

Aplicação de Splines Fixas para Interpolar Tabelas de Fluxo Vertical Multifásico*

Tiago C. A. Amorim²

^aPetrobras, Av. Henrique Valadares, 28, Rio de Janeiro, 20231-030, RJ, Brasil

Abstract

A construção de curvas de fluxo vertical multifásico para utilizar em simulação de fluxo em meios porosos pode ser uma tarefa computacionalmente custosa. Como uma tabela estática irá substituir um simulador de fluxo multifásico, é preciso um número adequado de parâmetros de entrada. A nuvem de pontos da tabela deve garantir que os valores a serem interpolados em uma simulação de fluxo em meios porosos sejam próximos dos valores reais.

Tradicionalmente os simuladores de fluxo em meio poroso utilizam interpolação linear entre os pontos tabelados. Um primeiro estudo verificou que usar splines naturais para interpolar os valores tabelados não resulta em melhora das estimativas. Este segundo estudo utilizou os dados tabelados para estimar valores para as derivadas da função $P_{wf} = f(Q)$ no extremos do domínio, e assim poder construir splines fixadas. Os resultados mostraram que as splines fixadas conseguiram resultados melhores que os da interpolação com splines naturais ou linear.

Keywords: Splines, Simulação Numérica, Fluxo em Meio Poroso

1. Introdução

As tabelas de fluxo vertical multifásico, mais comumente conhecidas pela sigla do termo em inglês: VFP - *vertical flow performance*¹, são a abordagem mais usual para acoplar uma simulação de fluxo em meios porosos com os limites da unidade de produção.

As tabelas de VFP associam diferentes variáveis de fluxo (vazões) com as pressões nos extremos do elemento modelado². As tabelas são geradas com um número limitado de pontos, e invariavelmente o simulador de fluxo terá que buscar valores para condições de fluxo que não estão na tabela. O mais comum é realizar interpolação linear entre os pontos da tabela [1][2]. Um estudo anterior avaliou o uso de splines naturais para interpolar valores em tabelas de VFP, e concluiu que, para os testes realizados, a interpolação linear é melhor [3]. Este relatório revisita os mesmos exemplos e avalia a interpolação com splines fixas.

2. Metodologia

2.1. Tabelas de Fluxo Vertical Multifásico

Os simuladores de fluxo em meio poroso utilizam as tabelas de VFP para poder relacionar condições de fluxo

de fundo e de superfície. O usual é que a tabela de VFP relacione pressão de fundo (P_{wf} ³) com as demais variáveis associadas ao poço:

- Pressão de cabeça: WHP⁴.
- Vazão: óleo, gás, água ou líquido⁵.
- Fração de água: WCUT⁶ ou RAO⁷
- Fração de gás: RGL⁸ ou RGO⁹..
- Vazão de injeção de *gas-lift*.

No simulador de fluxo um poço terá sempre uma condição de produção especificada: vazão, pressão de fundo, pressão de cabeça ou vazão de grupo. Enquanto estiver em uma determinada condição de produção, os demais limitantes devem ser observados: pressão de fundo mínima, pressão de cabeça mínima, vazão de líquido máxima, vazão de óleo máxima, vazão de gás máxima¹⁰. Se algum limite não for satisfeito, o simulador irá mudar o controle do poço para o limite da condição violada e buscar uma nova solução para o problema. Este processo é realizado a cada passo de tempo da simulação, e a tabela de VFP será utilizada toda vez que for necessário calcular a pressão de cabeça do poço.

*Relatório número 5 como parte dos requisitos da disciplina IM253: Métodos Numéricos para Fenômenos de Transporte.

**Atualmente cursando doutorado no Departamento de Engenharia de Petróleo da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP (Campinas/SP, Brasil).

Email address: t100675@dac.unicamp.br (Tiago C. A. Amorim)

¹Ou VLP - *vertical lift performance*.

²Poço, pedaço de linha de produção, *manifold* etc.

³Ou BHP, que é *Bottom Head Pressure*.

⁴WHP é *Well Head Pressure*.

⁵Respectivamente Q_o , Q_g , Q_w , Q_{liq} .

⁶WCUT é *Water Cut* ou corte de água (Q_w/Q_{liq})

⁷RAO é razão água óleo (Q_g/Q_o).

⁸RGL é razão gás líquido (Q_g/Q_{liq}).

