

# Aplicação dos Métodos de Runge-Kutta para Resolver o Comportamento de Aquíferos Analíticos\*

Tiago C. A. Amorim<sup>2</sup>

<sup>a</sup>Petrobras, Av. Henrique Valadares, 28, Rio de Janeiro, 20231-030, RJ, Brasil

## Abstract

O algoritmo proposto por Fetkovich para modelar o comportamento de um aquífero usa uma formulação implícita com respeito à pressão da interface entre o aquífero e o reservatório. Foi avaliado o uso dos métodos de Runge-Kutta para resolver o aquífero de Fetkovich. As avaliações mostraram que apenas o método de Runge-Kutta de quarta ordem consegue se aproximar dos erros de aproximação do método de Fetkovich. Para um número menor de passos de tempo o método de Fetkovich se mostrou melhor que o de Runge-Kutta.

**Keywords:** Método de Fetkovich, Método de Euler, Método de Runge-Kutta, Método de Aitken, Fluxo em Meio Poroso

## 1. Introdução

O modelo de aquífero proposto por Fetkovich resulta em uma equação diferencial ordinária (EDO). O método proposto realiza uma simplificação nesta EDO e propõe um método numérico de resolução do influxo de água com o tempo.

Este trabalho se propõe a não realizar a simplificação feita por Fetkovich e aplica métodos de aproximação numérica de EDO para resolver este problema. Em uma primeira avaliação constatou-se que o método de Euler não é adequado para resolver o modelo de aquífero proposto por Fetkovich [1]. Neste relatório é avaliada a aplicação do método de Runge-Kutta de quarta ordem. Também é revista a aplicação do método de Aitken para melhorar as respostas do método de Euler.

## 2. Metodologia

Uma descrição dos métodos de Fetkovich e de Euler, além da formalização do modelo de aquífero proposto por Fetkovich como um problema de valor inicial (PVI), foram feitas com mais detalhe no relatório da primeira parte da avaliação proposta [1]. Neste relatório estes tópicos são apresentados de forma resumida.

### 2.1. Método de Fetkovich

O modelo de Fetkovich assume que a contribuição de um aquífero é diretamente proporcional à diferença entre

a pressão média do aquífero e a pressão na interface entre o reservatório e o aquífero, e negligencia quaisquer efeitos transientes no aquífero [2]. O método de Fetkovich resolve a EDO resultante deste modelo assumindo uma pressão constante na interface entre o aquífero e o reservatório, de modo que é possível encontrar uma solução analítica para este problema:

$$W_e = \frac{W_{e,max}}{p_{i,aq}} (p_{i,aq} - p_{res}) \left( 1 - e^{-J \frac{p_{i,aq}}{W_{e,max}} t} \right) \quad (2.1)$$

Para lidar com a premissa de pressão constante na interface entre o aquífero e o reservatório, o método de Fetkovich propõe resolver o problema de forma incremental. Para um tempo  $t_j$  com  $j = 1, 2, \dots, n$ :

$$(\Delta W_e)_j = \frac{W_{e,max}}{p_{i,aq}} ((\bar{p}_{i,aq})_{j-1} - (\bar{p}_{res})_j) \left( 1 - e^{-J \frac{p_{i,aq}}{W_{e,max}} \Delta t_j} \right) \quad (2.2)$$

onde

$$(\bar{p}_{res})_j = \frac{(p_{res})_j + (p_{res})_{j-1}}{2} \quad (2.3)$$

$$(\bar{p}_{i,aq})_j = p_{i,aq} \left( 1 - \frac{(\Delta W_e)_j}{W_{e,max}} \right) \quad (2.4)$$

Com  $(p_{res})_0 = p_{i,res}$  e  $(\bar{p}_{i,aq})_0 = p_{i,aq}$ .

Ao final do procedimento, o volume de água que passa do aquífero ao reservatório é a soma dos  $(\Delta W_e)_j$ . O termo da pressão no aquífero é calculado no passo de tempo anterior. O único termo que não pode ser calculado diretamente é  $(p_{res})_j$ . Como este termo é normalmente função, entre outros, do influxo de água e do tempo, a cada passo de tempo é preciso resolver um problema do tipo  $g(y) = y$ .

\*Relatório número 5 como parte dos requisitos da disciplina IM253: Métodos Numéricos para Fenômenos de Transporte.

\*\*Atualmente cursando doutorado no Departamento de Engenharia de Petróleo da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP (Campinas/SP, Brasil).

Email address: t100675@dac.unicamp.br (Tiago C. A. Amorim)

## 2.2. Modelo de Fetkovich como PVI

O modelo de aquífero proposto por Fetkovich pode ser transformado em um problema de valor inicial. Serão feitas algumas simplificações no modelo de reservatório para conseguir uma resposta analítica com a qual avaliar as diferentes abordagens<sup>1</sup>:

- No reservatório o equilíbrio hidrostático é alcançado *instantaneamente*.
- Fator volume de formação da água ( $Bw$ ) constante e igual a 1.0.
- Fator volume de formação do óleo ( $Bo$ ) varia linearmente com a pressão.
- Volume poroso do reservatório ( $Pv$ ) varia linearmente com a pressão.
- Não há produção de óleo no intervalo de tempo em que é feita esta análise ( $\frac{dN}{dt} = 0$ ).

