

# Uso de Métodos de Runge-Kutta para Resolver o Aquífero Analítico de Fetkovich\*

Tiago C. A. Amorim<sup>2</sup>

<sup>a</sup>Petrobras, Av. Henrique Valadares, 28, Rio de Janeiro, 20231-030, RJ, Brasil

## Abstract

O Método de Fetkovich para prever o comportamento de um aquífero analítico ainda é útil mais de 50 anos após o seu desenvolvimento. Em avaliações anteriores, alguns métodos numérico conseguiram resultados de equivalente qualidade para um problema simples. Ao comparar o Método de Fetkovich com o Método de Runge-Kutta de quarta ordem para um problema de teste de produção, o Método de Fetkovich mostrou-se muito superior.

**Keywords:** Método de Fetkovich, Métodos de Runge-Kutta, Fluxo em Meio Poroso

## 1. Introdução

Este trabalho se propõe a avaliar a adequação dos métodos de Runge-Kutta para resolver o modelo de aquífero analítico proposto por Fetkovich [1]. Em avaliações anteriores [2][3][4] foram testados diferentes métodos numéricos de resolução de equações diferenciais. Nestas avaliações foi aplicada a forma *original* dos métodos, ou seja, que resolve apenas uma equação diferencial de primeira ordem ( $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ ). Esta limitação levou a uma restrição nos tipos de problemas que podem ser resolvidos.

Neste relatório será avaliada a forma dos métodos de Runge-Kutta que resolvem sistemas de equações lineares. Com esta modificação a gama de problemas que podem ser resolvidas aumenta substancialmente. Foi avaliado um problema mais próximo de uma aplicação real. Foi modelado o problema de um poço que produz óleo durante certo tempo a uma vazão constante e que posteriormente é fechado, o que representa um teste de produção.

## 2. Metodologia

### 2.1. Métodos de Runge-Kutta

Os métodos de Runge-Kutta para resolver numericamente sistemas de equações diferenciais tem a mesma forma de suas respectivas versões para resolver uma equação diferencial. A diferença para o problema de resolver um sistema de equações diferenciais é que os parâmetros  $k_i$  serão resolvidos para cada equação [5].

Dado um sistema de  $m$  equações diferenciais na forma:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= f_1(t, \vec{y}) \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(t, \vec{y}) \\ &\vdots \\ \frac{dy_m}{dt} &= f_m(t, \vec{y})\end{aligned}\quad (2.1)$$

com

$$\vec{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$$

e condições iniciais

$$y_1(t_0) = \alpha_1, y_2(t_0) = \alpha_2, \dots, y_m(t_0) = \alpha_m$$

Um Método de Runge-Kutta com  $r$  parâmetros  $k$ , para resolver 2.1 com  $w_{j,i} \approx y_i(t_j)$  em  $n$  passos de tempo, tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}w_{0,i} &= \alpha_i \\ k_{1,i} &= hf_j(t_j, \vec{w}_j) \\ k_{2,i} &= hf_j\left(t_j + \beta_2 h, \vec{w}_j + \gamma_{2,1} \vec{k}_1\right) \\ k_{3,i} &= hf_j\left(t_j + \beta_3 h, \vec{w}_j + \gamma_{3,1} \vec{k}_1 + \gamma_{3,2} \vec{k}_2\right) \\ &\vdots \\ k_{r,i} &= hf_j\left(t_j + \beta_r h, \vec{w}_j + \sum_{s=1}^{r-1} \gamma_{r,s} \vec{k}_s\right) \\ \vec{w}_{j+1} &= \vec{w}_j + \sum_{s=1}^r \lambda_s \vec{k}_s\end{aligned}\quad (2.2)$$

\*Relatório número 9 como parte dos requisitos da disciplina IM253: Métodos Numéricos para Fenômenos de Transporte.

\*\*Atualmente cursando doutorado no Departamento de Engenharia de Petróleo da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP (Campinas/SP, Brasil).

