psi \sin \theta_1}{\sin \theta_2} \right) + \frac{\Delta N}{\Delta H^2} \sqrt{\frac{1}{\Delta H^2} - \left( \frac{\Delta \Psi \sin \theta_1}{\sin \theta_2} \right)^2} \quad (2.1d)$$

$$\Delta S f(\alpha) = 2 \sqrt{\frac{\Delta N^2 + \Delta E^2 + \Delta V^2}{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (2.1e)$$

onde

$$\Delta \Psi = \Delta N \sin \phi_1 - \Delta E \cos \phi_1$$

$$\Delta H^2 = \Delta N^2 + \Delta E^2$$

$$A = \sin \theta_1 \cos \phi_1 + \sin \theta_2 \cos \phi_2$$

$$B = \sin \theta_1 \sin \phi_1 + \sin \theta_2 \sin \phi_2$$

$$C = \cos \theta_1 + \cos \theta_2$$

Em [2] são discutidos detalhes adicionais sobre a implementação deste algoritmo e seus limites.

Para utilizar o método de Newton-Raphson para resolver o problema proposto, será preciso encontrar a derivada da função one será buscada a raiz. No cálculo do

\*Relatório número 2 como parte dos requisitos da disciplina IM253: Métodos Numéricos para Fenômenos de Transporte.

\*\*Atualmente cursando doutorado no Departamento de Engenharia de Petróleo da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP (Campinas/SP, Brasil).

Email address: t100675@dac.unicamp.br (Tiago C. A. Amorim)

inverso da mínima curvatura temos um problema do tipo  $f(x) = g(x) - x$ , onde  $x$  é  $\Delta S f(\alpha)$ . Por simplicidade,  $\Delta S f(\alpha)$  é substituído por  $x$  nas equações das derivadas, e os termos que dependem de  $\Delta S f(\alpha)$  são explicitados usando  $(x)$ .

$$f(x) = 2\sqrt{\frac{\Delta N^2 + \Delta E^2 + \Delta V^2}{A(x)^2 + B(x)^2 + C(x)^2}} - x \quad (2.2)$$

onde

$$A(x) = \sin \theta_1 \cos \phi_1 + \sin \theta_2(x) \cos \phi_2(x)$$

$$B(x) = \sin \theta_1 \sin \phi_1 + \sin \theta_2(x) \sin \phi_2(x)$$

$$C(x) = \cos \theta_1 + \cos \theta_2(x)$$

Derivando  $f(x)$ :

$$f(x)' = -\frac{2}{\Delta S^2} \left( \frac{\Delta N^2 + \Delta E^2 + \Delta V^2}{A(x)^2 + B(x)^2 + C(x)^2} \right)^{3/2} [A(x)A(x)' + B(x)B(x)' + C(x)C(x)'] - 1 \quad (2.3)$$

onde

$$A(x)' = \sin \theta_2(x)' \cos \phi_2(x) + \sin \theta_2(x) \cos \phi_2(x)'$$

$$B(x)' = \sin \theta_2(x)' \sin \phi_2(x) + \sin \theta_2(x) \sin \phi_2(x)'$$

$$C(x)' = \cos \theta_2(x)'$$

As demais derivadas que apareceram serão encontradas derivando as demais equações 2.1:

$$\cos \theta_2(x)' = -\frac{2\Delta V}{x^2} \quad (2.4a)$$

$$\sin \theta_2(x)' = -\frac{\frac{2\Delta V}{x}(\cos \theta_1 - \frac{2\Delta V}{x})}{x\sqrt{1 - (\cos \theta_1 - \frac{2\Delta V}{x})^2}} \quad (2.4b)$$

$$\sin \phi_2(x)' = \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta H^2} \frac{\sin \theta_2(x)'}{\sin \theta_2(x)} \cdot \left( \Delta N + \Delta E \frac{\Delta \varphi(x)}{\sqrt{\Delta H^2 - \Delta \varphi^2(x)}} \right) \quad (2.4c)$$

$$\cos \phi_2(x)' = \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta H^2} \frac{\sin \theta_2(x)'}{\sin \theta_2(x)} \cdot \left( \Delta E - \Delta N \frac{\Delta \varphi(x)}{\sqrt{\Delta H^2 - \Delta \varphi^2(x)}} \right) \quad (2.4d)$$

onde

$$\Delta \varphi(x) = \frac{\Delta \Psi \sin \theta_1}{\sin \theta_2(x)}$$

$\Delta \Psi$  e  $\Delta H^2$  seguem as mesmas definições das equações 2.1.

