

# Avaliação do Uso de Splines Naturais para Interpolar Tabelas de Fluxo Vertical Multifásico

Tiago C. A. Amorim<sup>1</sup>

<sup>a</sup>Petrobras, Av. Henrique Valadares, 28, Rio de Janeiro, 20231-030, RJ, Brasil

## Abstract

É uma prática comum da indústria o uso de tabelas de VFP para representar o fluxo multifásico em poços produtores e injetores, e assim conseguir associar condições de fundo (reservatório) com condições de superfície (unidade de produção). A construção das tabelas de VFP pode ser uma tarefa computacionalmente intensiva, para adequadamente representar todas as possíveis combinações de parâmetros.

Pontos intermediários entre os tabelados são usualmente estimados por interpolação linear. Foi comparado o desempenho da interpolação linear contra interpolação com splines para uma tabela de VFP de exemplo. Para os testes realizados os resultados mostraram que a interpolação com splines naturais teve pior desempenho que a interpolação linear.

**Keywords:** Splines, Simulação Numérica, Fluxo em Meio Poroso

## 1. Introdução

A simulação numérica tridimensional é uma das principais ferramentas no estudo da exploração de acumulações de hidrocarbonetos [? ]. Um simulador de fluxo em meio poroso é focado na resolução das variáveis de reservatório (pressão e saturações). É possível realizar simulações integradas de simuladores de fluxo em meio poroso com simuladores de fluxo multifásico [? ]. Mas o método mais tradicional de realizar o acoplamento das condições de fluxo de fundo de um poço com os limites operacionais das facilidades de produção são as tabelas de fluxo vertical multifásico, mais comumente conhecidas pela sigla do termo em inglês: VFP - *vertical flow performance*<sup>1</sup>.

As tabelas de VFP representam o comportamento em um poço associando diferentes variáveis de fluxo (vazões) com as pressões nos extremos deste elemento (pressões de fundo e de superfície). A construção das tabelas de VFP pode ser uma tarefa computacionalmente intensa, pois é preciso gerar um significativo número de combinações de parâmetros. A interpolação de valores intermediários é usualmente linear [? ][? ]. Este relatório compara os resultados de interpolação linear com interpolação com splines para um exemplo de tabela de VFP.

## 2. Metodologia

### 2.1. Tabelas de Fluxo Vertical Multifásico

Do *ponto de vista* do reservatório, diversos parâmetros irão influenciar o potencial de produção (ou injeção de um poço):

- Características do reservatório: espessura, permeabilidade absoluta, profundidade etc.
- Características dos fluidos presentes: viscosidade, permeabilidade relativa, fator volume de formação<sup>2</sup> etc.
- Geometria do poço no reservatório: diâmetro, extensão aberta ao fluxo, inclinação do poço, dano à formação etc.
- Condição inicial de reservatório: pressão estática, temperatura, saturações (óleo, água e gás).

O que controla a vazão de fluido que entra no poço (ou sai, no caso de poços injetores) é a pressão de fundo ( $P_{wf}$  ou BHP<sup>3</sup>). Esta relação entre pressão de fundo e vazão de um poço é conhecida por IPR - *Inflow Performance Relationship*. Para reservatórios com geometrias simples e fluidos com características bem comportadas é possível construir equações diretas para a curva de IPR, mas em geral esta correlação é estimada com simulação numérica 3D.

Do *ponto de vista* do sistema produtivo, outras variáveis terão impacto no potencial de um poço:

<sup>\*</sup>Relatório número 4 como parte dos requisitos da disciplina IM253: Métodos Numéricos para Fenômenos de Transporte.

<sup>\*\*</sup>Atualmente cursando doutorado no Departamento de Engenharia de Petróleo da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP (Campinas/SP, Brasil).

<sup>1</sup>Também é comum encontrar o termo VLP - *vertical lift performance*.

<sup>2</sup>O fator volume de formação ( $B$ ) é a razão entre o volume de fluido em condição de reservatório ( $P_{res}$  e  $T_{res}$ ) e o volume deste mesmo fluido em condição de superfície ( $P_{std} = 1 atm$  e  $T_{std} = 60^\circ F$ ).

<sup>3</sup>BHP é *Bottom Hole Pressure*.

- Diâmetro e rugosidade da coluna de produção, da linha de produção<sup>4</sup> e do *riser*<sup>5</sup>.
- Equipamentos adicionais presentes no poço ou na linha: instrumentação de poço, árvore de natal, manifold, válvulas de *gas-lift*, chokes etc.
- Condições operacionais de superfície: pressão e temperatura de chegada na unidade de produção.