Email address: t100675@dac.unicamp.br (Tiago C. A. Amorim)

com

$$\begin{aligned}\vec{w}_j &= \{w_{j,1}, w_{j,2}, \dots, w_{j,m}\} \\ \vec{k}_s &= \{k_{s,1}, k_{s,2}, \dots, k_{s,m}\} \\ h &= \frac{t_n - t_0}{n} \\ i &= 1, \dots, m \\ j &= 0, 1, \dots, n-1\end{aligned}$$

Os parâmetros  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\lambda$  dependem da escolha da versão do método de Runge-Kutta a ser utilizado. Usualmente são apresentados de forma tabular:

0					
$\beta_2$	$\gamma_{2,1}$				
$\beta_3$	$\gamma_{3,1}$	$\gamma_{3,2}$			
$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$		
$\beta_r$	$\gamma_{r,1}$	$\gamma_{r,2}$	$\dots$	$\gamma_{r,r-1}$	
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\dots$	$\lambda_{r-1}$	$\lambda_r$

Foram implementados métodos de Runge-Kutta de diferentes ordens (com as respectivas tabelas de parâmetros):

- Runge-Kutta de 1ª ordem: Método de Euler.

0		
	1	

- Runge-Kutta de 2ª ordem: Método do Ponto Médio.

0		
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
	0	1

- Runge-Kutta de 3ª ordem: Método de Heun.

0		
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{4}$	0 $\frac{3}{4}$

- Runge-Kutta de 4ª ordem: Versão clássica.

0			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	
1	0	0	1
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$

- Runge-Kutta de 5ª ordem: Primeira fórmula do Método de Runge-Kutta-Fehlberg.

0						
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$					
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$				
$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$-\frac{7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$			
1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$-\frac{845}{4104}$		
$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$-\frac{3544}{2565}$	$\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$	
	$\frac{16}{135}$	0	$\frac{6656}{12825}$	$\frac{28561}{56430}$	$-\frac{9}{50}$	$\frac{2}{55}$

## 2.2. Aquífero de Fetkovich como Sistema de Equações Diferenciais

Uma maior discussão sobre o modelo de aquífero proposto por Fetkovich e o método de resolução que leva seu nome é apresentada em [2]. De forma resumida, o comportamento do modelo de aquífero tem a seguinte forma:

$$\frac{d^2 W_e}{dt^2} = -\frac{J p_{i,aq}}{W_{e,max}} \frac{dW_e}{dt} - J \frac{dp_{res}}{dt} \quad (2.3)$$

Definindo  $\frac{dW_e}{dt}$  como  $y_1(t)$  e  $W_e$  como  $y_2(t)$ , podemos reescrever 2.3 como um sistema de duas equações diferenciais:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= -\frac{J p_{i,aq}}{W_{e,max}} y_1 - J \frac{dp_{res}}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_1\end{aligned} \quad (2.4)$$

com condições iniciais:

$$\begin{aligned}y_1(t_0) &= J(p_{i,aq} - p_{i,res}) \\ y_2(t_0) &= 0\end{aligned}$$

## 2.3. Modelo de Reservatório Proposto

O termo  $\frac{dp_{res}}{dt}$  será função do modelo de reservatório proposto. Para um reservatório em que o equilíbrio hidrostático é alcançado *instantaneamente*<sup>1</sup> é possível demonstrar que<sup>2</sup>:

$$p_{res} = \frac{NB_o b(1 + c_{o,b} p_b) + W_{res} - P v_i(1 - c_r p_{i,res})}{NB_o b c_{o,b} + P v_i c_r} \quad (2.5)$$

onde

$$\begin{aligned}N &= N_i - N p \\ W_{res} &= W_{i,res} + W_e\end{aligned}$$

<sup>1</sup>Este comportamento é equivalente a um reservatório com altas permeabilidades, bem conectado e com óleo pouco compressível.

<sup>2</sup>Maiores detalhes em [2]

Derivando 2.5 no tempo:

$$\frac{dp_{res}}{dt} = \frac{\frac{dNp}{dt} Bo_b [c_{o,b}(p_{res} - p_b) - 1] + \frac{dW_e}{dt}}{(N_i - Np) Bo_b c_{o,b} + P v_i c_r} \quad (2.6)$$

Estas equações são inseridas em 2.4 para resolver o problema proposto. No caso de um teste de produção, em que a vazão de óleo ( $\frac{dNp}{dt}$ ) e a produção acumulada ( $Np$ ) são conhecidas, serão necessárias apenas duas equações diferenciais. Para um problema em que a vazão de óleo é função da pressão no reservatório, duas novas equações diferenciais são adicionadas, governando  $\frac{dNp}{dt}$  e  $Np$ .