Com estas simplificações chega-se a:

$$\frac{d^2 W_e}{dt^2} = -J \left( \frac{p_{i,aq}}{W_{e,max}} + \frac{1}{NB_{ob}c_{o,b} + Pv_i c_r} \right) \frac{dW_e}{dt} \quad (2.5)$$

com

$$\left. \frac{dW_e}{dt} \right|_{t=0} = J(p_{i,aq} - p_{i,res})$$

A EDO 2.5 tem solução analítica na forma:

$$\frac{dW_e}{dt} = J(p_{i,aq} - p_{i,res}) e^{-J \left( \frac{p_{i,aq}}{W_{e,max}} + \frac{1}{NB_{ob}c_{o,b} + Pv_i c_r} \right) t} \quad (2.6)$$

Integrando 2.6 no tempo, e sabendo que  $W_e(t=0) = 0$ , temos uma expressão analítica para o influxo de água do aquífero para o reservatório:

$$\alpha = \left( \frac{p_{i,aq}}{W_{e,max}} + \frac{1}{NB_{ob}c_{o,b} + Pv_i c_r} \right) \\ W_e = \frac{p_{i,aq} - p_{i,res}}{\alpha} (1 - e^{-J\alpha t}) \quad (2.7)$$

Desta forma será possível comparar as respostas exatas de  $\frac{dW_e}{dt}$  e  $W_e$  com as aproximações do método de Fetkovich e dos métodos de Euler e Runge-Kutta.

## 2.3. Método de Euler

O método de Euler se propõe a encontrar uma aproximação ( $w_j \approx y(t_j)$ ) da solução de um problema de valor inicial bem posto (PVI):

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha \quad (2.8)$$

A proposta do método de Euler é usar uma aproximação de primeira ordem de um polinômio de Taylor e resolver o PVI discretizando no tempo. O método de Euler para  $n$  passos de tempo pode ser resumido em:

$$\begin{aligned} h &= \frac{b-a}{n} \\ t_j &= a + hj \\ w_0 &= \alpha \\ w_{j+1} &= w_j + hf(t_j, w_j), \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

O método de Euler tem erro de truncamento local  $\mathcal{O}(h)$ .

## 2.4. Métodos de Runge-Kutta

A família de métodos de Runge-Kutta tem erro de truncamento local de alta ordem [3], e, ao contrário dos métodos de Taylor, não necessita do cálculo de derivadas de  $f(t, y)$ . Os métodos de Runge-Kutta partem do método de Taylor de ordem  $n$  (2.10) e dos dos polinômios de Taylor para duas variáveis (2.11).

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha \\ w_{j+1} &= w_j + hT^{(n)}(t_j, w_j), \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (2.10a)$$

com

$$T^{(n)}(t_j, w_j) = f(t_j, w_j) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^k}{(k+1)!} f^{(k)}(t_j, w_j) \quad (2.10b)$$

$$\begin{aligned} f(t, y) &= P_n(t, y) + R_n(t, y) \\ P_n(t, y) &= f(t_0, y_0) + \end{aligned} \quad (2.11a)$$

$$\sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (t-t_0)^{k-j} (y-y_0)^j \frac{\partial^k f}{\partial t^{k-j} \partial y^j} (t_0, y_0) \right] \quad (2.11b)$$

$$\begin{aligned} R_n(t, y) &= \frac{1}{n+1!} \\ &\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (t-t_0)^{n+1-j} (y-y_0)^j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial t^{n+1-j} \partial y^j} (\xi, \mu) \end{aligned} \quad (2.11c)$$

com

$$\xi \in [t_0, t] \text{ e } \mu \in [y_0, y]$$

<sup>1</sup>Maiores detalhes em [1].

Os métodos de Runge-Kutta de segunda ordem buscam uma aproximação de  $T^{(2)}(t, y)$  da forma  $a_1 f(t + \alpha_1, y + \beta_1)$ , com um erro de truncamento local não maior que  $\mathcal{O}(h^2)$ . Igualando o primeiro termo com a expansão do segundo termo em um polinômio de Taylor de segunda ordem, chega-se ao método do Ponto Médio [3]:

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha \\ k_1 &= hf(t_j, w_j) \\ k_2 &= hf\left(t_j + \frac{h}{2}, w_j + \frac{1}{2}k_1\right) \\ w_{j+1} &= w_j + k_2 \\ \text{com } j &= 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (2.12)$$

O método do Ponto Médio tem erro de truncamento local  $\mathcal{O}(h^2)$ .

