Departamento de Matemática

Matemática Discreta - 1.ºano - 2.º semestre

E.I.(D + PL)

Ano letivo: 2018/2019 **Folha Prática 2** **Relações**

1. Sejam $A = \{3, 4, 5\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$. A relação R de A em B é definida do seguinte modo $R = \{(x, y) : x < y\}$. Indique todos os elementos de R e de R^{-1}.

2. Seja $A = \{2, 5, 7\}$ e R a relação em $\mathcal{P}(A)$ definida por

$$XRY \text{ se e somente se } X \subset Y, \qquad \text{com } X,\, Y \in \mathcal{P}(A).$$

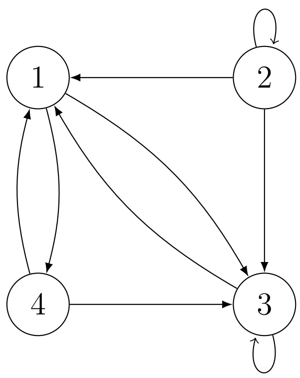
Indique todos os elementos de R.

3. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e R a relação em A dada pelo seguinte conjunto

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}.$$

Represente a relação R através de uma matriz e através de um grafo orientado.

4. Indique os elementos da relação R cuja representação é dada pelo seguinte gráfico orientado:



5. Sejam R e S relações num conjunto A cujas matrizes M_R e M_S são dadas por:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz associada à relação:

(a) $R \circ S$. (b) R^2.

6. Seja $A = \{1, 2, 3\}$. Considere as matrizes das relações R, S e T em A:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } M_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Indique quais destas relações são

(a) reflexiva. (b) simétrica (c) antissimétrica. (d) transitiva.

7. Sejam R e S as relações em $A = \{a, b, c, d\}$ definidas, respetivamente, por:

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b)\};$$

$$S = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (b, a), (b, c)\}.$$

   (a) Determine:

      i. as matrizes das relações R e S.

      ii. as matrizes das relações $R \circ S$ e $S \circ R$.

   (b) Indique, justificando, se $R \circ S = S \circ R$.

   (c) Determine S^{-1}.

   (d) Indique o domínio e a imagem de S^{-1}.

   (e) Calcule os seguintes fechos: reflexivo(R), simétrico(R) e transitivo(R).

   (f) Determine R_1, a menor relação de equivalência que contém R.

8. Seja $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e seja R a relação em A definida por aRb se e só se a divide b, denotando-se por $a|b$. (Note que $a|b$ se e somente se existe algum inteiro c tal que $b = ac$.)

   (a) Determine o conjunto R por extensão.

   Assuma nas alíneas seguintes que:

$$R = \{(2, 2); (2, 6); (3, 3); (3, 6); (4, 4); (5, 5)\}.$$

   (b) Esboce o grafo orientado da relação R.

   (c) Determine a matriz da relação R.

   (d) Indique, justificando, se R é reflexiva, se é simétrica, se é transitiva e se é antissimétrica.

   (e) Determine S, a menor relação de equivalência que contém R.

   (f) Determine as classes de equivalência de S.

9. Seja $A = \{2, 3, 4\}$ e seja R a relação em A definida por:

$$R = \{(2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 3); (3, 4); (4, 2); (4, 4)\}.$$

   (a) Indique, justificando, se R é uma relação de equivalência.

   (b) Indique, justificando, quantos subconjuntos de R são funções de domínio A injetivas.

   (c) Determine um conjunto parcialmente ordenado (A, R_1) com R_1 um subconjunto de R.

10. Seja R uma relação de equivalência em $A = \{2, 4, 6, 8\}$ que verifica todas as condições que seguem:
   - $n(R) = 10$;
   - $(2, 4) \in R$;
   - $(6, 2) \in R$.

   (a) Liste todos os elementos de R.

   (b) Determine $A/R = \{[a] : \ a \in A\}$, o conjunto quociente de A por R.

   (c) Determine todas as partições de A com dois elementos.

   (d) Indique, justificando, uma relação R_1 em A que seja simultaneamente uma equivalência e uma ordem parcial.

11. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e a partição $\mathcal{P} = \{\{1, 3\}\,;\{2, 4\}\,;\{5\}\}$. Determine a relação de equivalência em A definida pela partição $\mathcal{P}$.

12. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ e $\sim$ uma relação em $A \times A \times A$ definida por $(a, b, c) \sim (x, y, z)$ se e só se $a + y = b + x$ e $c = z$.

   (a) Mostre que $(5, 9, 4) \sim (1, 5, 4)$.

