1. Complete com os símbolos $=$, $\subset$, $\supset$, $\in$ ou $\notin$.

   (a) $\{b, d\}$ —— $\{a, b, c, d\}$;

   (b) $\{b, d\}$ —— $\{a, \{b, d\}, c\}$;

   (c) $\{b, d\}$ —— $\{a, b, c, \{d\}\}$;

   (d) b —— $\{a, b, c, d\}$;

   (e) $\{a, b, c, d\}$ —— $\{a\}$;

   (f) $\{\{a\}\}$ —— $\{\{a\}, b, c, \{d\}\}$;

   (g) $\{\{a\}, c\}$ —— $\{\{a\}, b, c, \{d\}\}$;

   (h) $\{a\}$ —— $\{\{a\}, b, c, \{d\}\}$;

   (i) $\emptyset$ —— $\{\{a\}, b, c, \{d\}\}$;

   (j) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0\}$ —— $\{1\}$;

   (k) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$ —— $\{1, 2\}$.

2. Considere os conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 8\}$ e $C = \{1, 9, 4, 6\}$ do universo $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

   (a) Represente num diagrama de Venn os conjuntos A, B, C e $\mathcal{U}$.

   (b) Determine:

   i. $A \cap B$; ii. $\overline{(A \cup B)}$; iii. $A \oplus B$;
   iv. $(A \setminus B) \cap C$; v. $(B \cap \overline{A}) \oplus C$; vi. $A \setminus \overline{(B \cap C)}$.

3. Determine os conjuntos A, B e C no universo $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ tais que:

   $A \cap B = \{1, 3, 5\}$; $C \setminus A = \{2, 4, 6\}$; $B \setminus C = \{3, 5, 8\}$; $A \cap C = B \cap C$ e $\overline{A \cup B \cup C} = \{0, 9\}$.

4. Mostre que existem conjuntos A, B e C tais que:

   (a) $A \setminus B = A \setminus C$ sem que $B = C$;

   (b) $A \cap B = A \cap C$ sem que $B = C$.

5. Considere os conjuntos $A = \{a, b, c, \{c, d, e\}\}$ e $B = \{\{a\}, b, c, d\}$. Determine:

   (a) $A \oplus B$;

   (b) todas as partições de A com três elementos;

   (c) o conjunto das partes de B.

6. Considere o conjunto $A = \{a, b, c, \{d, e, f\}\}$. Para cada uma das alíneas seguintes, indique um conjunto B que verifique:

   (a) $A \subseteq B$ e $\{g\} \in B$.

   (b) $\{d, e, f\} \subseteq B$ e $A \cap B = \{\{d, e, f\}\}$.

   (c) $B = Partes(A)$.

   (d) B é uma partição de A e $n(B) = 3$.

7. Sejam A e B conjuntos de um universo finito $\mathcal{U}$. Coloque as seguintes cardinalidades por ordem crescente:

   (a) $n(A)$, $n\left(A \cup B\right)$, $n\left(A \cap B\right)$, $n(\mathcal{U})$, $n(\varnothing)$.

   (b) $n\left(A \setminus B\right)$, $n\left(A \oplus B\right)$, $n\left(A \cup B\right)$, $n(A) + n(B)$, $n(\varnothing)$.

8. Indique dois quaisquer subconjuntos, A e B, de $\mathbb{N}$ que verifiquem todas as condições que seguem:

   - $n(A) = 3 \quad \text{e} \quad n(B) = 2$;
   - $\forall a \in A,\ a\ $ é par;
   - $\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a + b\ $ é ímpar;
   - $\forall a \in A,\ \exists b \in B,\ a < b$.

9. Num encontro de Engenheiros Informáticos estavam sessenta e cinco pessoas. Destas, quarenta levaram tablet, vinte e oito levaram smartphone, dezoito levaram PC, nove levaram tablet e smartphone, dez levaram PC e smartphone, seis levaram PC e tablet e três levaram PC, tablet e smartphone. Quantas engenheiros é que não levaram qualquer um destes três equipamentos?

10. Sabendo que 150 estudantes de Engenharia Informática podem optar por estudar as línguas estrangeiras Italiano, Alemão e Espanhol e que destes estudantes

    - 55 estudam italiano
    - 45 estudam alemão
    - 52 estudam espanhol
    - 22 estudam italiano e alemão
    - 23 estudam italiano e espanhol
    - 15 estudam alemão e espanhol
    - 10 estudam italiano, alemão e espanhol

    determine o número de estudantes que estudam pelo menos uma língua estrangeira.

11. Sejam A, B e C conjuntos de um universo $\mathcal{U}$. Através da álgebra de conjuntos, mostre que:

   (a) $(A \cap B) \cup \overline{\left(\overline{A} \cup B\right)} = A$.

   (b) $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$.

   (c) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

   (d) $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

   (e) $(B \cap C) \cup \overline{\left[\left(B \cup \overline{A}\right) \cap (B \cup A)\right]} = C \cup \overline{B}$.