A relação entre a pressão de fundo no poço ( $P_{wf}$ ) e a sua vazão é a VFP. O encontro da curva de disponibilidade do reservatório (IPR) com a curva de necessidade do sistema de produção (VFP) é o que define o ponto de operação do poço (Figura ??).

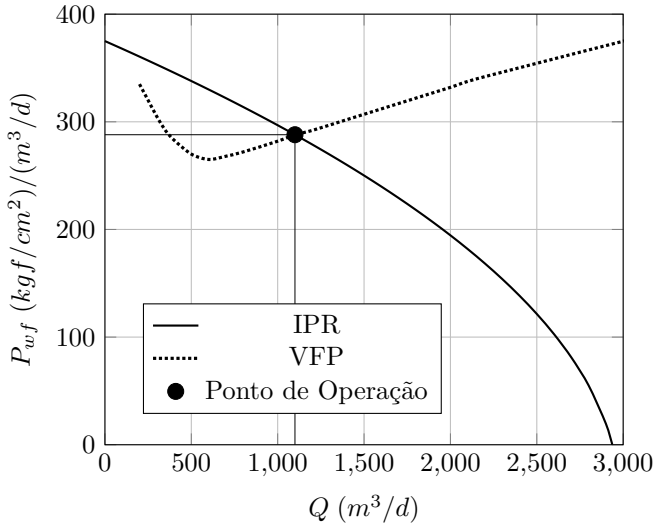


Figura 1: Exemplo de definição do ponto de operação de um poço produtor.

No simulador de fluxo este ponto de operação é reavaliado a cada iteração de cada passo de tempo. Para acelerar a resolução do problema, não é feita uma simulação do fluxo dentro do poço. Esta simulação é substituída por uma tabela com múltiplas variáveis. Para os dois simuladores mais utilizados na indústria o formato desta tabela é o mesmo, com a pressão de fundo ( $P_{wf}$ ) em função de:

- Pressão de cabeça: WHP<sup>6</sup>.
- Vazão: óleo, gás, água ou líquido<sup>7</sup>.
- Fração de água: WCUT<sup>8</sup> ou RAO<sup>9</sup>
- Fração de gás: RGL<sup>10</sup> ou RGO<sup>11</sup>.

<sup>4</sup>Trecho horizontal, apoiado no fundo do mar para o caso de poços marítimos.

<sup>5</sup>Trecho vertical final da linha de um poço marítimo.

<sup>6</sup>WHP é Well Head Pressure.

<sup>7</sup>Respectivamente  $Q_o$ ,  $Q_g$ ,  $Q_w$ ,  $Q_{liq}$ .

<sup>8</sup>WCUT é Water Cut ou corte de água ( $Q_w/Q_{liq}$ )

<sup>9</sup>RAO é razão água óleo ( $Q_g/Q_o$ ).

<sup>10</sup>RGL é razão gás líquido ( $Q_g/Q_{liq}$ ).

<sup>11</sup>RGO é razão gás óleo ( $Q_g/Q_o$ ).

- Vazão de injeção de *gas-lift*.

Para cada variável de entrada são definidos alguns valores representativos. Estas tabelas de VFP são completas, ou seja, são fornecidos valores de BHP ( $P_{wf}$ ) para todas as combinações possíveis dos valores representativos dos dados de entrada.

## 2.2. Splines

Dado um conjunto de  $n + 1$  pontos  $(x_i, y_i)$  para  $i = 0, 1, \dots, n$ , as splines são um método de interpolação que utiliza  $n$  equações cúbicas por partes na forma:

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

para  $x_j \leq x \leq x_{j+1}$

Os termos das equações são definidos de forma a garantir que os valores da função interpoladora ( $S(x)$ ) sejam exatos nos pontos dados ( $S(x_i) = y_i$ ), e que exista continuidade das derivadas primeira e segunda da função interpoladora. Duas condições adicionais precisam ser definidas para conseguir definir todos os termos da função interpoladora. Foram implementadas duas opções: splines naturais ( $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ ) e splines fixadas ( $S'(x_0) = f'(x_0)$  e  $S'(x_n) = f'(x_n)$ ). O código desenvolvido é o apresentado em [?]. Uma forma simplificada do algoritmo das splines naturais é apresentada no Algoritmo ??.

