Departamento de Matemática

Matemática Discreta - 1ºano - 2º semestre
E.I.(D + PL)

Ano letivo: 2018/2019 **Folha Prática 4** **Funções**

1. Sejam $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$, $Z = \{1, 2\}$.
   (a) Defina uma função $f : X \to Y$ que seja injetiva.
   (b) Defina uma função $g : X \to Z$ que seja sobrejetiva.
   (c) Defina uma função $h : X \to X$ que não seja injetiva nem sobrejetiva.
   (d) Defina uma função $q : X \to X$ que seja bijetiva mas não seja a função identidade em X.

2. Considere a função $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $h(n) = 4n - 5$.
   (a) Analise se a função h é injetiva.
   (b) Verifique se a função h é sobrejetiva.

3. Considere a função floor $\lfloor\ \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$.
   (a) A função floor é injetiva ? Justifique.
   (b) Verifique se a função floor é sobrejetiva.

4. Suponha que α, β e γ são funções de um conjunto A nele próprio e que α é uma bijeção. Além disso, suponha também que $\alpha \circ \beta = \alpha \circ \gamma$. Será que se tem forçosamente $\beta = \gamma$? Justifique a sua resposta.

5. Considere as funções $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$. Prove que:
   (a) Se f e g são funções injetivas, então $g \circ f$ é injetiva.
   (b) Se f e g são funções sobrejetivas, então $g \circ f$ é sobrejetiva.

6. Indique, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações.
   (a) Se $f : A \longrightarrow B$ é injetiva e A é um conjunto finito, então B é um conjunto finito.
   (b) Se $f : A \longrightarrow A$ é injetiva mas não é sobrejetiva, então A é um conjunto infinito.
   (c) Se $f : A \longrightarrow B$ é sobrejetiva e B é finito, então A é finito.

7. Seja $2\mathbb{N}$ o conjunto de todos os naturais pares. Considere a função $h : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ dada por $h(n) = 2n$.
   (a) Mostre que a função h é injetiva e sobrejetiva.
   (b) Indique, justificando, o valor lógico da seguinte afirmação: “A cardinalidade do conjunto $2\mathbb{N}$ é metade da do conjunto $\mathbb{N}$.".

8. Mostre que os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ são equipotentes.

9. Seja $n \in \mathbb{Z}$, mostre que
$$n - \left\lfloor \frac{1}{3}n \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2}{3}n \right\rfloor$$
é igual ou a 0 ou a 1. *(Sugestão: considere n escrito como elemento genérico das diferentes classes de equivalência da relação congruência módulo 3 no conjunto $\mathbb{Z}$)*

10. Seja $C = \{3, 5, 7\}$. Mostre que $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \backslash C$ são equipotentes.

Soluções

1. $X = \{1,\ 2,\ 3\}$, $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Z = \{1,\ 2\}$.
   (a) Por exemplo: $f(1) = 2$; $f(2) = 4$; $f(3) = 1$.
   (b) Por exemplo: $f(1) = 2$; $f(2) = 1$; $f(3) = 1$.
   (c) Por exemplo: $f(1) = 1$; $f(2) = 3$; $f(3) = 1$.
   (d) Por exemplo: $f(1) = 2$; $f(2) = 3$; $f(3) = 1$.

2. $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $h(n) = 4n - 5$. $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $h(n) = 4n - 5$.
   (a) A função h é injetiva pois, supondo que $h(n_1) = h(n_2) \Leftrightarrow 4n_1 - 5 = 4n_2 - 5$ e conclui-se que $n_1 = n_2$.
   (b) A função h não é sobrejetiva. Por exemplo: não existe nenhum objeto em $\mathbb{Z}$ que tenha imagem 1 (o objeto teria de ser $n = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$).

3. $\lfloor\ \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$.
   (a) A função floor não é injetiva. Por exemplo, $\lfloor 2.3 \rfloor = \lfloor 2 \rfloor$ e $2.3 \neq 2$.
   (b) Tendo em conta a definição de sobrejetividade temos de provar que para qualquer elemento m do conjunto de chegada $\mathbb{Z}$ conseguimos obter um elemento $x \in \mathbb{R}$ tal que $\lfloor x \rfloor = n$. De facto, basta escolher $x = m \in \mathbb{R}$, $\lfloor m \rfloor = m$.

4. Se $\alpha \circ \beta = \alpha \circ \gamma$ então para qualquer $a \in A$ tem-se $\alpha(\beta(a)) = \alpha(\gamma(a))$, como α possui função inversa dado que é bijetiva, podemos aplicar a inversa $\alpha^{-1}(\alpha(\beta(a))) = \alpha^{-1}(\alpha(\gamma(a))) \Leftrightarrow \beta(a) = \gamma(a)$ para qualquer $a \in A$, ou seja, $\beta = \gamma$.

5. $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$
   (a) Esboço da prova: supor que $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ e, usando o facto de as funções g e f serem injetivas, concluir $x_1 = x_2$. Provando assim que $g \circ f$ é injetiva.
   (b) Esboço da prova: considerar um elemento arbitrário $c \in C$ e, usando o facto de as funções g e f serem sobrejetivas, concluir que existe $a \in A$ tal que $g(f(a)) = c$. Provando assim que $g \circ f$ é sobrejetiva.

6. (a) Falsa. Contra-exemplo: $f : A \to B$ com $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \mathbb{N}$ com $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ e $f(3) = 3$ é uma função injetiva e B não é um conjunto finito.
   (b) Esboço da prova: considerando A finito com n elementos concluir que $|f(A)| = n$ e, portanto, $A = f(A)$, ou seja, f terá de ser sobrejetiva, obtendo-se um absurdo quanto às condições iniciais de f.
   (c) Falsa. Contra-exemplo, $f : A \longrightarrow B$, onde $A = \mathbb{N}$ e $B = \{1, 2\}$, $f(1) = 1$, $f(n) = 2, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.
7. $h : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$,$h(n) = 2n$.
   (a) –
   (b) A afirmação é falsa.
8. –
9. –
10. –