12. Sejam A, B, C e D conjuntos de um universo $\mathcal{U}$ tais que $A \subset C$. Mostre que:

$$[(D \setminus B) \cup (B \cap D)] \cap \overline{\left[\left(A \cap \overline{C}\right) \cup \overline{D}\right]} = D.$$

Soluções

1. (a) $\{b, d\} \subset \{a, b, c, d\}$;

   (b) $\{b, d\} \in \{a, \{b, d\}, c\}$;

   (c) $\{b, d\} \notin \{a, b, c, \{d\}\}$;

   (d) $b \in \{a, b, c, d\}$;

   (e) $\{a, b, c, d\} \supset \{a\}$;

   (f) $\{\{a\}\} \subset \{\{a\}, b, c, \{d\}\}$;

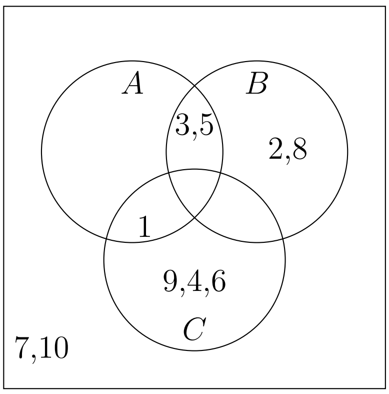
   (g) $\{\{a\}, c\} \subset \{\{a\}, b, c, \{d\}\}$;

   (h) $\{a\} \in \{\{a\}, b, c, \{d\}\}$;

   (i) $\emptyset \subset \{\{a\}, b, c, \{d\}\}$;

   (j) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0\} \supset \{1\}$;

   (k) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$.

2. (a) 

   (b)

i.	$\{3, 5\}$;	ii.	$\{4, 6, 7, 9, 10\}$;	iii.	$\{1, 2, 8\}$;
iv.	$\{1\}$;	v.	$\{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$;	vi.	$\emptyset$.

3. $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 5, 8\}$ e $C = \{1, 2, 4, 6\}$.

4. (a) Para provar a existência basta apresentar um exemplo. Por exemplo, para $A = \{1,3,5\}$, $B = \{1,2,4\}$ e $C = \{1,6,7\}$ tem-se que $A \setminus B = \{3,5\} = A \setminus C$, no entanto $B \neq C$.

   (b) Para provar a existência basta apresentar um exemplo. Por exemplo, para $A = \{3,5\}$, $B = \{2,4\}$ e $C = \{6,7\}$ tem-se que $A \cap B = \emptyset = A \cap C$, no entanto $B \neq C$.

5. (a) $\{a, \{c,d,e\}, \{a\}, d\}$;

   (b) $P_1 = \{\{a,b\}, \{c\}, \{\{c,d,e\}\}\}$, $P_2 = \{\{a,c\}, \{b\}, \{\{c,d,e\}\}\}$,
   $P_3 = \{\{b,c\}, \{a\}, \{\{c,d,e\}\}\}$, $P_4 = \{\{a, \{c,d,e\}\}, \{b\}, \{c\}\}$,
   $P_5 = \{\{b, \{c,d,e\}\}, \{a\}, \{c\}\}$, $P_6 = \{\{c, \{c,d,e\}\}, \{a\}, \{b\}\}$.

   (c) $Partes(B) = \{\emptyset, \{\{a\}\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{\{a\}, b\}, \{\{a\}, c\}, \{\{a\}, d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{\{a\}, b, c\}, \{\{a\}, b, d\}, \{\{a\}, c, d\}, \{b,c,d\}, \{\{a\}, b, c, d\}\}$.

6. Considere o conjunto $A = \{a, b, c, \{d, e, f\}\}$. Para cada uma das alíneas seguintes, indique um conjunto B que verifique:

   (a) $B = \{a, b, c, \{d,e,f\}, \{g\}\}$.

   (b) $B = \{d, e, f, \{d,e,f\}\}$.

   (c) $B = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{\{d,e,f\}\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a, \{d,e,f\}\}, \{b,c\}, \{b, \{d,e,f\}\}, \{c, \{d,e,f\}\}, \{a,b,c\}, \{a,b,\{d,e,f\}\}, \{a,c,\{d,e,f\}\}, \{b,c,\{d,e,f\}\}, \{a,b,c,\{d,e,f\}\}\}$.

   (d) $B = \{\{a,b\}, \{c\}, \{\{d,e,f\}\}\}$.

7. (a) $n(\varnothing)$, $n(A \cap B)$, $n(A)$, $n(A \cup B)$, $n(\mathcal{U})$.

   (b) $n(\varnothing)$, $n(A \setminus B)$, $n(A \oplus B)$, $n(A \cup B)$, $n(A) + n(B)$.

8. Por exemplo, $A = \{2,4,6\}$ e $B = \{5,7\}$.

9. Apenas 1 dos engenheiros é que não levou qualquer um dos aparelhos.

10. São 102 os estudantes que estudam pelo menos uma língua estrangeira.

11. -

12. -