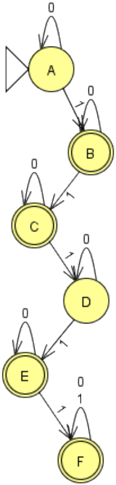


Teoria de Linguagens e Compiladores

Introdução

Luiz Eduardo da Silva

Universidade Federal de Alfenas

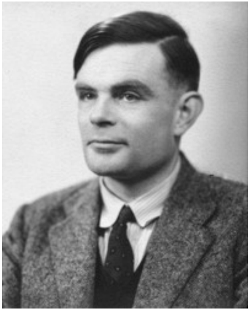
14 de Agosto de 2019

Agenda

Agenda

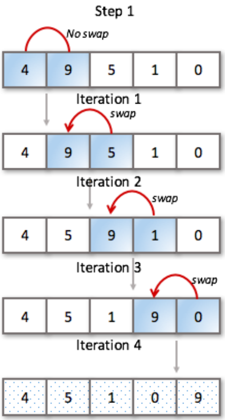
Limites dos Computadores

- Quais são as capacidades e limitações dos computadores?
- 1900 - Os "Problemas de Hilbert"
- 1936 - A máquina de Turing



Problema 1

- Ordenar um vetor é fácil.



Problema 2

- Agendar os horários de aula é difícil.

Draft Schedule	Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday
8:00 AM		ENGL 122 LEC A11 (67915) HC L 2		ENGL 122 LEC A11 (67915) HC L 2	
9:00 AM	SOC 100 LEC A1 (62427) TL 12	MATH 112 LEC J2 (75289) CCIS L2 190	SOC 100 LEC A1 (62427) TL 12	MATH 112 LEC J2 (75289) CCIS L2 190	SOC 100 LEC A1 (62427) TL 12
10:00 AM	CHEM 101 LEC A1 (60663) CCIS 1 440		CHEM 101 LEC A1 (60663) CCIS 1 440		CHEM 101 LEC A1 (60663) CCIS 1 440
11:00 AM		CHEM 101 SEM L08 (60687)			
12:00 PM					
1:00 PM	BIOL 107 LEC A02 (60397) CCIS 1 440		BIOL 107 LEC A02 (60397) CCIS 1 440		BIOL 107 LEC A02 (60397) CCIS 1 440
2:00 PM	BIOL 107 LAB D01 (60401) BS CW 102		CHEM 101 LAB U1 (60743)		
3:00 PM					
4:00 PM					

Complexidade

- Por que alguns problemas de computação são fáceis e outros difíceis?
- Essa é uma questão central da teoria da complexidade
- Usaremos expressões como $O(1)$, $O(logn)$, $O(n)$, $O(n^2)$

Para problema difícil, podemos:

- Alterar a raiz do problema para torná-lo mais fácil; ou
- Contentar com uma solução boa, mas não perfeita; ou
- Usar uma computação alternativa (aleatória, por exemplo).

- Por outro lado, tem a criptografia, que se interessa por problema computacional difícil.

Computabilidade

- Alguns problemas não podem ser resolvidos nos computadores, exemplo: "determinar se um enunciado matemático é verdadeiro ou falso".
- Teoria da Computabilidade e Teoria da Complexidade estão relacionados.

- Teoria da Complexidade - Classifica os problemas
- Teoria da Computabilidade - Separa os que são computáveis e os que não são.

Autômatos

- Teoria dos autômatos trabalha com definições e propriedades de modelos matemáticos de computação.

Usos na computação:

- autômato finito = usado em processamento de texto, compilação.
- autômato de pilha = usado em linguagens de programação, inteligência artificial.

- A teoria dos autômatos fornece o formalismo matemático utilizado nas Teorias de Complexidade e Computabilidade.

Agenda

Conjunto

Conjunto é um grupo de objetos representados como uma unidade.

