Algoritmos e Estruturas de Dados

Análise de Algoritmos

Autores:
Carlos Urbano
Catarina Reis
José Magno
Marco Ferreira

Análise de Algoritmos

- **Objetivos**
  - Comparar diferentes algoritmos que resolvem um mesmo problema (veremos um exemplo mais à frente)
  - Análise da performance de um algoritmo em diferentes ambientes (diferentes máquinas)
  - Análise das variações de performance com base na alteração de parâmetros do problema (tamanho do problema ou os dados iniciais)

Análise de Algoritmos

- **Tempo de Execução – como medir?**
  - Copiar um ficheiro através da internet

    2 segundos para estabelecer a ligação e 8,5kb/s para "sacar" o ficheiro
  - Escrever todos os pares de pontos que se podem obter a partir de um conjunto de n números

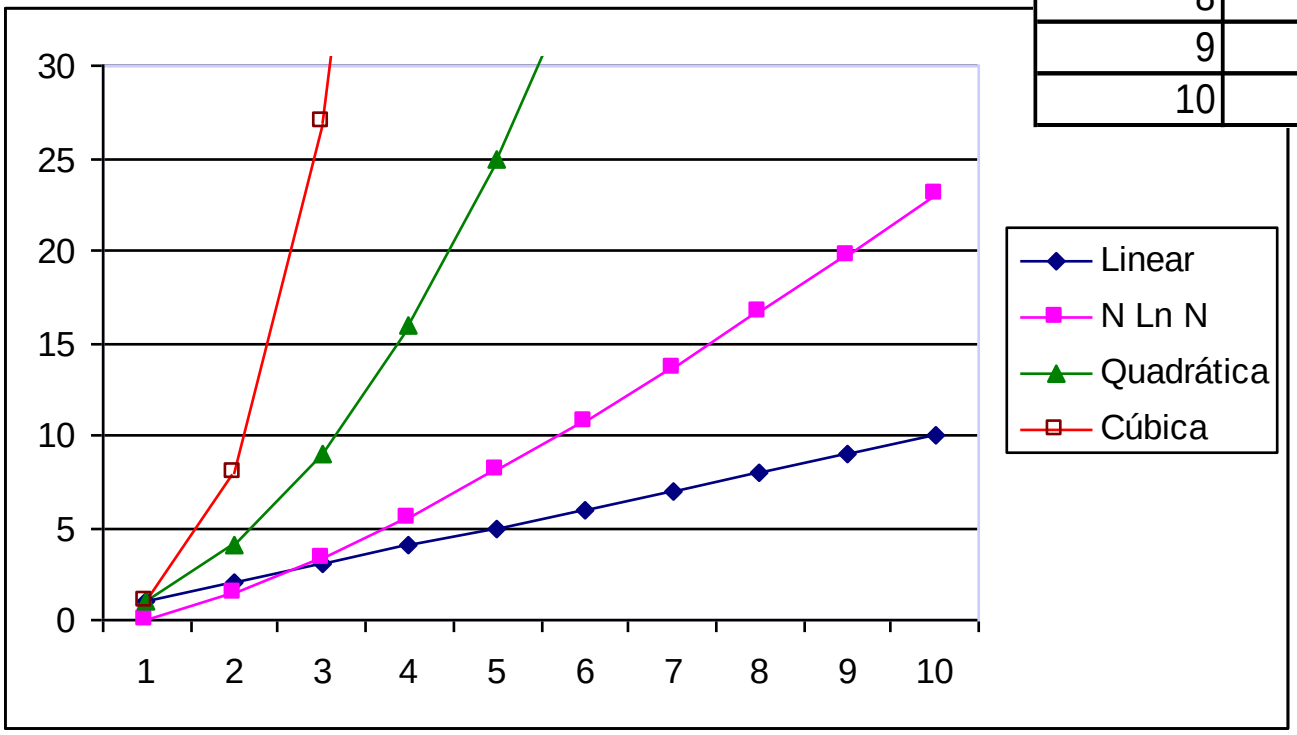
    Exemplo n = 6 {1, 2, 3, 4, 5, 6}

    { (1,1), (1, 2), (1, 3), (1,4), (1, 5) , (1,6),
    (2,1), (2, 2), (2, 3), (2,4), (2, 5) , (2,6),
    (3,1), (3, 2), (3, 3), (3,4), (3, 5) , (3,6),
    (4,1), (4, 2), (4, 3), (4,4), (4, 5) , (4,6),
    (5,1), (5, 2), (5, 3), (5,4), (5, 5) , (5,6),
    (6,1), (6, 2), (6, 3), (6,4), (6, 5) , (6,6) }

Análise de Algoritmos

- **Tempo de Execução**

	Linear	N Ln N	Quadrõtica	Cъbica
1	1	0,0	1	1
2	2	1,4	4	8
3	3	3,3	9	27
4	4	5,5	16	64
5	5	8,0	25	125
6	6	10,8	36	216
7	7	13,6	49	343
8	8	16,6	64	512
9	9	19,8	81	729
10	10	23,0	100	1000