Para os métodos de Runge-Kutta de terceira ordem é preciso aproximar  $T^{(3)}(t, y)$  com  $f(t + \alpha_1, y + \delta_1 f(t + \alpha_2, y + \delta_2 f(t, y)))$ . Um dos métodos de Runge-Kutta de terceira ordem é o método de Heu:

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha \\ k_1 &= hf(t_j, w_j) \\ k_2 &= hf\left(t_j + \frac{h}{3}, w_j + \frac{1}{3}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(t_j + \frac{2h}{3}, w_j + \frac{2}{3}k_2\right) \\ w_{j+1} &= w_j + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3) \\ \text{com } j &= 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (2.13)$$

O método de Heu tem erro de truncamento local  $\mathcal{O}(h^3)$ .

O método de Runge-Kutta de quarta ordem tem a forma:

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha \\ k_1 &= hf(t_j, w_j) \\ k_2 &= hf\left(t_j + \frac{h}{2}, w_j + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(t_j + \frac{h}{2}, w_j + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 &= hf(t_{j+1}, w_j + k_3) \\ w_{j+1} &= w_j + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ \text{com } j &= 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (2.14)$$

O método de Runge-Kutta de quarta ordem tem erro de truncamento local  $\mathcal{O}(h^4)$ .

### 3. Implementação

Todo o código utilizado nesta análise foi desenvolvido em C++. Foram criados objetos próprios para cada elemento integrante do problema proposto:

**IVP** Classe que define um problema de valor inicial na forma 2.8.

- O usuário precisa especificar  $f(t, y)$ ,  $a$  (tempo inicial),  $b$  (tempo final),  $n$  (número de passos de tempo) e  $y(a)$  (valor inicial).
- Opcionalmente o usuário pode prover  $\frac{\partial f}{\partial y}$  e  $\frac{df}{dt}$  para que seja estimado o limitante do erro de aproximação do método de Euler. O usuário também pode prover diretamente os valores de  $L$  e  $M$ .
- O usuário também pode especificar a solução exata ( $y = f(t)$ ), para calcular o erro de aproximação.
- São disponibilizados diferentes métodos de resolução do PVI: Euler, Runge-Kutta de segunda, terceira e quarta ordem.
- Além dos métodos de Euler e Runge-Kutta, foi implementada uma rotina que tenta melhorar as respostas utilizando o método de Aitken. Nesta opção o método de Euler ou Runge-Kutta é feito com 3 diferentes números de passos de tempo:  $n$ ,  $2n$  e  $4n$ . Nos passos de tempo comuns entre as 3 resoluções é aplicado o método de Aitken<sup>2</sup>:

$$\hat{w}_j = w_j^{(n)} - \frac{\left(w_{2j}^{(2n)} - w_j^{(n)}\right)^2}{w_{4j}^{(4n)} - 2w_{2j}^{(2n)} + w_j^{(n)}} \quad (3.1)$$

**Spline** Classe que constrói uma função interpoladora do tipo Spline natural a um conjunto de pontos  $(x, y)$  [4].

- Os valores das funções que definem  $L$  e  $M$  dependem de  $y(t)$  (que é aproximado por  $w$ ). Estas funções só podem ser avaliadas nos  $n$  valores de  $w_i$  que são calculados pelo método de Euler.
- Esta classe foi incluída no código para incrementar a busca pelos valores de  $L$  e  $M$ . São criadas splines a partir dos valores calculados de cada função, de modo que um número maior de pontos podem ser avaliados.

**Integration** Classe que computa a integral numérica de um conjunto de pontos  $(x, y)$ .

---

<sup>2</sup> $w_j^{(n)}$  é a aproximação de  $y(t_j)$  de uma aplicação do método de Euler ou Runge-Kutta com  $n$  passos.

- Como o PVI proposto resolve  $\frac{dW_e}{dt}$ , esta classe será utilizada para gerar os valores de  $W_e$  a partir dos resultados dos métodos de Euler ou Runge-Kutta.
- Foram implementadas 3 opções de cálculo de integral numérica: Trapézio Composto, Simpson Composto e *Simpson Composto de Passo Variável*.
- O cálculo com *Simpson Composto de Passo Variável*<sup>3</sup> usa a mesma lógica do método de Simpson Composto de usar os interpoladores de Lagrange. A diferença deste método é que não assume que  $(x_{i+1} - x_i)$  tem o mesmo valor entre os pares de pontos contíguos. A cada três pontos é feita uma integração com esta regra (3.2). Caso o número total de pontos for par, o valor da integral entre os dois últimos pontos é feito com a regra do Trapézio<sup>4</sup>. A integral numérica entre três pontos contíguos  $(x_i, y_i)$  tais que  $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$  tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
h_1 &= x_i - x_{i-1} \\
h_2 &= x_{i+1} - x_i \\
w_1 &= 2h_1 + h_2 \left(1 - \frac{h_2}{h_1}\right) \\
w_2 &= \frac{(h_1 + h_2)^3}{h_1 h_2} \\
w_3 &= 2h_2 + h_1 \left(1 - \frac{h_1}{h_2}\right) \\
\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx &\approx \frac{1}{6}(w_1 y_{i-1} + w_2 y_i + w_3 y_{i+1}) \quad (3.2)
\end{aligned}$$

**Fetkovich** Classe que resolve o comportamento de um aquífero como proposto por Fetkovich.

- O usuário precisa definir as características do aquífero e prover uma função que retorne a pressão na interface do aquífero com o reservatório. Esta função depende do tempo e do influxo acumulado de água do aquífero para o reservatório ( $W_e$ ).