⁹RGO é razão gás óleo (Q_g/Q_o).

¹⁰Para o caso de um produtor.

2.2. Splines

Dado um conjunto de $n + 1$ pontos (x_i, y_i) para $i = 0, 1, \dots, n$, as splines são um método de interpolação que utiliza n equações cúbicas por partes na forma:

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

para $x_j \leq x \leq x_{j+1}$

Os termos das equações são definidos de forma a garantir que os valores da função interpoladora ($S(x)$) sejam exatos nos pontos dados ($S(x_i) = y_i$), e que exista continuidade da função interpoladora, e de suas derivadas primeira e segunda (mais detalhes em [3]). Duas condições adicionais precisam ser definidas para conseguir definir todos os termos da função interpoladora. Splines naturais tem derivada segunda nula nos extremos do domínio ($S''(x_0) = S''(x_n) = 0$). Já as splines fixadas tem as derivadas primeiras nos extremos do domínio definidas: $S'(x_0) = f'(x_0)$ e $S'(x_n) = f'(x_n)$. O código desenvolvido para as splines fixas é o apresentado em [4]. Uma forma simplificada do algoritmo das splines fixas é apresentada no Algoritmo 1.

Algorithm 1 Splines Fixas

Entrada: x_i, y_i para $i = 0, 1, \dots, n$; $y'_0 = f'(x_0)$; $y'_n = f'(x_n)$

Para todos $i \in \{0, \dots, n\}$ **faça**

$a_i \leftarrow y_i$

Para todos $i \in \{0, \dots, n-1\}$ **faça**

$h_i \leftarrow x_{i+1} - x_i$

$\alpha_0 \leftarrow \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3y'_0$

$\alpha_n \leftarrow 3y'_n - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1})$

Para todos $i \in \{1, \dots, n-1\}$ **faça**

$\alpha_i \leftarrow \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1})$

$r_0 \leftarrow 2h_0$

$m_0 \leftarrow 0.5$

$z_0 \leftarrow \frac{\alpha_0}{r_0}$

Para todos $i \in \{1, \dots, n-1\}$ **faça**

$r_i \leftarrow 2(x_{i+1} - x_{i-1}) - h_{i-1}m_{i-1}$

$m_i \leftarrow \frac{h_i}{r_i}$

$z_i \leftarrow \frac{\alpha_i - h_{i-1}z_{i-1}}{r_i}$

$r_n \leftarrow h_{n-1}(2 - m_{n-1})$

$z_n \leftarrow \frac{\alpha_n - h_{n-1}z_{n-1}}{r_n}$

$c_n \leftarrow z_n$

Para todos $i \in \{n-1, \dots, 0\}$ **faça**

$c_i \leftarrow z_i - m_i c_{i+1}$

$b_i \leftarrow \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - h_i \frac{c_{i+1} + 2c_i}{3}$

$d_i \leftarrow \frac{c_{i-1} - c_i}{3h_i}$

Retorna: a_i, b_i, c_i, d_i para $i = 0, 1, \dots, n-1$

3. Resultados

Para facilitar a análise da qualidade do código desenvolvido, foram criadas funções que realizam diversos testes

onde a resposta exata é conhecida:

tests_splines() Testa as implementações de splines naturais e splines fixadas em dois exemplos: conjunto de 3 pontos e aproximação da integral da função exponencial (exemplos 1 a 4 do capítulo 3.5 de [4]).

tests_vfp_interpolation() Compara o uso de interpolação linear e interpolação com splines naturais e fixas de pontos de uma tabela de VFP.

Os testes que utilizam os exemplos de [4] tiveram resultados iguais aos do livro. O exemplo mais interessante é o da função exponencial, que é aproximada por splines nos pontos $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ (Figura 1). O exemplo demonstra que a aproximação com spline fixada, impondo as derivadas da função original no primeiro ponto e no último ponto, melhora a estimativa da integral no intervalo aproximado por splines (Figura 2).