## 2.2. Método de Newton-Raphson

O código desenvolvido foi baseado no pseudo-código de [3]. Uma forma simplificada é apresentada no Algoritmo 1. O Método de Newton-Raphson faz uso da derivada da função de interesse. O método precisa apenas de um ponto inicial, e converge mais rápido que o Método da Bissecção, mas não tem garantia de encontrar uma raiz.

---

### Algorithm 1 Método de Newton-Raphson

---

**Entrada:**  $x_0$

$x_{melhor} \leftarrow x_0$

**Repete**

$x_{i+1} \leftarrow x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

**Se**  $|f(x_{i+1})| < |f(x_{melhor})|$  **então**

$x_{melhor} \leftarrow x_{i+1}$

$i \leftarrow i + 1$

**Até**  $|x_i - x_{i-1}| < \epsilon$

**Retorna:**  $x_{melhor}$

---

Foram adicionados critérios adicionais ao algoritmo para controlar o processo iterativo:

- Foram implementados dois métodos de cálculo do critério de convergência<sup>1</sup>: *Direto* e *Relativo*.
- É feito um término prematuro do processo iterativo caso algum  $|f(x)| < \epsilon$ . O valor padrão de  $\epsilon$  é  $10^{-7}$  (variável `epsilon` no código). Este teste também é feito antes de entrar no *loop*.
- A cada iteração é verificado se a derivada da função está muito próxima de zero:  $|f'(x)| < \epsilon$ . Em caso positivo é gerada uma mensagem e é encerrado o *loop*.
- Como o método não garante convergência, ao longo das iterações é guardado o melhor resultado ( $x$  tal que  $|f(x)|$  seja mínimo). Este é o resultado que é retornado.

## 3. Resultados

Para facilitar a análise da qualidade do código desenvolvido, foram criadas funções que realizam diversos testes onde a resposta exata é conhecida:

**tests\_newton\_raphson()** Testa o Método de Newton-Raphson em diferentes funções: linear, quadrática, exponencial e trigonométrica. Também foram aplicados casos específicos para o algoritmo tratar: raiz no ponto inicial, ponto inicial muito próximo da raiz, ponto inicial em um ponto de mínimo da função (derivada nula), uso de critério de convergência relativo, função com derivada nula na raiz, função com vários mínimos e máximos locais.

---

<sup>1</sup>Maiores detalhes em [2].

**tests\_minimum\_curvature()** Testa o algoritmo proposto para resolver o inverso da mínima curvatura para diferentes geometrias de trecho de poço: poço vertical, horizontal, inclinado, em curva.

A implementação do Método de Newton-Raphson teve uma alteração adicional em função dos resultados dos testes realizados. Nas fórmulas do inverso da mínima curvatura fica evidente que a variável principal ( $\Delta Sf(\alpha)$ ) não pode ter um valor qualquer. Para evitar parar prematuramente o processo iterativo quando o novo ponto a ser avaliado é menor que o limite inferior, foi implementada uma verificação adicional no método. Caso o novo valor de  $x$  estiver fora dos limites pré-estabelecidos, usará o valor do limite que foi violado. Desta forma é dada uma *chance* para o processo iterativo conseguir convergir para uma resposta melhor. Para o problema do inverso da mínima curvatura foi utilizado um limite inferior de  $\Delta Sf(\alpha)$  igual ao discutido em [2].

As funções polinomiais testadas convergiram muito rapidamente, mesmo as que tinham a derivada nula na raiz. O único teste em que o Método da Bissecção teve uma convergência mais rápida foi na função exponencial:  $e^{x^2-4} - 1$  (Tabela 1). Esta função se mostrou difícil para o Método de Newton-Raphson porque tem uma mudança brusca da derivada à esquerda e à direita de cada raiz. Esta grande mudança na derivada torna o método instável na região de derivada muito próxima de zero ( $-2 < x < 2$ ) e com baixa taxa de convergência nas regiões com módulo de derivada muito alto ( $x < -2$  e  $x > 2$ ).