---

### Algorithm 1 Splines Naturais

---

**Entrada:**  $x_i, y_i$  para  $i = 0, 1, \dots, n$

**Para todos**  $i \in \{0, \dots, n\}$  **faça**

$a_i \leftarrow y_i$

**Para todos**  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  **faça**

$h_i \leftarrow x_{i+1} - x_i$

**Para todos**  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  **faça**

$\alpha_i \leftarrow \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1})$

$r_0 \leftarrow 1$

$m_0 \leftarrow 0$

$z_0 \leftarrow 0$

**Para todos**  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  **faça**

$r_i \leftarrow 2(x_{i+1} - x_{i-1}) - h_{i-1}m_{i-1}$

$m_i \leftarrow \frac{h_i}{r_i}$

$z_i \leftarrow \frac{\alpha_i - h_{i-1}z_{i-1}}{r_i}$

$r_n \leftarrow 1$

$z_n \leftarrow 0$

$c_n \leftarrow 0$

**Para todos**  $i \in \{n-1, \dots, 0\}$  **faça**

$c_i \leftarrow z_i - m_i c_{i+1}$

$b_i \leftarrow \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - h_i \frac{c_{i+1} + 2c_i}{3}$

$d_i \leftarrow \frac{c_i - c_{i+1}}{3h_i}$

**Retorna:**  $a_i, b_i, c_i, d_i$  para  $i = 0, 1, \dots, n-1$

---

### 3. Resultados

Para facilitar a análise da qualidade do código desenvolvido, foram criadas funções que realizam diversos testes onde a resposta exata é conhecida:

**tests\_splines()** Testa as implementações de splines naturais e splines fixadas em dois exemplos: conjunto de 3 pontos e aproximação da integral da função exponencial (exemplos 1 a 4 do capítulo 3.5 de [?]).

**tests\_vfp\_interpolation()** Compara o uso de interpolação linear e interpolação com splines naturais e fixas de pontos de uma tabela de VFP.

Os testes que utilizam os exemplos de [?] tiveram resultado igual ao do livro. O exemplo mais interessante é o da função exponencial, que é aproximada por splines nos pontos  $x \in \{0, 1, 2, 3\}$  (Figura ??). O exemplo demonstra que a aproximação com spline fixada, impondo as derivadas da função original no primeiro ponto e no último ponto, melhora a estimativa da integral no intervalo aproximado por splines (Figura ??).

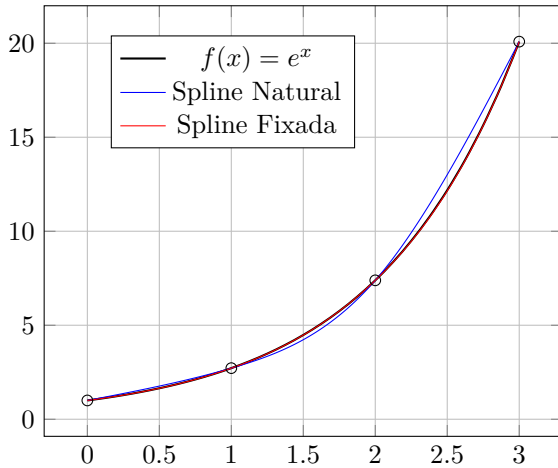


Figura 2: Aproximação com splines da função exponencial:  $f(x) = e^x$ .

Para realizar o teste proposto foi utilizada uma tabela de VFP do modelo Unisim-II-H [?]. A tabela escolhida é de produção e tem os seus parâmetros descritos na Tabela ??.

A proposta do teste é de verificar se uma interpolação com splines pode ser mais eficiente para estimar valores intermediários que uma interpolação linear, que é o método usualmente utilizado pelo simuladores de fluxo em meios porosos. Para cada uma das 432 combinações de GLR, WCUT, LFG e WHP foram construídas 6 funções interpoladoras dos pontos (LIQ, BHP). A diferença entre estas 6 variações é o ponto que é excluído. Posteriormente o valor de BHP do ponto excluído é estimado com a função interpoladora e comparado com o valor original (Figura ??). Em todos os testes foram utilizadas splines naturais,

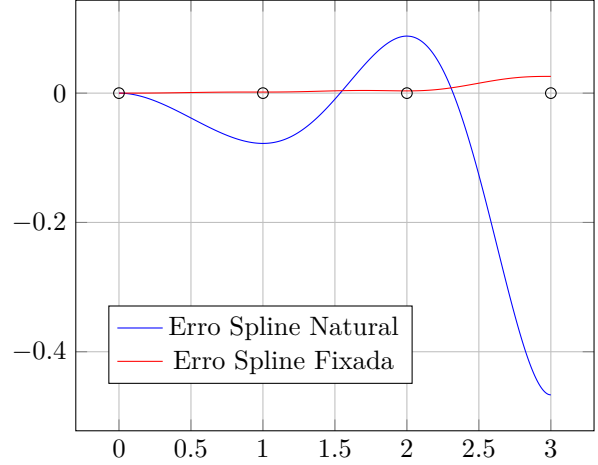


Figura 3: Erro da integral das aproximações com splines da função exponencial, entre 0 e  $x$ .