   (b) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.

   (c) Determine $[(2, 7, 5)]$, a classe de equivalência de $(2, 7, 5)$.

13. Considere a função $f\colon \mathbb{N} \to \{0, 1, 2\}$ que associa a cada número natural n o resto da divisão inteira por 3.

   (a) Prove que a relação
   $$R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid f(x) = f(y)\}$$
   é uma relação de equivalência em $\mathbb{N}$.

   (b) Calcule o conjunto quociente $\mathbb{N}/R$, indicando as suas classes de equivalência.

14. Considere o conjunto $\mathbf{Z}$ dos números inteiros e a relação de congruência módulo 4, denotada $\equiv_4$, definida em $\mathbf{Z}$ por:
   $$a \equiv_4 b (mod\, 4) \text{ se e só se 4 divide } a - b.$$

   (a) Mostre que $\equiv_4$ é uma relação de equivalência.

   (b) Calcule $[2]_{\equiv_4}$, a classe de equivalência do 2 relativa à relação $\equiv_4$.

   (c) Determine a partição de $\mathbf{Z}$ induzida pela relação $\equiv_4$.

15. Considere o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e a relação S em $\mathbf{R}$ definida por:

$$x\,S\,y \text{ se e só se } \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor;$$

onde $\lfloor x \rfloor$ denota a parte inteira de x.

    (a) Mostre que S é uma relação de equivalência.

    (b) Determine o conjunto quociente $\mathbb{R}/S$.

16. Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A não vazio.

    (a) Prove que R^{-1} também é uma relação de equivalência.

    (b) Prove que o conjunto quociente $A/\,R$ é uma partição de A.

17. Seja R a relação sobre $\mathbb{Z}$ definida por aRb se e só se $b = a^n$, para algum inteiro positivo n. Prove que R é uma relação de ordem parcial.

18. Considere o conjunto $\mathbb{N}$ dos números inteiros positivos a relação R em $\mathbf{N}$ definida por:

$$x\,R\,y \text{ se e só se } x \text{ divide } y.$$

Mostre que R é uma relação de ordem parcial.

19. Apresente um exemplo de uma relação R que seja:

    (a) reflexiva, simétrica e não transitiva.

    (b) reflexiva, não simétrica e transitiva.

    (c) não reflexiva, simétrica e transitiva.

    (d) de equivalência.

    (e) de ordem parcial.

20. Considere o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e a relação R definida sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por:

$$(x, y)R(z, w) \Leftrightarrow x \equiv z (\text{mod} 3) \;\wedge\; y + w = 2k, k \in \mathbb{N}.$$

    (a) Mostre que R é uma relação simétrica.

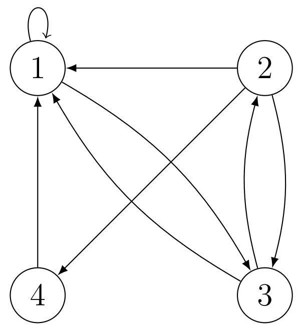
    (b) Sabendo que R é uma relação de equivalência em $\mathbb{N}$, indique um representante para cada uma das classes de equivalência do conjunto quociente $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/R$.

Soluções

1. $R = \{(3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\}$, $R^{-1} = \{(4, 3), (5, 3), (6, 3), (5, 4), (6, 4), (6, 5)\}$.

2. $$R = \{(\varnothing,\{2\}),(\varnothing,\{5\}),(\varnothing,\{7\}),(\varnothing,\{2,5\}),(\varnothing,\{2,7\}),(\varnothing,\{5,7\}),(\varnothing,A), (\{2\},\{2,5\}),(\{2\},\{2,7\}),(\{2\},A),(\{5\},\{2,5\}),(\{5\},\{5,7\}),(\{5\},A), (\{7\},\{2,7\}),(\{7\},\{5,7\}),(\{7\},A),(\{2,5\},A),(\{2,7\},A),(\{5,7\},A)\}.$$

3. $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$



4. $R = \{(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,3),(4,1),(4,3)\}$.

5. (a) $M_{R\circ S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $M_{R^2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

6. (a) reflexiva: R (b) simétrica: R e T (c) antisimétrica: S (d) transitiva:S, R

7. (a)
   i. $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   ii. $M_{R\circ S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $M_{S\circ R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) Não.

   (c) $S = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(c,b)\}$.

   (d) $D(R) = \{a,b,c,d\}$, $Im(R) = \{a,b,c,d\}$.