Para facilitar a estimativa de parâmetros de aquífero e reservatório foram implementadas algumas correlações clássicas:

- Newman: Compressibilidade de rocha [5].
- Standing: Pressão de bolha, compressibilidade do óleo na pressão de bolha e fator volume de formação do óleo na pressão de bolha [6].

<sup>3</sup>Este não é o nome oficial deste método. Não foi encontrado no livro de referência esta variação de integração numérica.

<sup>4</sup>Para o estudo em questão o passo é constante, de modo que esta implementação não é estritamente necessária. Optou-se por montar um código mais flexível para uso em aplicações futuras.

## 4. Resultados

Foram utilizados os mesmos problemas de valor inicial do relatório anterior para comparar os resultados do método de Runge-Kutta de quarta ordem com o de Euler:

1.  $y' = y - t^2 + 1$ ,  $0 \leq t \leq 2$ ,  $y(0) = 0.5$
2.  $y' = -2y + 3e^t$ ,  $0 \leq t \leq 2$ ,  $y(0) = 3.0$
3.  $y' = 4\cos(t) - 8\sin(t) + 2y$ ,  $0 \leq t \leq 2$ ,  $y(0) = 3.0$

Os resultados exatos de cada problema são, respectivamente:

1.  $y = (t + 1)^2 - 0.5e^t$
2.  $y = 2e^{-2t} + e^t$
3.  $y = 4\sin(t) + 3e^{2t}$

Foi assumido que em uma aplicação mais computacionalmente intensiva a avaliação da função  $f(t, y)$  tem o maior peso. Para levar em consideração esta hipótese, em todas as comparações feitas a seguir o número de avaliações de  $f(t, y)$  em cada opção é o mesmo. Por exemplo, o método de Euler, que necessita de apenas uma avaliação de  $f(t, y)$  a cada passo de tempo, terá quatro vezes mais passos de tempo que o método de Runge-Kutta de quarta ordem, que necessita de quatro avaliações por passo de tempo.

Uma primeira mudança com relação à avaliação anterior foi a revisão do número de passos de tempo utilizados no método de Aitken (Figuras 1, 2 e 3). Anteriormente foi definida uma progressão linear do número de passos de tempo ( $n$ ,  $2n$  e  $3n$ ). As avaliações com os PVI de teste indicaram o aparente ganho observado anteriormente ao usar Euler com Aitken em uma progressão linear era efeito de um número maior de avaliações de  $f(t, y)$ . Foi observado um significativo ganho de qualidade ao usar a progressão geométrica no número de passos de tempo ( $n$ ,  $2n$  e  $4n$ ). Nos testes seguintes foi sempre usada a progressão geométrica.

Foi avaliado não somente o uso do método de Runge-Kutta para resolver os testes propostos, mas também o uso do método de Runge-Kutta associado ao método de Aitken (Figuras 4, 5 e 6). Os resultados mostraram que o método de Aitken conseguiu melhorar os resultados do método de Runge-Kutta de quarta ordem, mas em uma escala menor que na aplicação com o método de Euler. Novamente, em todas as análises foi utilizado o mesmo número total de avaliações de  $f(t, y)$ .

Na aplicação da resolução do modelo de aquífero de Fetkovich foi aplicado o mesmo expediente de ter o mesmo número de avaliações de  $f(t, y)$  em cada opção. Como no método de Fetkovich não se sabe de antemão *exatamente* quantas avaliações de  $f(t, y)$  serão feitas, assumiu-se que

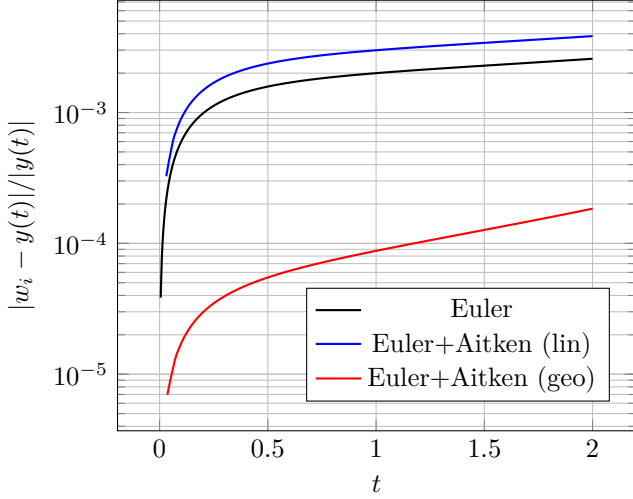


Figura 1: Erro da aproximação com o método de Euler e Euler associado com Aitken, com duas opções de progressão do número de passos de tempo, do PVI número 1.

