Instituto Politécnico de Leiria

Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Matemática Discreta - Componente PL

EI (D+PL)

Ano letivo 2018/2019 - 2.^{o} Sem. Ficha prática 5

Relações

Definição de relação

Uma **relação** R, definida de um conjunto A para um conjunto B, é um subconjunto de $A \times B$ (produto cartesiano entre A e B). Podemos definir R da seguinte forma:

$$R = \{(a, b) \in A \times B : a \text{ está } R - \text{relacionado com } b\}.$$

Exemplo 1 *Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{0, 1, 2\}$ então podemos definir uma relação R do conjunto A para o conjunto B da seguinte forma:*

$$R = \{(a, 0), (a, 1), (c, 2), (b, 1)\}.$$

Exemplo 2 *Seja $A = \mathbb{N}$. Podemos definir uma relação S, de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$, da seguinte forma:*

$$S = \left\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \frac{a}{b} = 2\right\}.$$

O par $(6, 3)$ e o par $(10, 5)$ pertencem à relação S.

Relação inversa

Para toda a relação R, definida de um conjunto A para um conjunto B, é possível definir a **relação inversa** de R, que se denota por R^{-1}. Deste modo, se

$$R = \{(a, b) \in A \times B : a \text{ é } R - \text{relacionado com } b\}$$

temos

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : a \text{ é } R - \text{relacionado com } b\}.$$

Formas de representar uma relação

Existem diferentes **formas de representar uma relação**. Podemos representar uma relação R de um conjunto A para um conjunto B através de:

1. Diagrama de setas;
2. Matriz da relação;
3. Grafo orientado (caso $A = B$, com A um conjunto finito).

Exemplo 3 *Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{0, 1, 2\}$ então podemos representar a relação $R = \{(a, 0), (a, 1), (c, 2), (b, 1)\}$, definida de A para B, através da seguinte matriz:*

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Composição de relações

Sejam A, B e C conjuntos, seja R uma relação de A para B e seja S uma relação de B para C. A relação $R \circ S$, **relação R em composição com S,** é uma relação do conjunto A para o conjunto C definida por

$$R \circ S = \{(a, c) \in A \times C : \text{a está } R-relacionado \text{ com } b \text{ e } b \text{ está } S-relacionado \text{ com } c\}.$$

Nota: $R^2 = R \circ R$, ..., $R^n = R^{n-1} \circ R$.

Podemos determinar a **matriz da relação** $R \circ S$ através da multiplicação da matriz da relação R, M_R, com a matriz da relação S, M_S. Primeiro calculamos $M_R \times M_S$; de seguida, nesta matriz resultante, denotada por $M_{R \circ S}$, substituímos todos os elementos não nulos por 1, obtendo assim a matriz da relação $R \circ S$.

Tipos de relações

Seja R uma relação definida sobre um conjunto A, ou seja, $R = \{(a, b) \in A \times A : aRb\}$. A relação R diz-se:

1. **reflexiva** se $\forall a \in A$, aRa;
2. **simétrica** se, $\forall a, b \in A$, $aRb \Longrightarrow bRa$;
3. **antissimétrica** se, $\forall a, b \in A$, $aRb \wedge bRa \Longrightarrow a = b$;
4. **transitiva** se $\forall a, b, c \in A$, $aRb \wedge bRc \Longrightarrow aRc$.

Relação de equivalência e relação de ordem parcial

Uma relação R, definida em A, diz-se uma **relação de equivalência** se e só se R é reflexiva, simétrica e transitiva.

Uma relação R, definida em A, diz-se uma **relação de ordem parcial** se e só se R é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Neste caso, o par (A, R) diz-se um conjunto parcialmente ordenado.

Propriedades de fecho

Consideremos uma relação R definida sobre um conjunto A.

1. O **fecho reflexivo de** R é dado por $reflexivo(R) = R \cup \{(a, a) : a \in A\}$;
2. O **fecho simétrico de** R é dado por $simetrico(R) = R \cup R^{-1}$;
3. O **fecho transitivo de** R é dado por $transitivo(R) = \bigcup_{i=1}^{m} R^i = R \cup R^2 \cup ... \cup R^m$, onde m é o número de elementos do conjunto A.

Classes de equivalência e Conjunto quociente

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio A. Para cada $a \in A$, define-se a **classe de equivalência de a em A** como o conjunto

$$[a]_R = \{x \in A : aRx\}.$$

Qualquer elemento $x \in [a]_R$ diz-se um **representante desta classe de equivalência.**

O conjunto de todas as classes de equivalência de R designa-se por **conjunto quociente de** A por R e é representado por A/R. Ou seja,

$$A/R = \{[a]_R : a \in A\}.$$

De salientar que o conjunto quociente A/R é uma partição do conjunto A.

Exercícios propostos

1. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e R a relacão em A definida por:

$$R = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2), (4,4)\}.$$

   (a) Indique a matriz que representa a relação R, M_R.

   (b) Determine a matriz da relação R^{-1}.

   (c) Determine a matriz da relação R^2 e a matriz da relação R^3.

   (d) Indique, justificando, se R é uma relação reflexiva, simétrica, antissimétrica e/ou transitiva.

   (e) Determine:

      i. o fecho reflexivo de R;

      ii. o fecho simétrico de R;

      iii. o fecho transitivo de R.

   (f) Determine a menor relação de equivalência definida em A que contém o conjunto R.

   (g) Seja S a relação de equivalência determinada na alínea anterior. Determine as classes de equivalência de S, o conjunto quociente A/S e a partição do conjunto A determinada através de A/S.

2. Sejam R e S relações definidas num conjunto $D = \{a, b, c\}$ cujas matrizes de relação M_R e M_S são dadas por:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Determine a matriz associada à relação $R \circ S$.

   (b) Indique, justificando, se c é $R \circ S-$relacionado com a.

3. Construa uma função com o nome `relcomp(`M_R`,`M_S`)`, em que M_R é a matriz de uma relação R e M_S é a matriz de uma relação S, que devolva a matriz da relação $R \circ S$.

4. A partir da matriz M_R de uma relação R, construa uma função:

   (a) com o nome `is_reflexiva(`M_R`)` que verifique se a relação R é uma relação reflexiva;

   (b) com o nome `is_simetrica(`M_R`)` que verifique se a relação R é uma relação simétrica;

   (c) com o nome `is_transitiva(`M_R`)` que verifique se a relação R é uma relação transitiva.

5. A partir da função `is_reflexiva(`M_R`)`, implementada na alínea (a) do exercício anterior, construa uma função com o nome `fecho_reflexivo(`M_R`)` que, caso a relação R não seja reflexiva, devolva a matriz do fecho reflexivo de R.

6. Construa uma função com o nome `equival(`M_R`)`, em que M_R é a matriz de uma relação R, que verifique se a relação R é ou não uma relação de equivalência e, em caso negativo, devolva a matriz da menor relação de equivalência que contém a relação R.

7. Construa uma função com o nome `orparcial(`M_R`)`, em que M_R é a matriz de uma relação R, que verifique se a relação R é ou não uma relação de ordem parcial.