Enquanto o Método da Bissecção para as diferentes funções testadas o erro reduziu em uma razão de aproximadamente 2 ([2]), o Método de Newton-Raphson teve comportamentos variados: convergência muito rápida para funções quadráticas e trigonométricas, convergência muito lenta para a função exponencial. Para o problema do inverso da mínima curvatura o erro caiu em uma razão de aproximadamente 4, ou seja, duas vezes mais rápido que com o Método da Bissecção (Figura 3).

Para algumas funções o Método de Newton-Raphson se mostrou instável, ficando muito dependente do ponto inicial para conseguir convergir. A função  $\cos x + \sin x$  tem muitas raízes, e o resultado do Método de Newton-Raphson se mostrou muito dependente do ponto inicial. Para conseguir encontrar a raiz de uma determinada região foi preciso definir um ponto inicial *bem próximo* da raiz. Já a função  $3x + x^2 \sin^2 \frac{x\pi}{10}$  mostrou muita instabilidade, e em muitos casos não conseguiu convergir ao fazer pequenas mudanças no valor do ponto inicial.

Na aplicação do Método de Newton para resolver o inverso da mínima curvatura os resultados foram muito bons. Nenhum dos testes teve problemas de convergência, e convergiram com um número de iterações menor que o do Método da Bissecção. O formato da função de construída favorece o uso do Método de Newton-Raphson, pois tem a forma próxima de uma reta (ver Apêndice A).

Para o problema proposto foram testados alguns valo-

res distintos de ponto inicial, mas o impacto no resultado não é expressivo. Um valor inicial *melhor* resultou em uma ou duas iterações a menos (Figura 3). Inicializar no valor mínimo de  $\Delta Sf(\alpha)$  não teve um resultado muito bom em alguns dos testes realizados, pois nesta região a derivada tem maior variação. No código foi utilizado por padrão um valor 10% maior que o mínimo.

No exemplo da Figura 3 a resposta exata é aproximadamente 4.7% maior que  $\Delta Sf(\alpha)_{min}$ , e os pontos iniciais mais próximos convergem mais rápido. O principal resultado deste gráfico é mostrar que para o problema do inverso da mínima curvatura a definição do ponto inicial tem pouco impacto no número de iterações que o Método de Newton-Raphson precisará para alcançar o critério de convergência definido.

O código de ambos métodos foi implementado em um único arquivo, e pode ser encontrado em <https://github.com/TiagoCAAmorim/numerical-methods>.

## 4. Conclusão

O Método de Newton-Raphson se mostrou adequado para fazer o cálculo de parâmetros de perfuração em função de coordenadas cartesianas. Foi necessário adaptar o Método de Newton-Raphson para conseguir continuar o processo iterativo caso o novo valor de teste não esteja na região de validade da função. Com este ajuste todos os testes realizados alcançaram o critério de convergência com um número de iterações menor do que o que foi alcançado com o Método da Bissecção.

## Apêndice A. Funções de Teste

Nos gráficos a seguir as curvas contínuas são as funções de teste e as tracejadas são as respectivas derivadas. A raiz (ou raízes) está denotada pelo quadrado azul. São apresentadas apenas algumas das funções de teste. Em vermelho estão os pontos avaliados ao longo de um dos testes realizados.

## Referências

- [1] A Compendium of Directional Calculations Based on the Minimum Curvature Method, Vol. All Days of SPE Annual Technical Conference and Exhibition. **arXiv:** <https://onepetro.org/SPEATCE/proceedings-pdf/03ATCE/A11-03ATCE/SPE-84246-MS/2895686/spe-84246-ms.pdf>, doi:10.2118/84246-MS. URL <https://doi.org/10.2118/84246-MS>
- [2] T. C. A. Amorim, Proposta de cálculo de parâmetros de perfuração de poços de petróleo a partir de coordenadas espaciais com o método da bissecção, Relatório número 1 da disciplina IM253: Métodos Numéricos para Fenômenos de Transporte (08 2023).
- [3] R. L. Burden, J. D. Faires, A. M. Burden, Análise numérica, Cengage Learning, 2016.