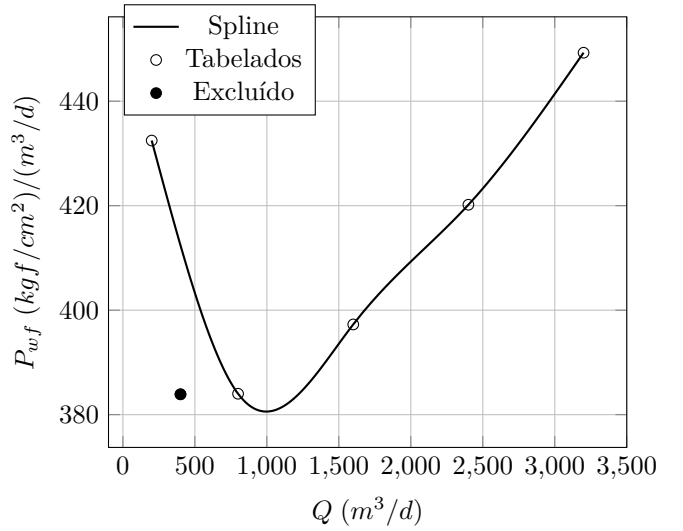


Figura 4: Spline construída com 5 dos 6 valores de (LIQ, BHP) para uma das combinações de GLR, WCUT, LFG e WHP.

pois não há informação sobre a derivada da função que gerou a tabela de VFP.

Dos 6 testes realizados, 2 foram de extrapolações (quando os pontos extremos foram os excluídos). Esta não é uma boa prática. Usualmente o simulador de fluxo irá avisar ao usuário quando estiver extrapolando valores da tabela de VFP, mas não irá parar a simulação. Deste modo, não é incomum acontecer alguma extrapolação dos dados da tabela de VFP durante uma simulação.

As Figuras ?? e ?? mostram uma estatística simplificada dos erros das funções interpoladoras no ponto que foi excluído, para as interpolações com splines e linear, respectivamente. Algumas conclusões podem ser tiradas destes gráficos:

- Não há significativa vantagem em utilizar interpolação com splines naturais em comparação com a interpolação linear. Na faixa intermediária (LIQ=800), a

Tabela 1: Parâmetros da tabela de VFP utilizada nas comparações. O parâmetro principal (BHP) é em  $kgf/cm^2$ .

Variável	Descrição	Unidade	Valores	Mínimo	Máximo
LIQ	Vazão de líquido	$m^3/d$	6	200	3200
GLR	Razão gás líquido	$m^3/m^3$	8	30	240
WCUT	Corte de água	$m^3/m^3$	6	0	0.9
LFG	Vazão de <i>gas-lift</i>	$m^3/d$	3	0	20 000
WHP	Pressão de cabeça	$kgf/cm^2$	3	10	30

interpolação linear teve resultados melhores que as splines naturais.

- Os maiores erros estão associados a quando as funções interpoladoras são utilizadas para extrapolar valores baixos de vazão (LIQ=200).
- Para valores altos de vazão (LIQ=1600 e LIQ=2400) as funções interpoladoras tem um menor erro associado, indicando que esta região tem uma forma mais próxima de uma reta. Até mesmo quando as funções extrapolam (LIQ=3200), os erros são relativamente baixos.
- A maior dificuldade de interpolação é na região de vazões baixas (LIQ=400), notadamente associado à grande variação na derivada dos pontos, como no exemplo da Figura ??.

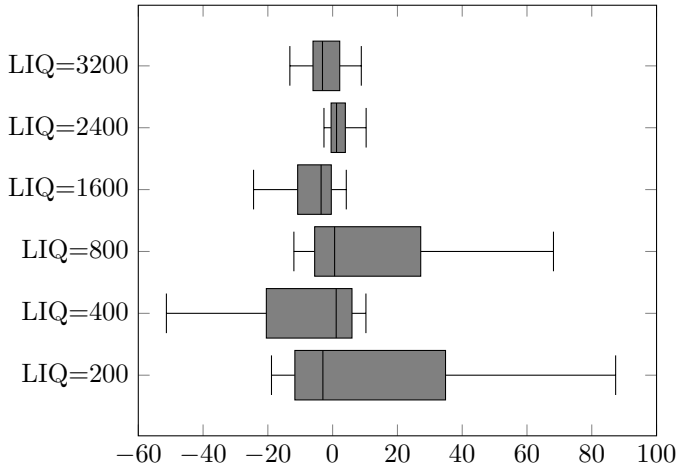


Figura 5: Erros na estimativa de BHP com splines naturais, em função do valor de LIQ excluído.