Análise de Algoritmos

- **Tempos Médios de Execução**

Operações por segundo	Problema com tamanho 10^6			Problema com tamanho 10^{12}		
	Linear	N Ln N	Quadrática	Linear	N Ln N	Quadrática
10^{24}	10^{-18}	$1{,}4x10^{-17}$	10^{-12}	10^{-12}	$1{,}4x10^{-11}$	1
10^{12}	10^{-6}	$1{,}4x10^{-5}$	1	1	14	10^{12}
10^{9}	10^{-3}	$1{,}4x10^{-2}$	10^{3}	10^{3}	$1{,}4x10^{4}$	10^{15}
10^{6}	1	14	10^{6}	10^{6}	$1{,}4x10^{7}$	10^{18}

Operações por segundo	Problema com tamanho 10^6			Problema com tamanho 10^{12}		
	Linear	N Ln N	Quadrática	Linear	N Ln N	Quadrática
10^{24}	instantâneo	instantâneo	instantâneo	instantâneo	instantâneo	segundos
10^{12}	instantâneo	instantâneo	segundos	segundos	segundos	anos
10^{9}	instantâneo	instantâneo	minutos	minutos	horas	milénios
10^{6}	segundos	segundos	dias	dias	meses	milénios

Análise de Algoritmos

- **Tempo de Execução**
  - Diversas variáveis: máquina, dados iniciais, etc
  - Então, como medir e comparar o tempo de execução de algoritmos?
  - Utilizando uma notação robusta e fiável
    - Ex: **Big-Oh** (existem outras)
    - normalmente, definida através de fórmulas matemáticas
    - mas iremos simplificar a definição recorrendo a 4 regras simples e fáceis de perceber

Análise de Algoritmos

- **Notação Big-Oh**
  - Regra 1: O tempo de execução de um ciclo é no máximo o tempo de execução do corpo do ciclo multiplicado pelo número de iterações do ciclo

```
for (int i = 0; i < n; i++) {
    sum++;
}
```

O(N)

  - Regra 2: Nos ciclos encadeados, o tempo total de execução é o tempo de execução do corpo do ciclo mais interno multiplicado pelo produto dos tamanhos de todos os ciclos

```
for (int i = 0, j; i < n; i++) {
    for (j = 0; j < n; j++) {
        sum++;
    }
}
```

$O(N^2)$

Análise de Algoritmos

- **Notação Big-Oh**
  - Regra 3: Nas instruções consecutivas deve ser considerada a que tiver um maior tempo de execução

```
for (int i = 0; i < n; i++) {
    a[i] = 0;
}
for (int i = 0, j; i < n; i++) {
    for (j = 0; j < n; j++) {
        sum++;
    }
}
```

$O(N^2)$

Análise de Algoritmos

- **Notação Big-Oh**
  - Regra 4: Para um bloco `if ... else` deve ser considerado o ramo com maior tempo de execução

```
if (sum == 0) {
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        a[i] = 0;
    }
} else {
    for (int i = 0, j; i < n; i++) {
        for (j = 0; j < n; j++) {
            sum++;
        }
    }
}
```

$O(N^2)$

Análise de Algoritmos

- Exercício 1: Qual a ordem de execução do seguinte bloco?

```
for (int i = 0, j; i < n; i++) {
    for (j = 0; j < n * n; j++) {
        sum++;
    }
}
```

Análise de Algoritmos

- Exercício 1: Qual a ordem de execução do seguinte bloco?

```
for (int i = 0, j; i < n; i++) {
    for (j = 0; j < n * n; j++) {
        sum++;
    }
}
```

$O(N^3)$

Análise de Algoritmos

- Exercício 2: Qual a ordem de execução e tempo efetivo do bloco seguinte?

```
for (int i = 0, j, k; i < n; i++) {
    for (j = 0; j < i * i; j++) {
        if (j % i == 0) {
            for (k = 0; k < j; k++) {
                sum++;
            }
        }
    }
}
```

Análise de Algoritmos

- Exercício 2: Qual a ordem de execução e tempo efetivo do bloco seguinte?

```
for (int i = 0, j, k; i < n; i++) {
    for (j = 0; j < i * i; j++) {
        if (j % i == 0) {
            for (k = 0; k < j; k++) {
                sum++;
            }
        }
    }
}
```

$O(N^5)$

Apesar de o tempo efetivo ser bastante menor!

Análise de Algoritmos

- Exercício 3: Considere um algoritmo que demora 0,5s para uma entrada de 100 elementos. Qual será o tempo se a entrada for de 500 elementos e o tempo de execução for linear (quadrático ou cúbico)?