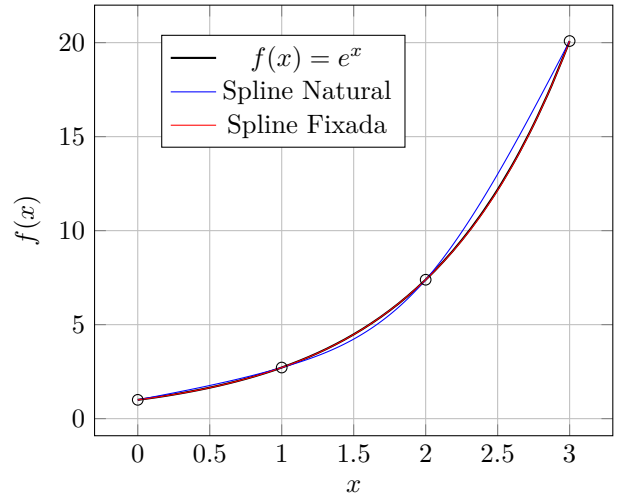


Figura 1: Aproximação com splines da função exponencial: $f(x) = e^x$.

Para realizar o teste proposto foi utilizada uma das tabelas de VFP do modelo Unisim-II-H [5]. A tabela escolhida é de produção e tem os seus parâmetros descritos na Tabela 1.

O teste realizado é o mesmo descrito em [3]. Para diferentes combinações dos parâmetros GLR, WCUT, LFG e WHP foram construídas funções interpoladoras dos pontos (LIQ, BHP). Em cada teste um dos pontos (LIQ, BHP) foi excluído. Este mesmo ponto foi posteriormente estimado com a função interpoladora.

Para usar splines fixas é preciso fornecer a derivada da função a ser aproximada. A estimativa das derivadas nos extremos da função foi feita com os pares de valores conhecidos nos extremos (Figura 3):

Tabela 1: Parâmetros da tabela de VFP utilizada nas comparações. O parâmetro principal (BHP) é em kgf/cm^2 .

Variável	Descrição	Unidade	Valores	Mínimo	Máximo
LIQ	Vazão de líquido	m^3/d	6	200	3200
GLR	Razão gás líquido	m^3/m^3	8	30	240
WCUT	Corte de água	m^3/m^3	6	0	0.9
LFG	Vazão de <i>gas-lift</i>	m^3/d	3	0	20 000
WHP	Pressão de cabeça	kgf/cm^2	3	10	30

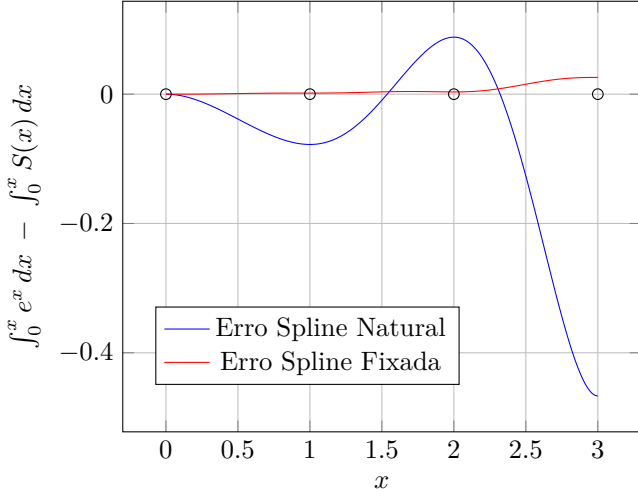


Figura 2: Erro da integral das aproximações com splines da função exponencial, entre 0 e x .

$$f'(x_0) \approx \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \beta_0$$

$$f'(x_n) \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \beta_n$$

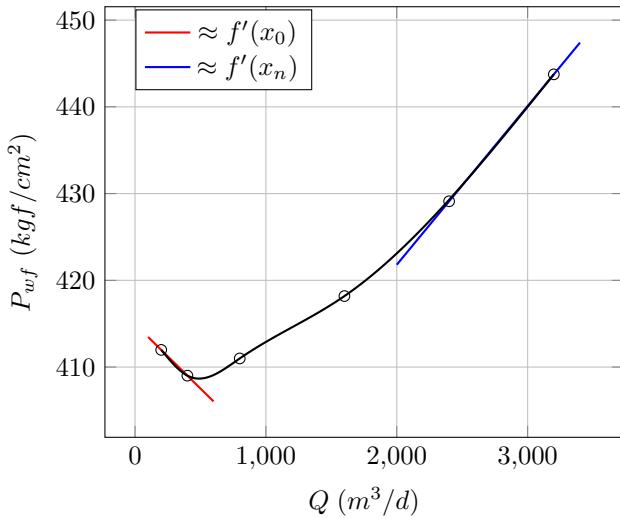


Figura 3: Aproximação das derivadas nos extremos do domínio.

