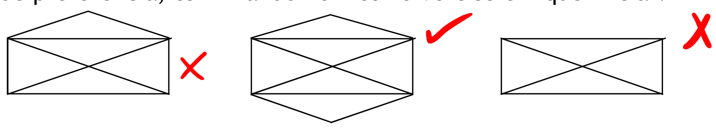
Algoritmos em Grafos: Circuitos de Euler e Problema do Carteiro Chinês

R. Rossetti, L. Ferreira, H. L. Cardoso, F. Andrade

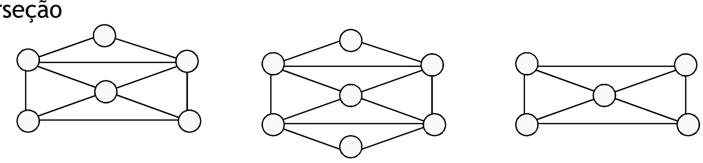
FEUP, MIEIC, CAL

Circuitos de Euler

- Puzzle: desenhar as figuras abaixo sem levantar o lápis e sem repetir arestas; de preferência, terminando no mesmo vértice em que iniciar.



- Reformulação como problema em Teoria de Grafos: colocar um vértice em cada interseção



- **Caminho de Euler**: caminho que visita cada aresta exatamente uma vez
- Problema resolvido por Euler em 1736 e que marca o início da Teoria dos Grafos
- **Circuito de Euler:** caminho de Euler que começa e acaba no mesmo vértice

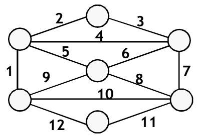
Condições necessárias e suficientes (1/2)

- Um grafo *não dirigido* contém um *circuito* de Euler sse
  - (1) é conexo e
  - (2) cada vértice tem grau (nº de arestas incidentes) par. → Número de arestas incidentes é par
- Um grafo *não dirigido* contém um *caminho* de Euler sse
  - (1) é conexo e
  - (2) todos menos dois vértices têm grau par (estes dois vértices serão os vértices de início e fim do caminho). → $|V| = x$

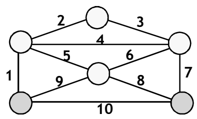
$x-2 \to$ grau par

Início Fim

Circuito de Euler

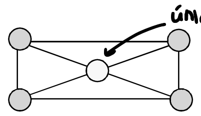


Caminho de Euler



grau ímpar

Sem caminho ou circuito de Euler



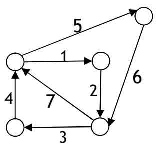
único com grau par

Não cumpre requisitos

Condições necessárias e suficientes (2/2)

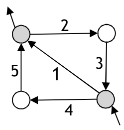
- Um grafo *dirigido* contém um *circuito* de Euler *sse*
  - (1) é (fortemente) conexo e
  - (2) cada vértice tem o mesmo grau de entrada e de saída.
- Um grafo *dirigido* contém um *caminho* de Euler *sse*
  - (1) é (fortemente) conexo e
  - (2) todos menos dois vértices têm o mesmo grau de entrada e de saída, e os dois vértices têm graus de entrada e de saída que diferem de 1.

Com circuito de Euler

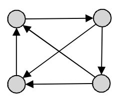


em todos: $|E|=|S|$

Com caminho de Euler



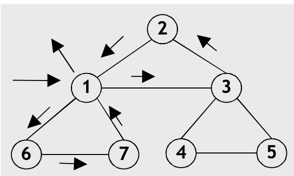
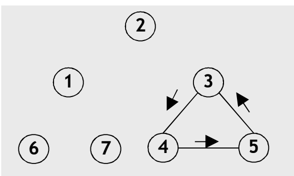
Sem circuito ou caminho de Euler



Método baseado em pesquisa em profundidade para encontrar um circuito de Euler

1. Escolher um vértice qualquer e efetuar uma pesquisa em profundidade a partir desse vértice
   - Visitar vértice: se tiver arestas incidentes não visitadas, escolher uma dessas arestas, marcá-la como visitada, e visitar vértice adjacente
   - Se o grafo satisfizer as condições necessárias e suficientes, esta pesquisa termina necessariamente no vértice de partida, formando um circuito, embora não necessariamente de Euler → podem haver arestas por visitar
2. Enquanto existirem arestas por visitar
   - 2.1 Procurar o primeiro vértice no caminho (circuito) obtido até ao momento que possua uma aresta não percorrida
   - 2.2 Lançar uma sub-pesquisa em profundidade a partir desse vértice (sem voltar a percorrer arestas já percorridas)
   - 2.3 Inserir o resultado (circuito) no caminho principal

Exemplo em grafo não dirigido

	Arestas por visitar	Caminho desta iteração	Caminho acumulado
1ª iter.		1-3*-2-1-6-7-1 Com arestas por visitar	1-3*-2-1-6-7-1
2ª iter.		3-4-5-3	ADICIONAR 1-3-4-5-3-2-1-6-7-1 (Circuito de Euler)

Estruturas de dados e eficiência temporal

- Tempo de execução: O(|E| + |V|)
  - Cada vértice e aresta é percorrido uma única vez
  - Cada vez que se percorre um adjacente, avança-se o apontador de adjacentes (para não voltar a percorrer as mesmas arestas)
  - Usam-se listas ligadas para efetuar inserções em tempo constante

Problema do carteiro chinês (*Chinese postman problem*)