Tabela 1: Comparação entre o número de iterações necessários para um mesmo critério de convergência usando os Métodos da Bisseção e Newton-Raphson.

Função	Raiz	Bisseção			Newton-Raphson	
		$x_a$	$x_b$	Iter.	$x_0$	Iter.
Linear	0.3	0.	2.	11	0.	1
Quadrática	-0.1	-0.25	1.	11	0.25	4
Exponencial	2.	0.	10.	14	5.	25
Trigonométrica	$3\pi/4$	0.	5.	13	3.	3
1/4 círculo horizontal	20	14.1421	120.417	17	14.4743	1
Seção 2 do poço em S	131.652	130.526	1111.4	20	133.592	11
Poço 3D	10.3144	9.84918	83.8634	17	10.0805	4

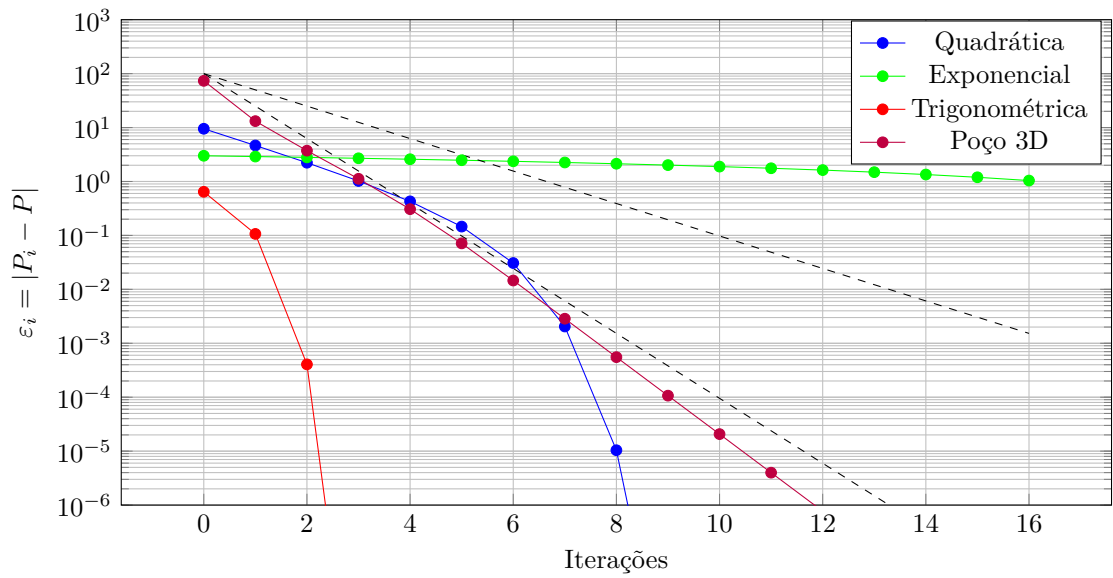


Figura 1: Evolução do erro do Método de Newton-Raphson com diferentes funções (linhas tracejadas representam  $\varepsilon_{i+1}/\varepsilon_i = 0.5$  e  $\varepsilon_{i+1}/\varepsilon_i = 0.25$ ).

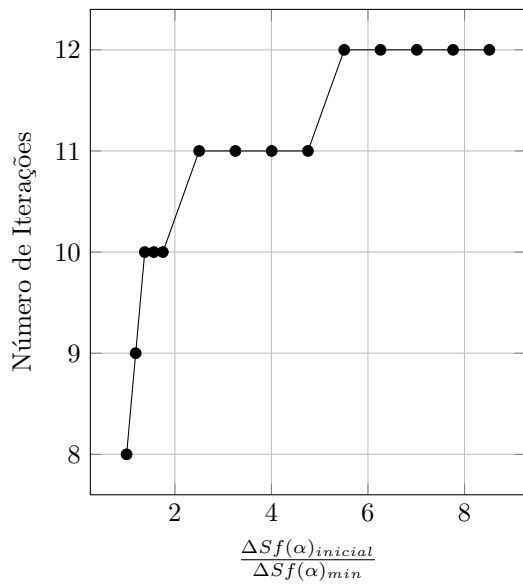


Figura 2: Número de iterações em função do valor inicial da variável do problema.