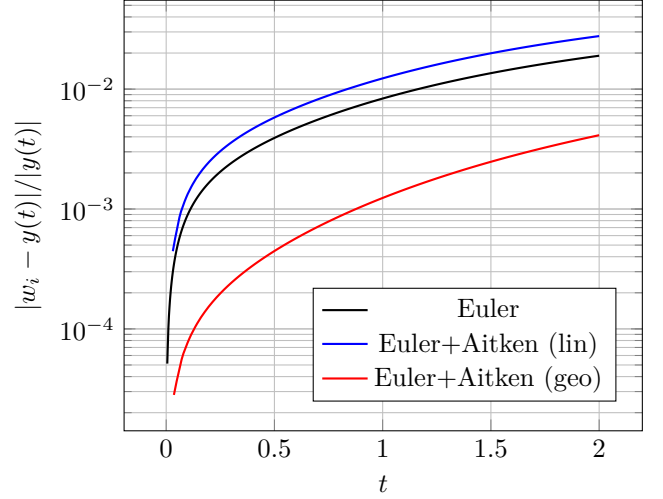


Figura 3: Erro da aproximação com o método de Euler e Euler associado com Aitken, com duas opções de progressão do número de passos de tempo, do PVI número 3.

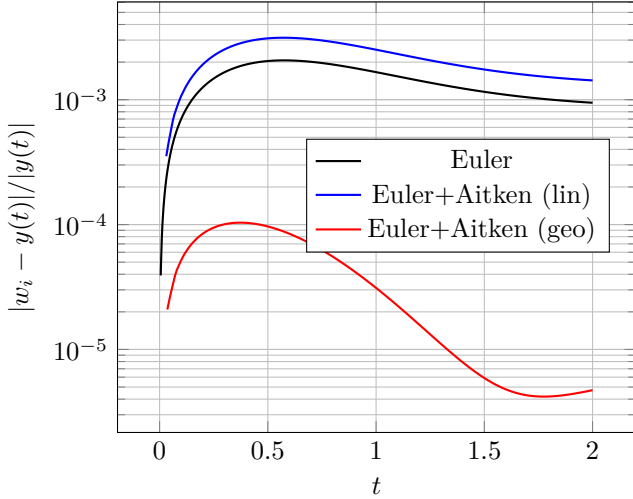


Figura 2: Erro da aproximação com o método de Euler e Euler associado com Aitken, com duas opções de progressão do número de passos de tempo, do PVI número 2.

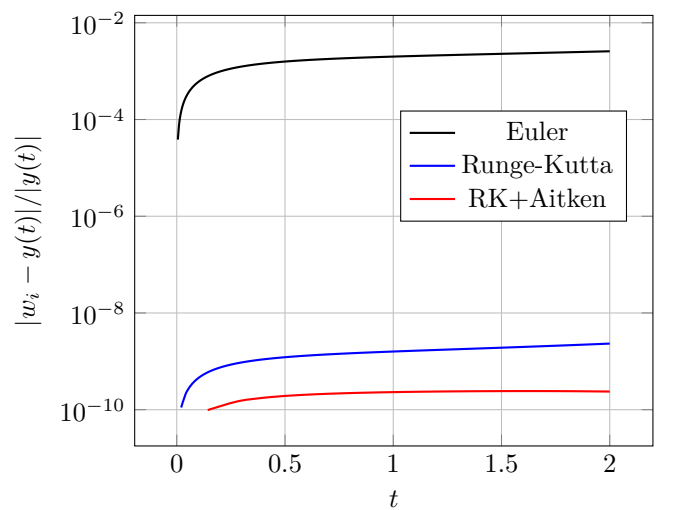


Figura 4: Erro da aproximação com os métodos de Euler, Runge-Kutta e Runge-Kutta associado com Aitken do PVI número 1.

em média 2 avaliações são feitas a cada passo de tempo<sup>5</sup>. Para o número de avaliações que foi estabelecido (392), o método de Runge-Kutta de quarta ordem parece ter um desempenho melhor que o do método de Fetkovich em termos de erro de estimativa da vazão de água (Figura 7). Como as vazões de água nos tempos longos são muito baixas e de menor interesse, a aparente degradação da resposta com o método de Fetkovich perde importância. Ao fazer a comparação em termos de produção acumulada de água (Figura 8), o método de Fetkovich se mostra mais

<sup>5</sup>No problema proposto o número exato de avaliações com o método de Fetkovich foi 233, enquanto os demais métodos usaram 392 avaliações. Optou-se por fazer a comparação assumindo 2 avaliações por time-step para se aproximar mais de um problema mais *geral*, em que a convergência do método de Fetkovich pode ser mais lenta que a observada.

estável que todos os demais.

Foi feita uma sensibilidade do erro de estimativa da vazão de água acumulada dos diferentes métodos testados em função do número de avaliações de  $f(t, y)$ . Os gráficos foram montados em função do erro relativo no tempo final (Figura 9) e do máximo erro relativo entre todos os time-steps (Figura 10). Os resultados mostram que o método de Fetkovich tem melhores resultados para um número menor de time-steps. O único método que teve resultados melhores que o de Fetkovich foi o de Runge-Kutta de quarta ordem, mas apenas para um número elevado de time-steps.