Análise de Algoritmos

- Exercício 3: Considere um algoritmo que demora 0,5s para uma entrada de 100 elementos. Qual será o tempo se a entrada for de 500 elementos e o tempo de execução for linear (quadrático ou cúbico)?
  - Linear
    - 0,5s x 500 / 100 = 2,5s

Análise de Algoritmos

- Exercício 3: Considere um algoritmo que demora 0,5s para uma entrada de 100 elementos. Qual será o tempo se a entrada for de 500 elementos e o tempo de execução for linear (quadrático ou cúbico)?
  - Linear
    - 0,5s x 500 / 100 = 2,5s
  - Quadrático
    - 100 elementos => 100 x 100 operações = 10.000 operações
    - 500 elementos => 500 x 500 operações = 250.000 operações
    - Resposta: 0,5s x 250.000 / 10.000 = 12,5s

Análise de Algoritmos

- Exercício 3: Considere um algoritmo que demora 0,5s para uma entrada de 100 elementos. Qual será o tempo se a entrada for de 500 elementos e o tempo de execução for linear (quadrático ou cúbico)?
  - Linear
    - 0,5s x 500 / 100 = 2,5s
  - Quadrático
    - 100 elementos => 100 x 100 operações = 10.000 operações
    - 500 elementos => 500 x 500 operações = 250.000 operações
    - Resposta: 0,5s x 250.000 / 10.000 = 12,5s
  - Cúbico
    - 100 elementos => 100 x 100 x 100 operações = 1.000.000 operações
    - 500 elementos => 500 x 500 x 500 operações = 125.000.000 operações
    - Resposta: 0,5s x 125.000.000 / 1.000.000 = 62,5s

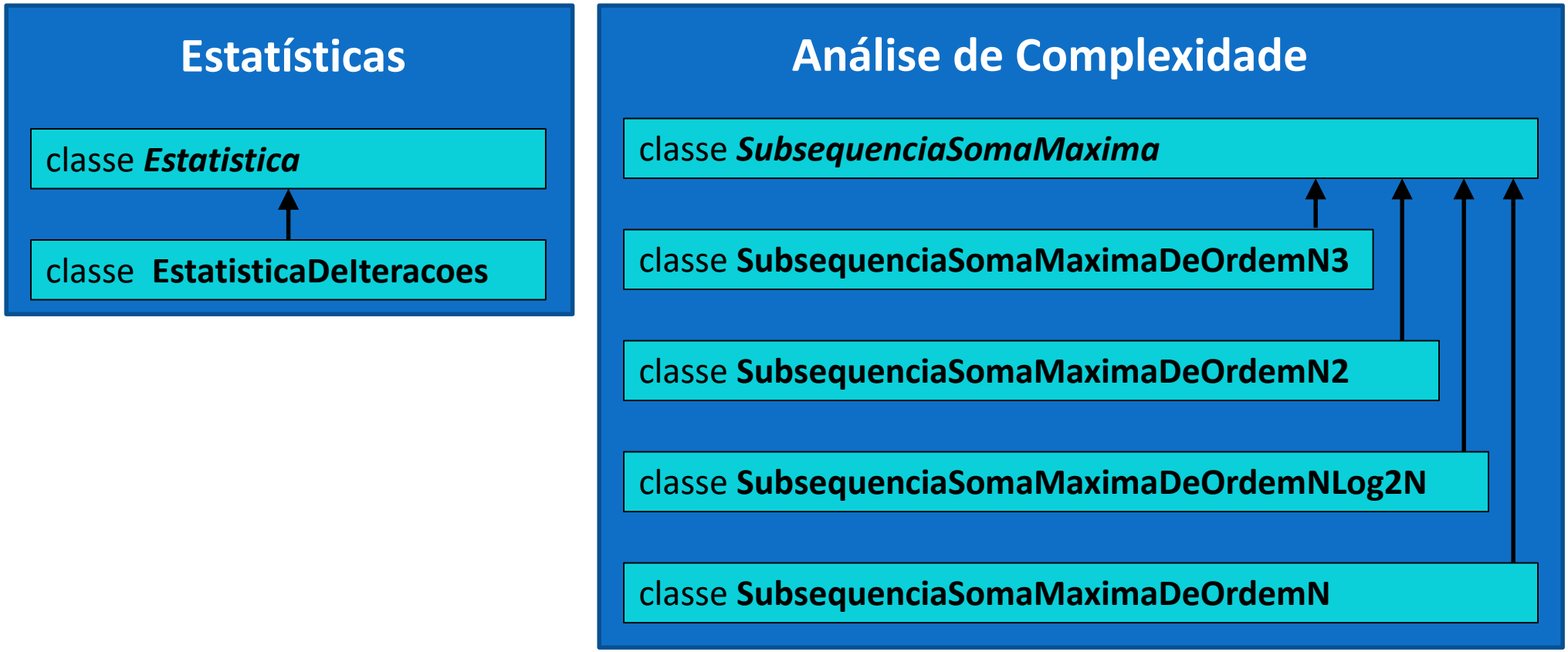
Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

- Definição do problema: Dada uma sequência de números inteiros pretende-se encontrar uma subsequência com a soma (não negativa) máxima