Uma última tentativa de melhorar o desempenho da interpolação com splines foi usar splines fixas. A estimativa das derivadas nos extremos da função foi feita com os pares de valores conhecidos nos extremos:

$$f'(x_0) \approx \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \beta_0$$

$$f'(x_n) \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \beta_n$$

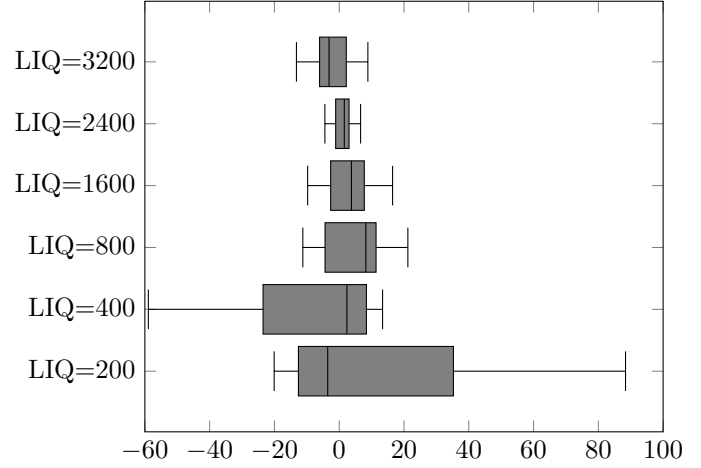


Figura 6: Erros na estimativa de BHP com interpolação linear, em função do valor de LIQ excluído.

Os parâmetros  $\beta$  foram utilizados para buscar uma melhor estimativa destas derivadas. Como o pontos conhecidos se aproximam de uma reta para valores altos de LIQ, decidiu-se por utilizar  $\beta_n = 1$ . Para os valores baixos de vazão a variação da derivada é mais brusca, de modo que foram testados três valores de  $\beta_0$ : 1, 2 e 3. Os melhores resultados foram com  $\beta_0 = 2$  (Figura ??). O uso de splines fixas melhorou as estimativas dos pontos excluídos tanto na região de baixas vazões como de alta vazões.

O código foi implementado em C e em um único arquivo. Pode ser encontrado em <https://github.com/TiagoCAAmorim/numerical-methods>.

#### 4. Conclusão

O desempenho de splines naturais para interpolar valores de pressão de fundo a partir de uma tabela de VFP foi, em geral, pior que o da interpolação linear. Ambos métodos apresentaram dificuldade em estimar corretamente valores na região de baixas vazões. Uma primeira tentativa de uso de splines fixas se mostrou promissora. Foram utilizados os próprios pontos da tabela de VFP original para estimar as derivadas nos extremos da função, gerando resultados superiores aos da interpolação linear ou com splines naturais.

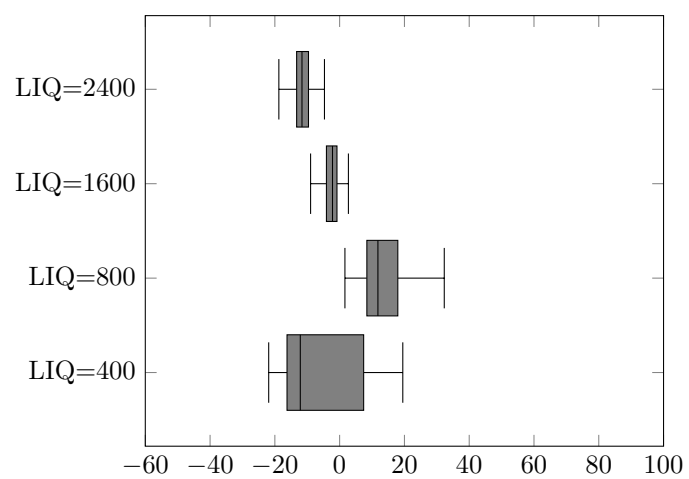


Figura 7: Erros na estimativa de BHP com splines fixas, em função do valor de LIQ excluído.