Departamento de Matemática

Matemática Discreta - 1ºano - 1º semestre

E.I.(D + PL) Folha Prática 3

Ano letivo: 2018/2019

C.p.o., reticulados e álgebras de Boole

---

1. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 2), (5, 5)\}.$$

   (a) Verifique que R é uma relação de ordem parcial em A.

   (b) Construa o diagrama de Hasse do c.p.o. (A, R).

2. Mostre que $(Partes(A), \subseteq)$, onde A é um conjunto qualquer, é um conjunto parcialmente ordenado.

3. Represente o diagrama de Hasse dos seguintes conjuntos parcialmente ordenados:

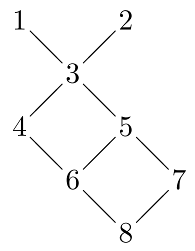
   (a) $(\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \geq)$;

   (b) $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, |)$;

   (c) $(\{1, 3, 9, 27, 81, 243\}, |)$;

   (d) $(Partes(A), \subseteq)$ com $A = \{a, b, c, d\}$.

4. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $X = \{4, 5, 6\}$, $Y = \{3, 6, 7, 8\}$. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$ com o seguinte diagrama de Hasse:



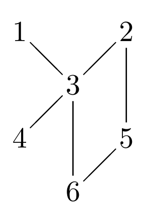
   (a) Determine: majorantes(X), minorantes(X), majorantes(Y) e minorantes(Y).

   (b) Determine, caso existam, o supremo e o ínfimo de X e de Y.

   (c) Determine, caso existam, o máximo e o mínimo de X e de Y.

   (d) Indique o diagrama de Hasse de $(X, \leq_X)$ e de $(Y, \leq_Y)$.

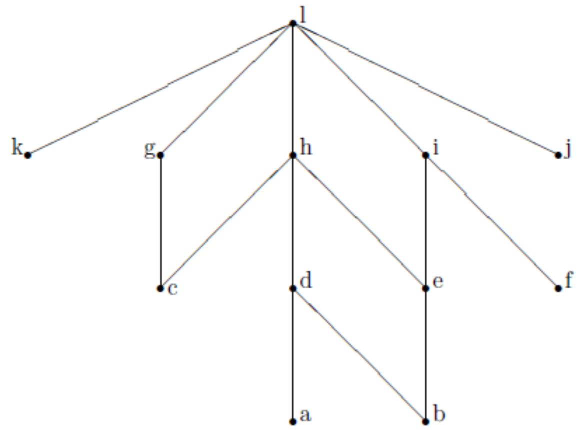
5. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e considere o c.p.o. $(A, \leq)$ com o seguinte diagrama de Hasse:



   (a) Determine todos os elementos minimais e maximais de $(A, \leq)$.

   (b) O c.p.o. $(A, \leq)$ é um reticulado? Justifique.

6. Seja A o conjunto parcialmente ordenado cujo diagrama de Hasse é o seguinte:



Determine, se existir,

(a) o elemento máximo e o elemento mínimo de A;

(b) os elementos maximais e minimais;

(c) Sendo $S = \{c, d, e\}$, determine majorante(S), minorante(S), sup(S) e inf(S);

7. Considere o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, ordenado por divisibilidade, e dois seus subconjuntos:

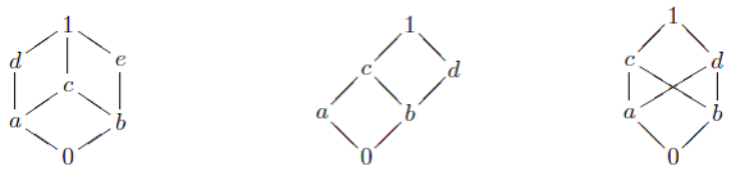
$$K = \{3, 5, 7\} \text{ e } D_{36} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é divisor de } 36\}.$$

(a) Determine $sup(K)$ e $inf(K)$.

(b) Esboce o diagrama de Hasse de D_{36}, o conjunto dos divisores de 36.

(c) O conjunto parcialmente ordenado D_{36} é um reticulado? Justifique convenientemente a sua resposta.

8. Considere os seguintes conjuntos parcialmente ordenados, representados abaixo.



A_1 A_2 A_3

(a) Indique, justificando, quais dos conjuntos parcialmente ordenados são reticulados.

(b) Mostre que A_1 não é distributivo e que A_2 não é complementado.