- Exemplo:
  - Na sequência {-2, 11, -4, 5, 7, -3, 13, 7, -5, 3} temos a subsequência com soma máxima:
    - compreendida entre os índices 1 e 7
    - {11, -4, 5, 7, -3, 13, 7}
    - com valor 36

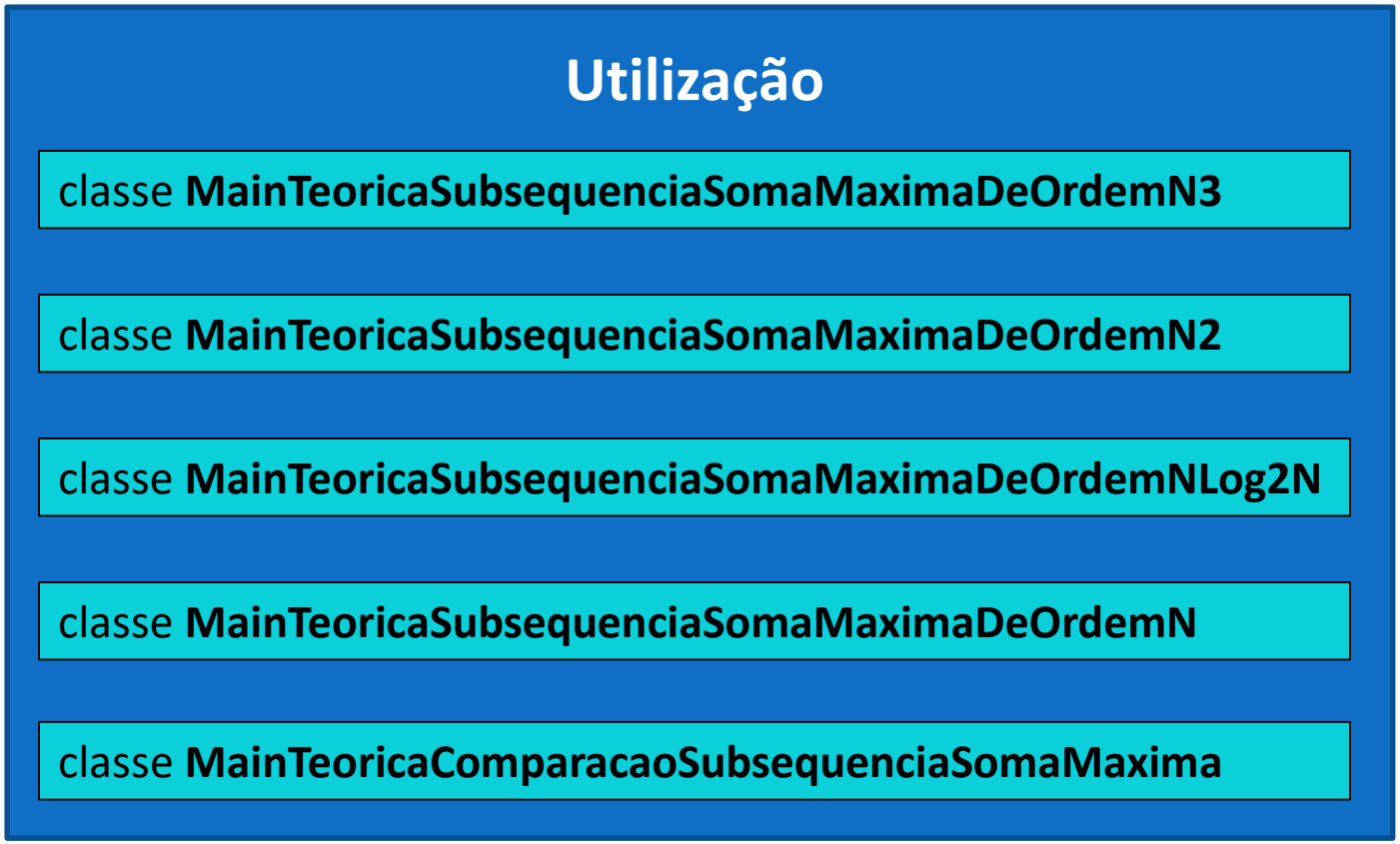
Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

- Classes a construir de seguida



Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

- Classes a construir de seguida



Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

```
import java.util.Arrays;

public abstract class Estatistica {
    private int tamanho;
    private String[] nomesContadores;
    private long[] contadores;
    private long tempoInicial;
    private long tempoTotal;

    public Estatistica(int tamanho, String... nomesContadores) {
        this.tamanho = tamanho;
        this.nomesContadores = nomesContadores;
        this.contadores = new long[nomesContadores.length];
        iniciar();
    }

    private void iniciar() {
        tempoInicial = System.nanoTime();
        Arrays.fill(contadores, 0);
        tempoTotal = -1;
    }
```