Uma sensibilidade adicional com métodos de Runge-Kutta de diferentes ordens (Figura 11) mostrou que o de quarta ordem tem maior eficiência que os demais para resolver o problema proposto.

O código foi implementado em C++ e em um único ar-

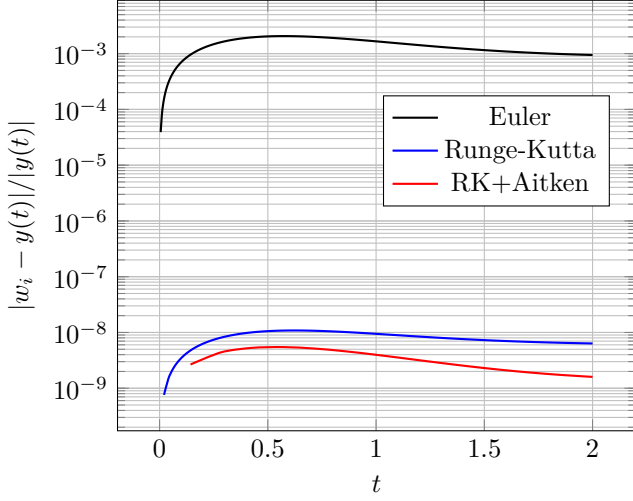


Figura 5: Erro da aproximação com os métodos de Euler, Runge-Kutta e Runge-Kutta associado com Aitken do PVI número 2.

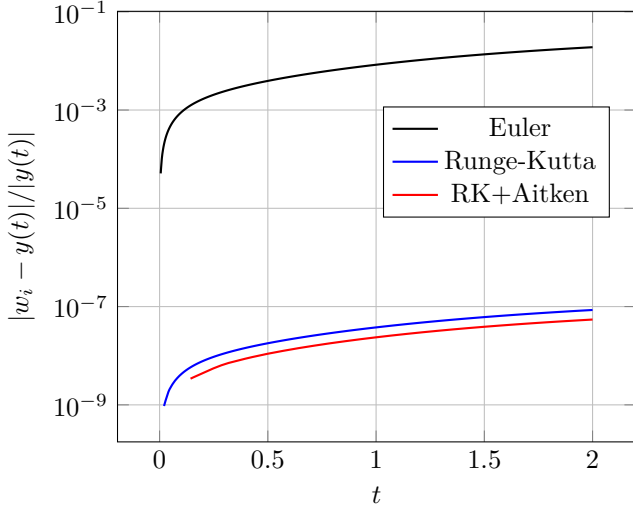


Figura 6: Erro da aproximação com os métodos de Euler, Runge-Kutta e Runge-Kutta associado com Aitken do PVI número 3.

quivo. Pode ser encontrado em <https://github.com/TiagoCAAmorim/numerical-methods>.

## 5. Conclusão

Foram avaliadas diferentes possibilidades para resolver o modelo de aquífero proposto por Fetkovich com métodos de Runge-Kutta. Entre os métodos de resolução de problemas de valor inicial, o método que se mostrou mais eficaz foi o de Runge-Kutta de quarta ordem. Contudo, o método de resolução proposto por Fetkovich se mostrou mais estável e eficiente, especialmente com um número menor de avaliações da função de interesse.

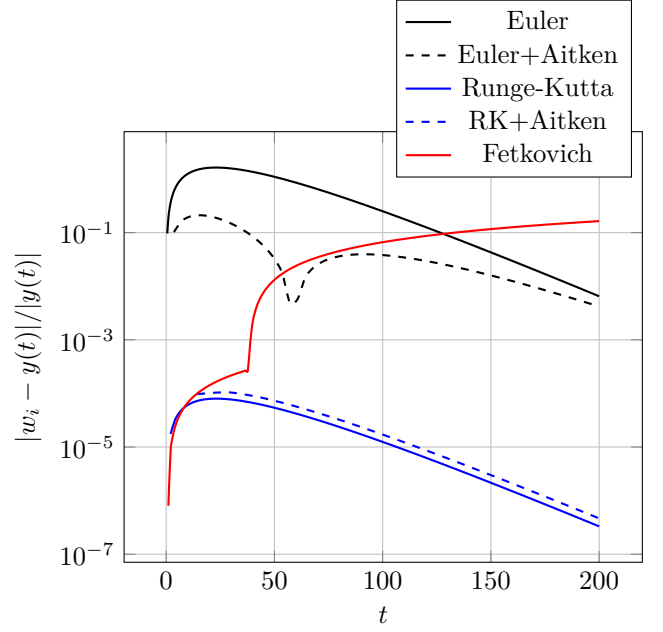


Figura 7: Erro da aproximação da vazão de água com os métodos de Euler, Runge-Kutta, Runge-Kutta+Aitken e Fetkovich do problema proposto.