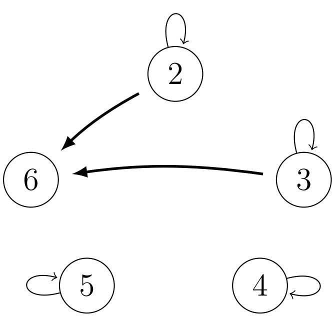
   (e) reflexivo$(R) = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(d,d)\}$, simétrico$(R) = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a)\}$ e transitivo$(R) = R$.

   (f) $R_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a)\}$.

8. (a) $R = \{(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(5,5),(6,6)\}$.

   Assuma nas alíneas seguintes que: $R = \{(2,2);(2,6);(3,3);(3,6);(4,4);(5,5)\}$.

   (b)



(c) $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) R é transitiva e antissimétrica.

(e) $R = \{(2,2),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(5,5),(6,6),(6,2),(6,3),(2,3),(3,2)\}$.

(f) Classes de equivalência de S: $[2] = \{2,3,6\}$, $[4] = \{4\}$, $[5] = \{5\}$.

9. $R = \{(2,2);(2,3);(2,4);(3,3);(3,4);(4,2);(4,4)\}$.

   (a) R não é uma relação de equivalência.

   (b) 3.

   (c) $R = \{(2,2);(2,3);(2,4);(3,3);(3,4);(4,4)\}$.

10. (a) $R = \{(2,2),(4,4),(6,6),(8,8),(2,4),(4,2),(6,2),(2,6),(4,6),(6,4)\}$.

    (b) $A/R = \{[2],[8]\}$ onde $[2] = \{2,\ 4,\ 6\}$ e $[8] = \{8\}$.

    (c) Existem sete partições: $\mathcal{A} = \{\{2\},\{4,6,8\}\}$, $\mathcal{B} = \{\{4\},\{2,6,8\}\}$, $\mathcal{C} = \{\{6\},\{2,4,8\}\}$, $\mathcal{D} = \{\{8\},\{2,4,6\}\}$; $\mathcal{E} = \{\{2,4\},\{6,8\}\}$; $\mathcal{F} = \{\{2,6\},\{4,8\}\}$; $\mathcal{G} = \{\{2,8\},\{4,6\}\}$.

    (d) $R_1 = \{(2,2),(4,4),(6,6),(8,8)\}$.

11. $R = \{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3),(2,2),(2,4),(4,2),(4,4),(5,5)\}$.

12. (c) $[(2,7,5)] = \{(1,6,5),(2,7,5),(3,8,5),(4,9,5),(5,10,5),(6,11,5),(7,12,5)\}$.

13. (b) $\mathbb{N}/R = \{[1],[2],[3]\}$, $[1] = \{3n+1 : n \in \mathbb{N}\}$; $[2] = \{3n+2 : n \in \mathbb{N}\}$ e $[3] = \{3n : n \in \mathbb{N}\}$.

14. (b) $[2]_{\equiv_4} = \{4n+2 : n \in \mathbb{Z}\}$.

    (c) $\mathbf{Z}/_{\equiv_4} = \{[0],[1],[2],[3]\}$ onde $[0] = \{4n : n \in \mathbb{Z}\}$, $[1] = \{4n+1 : n \in \mathbb{Z}\}$, $[2] = \{4n+2 : n \in \mathbb{Z}\}$ e $[3] = \{4n+3 : n \in \mathbb{Z}\}$.

15. (b) $\mathbb{R}/S = \{[n,\ n+1[\ : n \in \mathbb{Z}\}$.

19 Por exemplo para $A = \{2,4,6,8\}$ é apresentada para cada alínea uma relação R que satisfaz as condições referidas.

   (a) $R = \{(2,2),(4,4),(6,6),(8,8),(2,4),(4,2),(2,6),(6,2)\}$. ;

   (b) $R = \{(2,2),(4,4),(6,6),(8,8),(2,4),(4,6),(2,6)\}$. ;

   (c) $R = \{(2,2),(4,4),(6,6),(2,4),(4,2),(2,6),(6,2),(4,6),(6,4)\}$.

   (d) $R = \{(2,2),(4,4),(6,6),(8,8),(2,4),(4,2),(2,6),(6,2),(4,6),(6,4)\}$.

   (e) $R = \{(2,2),(4,4),(6,6),(8,8),(2,4),(4,6),(2,6)\}$.

20 (b) $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/R = \{[(1,1)],[(1,2)],[(2,1)],[(2,2)],[(3,1)],[(3,2)]\}$.