### 3. Implementação

Todo o código utilizado nesta análise foi desenvolvido em C++. Foram criados objetos próprios para cada elemento integrante do problema proposto:

**IVPSystem** Classe que define um problema de valor inicial na forma 2.1.

- O usuário precisa especificar  $f_i(t, \vec{y})$ ,  $a$  (tempo inicial),  $b$  (tempo final),  $n$  (número de passos de tempo) e  $y_i(a)$  (valores iniciais).
- O usuário também pode especificar as soluções exatas ( $y_i = f_i(t)$ ), para calcular o erro de aproximação.

**Fetkovich** Classe que resolve o comportamento de um aquífero como proposto por Fetkovich.

- O usuário precisa definir as características do aquífero e prover uma função que retorne a pressão na interface do aquífero com o reservatório. Esta função depende do tempo e do influxo acumulado de água do aquífero para o reservatório ( $W_e$ ).
- Uma modificação foi feita na Implementação do Método de Fetkovich com relação aos testes apresentados nos relatórios anteriores.
  - Como existe um termo implícito a ser resolvido no método, anteriormente foi admitido realizar um cálculo com até 20 iterações.
  - Aplicando a mesma filosofia dos métodos preditor-corretor, este limite agora é de apenas uma iteração. E nos testes realizados os resultados foram muito parecidos.
  - Desta forma o Método de Fetkovich agora tem apenas duas avaliações da função de pressão a cada passo de tempo.

### 4. Resultados

Nesta avaliação o foco foi no método de Runge-Kutta de quarta ordem. Foram utilizados os mesmos três problemas de valor inicial dos relatórios anteriores. As aproximações de  $y(t)$  foram, como esperado, iguais às da aplicação do método de Runge-Kutta com uma equação diferencial. A diferença foi a estimativa da integral de  $y(t)$ . Anteriormente este cálculo foi feito com os métodos de Simpson e do Trapézio compostos<sup>3</sup>. Agora este cálculo foi inserido no método de Runge-Kutta.

1.  $y' = y - t^2 + 1$ ,  $0 \leq t \leq 2$ ,  $y(0) = 0.5$
2.  $y' = -2y + 3e^t$ ,  $0 \leq t \leq 2$ ,  $y(0) = 3.0$
3.  $y' = 4\cos(t) - 8\sin(t) + 2y$ ,  $0 \leq t \leq 2$ ,  $y(0) = 3.0$

Os resultados exatos de cada problema são, respectivamente:

1.  $y = (t + 1)^2 - 0.5e^t$
2.  $y = 2e^{-2t} + e^t$
3.  $y = 4\sin(t) + 3e^{2t}$

Observa-se nas figuras 1, 2 e 3 que os resultados da integral de  $y(t)$  incluída nos cálculos de Runge-Kutta tem um comportamento mais suave, sem as oscilações da integração numérica com Simpson e Trapézio composto.

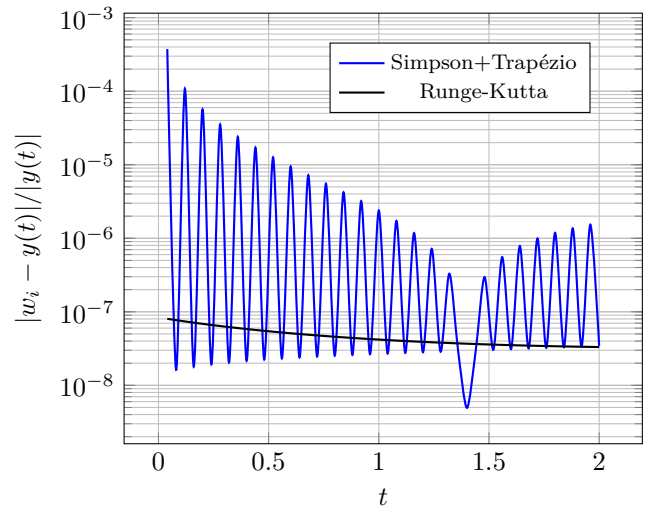


Figura 1: Erro da aproximação da acumulada de  $y(t)$  com o método de Runge-Kutta de quarta ordem e por integração numérica com Simpson e Trapézio Composto, do PVI número 1.