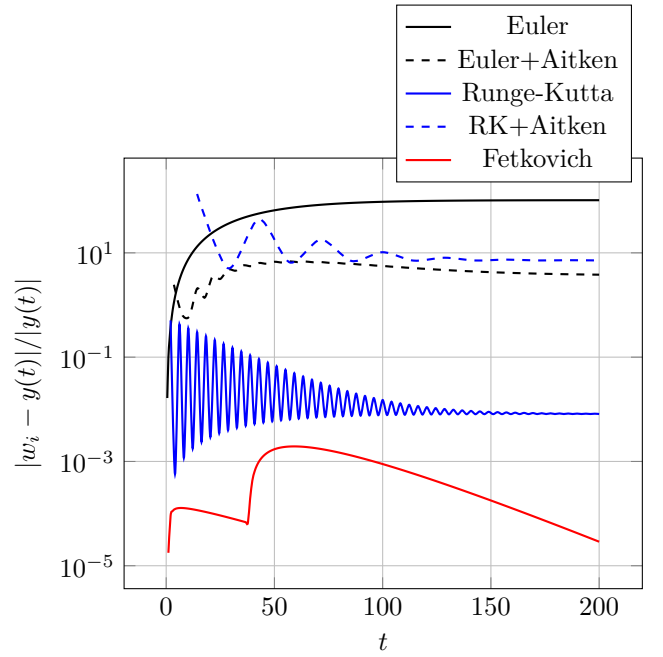


Figura 8: Erro da aproximação da vazão de água acumulada com os métodos de Euler, Runge-Kutta, Runge-Kutta+Aitken e Fetkovich do problema proposto.

## Apêndice A. Lista de Variáveis

$B_o$ : Fator volume de formação do óleo no reservatório ( $m^3/m^3z$ ).

$B_{ob}$ : Fator volume de formação do óleo no reservatório na pressão de bolha ( $m^3/m^3$ ).

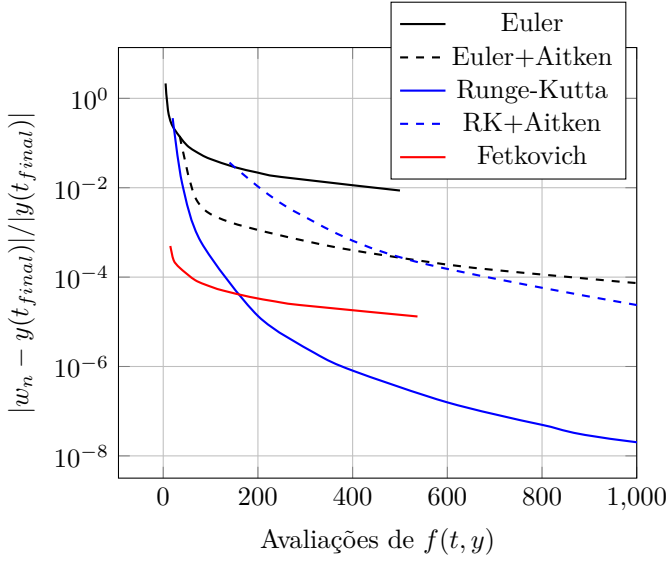


Figura 9: Sensibilidade do erro relativo da aproximação da vazão de água acumulada no tempo final com os métodos de Euler, Runge-Kutta, Runge-Kutta+Aitken e Fetkovich do problema proposto.

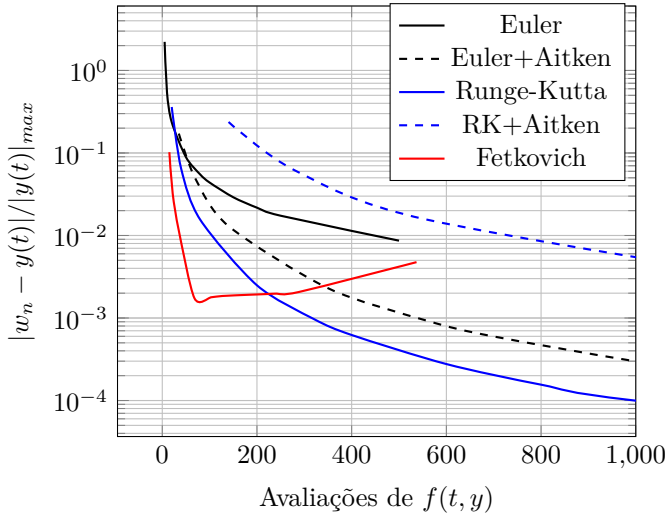


Figura 10: Sensibilidade do máximo erro relativo da aproximação da vazão de água acumulada com os métodos de Euler, Runge-Kutta, Runge-Kutta+Aitken e Fetkovich do problema proposto.

$Bw$ : Fator volume de formação da água no reservatório ( $m^3/m^3$ ).

$c_r$ : Compressibilidade do volume poroso ( $1/bar$ ).

$c_{o,b}$ : Compressibilidade do óleo na pressão de bolha ( $1/bar$ ).

$c_{aq}$ : Compressibilidade total do aquífero ( $1/bar$ ).