Como as derivadas foram estimadas utilizando os dois

primeiros e os dois últimos pontos de (LIQ, BHP), avaliou-se que não faria sentido avaliar pontos fora do domínio inicial. Desta forma, foram realizados 4 testes para cada combinação dos demais parâmetros, excluindo apenas pontos internos.

Os parâmetros β foram utilizados para buscar uma melhor estimativa destas derivadas. Foram feitas sensibilidades do erro médio e do desvio padrão do erro em função de β_0 e β_n .

As Figuras 4 e 5 mostram que, como esperado, as estimativas mais afetadas pelo valor de β_0 são os pontos LIQ=400 e 800. Existe uma tendência de redução do erro médio com valores baixos de β_0 . Já o gráfico do desvio padrão dos erros mostra que existe uma região *ótima* aproximadamente entre 1.4 e 2.4. Não existe um valor único que minimiza o desvio padrão dos erros de cada valor de LIQ. Optou-se por usar um valor intermediário: $\beta_0 = 1.8$. Com este valor os desvios padrão de LIQ=400 e 800 ficam aproximadamente iguais ou melhores que os valores com interpolação linear ou com splines naturais.

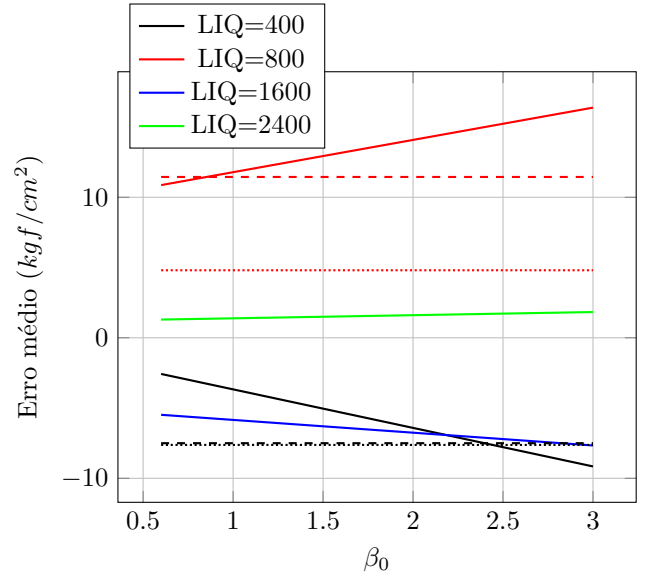


Figura 4: Média dos erros de BHP com splines fixas em função do valor de β_0 . Resultados da interpolação linear em pontilhado e splines naturais em tracejado.

O parâmetro β_n tem impacto significativo apenas nos valores de LIQ=1600 e 2400 (Figura 6). O valor ótimo para a média do erro de LIQ=2400 é aproximadamente 0.9, enquanto que para LIQ=1600 o ótimo é em valores

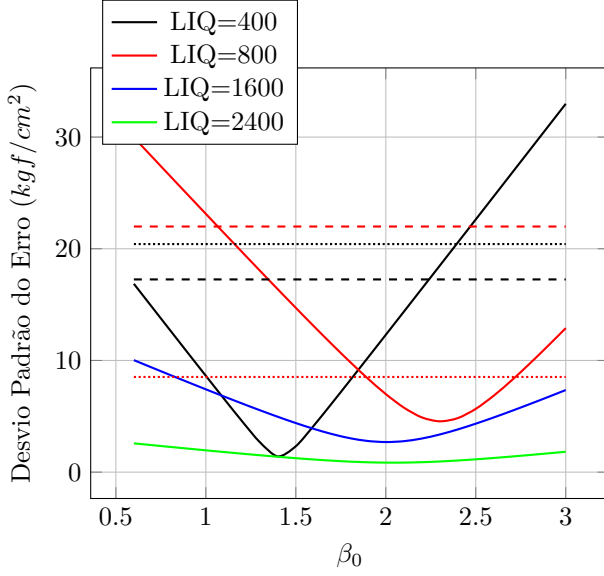


Figura 5: Desvio padrão dos erros de BHP com splines fixas em função do valor de β_0 . Resultados da interpolação linear em pontilhado e splines naturais em tracejado.

menores de β_n . A Figura 7 mostra que apenas o desvio padrão de LIQ=2400 é sensível ao valor de β_n . Foi utilizado $\beta_n = 0.9$. Com este valor o erro médio se aproxima de zero, e o desvio padrão do erro de LIQ=2400 é mínimo, ficando menor que o da interpolação linear ou com splines naturais.

