2018 – Época Normal

4. **[3 valores]** Um rally envolve um conjunto de n troços, em que cada troço i tem um ponto de partida s_i e um ponto de chegada t_i pré-definidos. Os organizadores querem decidir qual a melhor sequência por que devem ser realizados os vários troços, por forma a minimizar a distância total de ligação entre os troços (isto é, entre o ponto de chegada de um troço e o ponto de partida do troço seguinte). Podem existir no entanto

algumas restrições de ordenação, na forma de pares (i, j), significando que o troço i tem de decorrer sempre antes do troço j. São conhecidas as distâncias mínimas (inteiras) entre todos os pontos envolvidos.

a) **[1 valor]** Reformule este problema como um problema de decisão. Formalize o problema.

b) **[2 valores]** É possível resolver este problema em tempo polinomial (função de n)? Justifique.

4. a) O problema de decisão consiste em verificar se existe um percurso com um peso <= k que passa por todos os n troços.

4. b)

1. Provar que o problema pertence à classe NP, isto é, verificar se o problema é verificável em tempo polinomial:

Sendo este um problema de decisão, como explicitado na pergunta anterior, uma solução deste problema é verificável se:

- a soma das distâncias de ligação dos troços for menor ou igual ao k. Isto consegue-se verificar em tempo polinomial já que basta percorrer o percurso solução somando as distâncias de ligação. No fim, em tempo constante, avaliar se a soma total é menor ou igual a k.
- cada troço aparecer uma e uma só vez na solução. Esta verificação pode ser feita igualmente em tempo polinomial, iterando sobre o percurso solução incrementando a frequência de cada troço de um valor à medida que é analisado. Se todos os troços tiverem uma frequência igual a 1 então é uma solução.

2. Provar que o problema é NP-Hard:

Para provar que este problema é NP-Hard temos que conseguir reduzir o problema do Caixeiro Viajante, que não necessariamente inicia e termina no mesmo ponto formando um ciclo, mas sim um percurso, ao problema em questão, em tempo polinomial. Note-se que as restrições impostas no enunciado de sequência de certos troços, obriga a que o problema do caixeiro-viajante seja resolvido tendo por base um grafo pesado e dirigido que obrigue essas sequências.

- A redução passa por converter os dados de entrada e saída do problema do caixeiro-viajante para o nosso problema. Os vértices/cidades do caixeiro-viajante correspondem então aos n troços do rally sendo que a distância entre dois vértices corresponde à distância entre o ponto final de i e ao inicial do troço j. Esta redução é possível em tempo polinomial já que basta iterar por todas as cidades e ligações entre elas fazendo a conversão efetiva.

Como foi provado que o problema pertence à classe de problemas NP e é um NP-Hard então ficou provado que é um problema NP-Completo e por isso não é resolúvel em tempo polinomial.

2020 - Época Normal

3. [4 valores] Uma escola do primeiro ciclo tem por hábito realizar várias atividades de grupo entre os seus estudantes, em todas as turmas de um mesmo ano. A escola também tenta, a cada novo ano letivo, organizar as turmas de forma a promover maior interação entre todas as crianças, havendo grande mobilidade de estudantes entre turmas, ano após ano. Para os ***N*** estudantes que irão realizar o último ano do ciclo, a escola decidiu que uma das turmas a criar no próximo ano letivo será composta com crianças que ainda não tenham formado grupo em anos anteriores. Ou seja, a escola pretende formar uma turma com o maior número de crianças que nunca tenham realizado atividades de grupo entre si.
Considere que todos os ***N*** estudantes transitam para o próximo ano letivo, e não haverá matrículas com ingresso de novos estudantes para o último ano do ciclo. Considere também que todos os ***N*** estudantes já realizaram alguma atividade de grupo com um ou mais colegas, em anos anteriores.

a) [1,5 valor] Represente este problema como um Problema de Decisão.

b) [2,5 valores] Verifique se este problema é NP-difícil. Se necessitar, considere utilizar a formalização de outros problemas da classe NP-Completo, mencionados nas aulas teóricas.

3. a) O problema de decisão consiste em verificar a existência de um conjunto de estudantes de tamanho maior ou igual a k, que nunca realizaram atividades de grupo juntos.

3. b) Provar que o problema é NP-Hard:

Para provar que este problema é NP-Hard temos que conseguir reduzir o problema do Independent Set, ao problema em questão, em tempo polinomial.

- A redução passa por converter os dados de entrada e saída do problema do independente set para o nosso problema. É preciso então criar um grafo em que cada vértice do grafo corresponderá a um aluno. As arestas do grafo terão como origem e destino dois vértices correspondentes a alunos que realizaram atividades juntos. O conjunto de vértices independentes da solução corresponderá ao maior grupo de alunos que nunca tenham realizado atividades de grupo entre si.
- Esta redução é possível em tempo polinomial já que basta iterar por todos os alunos e adicionar uma aresta por cada pessoa que já tenha trabalho junto, fazendo a conversão efetiva.

Como foi provado este problema é um problema NP-Hard.

2020 – Recurso

3. **[4 valores]** Uma empresa pretende concorrer a um programa de financiamento para a implementação de um projeto inovador no combate à pandemia, e precisa de recrutar especialistas em áreas multidisciplinares. Para identificar os potenciais candidatos, recorreu a uma rede profissional (do género do LinkedIn), de onde extraiu os perfis de um conjunto vasto de especialistas em vários domínios. No entanto, com o objetivo de constituir uma equipa de facto integrada, decidiu que irá contratar apenas os profissionais que se conheçam diretamente, ou seja, apenas serão considerados para a sua equipa os candidatos que tenham uma ligação profissional de primeiro nível entre si. Assim, de entre os perfis candidatos, pretende formar uma equipa com o maior número de profissionais que atendam a esse critério.

   a) **[1,5 valor]** Represente este problema como um Problema de Decisão.

   b) **[2,5 valores]** Verifique se este problema é NP-difícil. Se necessitar, considere utilizar a formalização de outros problemas da classe NP-Completo, mencionados nas aulas teóricas.

3. a) O problema de decisão consiste em verificar a existência de um conjunto de perfis de tamanho maior ou igual a k, que tenham uma ligação profissional de primeiro nível entre todos.

3. b) Provar que o problema é NP-Hard:

Para provar que este problema é NP-Hard temos que conseguir reduzir o problema do Independent Set, ao problema em questão, em tempo polinomial.

- A redução passa por converter os dados de entrada e saída do problema do independente set para o nosso problema. É preciso então criar um grafo em que cada vértice do grafo corresponderá a um perfil. As arestas do grafo terão como origem e destino dois vértices correspondentes a perfis que não tenham uma ligação profissional de primeiro nível. O conjunto de vértices independentes da solução corresponderá ao maior grupo de perfis que tenham uma ligação profissional de primeiro nível entre si.
- Esta redução é possível em tempo polinomial já que basta iterar por todos os perfis e adicionar uma aresta por cada dois perfis que não tenham uma ligação profissional de primeiro nível, fazendo a conversão efetiva.

Como foi provado este problema é um problema NP-Hard.