O problema proposto a ser resolvido pelo Método de Fetkovich e com o Método de Runge-Kutta de quarta ordem é o de um aquífero inicialmente em equilíbrio com o reservatório ( $p_{i,aq} = p_{i,res}$ ). É feito um teste de produção de 30 dias, com o poço produzindo  $500m^3/d$ . Em

<sup>3</sup>O expediente utilizado para calcular esta integral numérica está descrito em [3]

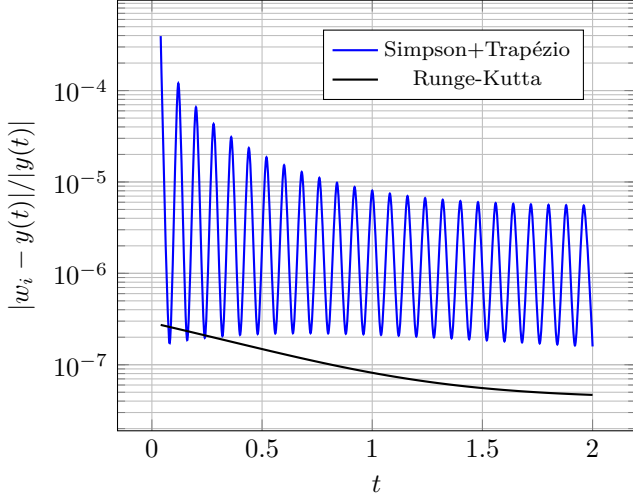


Figura 2: Erro da aproximação da acumulada de  $y(t)$  com o método de Runge-Kutta de quarta ordem e por integração numérica com Simpson e Trapézio Composto, do PVI número 2.

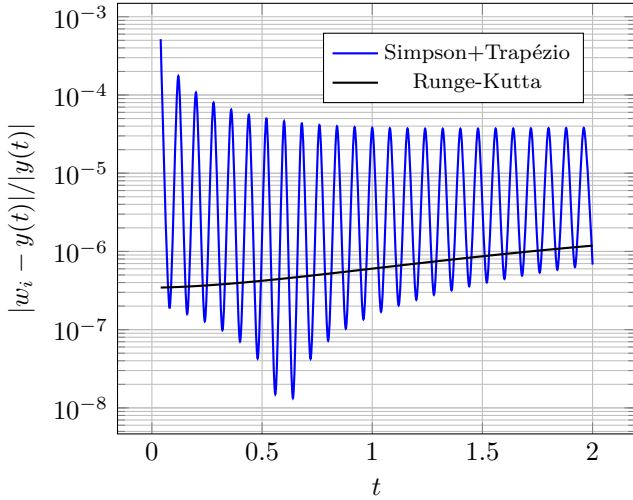


Figura 3: Erro da aproximação da acumulada de  $y(t)$  com o método de Runge-Kutta de quarta ordem e por integração numérica com Simpson e Trapézio Composto, do PVI número 3.

seguida o poço é fechado por um longo tempo. Este problema é numericamente mais complicado que o avaliado nos relatórios anteriores, pois há uma mudança brusca de comportamento no momento em que o poço fecha. Não há solução analítica.

Os parâmetros do aquífero e do reservatório seguem os mesmos valores apresentados em [2]. A exceção é  $p_{i,aq}$ , que, como comentado acima, agora tem o mesmo valor que a pressão inicial do reservatório.

Os testes foram realizados de modo que o número de avaliações da função de pressão fosse a mesma entre os métodos, ou seja, o Método de Fetkovich utilizou passos de tempo duas vezes menores que o de Runge-Kutta. Observa-se nas figuras 4 e 5 que as respostas foram próximas, mas diferentes. A maior diferença aparece na estimativa de volume de água que passou do aquífero para o

reservatório.

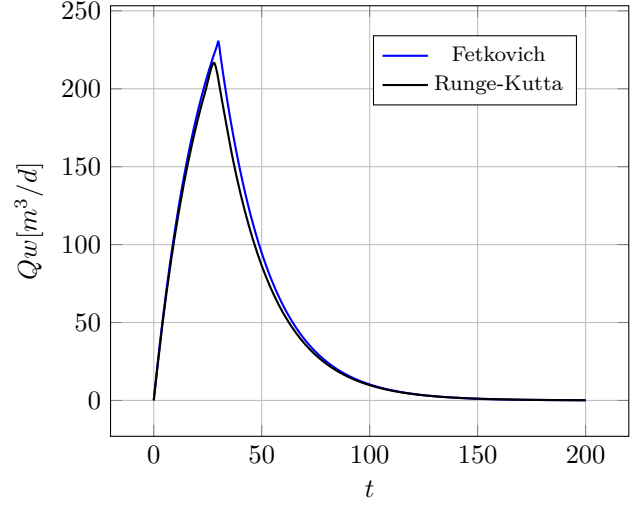


Figura 4: Vazão de água com o Método de Fetkovich e com o Método de Runge-Kutta de quarta ordem.