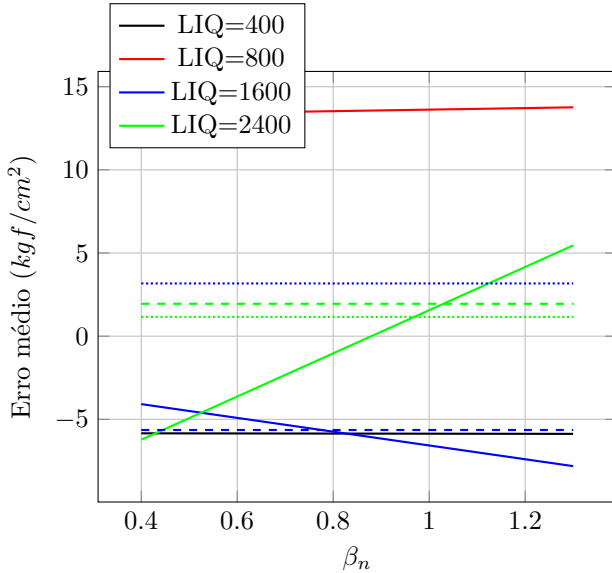


Figura 6: Média dos erros de BHP com splines fixas em função do valor de β_n . Resultados da interpolação linear em pontilhado e splines naturais em tracejado.

As Figuras 8, 9 e 10 mostram que as splines fixas com β_0 e β_n *otimizadas*¹¹ alcançaram, em geral, resultados melhores que as splines naturais ou interpolação linear. Em

¹¹ $\beta_0 = 1.8$ e $\beta_n = 0.9$.

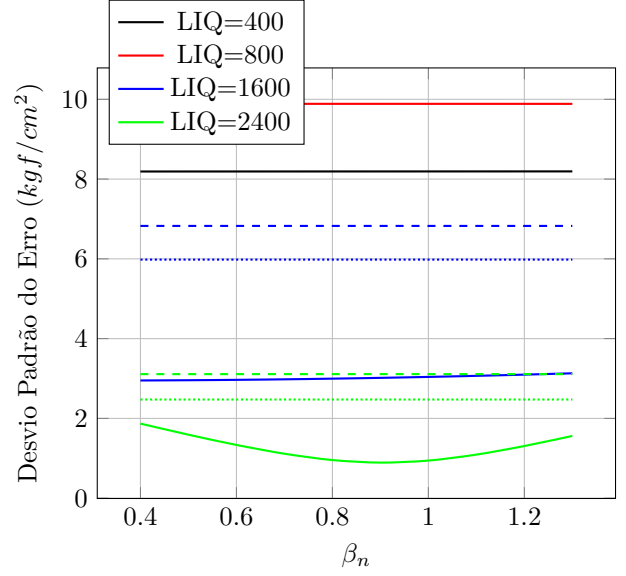


Figura 7: Desvio padrão dos erros de BHP com splines fixas em função do valor de β_n . Resultados da interpolação linear em pontilhado e splines naturais em tracejado.

comparação com a interpolação linear, o ganho foi mais significativo em LIQ=400, que é a região em que a variação da derivada da função é mais forte. Nesta região a imposição da derivada teve impacto positivo. Por outro lado, em LIQ=800 a spline fixa apresentou resultados ruins, com o erro médio *longe* do zero.