$J$ : Índice de produtividade do aquífero ( $m^3/d/bar$ ).

$L$ : Constante de Lipschitz.

$M$ : Limitante da derivada 2ª.

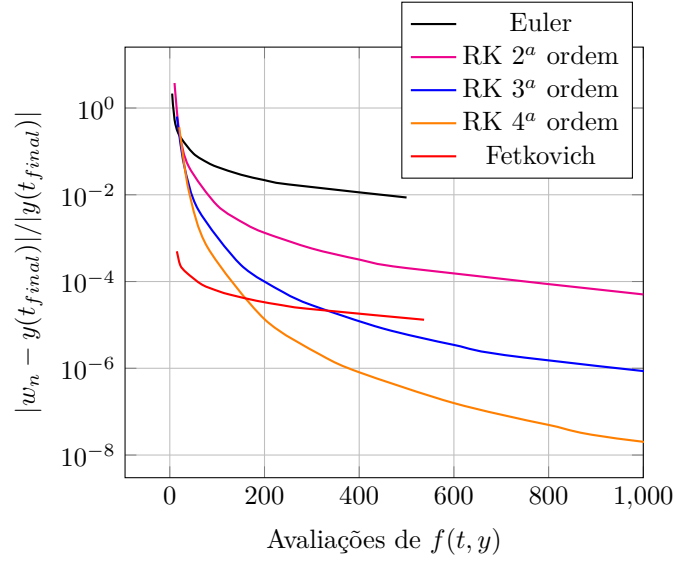


Figura 11: Sensibilidade do erro relativo da aproximação da vazão de água acumulada no tempo final com os métodos de Euler, Runge-Kutta de 2ª, 3ª e 4ª, e Fetkovich do problema proposto.

$N$ : Volume de óleo no reservatório medido em condições padrão ( $m^3$ ).

$p_{aq}$ : Pressão média do aquífero ( $bar$ ).

$p_{i,aq}$ : Pressão inicial do aquífero ( $bar$ ).

$(\bar{p}_{i,aq})_j$ : Pressão média do aquífero no tempo  $t_j$  ( $bar$ ).

$p_b$ : Pressão de bolha do óleo ( $bar$ ).

$p_{res}$ : Pressão na interface entre o aquífero e o reservatório ( $bar$ ).

$p_{i,res}$ : Pressão inicial na interface entre o aquífero e o reservatório ( $bar$ ).

$(\bar{p}_{res})_j$ : Pressão média na interface entre o aquífero e o reservatório entre os tempos  $t_{j-1}$  e  $t_j$  ( $bar$ ).

$Pv$ : Volume poroso no reservatório ( $m^3$ ).

$Pv_i$ : Volume poroso no reservatório na pressão inicial ( $m^3$ ).

$Q_w$  ou  $\frac{dW_e}{dt}$ : Vazão de água do aquífero para o reservatório ( $m^3/d$ ).

$\Delta t_j$ : Diferença entre os tempos  $t_{j-1}$  e  $t_j$  ( $d$ ).

$W_e$ : Volume de água acumulado do aquífero para o reservatório ( $m^3$ ).

$W_{e,max}$ : Máximo influxo de água possível<sup>6</sup> do aquífero para o reservatório ( $m^3$ ).

$(\Delta W_e)_j$ : Influxo de água entre os tempos  $t_{j-1}$  e  $t_j$  ( $m^3$ ).

<sup>6</sup>Equivale ao influxo quando  $p_{aq} = 0$ .

$W_{i,aq}$ : Volume inicial do aquífero ( $m^3$ ).

$W_{res}$ : Volume de água no reservatório ( $m^3$ ).

$W_{i,res}$ : Volume inicial de água no reservatório ( $m^3$ ).

## Referências

- [1] T. C. A. Amorim, Aplicação do método de euler para resolver o comportamento de aquíferos analíticos, Relatório número 6 da disciplina IM253: Métodos Numéricos para Fenômenos de Transporte (09 2023).
- [2] M. J. Fetkovich, A simplified approach to water influx calculations-finite aquifer systems, Journal of petroleum technology 23 (07) (1971) 814–828.
- [3] R. L. Burden, J. D. Faires, A. M. Burden, Análise numérica, Cengage Learning, 2016.
- [4] T. C. A. Amorim, Avaliação do uso de splines para interpolar tabelas de fluxo vertical multifásico, Relatório número 4 da disciplina IM253: Métodos Numéricos para Fenômenos de Transporte (09 2023).
- [5] G. Newman, Pore-Volume Compressibility of Consolidated, Friable, and Unconsolidated Reservoir Rocks Under Hydrostatic Loading, Journal of Petroleum Technology 25 (02) (1973) 129–134. arXiv:<https://onepetro.org/JPT/article-pdf/25/02/129/2672963/spe-3835-pa.pdf>, doi:10.2118/3835-PA. URL <https://doi.org/10.2118/3835-PA>
- [6] M. B. Standing, Volumetric and phase behavior of oil field hydrocarbon systems, Society of petroleum engineers of AIME, 1952.