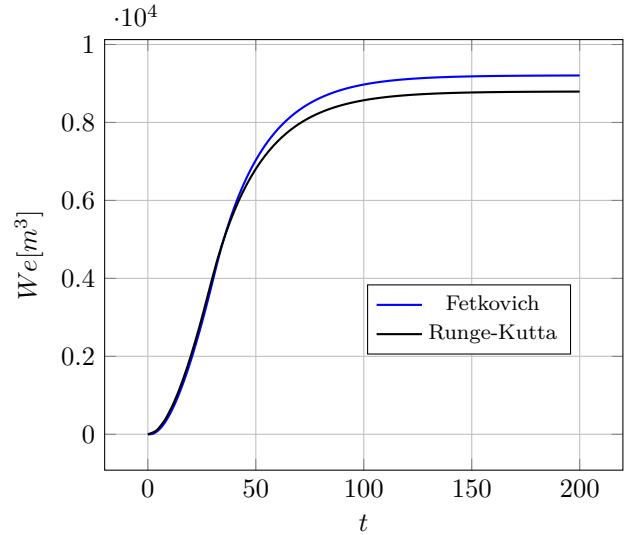


Figura 5: Acumulada de água com o Método de Fetkovich e com o Método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Para avaliar a qualidade das respostas do Método de Runge-Kutta de quarta ordem para o problema proposto, foi feita uma estimativa com um Método de Runge-Kutta de quinta ordem com 100 vezes mais passos de tempo. A figura 6 compara o erro de aproximação real (comparando com a resposta exata) com o erro de aproximação estimado (comparando com a resposta do Runge-Kutta de quinta ordem). Observa-se que a estimativa de erro está na mesma *ordem de grandeza* do erro real.

Ao comparar as resposta de Fetkovich e Runge-Kutta de quarta ordem com os resultados de aplicar o método de Runge-Kutta de quinta ordem com um maior número de passos de tempo (figura 7) fica claro que o Método de Fetkovich tem resultados melhores.

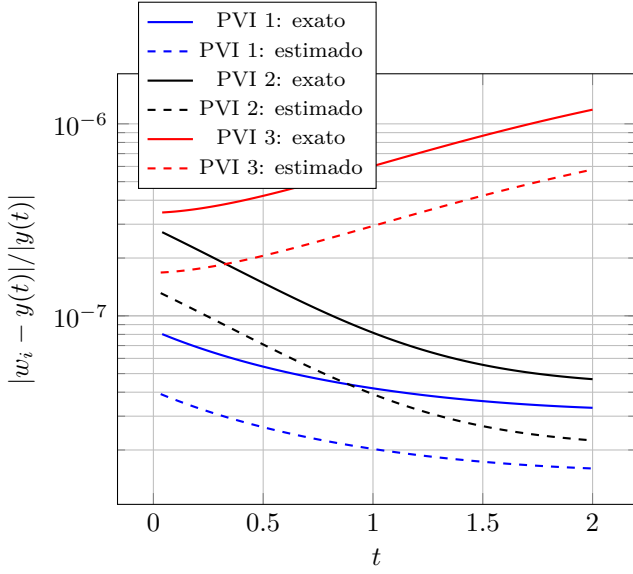


Figura 6: Erro real e estimado da aproximação da acumulada de  $y(t)$  com o método de Runge-Kutta de quarta ordem para os três PVI de teste.

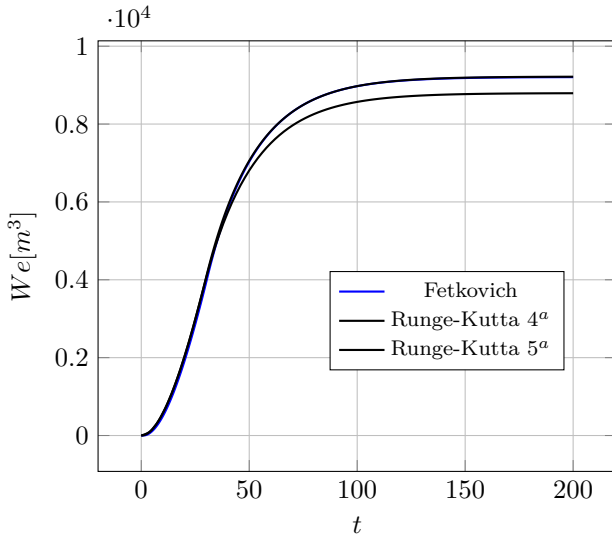


Figura 7: Acumulada de água com o Método de Fetkovich e com o Métodos de Runge-Kutta de quarta e quinta ordem.