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

```
    public void parar() {
        tempoTotal = System.nanoTime() - tempoInicial;
    }

    protected void incrementarContador(int indice) {
        contadores[indice]++;
    }

    public void apresentar() {
        System.out.println("Tempo de execução: " + getTempoTotalMilisegundos() + "
ms");
        for (int i = 0; i < nomesContadores.length; i++) {
            System.out.println(nomesContadores[i] + ": " + contadores[i]);
        }
        System.out.println();
    }

    public int getTamanho() {
        return tamanho;
    }
```

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

```
    public int getNumeroContadores() {
        return contadores.length;
    }

    public String getNomeContador(int indice) {
        return nomesContadores[indice];
    }

    public long getContador(int indice) {
        return contadores[indice];
    }

    public double getTempoTotalMilisegundos() {
        return (tempoTotal / 1000000d);
    }

    public double getTempoTotalMicrosegundos() {
        return (tempoTotal / 1000d);
    }
}
```

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

```
public class EstatisticaDeIteracoes extends Estatistica {
    public EstatisticaDeIteracoes(int tamanho) {
        super(tamanho, "Número de Iterações");
    }

    public void incrementarIteracoes() {
        incrementarContador(0);
    }

    public long getIteracoes() {
        return getContador(0);
    }
}
```

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

```
public class Par<T1, T2> {
    private T1 primeiro;
    private T2 segundo;

    public Par(T1 primeiro, T2 segundo) {
        this.primeiro = primeiro;
        this.segundo = segundo;
    }

    public T1 getPrimeiro() {
        return primeiro;
    }

    public void setPrimeiro(T1 primeiro) {
        this.primeiro = primeiro;
    }

    public T2 getSegundo() {
        return segundo;
    }

    public void setSegundo(T2 segundo) {
        this.segundo = segundo;
    }

    public String toString() {
        return "Primeiro: " + primeiro + "   Segundo: " + segundo;
    }
}
```

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

```
public abstract class SubsequenciaSomaMaxima {
    public abstract long executar(EstatisticaDeIteracoes estatistica,
                    Par<Integer, Integer> indicesInicialEFinal, int... elementos);

    public EstatisticaDeIteracoes getEstatistica(int... elementos) {
        EstatisticaDeIteracoes estatistica =
                                        new EstatisticaDeIteracoes(elementos.length);
        Par<Integer, Integer> indicesInicialEFinal = new Par<>(0, 0);
        long soma = executar(estatistica, indicesInicialEFinal, elementos);
        estatistica.parar();
        System.out.println("Subsequência da soma máxima calculada com " +
                            getClass().getSimpleName() + ": ");
        System.out.println("Índice inicial = " +indicesInicialEFinal.getPrimeiro()
                          + " Índice final = " + indicesInicialEFinal.getSegundo()
                          + " Soma = " + soma);
        VetorDeInteiros.apresentar(10, Arrays.copyOfRange(elementos,
                                        indicesInicialEFinal.getPrimeiro(),
                                        indicesInicialEFinal.getSegundo() + 1));
        estatistica.apresentar();
        return estatistica;
    }
}
```

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

- Solução mais simples: Consiste em calcular todas as somas possíveis para determinar aquela que tem valor máximo

```
public long executar(EstatisticaDeIteracoes estatistica, Par<Integer,
                     Integer> indicesInicialEFinal, int... elementos) {
    long somaMaxima = 0, somaAtual;
    int inicio = 0, fim = 0;
    for (int i = 0; i < elementos.length; i++) {
        if (elementos[i] <= 0) {
            continue;
        }
        for (int j = i; j < elementos.length; j++) {
            if (elementos[j] <= 0) {
                continue;
            }
            somaAtual = 0;
```

Note-se que as variáveis inicio e fim apenas são necessárias para efeitos de simulação em JGrasp

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

- Solução mais simples: Consiste em calcular todas as somas possíveis para determinar aquela que tem valor máximo

```
                for (int k = i; k <= j; k++) {
                    somaAtual += elementos[k];
                    estatistica.incrementarIteracoes();
                }
                if (somaAtual > somaMaxima) {
                    inicio = i;
                    fim = j;
                    somaMaxima = somaAtual;
                }
            }
        }
        indicesInicialEFinal.setPrimeiro(inicio);
        indicesInicialEFinal.setSegundo(fim);
        return somaMaxima;
    }
}
```

Note-se que as variáveis inicio e fim apenas são necessárias para efeitos de simulação em JGrasp

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

- Solução mais simples: Consiste em calcular todas as somas possíveis para determinar aquela que tem valor máximo

```
public class MainTeoricaSubsequenciaSomaMaximaDeOrdemN3 {

    public MainTeoricaSubsequenciaSomaMaximaDeOrdemN3() {
        SubsequenciaSomaMaxima subsequenciaSomaMaxima =
                                                new SubsequenciaSomaMaximaDeOrdemN3();
        subsequenciaSomaMaxima.getEstatistica(-2, 11, -4, 5, 7, -3, 13, 7, -5, 3);
    }

    public static void main(String[] args) {
        new MainTeoricaSubsequenciaSomaMaximaDeOrdemN3();
    }
}
```