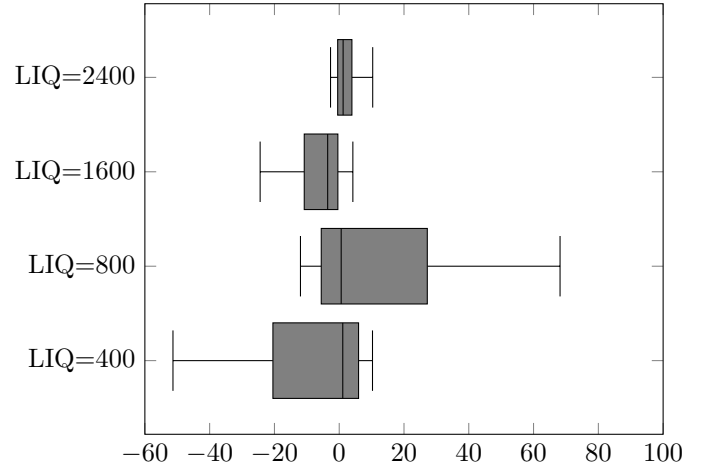
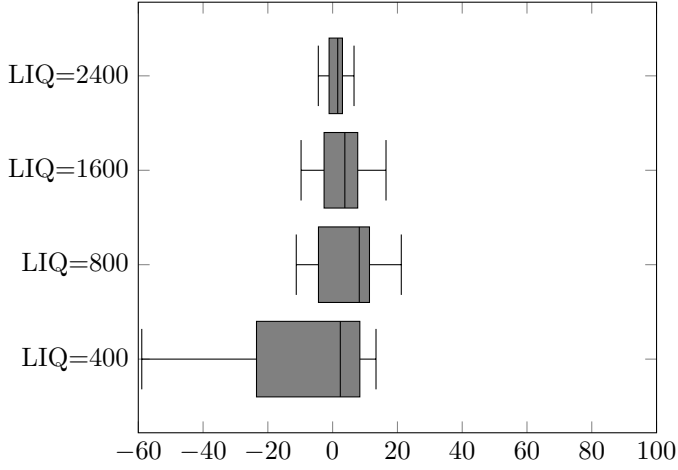


Figura 8: Erros na estimativa de BHP com splines naturais, em função do valor de LIQ excluído.

O código foi implementado em C e em um único arquivo. Pode ser encontrado em <https://github.com/TiagoCAAmorim/numerical-methods>.

4. Conclusão

O desempenho de splines fixas para interpolar valores de pressão de fundo a partir de uma tabela de VFP foi, em



[5] C. Maschio, A. Santos, M. Correia, D. J. Schiozer, Case study for field history matching and uncertainties reduction based on unisim-ii (2018).

Figura 9: Erros na estimativa de BHP com interpolação linear, em função do valor de LIQ excluído.

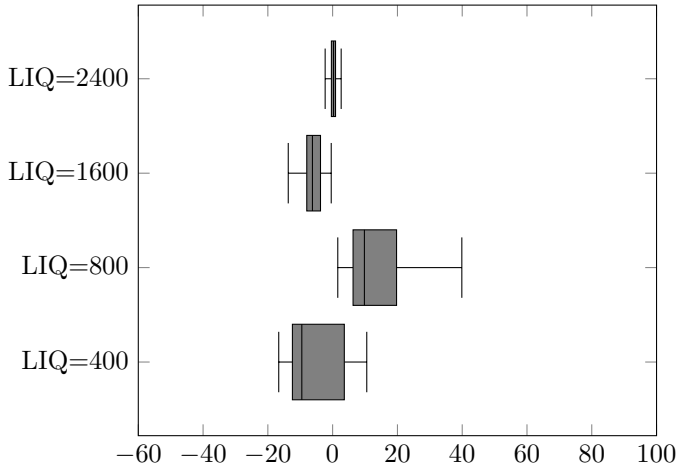


Figura 10: Erros na estimativa de BHP com splines fixas (com $\beta_0 = 1.8$ e $\beta_n = 0.9$), em função do valor de LIQ excluído.

geral, melhor que o da interpolação linear. A imposição de aproximações das derivadas nos extremos do domínio teve impacto positivo na redução da variabilidade dos erros. A diferença para a interpolação linear não parece ser significativa a ponto de justificar a utilização de um método de interpolação muito mais custoso computacionalmente que a interpolação linear.

Referências

- [1] C. M. G. L. (CMG), Cmg imex user's manual, CMG Calgary, Canada, 2022.
- [2] E. U. M. SCHLUMBERGER, Technical description, Schlumberger Ltd (2009) 519–538.
- [3] T. C. A. Amorim, Avaliação do uso de splines para interpolar tabelas de fluxo vertical multifásico, Relatório número 4 da disciplina IM253: Métodos Numéricos para Fenômenos de Transporte (09 2023).
- [4] R. L. Burden, J. D. Faires, A. M. Burden, Análise numérica, Cengage Learning, 2016.