O código foi implementado em C++ e em um único arquivo. Pode ser encontrado em <https://github.com/TiagoCAAmorim/numerical-methods>.

## 5. Conclusão

Foi possível testar problemas mais desafiadores ao passar de métodos de aproximação numérica de uma equação diferencial de primeira ordem para métodos que resolvem um sistema de equações. Para o problema proposto o Método de Runge-Kutta teve desempenho pior que o do Método de Fetkovich.

## Apêndice A. Lista de Variáveis

- $Bo$ : Fator volume de formação do óleo no reservatório ( $m^3/m^3$ ).
- $Bo_b$ : Fator volume de formação do óleo no reservatório na pressão de bolha ( $m^3/m^3$ ).
- $Bw$ : Fator volume de formação da água no reservatório ( $m^3/m^3$ ).
- $c_r$ : Compressibilidade do volume poroso ( $1/bar$ ).
- $c_{o,b}$ : Compressibilidade do óleo na pressão de bolha ( $1/bar$ ).
- $c_{aq}$ : Compressibilidade total do aquífero ( $1/bar$ ).
- $J$ : Índice de produtividade do aquífero ( $m^3/d/bar$ ).
- $N$ : Volume de óleo no reservatório, medido em condições padrão ( $m^3$ ).
- $N_i$ : Volume de óleo no reservatório inicial, medido em condições padrão ( $m^3$ ).
- $Np$ : Volume de óleo produzido, medido em condições padrão ( $m^3$ ).
- $p_{aq}$ : Pressão média do aquífero ( $bar$ ).
- $p_{i,aq}$ : Pressão inicial do aquífero ( $bar$ ).
- $p_b$ : Pressão de bolha do óleo ( $bar$ ).
- $p_{res}$ : Pressão na interface entre o aquífero e o reservatório ( $bar$ ).
- $p_{i,res}$ : Pressão inicial na interface entre o aquífero e o reservatório ( $bar$ ).
- $Pv$ : Volume poroso no reservatório ( $m^3$ ).
- $Pv_i$ : Volume poroso no reservatório na pressão inicial ( $m^3$ ).
- $Q_o$  ou  $\frac{dNp}{dt}$ : Vazão de óleo produzido ( $m^3/d$ ).
- $Q_w$  ou  $\frac{dW_e}{dt}$ : Vazão de água do aquífero para o reservatório ( $m^3/d$ ).
- $\Delta t_j$ : Diferença entre os tempos  $t_{j-1}$  e  $t_j$  ( $d$ ).
- $W_e$ : Volume de água acumulado do aquífero para o reservatório ( $m^3$ ).
- $W_{e,max}$ : Máximo influxo de água possível do aquífero para o reservatório ( $m^3$ ).
- $(\Delta W_e)_j$ : Influxo de água entre os tempos  $t_{j-1}$  e  $t_j$  ( $m^3$ ).
- $W_{i,aq}$ : Volume inicial do aquífero ( $m^3$ ).
- $W_{res}$ : Volume de água no reservatório ( $m^3$ ).
- $W_{i,res}$ : Volume inicial de água no reservatório ( $m^3$ ).

## Referências

- [1] M. J. Fetkovich, A simplified approach to water influx calculations-finite aquifer systems, *Journal of petroleum technology* 23 (07) (1971) 814–828.
- [2] T. C. A. Amorim, Aplicação do método de euler para resolver o comportamento de aquíferos analíticos, Relatório número 6 da disciplina IM253: Métodos Numéricos para Fenômenos de Transporte (09 2023).
- [3] T. C. A. Amorim, Aplicação dos métodos de runge-kutta para resolver o comportamento de aquíferos analíticos, Relatório número 7 da disciplina IM253: Métodos Numéricos para Fenômenos de Transporte (11 2023).
- [4] T. C. A. Amorim, Aplicação de métodos de múltiplo passo para resolver o comportamento de aquíferos analíticos, Relatório número 8 da disciplina IM253: Métodos Numéricos para Fenômenos de Transporte (11 2023).
- [5] R. L. Burden, J. D. Faires, A. M. Burden, *Análise numérica*, Cengage Learning, 2016.