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

jGRASP

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

- 2ª solução: O ciclo mais interior não é necessário

```
public class SubsequenciaSomaMaximaDeOrdemN2 extends SubsequenciaSomaMaxima {

    public long executar(EstatisticaDeIteracoes estatistica,
                         Par<Integer, Integer> indicesInicialEFinal, int... elementos) {
        long somaMaxima = 0, somaAtual;
        int inicio = 0, fim = 0;
        for (int i = 0; i < elementos.length; i++) {
            if (elementos[i] <= 0) {
                continue;
            }
            somaAtual = 0;
            for (int j = i; j < elementos.length; j++) {
                somaAtual += elementos[j];
                if (somaAtual > somaMaxima) {
                    inicio = i;
                    fim = j;
                    somaMaxima = somaAtual;
                }
                estatistica.incrementarIteracoes();
            }
        }
        indicesInicialEFinal.setPrimeiro(inicio);
        indicesInicialEFinal.setSegundo(fim);
        return somaMaxima;
    }
}
```

Note-se que as variáveis inicio e fim apenas são necessárias para efeitos de simulação em JGrasp

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

- 2ª solução: O ciclo mais interior não é necessário

```
public class MainTeoricaSubsequenciaSomaMaximaDeOrdemN2 {

    public MainTeoricaSubsequenciaSomaMaximaDeOrdemN2() {
        SubsequenciaSomaMaxima subsequenciaSomaMaxima =
                                                new SubsequenciaSomaMaximaDeOrdemN2();
        subsequenciaSomaMaxima.getEstatistica(-2, 11, -4, 5, 7, -3, 13, 7, -5, 3);
    }

    public static void main(String[] args) {
        new MainTeoricaSubsequenciaSomaMaximaDeOrdemN2();
    }
}
```

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

jGRASP

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

- 3ª solução:
  - A subsequência com soma máxima está:
    - toda na metade esquerda da sequência
    - ou toda na metade direita da sequência
    - ou na junção das duas metades da sequência (isto é, o resultado da adição da soma máxima do meio para a esquerda com o da soma máxima do meio + 1 para a direita)
  - As duas primeiras são facilmente calculadas de modo recursivo
  - O terceiro caso é facilmente resolvido com dois ciclos

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

- 3ª solução: Versão Recursiva – caso base

```
public class SubsequenciaSomaMaximaDeOrdemNLog2N
                                                    extends SubsequenciaSomaMaxima {

    public long executar(EstatisticaDeIteracoes estatistica,
                         Par<Integer, Integer> indicesInicialEFinal, int... elementos) {
        return executarRecursivo(estatistica, indicesInicialEFinal, elementos, 0,
                                 elementos.length - 1);
    }

    private long executarRecursivo(EstatisticaDeIteracoes estatistica,
                                   Par<Integer, Integer> indicesInicialEFinal,
                                   int[] elementos, int esq, int dir) {
        estatistica.incrementarIteracoes();
        long somaMaxima = 0;
        int inicio, fim;
        if (esq == dir) {
            indicesInicialEFinal.setPrimeiro(esq);
            indicesInicialEFinal.setSegundo(dir);
            inicio = fim = esq;
            if (elementos[esq] > 0) {
                return somaMaxima = elementos[esq];
            }
            return somaMaxima = 0;
        }
```

Note-se que as variáveis somaMaxima, inicio e fim apenas são necessárias para efeitos de simulação em JGrasp

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

- 3ª solução: Versão Recursiva – chamadas

...

```
int meio = (esq + dir) / 2;
Par<Integer, Integer> indicesInicialEFinalEsq = new Par<>(0,0);
Par<Integer, Integer> indicesInicialEFinalDir = new Par<>(0,0);
long somaMaximaEsq = executarRecursivo(estatistica,
                                       indicesInicialEFinalEsq,
                                       elementos, esq, meio);
long somaMaximaDir = executarRecursivo(estatistica,
                                       indicesInicialEFinalDir,
                                       elementos, meio + 1, dir);
int inicioEsq = indicesInicialEFinalEsq.getPrimeiro();
int fimEsq = indicesInicialEFinalEsq.getSegundo();
int inicioDir = indicesInicialEFinalDir.getPrimeiro();
int fimDir = indicesInicialEFinalDir.getSegundo();
```

Note-se que as variáveis inicioEsq, fimEsq, inicioDir e FimDir apenas são necessárias para efeitos de simulação em JGrasp

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

- 3ª solução: Versão Recursiva – cálculo das somas do meio para a esquerda e do meio + 1 para a direita