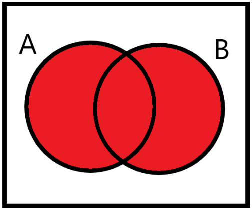
- Os elementos (objetos) dos conjuntos podem ser números, símbolos, textos e até outros conjuntos.
- Os conjuntos podem ser descritos, formalmente:
  - Listando os seus objetos. $A = \{2, 4, 12\}$
  - Através de alguma regra. $pares = \{n | n = 2m, m \in N\}$ Lê-se o conjunto dos números pares é formado por n, tal que, n é igual ao dobro de m e m pertence ao conjunto dos números naturais.
- Os símbolos $\in$ e $\notin$ denotam pertinência e não pertinência de um elemento a um conjunto. $7 \in \{1, 7, 34\}$

Conjunto

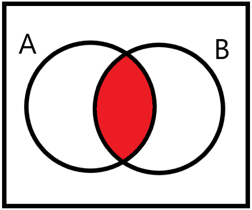
- Para dois conjuntos A e B, dizemos:
  - A é subconjunto de B, $A \subseteq B$, se todo elemento de A também for elemento de B.
  - A é subconjunto próprio de B, $A \subsetneq B$, se todo elemento de A for elemento de B e A e B são diferentes.
- Não importam nem a ordem nem a repetição dos elementos no conjunto.
- Se a repetição importa chamamos de **multiconjunto**. $\{1\}$ é o mesmo conjunto que $\{1, 1\}$, mas são multiconjuntos diferentes.
- Um conjunto infinito contém uma quantidade infinita de elementos. Usamos "..." para dizer que a sequência de elementos não termina. Exemplos: $N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ e $Z = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Operações com conjuntos

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

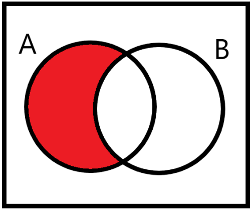


$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}$$

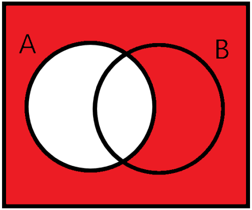


Operações com conjuntos

$$A - B = \{x | x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



$$\bar{A} = U - A$$



Sequência

Uma **sequência** é uma lista de objetos na mesma ordem.

- Notamos usando uma lista entre parênteses: $(1, 4, 20)$
- No conjunto a ordem não importa, na sequência sim.
- Sequências podem ser finitas e infinitas. As sequências finitas são chamadas de tuplas. *K-upla* é um sequência com k elementos. Uma 3-upla (2,1,3), uma 2-upla: (1,2).
- Um conjunto das partes de A (conjunto potência) é o conjunto de todos os subconjuntos de A. Assim $A = \{0, 1\}$, $P = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$

- O produto cartesiano de dois conjuntos A e B, $A \times B$ é o conjunto de todos os pares ordenados (a_i, b_i), tal que $a_i \in A$ e $b_i \in B$. Ex: $A = \{1, 2\}$ e $B = \{x, y, z\}$,

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (1, z)(2, x), (2, y), (2, z)\}$$

.

- Podemos tomar o produto cartesiano de k conjuntos: $A_1, A_2, ..., A_k$ é o conjunto de todas a k-uplas $(a_1, a_2, ...a_k)$ em que $a_i \in A_i$.
- O produto cartesiano de um mesmo conjunto pode ser abreviado:

$$\overbrace{A \times A \times ... \times A}^{k} = A^k$$

.

- Exemplo $N^2 = N \times N$.

Função

Função relaciona uma entrada com uma saída. $f(a) = b$.

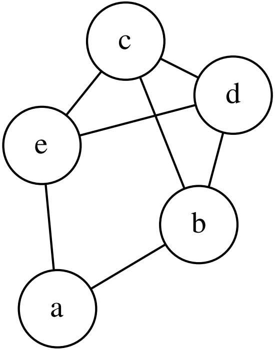
- Função também é chamada de **mapeamento**.
- Usamos a notação $f : D \to C$, onde D representa o conjunto da entrada chamado domínio e C é o conjunto da saída chamado contradomínio. Exemplo: $add : Z \times Z \to Z$.
- Uma função pode ser representada de várias formas, como uma tabela, por exemplo que relaciona todas as saídas para cada entrada. Exemplo $f : Z_5 \to Z_5$, definida por $f : \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 0\}$, que retorna o valor da entrada somado de um, módulo cinco.
- Para $f : A_1 \times A_2 \times ... \times A_k \to B$, a entrada de f é a k-upla $(a_1, a_2, ...a_k)$ e os a_i são chamados argumentos para f.
- 1 argumento = função unária. 2 argumentos = função binária.