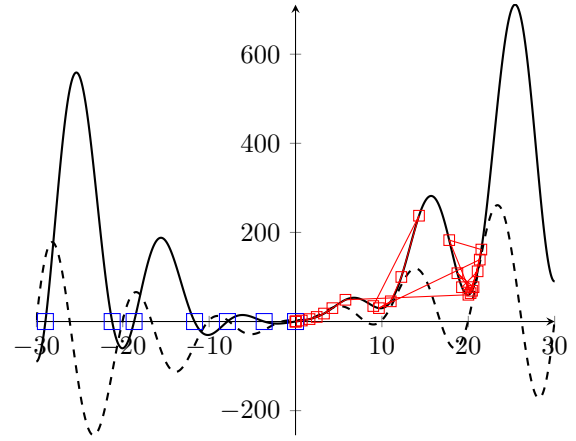


Figura A.5: Função trigonométrica:  $3x + x^2 \sin^2 \frac{x\pi}{10}$ .

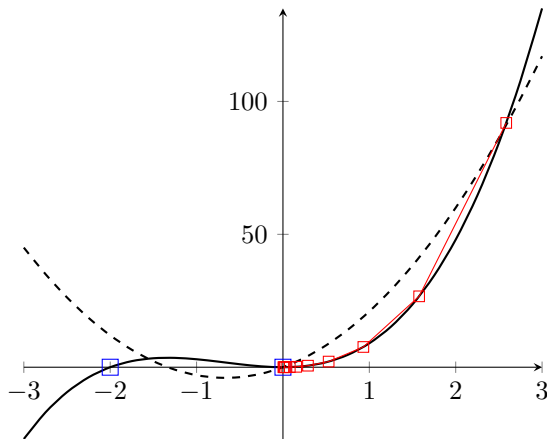


Figura A.3: Polinômio de 3º grau:  $3x^3 + 2x^2$ .

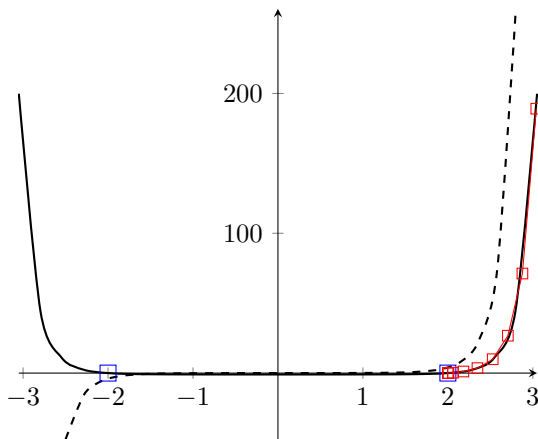


Figura A.4: Função exponencial:  $e^{x^2-4} - 1$ .

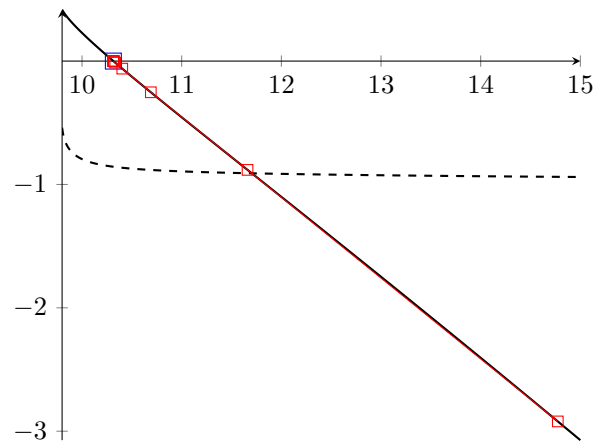


Figura A.6: Função de erro de  $\Delta Sf(\alpha)$  para o caso Poço 3D.