...

```
        long somaMaximaMeioEsq = 0, somaAtualMeioEsq = 0;
        int inicioEsqDir = meio + 1;
        for (int i = meio; i >= esq; i--) {
            somaAtualMeioEsq += elementos[i];
            if (somaAtualMeioEsq > somaMaximaMeioEsq) {
                inicioEsqDir = i;
                somaMaximaMeioEsq = somaAtualMeioEsq;
            }
            estatistica.incrementarIteracoes();
        }

        long somaMaximaMeioDir = 0, somaAtualMeioDir = 0;
        int fimEsqDir = meio;
        for (int i = meio + 1; i <= dir; i++) {
            somaAtualMeioDir += elementos[i];
            if (somaAtualMeioDir > somaMaximaMeioDir) {
                fimEsqDir = i;
                somaMaximaMeioDir = somaAtualMeioDir;
            }
            estatistica.incrementarIteracoes();
        }
```

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

- 3ª solução: Versão Recursiva – cálculo e retorno da soma máxima

...

```
        long somaMaximaEsqDir = somaMaximaMeioEsq + somaMaximaMeioDir;
        if (somaMaximaEsq >= somaMaximaDir && somaMaximaEsq >= somaMaximaEsqDir) {
            inicio = indicesInicialEFinalEsq.getPrimeiro();
            fim = indicesInicialEFinalEsq.getSegundo();
            indicesInicialEFinal.setPrimeiro(inicio);
            indicesInicialEFinal.setSegundo(fim);
            somaMaxima = somaMaximaEsq;
            return somaMaxima;
        }
        if (somaMaximaDir >= somaMaximaEsqDir) {
            inicio = indicesInicialEFinalDir.getPrimeiro();
            fim = indicesInicialEFinalDir.getSegundo();
            indicesInicialEFinal.setPrimeiro(inicio);
            indicesInicialEFinal.setSegundo(fim);
            somaMaxima = somaMaximaDir;
            return somaMaxima;
        }
```

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

- 3ª solução: Versão Recursiva – cálculo e retorno da soma máxima

...

```
        inicio = inicioEsqDir;
        fim = fimEsqDir;
        indicesInicialEFinal.setPrimeiro(inicio);
        indicesInicialEFinal.setSegundo(fim);
        somaMaxima = somaMaximaEsqDir;
        return somaMaxima;
    }
}
```

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

- 3ª solução: Versão Recursiva

```
public class MainTeoricaSubsequenciaSomaMaximaDeOrdemNLog2N {

    public MainTeoricaSubsequenciaSomaMaximaDeOrdemNLog2N() {
        SubsequenciaSomaMaxima subsequenciaSomaMaxima =
                                        new SubsequenciaSomaMaximaDeOrdemNLog2N();
        subsequenciaSomaMaxima.getEstatistica(-2, 11, -4, 5, 7, -3, 13, 7, -5, 3);
        subsequenciaSomaMaxima.getEstatistica(4, -10, 3, 5, -9, 6);
    }

    public static void main(String[] args) {
        new MainTeoricaSubsequenciaSomaMaximaDeOrdemNLog2N();
    }
}
```

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

- 3ª solução: Recursiva
  - Análise de complexidade
    - Considerando *T*(*N*) o tempo necessário para calcular a subsequência de soma máxima para *N* elementos, temos:

$$T(N) = \begin{cases} 1 & \Leftarrow \; N = 1 \\ 2T(N/2) + N & \Leftarrow \; N > 1 \end{cases}$$

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

- 3ª solução: Recursiva
  - Análise de complexidade

$$T(N) = 2T(N/2) + N$$

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

- 3ª solução: Recursiva
  - Análise de complexidade

$$T(N) = 2T(N/2) + N$$
$$= 2[2T(N/2^2) + N/2] + N$$

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

- 3ª solução: Recursiva
  - Análise de complexidade

$$
\begin{aligned}
T(N) &= 2T(N/2) + N \\
&= 2[2T(N/2^2) + N/2] + N \\
&= 2^2 T(N/2^2) + 2N
\end{aligned}
$$

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

- 3ª solução: Recursiva
  - Análise de complexidade

$$
\begin{aligned}
T(N) &= 2T(N/2) + N \\
&= 2[2T(N/2^2) + N/2] + N \\
&= 2^2 T(N/2^2) + 2N \\
&= 2^2[2T(N/2^3) + N/2^2] + 2N
\end{aligned}
$$

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

- 3ª solução: Recursiva
  - Análise de complexidade

$$
\begin{aligned}
T(N) &= 2T(N/2) + N \\
&= 2[2T(N/2^2) + N/2] + N \\
&= 2^2 T(N/2^2) + 2N \\
&= 2^2[2T(N/2^3) + N/2^2] + 2N \\
&= 2^3 T(N/2^3) + 3N
\end{aligned}
$$

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

- 3ª solução: Recursiva
  - Análise de complexidade

$$
\begin{aligned}
T(N) &= 2T(N/2) + N \\
&= 2[2T(N/2^2) + N/2] + N \\
&= 2^2 T(N/2^2) + 2N \\
&= 2^2[2T(N/2^3) + N/2^2] + 2N \\
&= 2^3 T(N/2^3) + 3N \\
&\ldots \\
&= 2^k T(N/2^k) + kN
\end{aligned}
$$