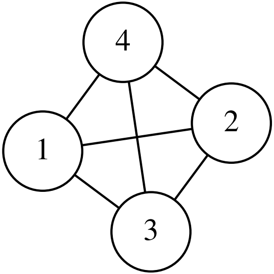
Predicado e Relação

- **Predicado** ou **propriedade** é uma função cujo contradomínio é $\{verdadeiro, falso\}$. A função **par** por exemplo.
- Uma propriedade cujo domínio é um conjunto de k-uplas $A \times A \times ... \times A$ é chamado **relação**, **relação k-ária**.
- A relação binária **maior** $(>)$ é um exemplo.
- Um tipo especial de relação binária é a **relação de equivalência** R, que tem que satisfazer as três condições:
  1. R é **reflexiva**, se para todo x, xRx;
  2. R é **simétrica**, se para todo x e y, xRy implica yRx;
  3. R é **transitiva**, se para todo x, y e z, xRy e yRz implica xRz.
- Exemplos de relações de equivalência: (a) a relação "igual a" no conjunto dos números. (b) A relação "tem o mesmo" cosseno no conjunto dos ângulos.

Grafo

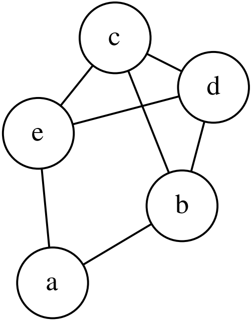
Um **grafo** não-direcionado (grafo) é um conjunto de pontos (vértices, nós) ligados por linhas (arestas).





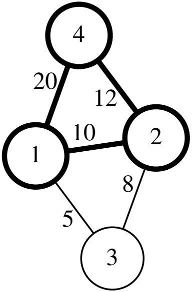
Grafo

- O **grau** de um nó é o número de arestas ligadas neste nó. O grau de **a** é 2 e o grau do nó **d** é 3.
- O **grafo simples** não tem aresta dupla ou arco (aresta ligando o próprio vértice).
- Um grafo G pode ser representado pelo conjunto V de vértices e o conjunto E de arestas (pares de vértices), $G = (V, E)$. Ex: $G = (\{a, b, c, d, e\}, \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\})$.



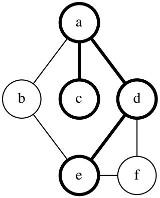
Grafo

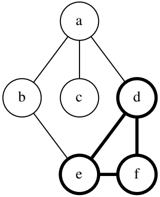
- Grafos são usados para modelar dados. Os nós podem representar cidades e as arestas estradas que conectam cidades, ou nós podem representar páginas e as arestas os links entre as páginas.
- As arestas podem ser rotuladas.
- Um **subgrafo** G de um H é um subconjunto de vértices de H e todas as arestas que ligam esse subconjnto e que estão em H. O grafo formado pelos vértices 1, 2 e 4 (e suas arestas) é subgrafo do grafo ao lado.

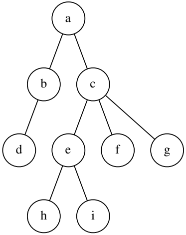


Grafo

- Um **caminho** é uma sequência de nós ligados por arestas. Ex: (c,a,d,e). Um **caminho simples** não repete nó.
- Um **ciclo** é um caminho que começa e termina no mesmo nó. Ex: (d, e, f).
- Um grafo é **conexo** se quaisquer dois nós tem caminho entre eles.
- Um grafo é **árvore** se é conexo e não tem ciclo.

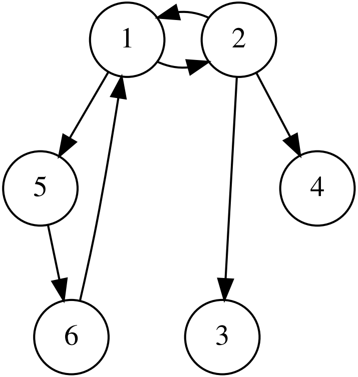






Grafo

- O **grafo direcionado** é um grafo no qual as arestas tem direção. O número de setas que saem de um nó determinam o **grau de saída** do nó. Da mesma forma, o número de setas que chegam no nó definem o **grau de entrada** do nó.
- No **caminho direcionado** todas as setas apontam a mesma direção.
- O grafo direcionado é **fortemente conexo** se um caminho direcionado conecta cada dois nós.
- Grafo direcionado $G = (D, E)$ representa relação binária R no domínio $D \times D$, onde $E = \{(x, y) | xRy\}$.