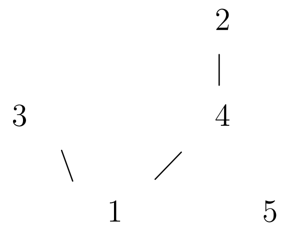
(c) Indique, justificando, se algum dos conjuntos parcialmente ordenados é uma álgebra Booleana.

Soluções

1.

(a) R é uma relação de ordem parcial uma vez que é reflexiva, antissimétrica e transitiva.

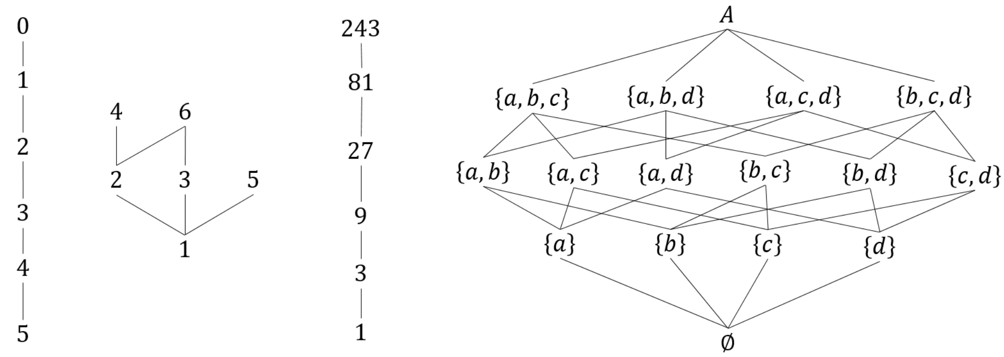
(b)



2.

3.

a) b) c) d)

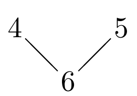


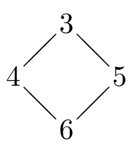
4. (a) majorantes(X) $= \{3, 1, 2\}$; minorantes(X) $= \{8, 6\}$;
majorantes(Y) $= \{1, 2, 3\}$; minorantes(Y) $= \{8\}$.

(b) $\sup(X) = 3$; $\inf(X) = 6$; $\sup(Y) = 3$; $\inf(Y) = 8$.

(c) $\max(X)$: não existe, $\min(X) = 6$; $\max(Y) = 3$, $\min(Y) = 8$.

(d)





5. (a) Elementos maximais: $1, 2$; Elementos minimais: $4, 6$.

(b) Não é reticulado porque, por exemplo, não existe $inf(4, 6)$.

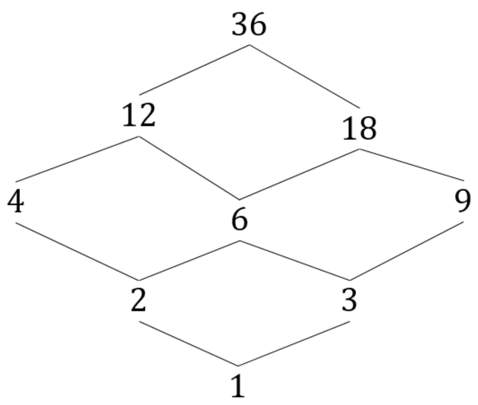
6. (a) elemento máximo: l; elemento mínimo: não existe.

(b) elemento maximal: l; elementos minimais: k, c, a, b, f e j.

(c) majorantes(S) $= \{h, l\}$; minorantes(S) : não existe; $\sup(S) = h$ e inf (S) : não existe.

7. (a) $m.m.c.(K) = 105$ e $m.d.c.(K) = 1$.

   (b)



   (c) O conjunto D_{36} é um reticulado uma vez que para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, existem supremo, que é dado por $a \vee b = m.m.c.(a, b)$, e ínfimo, que é dado por $a \wedge b = m.d.c.(a, b)$.

8. (a) Apenas o A_3 não é um reticulado uma vez que $\{a, b\}$ tem 3 majorantes, c, d e 1 e como não existe o menor dos majorantes então não existe $a \vee b$.

   (b) Sabendo que num reticulado distributivo limitado, cada elemento admite no máximo um complemento, e como, por exemplo, o elemento e de A_1 tem dois complementos $\{a, d\}$, logo A_1 não é distributivo.

   A_2 não é complementado pois, por exemplo, o elemento c não tem complemento.

   (c) Como A_1 não é distributivo logo não é algebra de Boole.

   Como A_2 não é complementado logo não é algebra de Boole.

   Como A_3 não é reticulado logo não é algebra de Boole.