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

- 3ª solução: Recursiva
  - Análise de complexidade

$$
\begin{aligned}
T(N) &= 2T(N/2) + N \\
&= 2[2T(N/2^2) + N/2] + N \\
&= 2^2 T(N/2^2) + 2N \\
&= 2^2[2T(N/2^3) + N/2^2] + 2N \\
&= 2^3 T(N/2^3) + 3N \\
&\ldots \\
&= 2^k T(N/2^k) + kN
\end{aligned}
$$

como o ponto de paragem é N=1 temos $N/2^k=1$, ou seja, $N=2^k$, ou ainda, $k=\log_2 N$, logo

$$T(N) = N + N \log_2 N$$

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

- 3ª solução: Recursiva
  - Análise de complexidade

$$
\begin{aligned}
T(N) &= 2T(N/2) + N \\
&= 2[2T(N/2^2) + N/2] + N \\
&= 2^2 T(N/2^2) + 2N \\
&= 2^2[2T(N/2^3) + N/2^2] + 2N \\
&= 2^3 T(N/2^3) + 3N \\
&\ldots \\
&= 2^k T(N/2^k) + kN
\end{aligned}
$$

como o ponto de paragem é N=1 temos $N/2^k=1$, ou seja, $N=2^k$, ou ainda, $k=\log_2 N$, logo

$$T(N) = N + N \log_2 N$$

Algoritmo de ordem $O(N \log_2 N)$

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

- 4ª solução: Algoritmo Linear (solução ótima)

```
public class SubsequenciaSomaMaximaDeOrdemN extends SubsequenciaSomaMaxima {

    public long executar(EstatisticaDeIteracoes estatistica,
                         Par<Integer, Integer> indicesInicialEFinal, int... elementos) {
        long somaMaxima = 0, somaAtual = 0;
        int inicio = 0, fim = 0, inicioAtual = 0;
        for (int j = 0; j < elementos.length; j++) {
            somaAtual += elementos[j];
            if (somaAtual < 0) {
                inicioAtual = j + 1;
                somaAtual = 0;
            } else if (somaAtual > somaMaxima) {
                fim = j;
                inicio = inicioAtual;
                somaMaxima = somaAtual;
            }
            indicesInicialEFinal.setPrimeiro(inicio);
            indicesInicialEFinal.setSegundo(fim);
            estatistica.incrementarIteracoes();
        }
        return somaMaxima;
    }
}
```

Note-se que as variáveis inicio e fim apenas são necessárias para efeitos de simulação em JGrasp

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

- 4ª solução: Algoritmo Linear (solução ótima)

```
public class MainTeoricaSubsequenciaSomaMaximaDeOrdemN {

    public MainTeoricaSubsequenciaSomaMaximaDeOrdemN() {
        SubsequenciaSomaMaxima subsequenciaSomaMaxima =
                                                new SubsequenciaSomaMaximaDeOrdemN();
        subsequenciaSomaMaxima.getEstatistica(-2, 11, -4, 5, 7, -3, 13, 7, -5, 3);
    }

    public static void main(String[] args) {
        new MainTeoricaSubsequenciaSomaMaximaDeOrdemN();
    }
}
```

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

- Análise comparativa das 4 soluções

```
public class MainTeoricaComparacaoSubsequenciaSomaMaxima {
    private static final int TAMANHO = 100;
    private static final int NUMERO_EXECUCOES = 10;

    public MainTeoricaComparacaoSubsequenciaSomaMaxima() {
        VisualizadorEstatisticas v = new VisualizadorEstatisticas();
        v.adicionarEstatisticas("O(N3)",
                        getEstatisticas(new SubsequenciaSomaMaximaDeOrdemN3()));
        v.adicionarEstatisticas("O(N2)",
                        getEstatisticas(new SubsequenciaSomaMaximaDeOrdemN2()));
        v.adicionarEstatisticas("O(NLog2N)",
                        getEstatisticas(new SubsequenciaSomaMaximaDeOrdemNLog2N()));
        v.adicionarEstatisticas("O(N)",
                        getEstatisticas(new SubsequenciaSomaMaximaDeOrdemN()));

        v.visualizar();
    }
```

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima

- Análise comparativa das 4 soluções

```
    public static void main(String[] args) {
        new MainTeoricaComparacaoSubsequenciaSomaMaxima();
    }

    private List<Estatistica> getEstatisticas(SubsequenciaSomaMaxima algoritmo) {
        List<Estatistica> estatisticas = new ArrayList<>();
        for (int i = 1; i <= NUMERO_EXECUCOES; i++) {
            EstatisticaDeIteracoes estatistica =
                 algoritmo.getEstatistica(VetorDeInteiros.
                     criarAleatorioInt(TAMANHO * i, -TAMANHO * 10, TAMANHO * 10));
            estatisticas.add(estatistica);
        }
        return estatisticas;
    }

}
```

Análise de Algoritmos
Subsequência com Soma Máxima