Cadeia

Cadeias de caracteres são os blocos básicos fundamentais da ciência da computação.

- **Alfabeto**, representado por Σ ou Γ, é um conjunto de **símbolos** não vazio, usado para formar as cadeias (depende da aplicação). Exemplos:
  - $\Sigma_1 = \{0, 1\}$;
  - $\Sigma_2 = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$;
  - $\Gamma = \{a, b, c, 0, 1\}$.
- Uma **cadeia sobre um alfabeto** é uma sequência finita de símbolos desse alfabeto. Ex: 001001 é uma cadeia sobre Σ_1.
- O **comprimento** de uma cadeia w, escrito $|w|$, é um número de símbolos que essa cadeia contém. Ex: Para $w = 01001$, $|w| = 5$.

Cadeia

- Uma cadeia de comprimento zero é a **cadeia vazia**, representada por ε ou λ.
- Se $|w| = n$, podemos escrever $w = w_1 w_2 w_3 ... w_n$, onde cada $w_i \in \Sigma$.
- w^R é a cadeia reversa de w. $w^R = w_n w_{n-1} w_{n-2} ... w_1$.
- Uma **subcadeia** de w é uma cadeia que está contida em w. Ex: *edu* é uma subadeia de *luizeduardo*.
- A **concatenação** da cadeia $x = x_1 x_2 x_3 ... x_n$ com a cadeia $y = y_1 y_2 y_3 ... y_m$, representado por xy é cadeia resultante de colocar os símbolos da cadeia y no final da cadeia x. $xy = x_1 x_2 x_3 ... x_n y_1 y_2 y_3 ... y_m$.

Cadeia

- A concatenação da uma cadeia sobre ela mesma, usamos uma notação com expoente:

$$\overbrace{xx...x}^{k} = x^k$$

.

- A **ordenação lexicográfica** de cadeias é a ordenação alfabética das cadeias, com as cadeias menores primeiro. Ex: ordenação lexicográfica de todas as cadeias sobre o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$, escrito como Σ^* é

$$\{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, ...\}$$

- Uma **Linguagem** L é um conjunto de cadeias sobre um alfabeto Σ.

$$L \subseteq \Sigma^*$$

Lógica

Lógica é um sistema matemático construido sobre o conjunto $\{verdadeiro, falso\}$.

- *verdadeiro* e *falso* são representados por 0 e 1 e são os valores booleanos (ou lógicos).
- As operações básicas lógicas são:
  - A **negação** (símbolo $\neg$): $\neg 0 = 1$ e $\neg 1 = 0$.
  - A **conjunção** (símbolo $\wedge$):
$$\begin{aligned} 0 \wedge 0 &= 0 \\ 0 \wedge 1 &= 0 \\ 1 \wedge 0 &= 0 \\ 1 \wedge 1 &= 1 \end{aligned}$$
  - A **disjunção** (símbolo $\vee$):
$$\begin{aligned} 0 \vee 0 &= 0 \\ 0 \vee 1 &= 1 \\ 1 \vee 0 &= 1 \\ 1 \vee 1 &= 1 \end{aligned}$$

Lógica

- Além dessas operações básicas ainda temos:
  - O **ou-exclusivo** (símbolo $\oplus$): $$\begin{array}{rcl} 0 \oplus 0 & = & 0 \\ 0 \oplus 1 & = & 1 \\ 1 \oplus 0 & = & 1 \\ 1 \oplus 1 & = & 0 \end{array}$$
  - A **igualdade** (símbolo $\leftrightarrow$): $$\begin{array}{rcl} 0 \leftrightarrow 0 & = & 1 \\ 0 \leftrightarrow 1 & = & 0 \\ 1 \leftrightarrow 0 & = & 0 \\ 1 \leftrightarrow 1 & = & 1 \end{array}$$
  - A **implicação** (símbolo $\rightarrow$): $$\begin{array}{rcl} 0 \rightarrow 0 & = & 1 \\ 0 \rightarrow 1 & = & 1 \\ 1 \rightarrow 0 & = & 0 \\ 1 \rightarrow 1 & = & 1 \end{array}$$

Lógica

- Pode-se estabelecer relações entre essas operações. Por exemplo: todas as operações podem ser escritas somente com $\wedge$ e $\neg$:
  - $$\begin{array}{ccc} P \vee Q & & \neg(\neg P \wedge \neg Q) \\ P \rightarrow Q & \neg P \vee Q & \neg(P \wedge \neg Q) \\ P \leftrightarrow Q & (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) & \neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(Q \wedge \neg P) \\ P \oplus Q & \neg(P \leftrightarrow Q) & \neg(\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(Q \wedge \neg P)) \end{array}$$
- A **lei distributiva** para E e OU:
  - $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
  - $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
- Parece com a lei distributiva da **adição** e **multiplicação**, mas não é igual.

Agenda

1 Autômatos, Computabilidade e Complexidade

2 Fundamentos da Matemática

3 Definições, Teoremas e Provas
- Tipos de Provas
- Prova por construção
- Prova por contradição
- Prova por indução

Provas

As **definições**, os **teoremas** e as **provas** são os elementos mais importantes da matemática.

- As **definições** descrevem os objetos e noções que usamos.
- Um **enunciado** expressa que algum objeto tem uma certa propriedade.
- Uma **prova** é um argumento convincente que um enunciado é verdadeiro.
- Um **teorema** é um enunciado matemático demonstrado como verdadeiro.

Provas

- Um **lema** é um enunciado utilizado para demonstração de outros enunciados mais interessantes.
- Um **corolário** é um enunciado que pode ser extraído diretamente de um teorema que foi demonstrado.
- Uma **conjectura** é um enunciado ainda não demonstrado.
- Tipos de métodos de prova:
    - Prova por construção
    - Prova por contradição
    - Prova por indução

Exemplo de Prova por Construção

Teorema: Para cada número par n, $n > 2$, existe um grafo 3-regular com n nós.

- Um grafo é **k-regular** se todo nó do grafo tem grau k.
- Seja n um número par maior que 2.
- Construa o grafo $G = (V, E)$ com n nós da seguinte forma:
  - $V = \{0, 1, ..., n-1\}$ e
  - $$\begin{aligned} E \;=\; & \{\{i, i+1\} \,|0 \leq i \leq n-2\} \cup \\ & \{\{n-1, 0\}\} \cup \\ & \{\{i, i+n/2\} | 0 \leq i \leq n/2 - 1\} \end{aligned}$$
- Para verificar, desenhe os nós do grafo desejado (n $=$ 4, n $=$ 6, n $=$ 8, etc.) consecutivamente ao redor de uma circunferência

Exemplo de Prova por Contradição

Teorema: $\sqrt{2}$ é irracional.

- Primeiro supomos que $\sqrt{2}$ é racional para gerar a contradição:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

$$\begin{array}{rcll}
n\sqrt{2} & = & m & \text{multiplicando os dois lados por } n \\
2n^2 & = & m^2 & \text{elevando os dois lados ao quadrado} \\
 & & & \text{então } m \text{ é par. } m = 2k \\
2n^2 & = & (2k)^2 & \\
n^2 & = & 2k^2 & \text{então } n \text{ também é par} \\
 & & & \text{e a fração } m/n \text{ não existe, pois} \\
 & & & \text{não pode ser reduzida.}
\end{array}$$

Exemplo de Prova por Indução

Teorema: $\sum_{x=0}^{n} x = \frac{n^2+n}{2}$

- Passo base: $n = 0$, então $\frac{0^2+0}{2} = 0$.
- Etapa da indução: Suponha que, para algum $n \geq 0, 1 + 2 + ... + m = \frac{m^2+m}{2}$ sempre que $m \leq n$.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + ... + n + (n+1) &= (1 + 2 + ... + n) + (n+1) \\ &= \frac{n^2+n}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n^2+n+2n+2}{2} \\ &= \frac{(n+1)^2+(n+1)}{2} \end{aligned}$$