- Dado um grafo pesado conexo G=(V,E), encontrar um caminho fechado (i.e., com início e fim no mesmo vértice) de peso mínimo que atravesse cada aresta de *G* pelo menos uma vez.
  - A um caminho assim chama-se *percurso ótimo do carteiro Chinês*.
  - A um caminho fechado (não necessariamente de peso mínimo) que atravesse cada aresta pelo menos uma vez chama-se *percurso do carteiro*.
- Problema estudado pela primeira vez por Mei-Ku Kuan em 1962, relacionado com a distribuição de correspondência ao longo de um conjunto de ruas, partindo e terminando numa estação de correios.
- Resolúvel em tempo polinomial para grafos dirigidos ou não dirigidos, mas infelizmente o problema é NP-completo (tempo exponencial) quando se combinam arestas dirigidas com arestas não dirigidas (grafos mistos)
  - Exemplo: percurso do camião do lixo, quando algumas ruas têm sentidos únicos

Não há problema ótimo do caixeiRO viajante

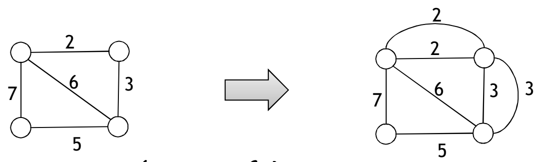
O Problema do Caixeiro Viajante (PCV) é um problema que tenta determinar a menor rota para percorrer uma série de cidades (visitando uma única vez cada uma delas), retornando à cidade de origem. Ele é um problema de otimização NP-difícil inspirado na necessidade dos vendedores em realizar entregas em diversos locais (as cidades) percorrendo o menor caminho possível, reduzindo o tempo necessário para a viagem e os possíveis custos com transporte e combustível.

Abordagem

percorremos cada aresta 1x

- Se o grafo G for Euleriano, a solução é trivial, pois qualquer circuito de Euler é um percurso ótimo do carteiro Chinês.
  - Cada aresta é percorrida exatamente uma vez. → solução mínima $= \sum_{e_i \in E} w(e_i)$
- Se o grafo G não for Euleriano, pode-se construir um grafo Euleriano G* duplicando algumas arestas de G, selecionadas por forma a conseguir um grafo Euleriano com peso total mínimo.

Não Euleriano (peso 23)



Euleriano! (peso 28)

→ é necessário escolher que arestas se deve duplicar

Método para grafos não dirigidos (1/4)

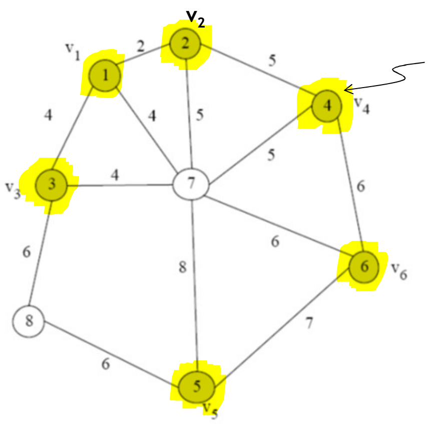
- Passo 1: Achar todos os vértices de grau ímpar em *G*. Seja *k* o nº (par!) destes vértices. Se *k*=0, fazer *G**=*G* e saltar para o passo 6.

k → # vértices de grau ímpar

k = ∅ → Euleriano

Marcar ← se não,

G:



Vértices de grau ímpar sombreados

Método para grafos não dirigidos (2/4)

- Passo 2: Achar os caminhos mais curtos e distâncias mínimas entre todos os pares de vértices de grau ímpar em *G*.

$d(v_i,v_j)$	v1	v2	v3	v4	v5	v6
v1	-	2	4	7	12	10
v2		-	6	5	13	11
v3			-	9	12	10
v4				-	13	6
v5					-	7
v6						-

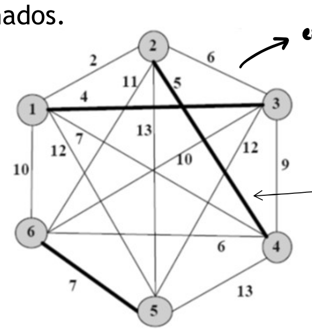
·Calcular a distância mínima entre os pares de vértices

Método para grafos não dirigidos (3/4)

- Passo 3: Construir um grafo completo *G'* com os vértices de grau ímpar de *G* ligados entre si por arestas de peso igual à distância mínima calculada no passo 2.
- Passo 4: Encontrar um emparelhamento perfeito (envolvendo todos os vértices) de peso mínimo em *G'*. Isto corresponde a emparelhar os vértices de grau ímpar de *G*, minimizando a soma das distâncias entre vértices emparelhados.

encontrar conjunto de arestas que conectem todos os vertices e cujo peso é mínimo

G':

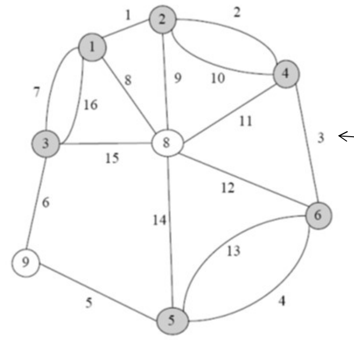


emparelhamento indicado a traço forte

Método para grafos não dirigidos (4/4)

- Passo 5: Para cada par *(u, v)* no emparelhamento perfeito obtido, adicionar pseudo-arestas (arestas paralelas duplicadas) a *G* ao longo de um caminho mais curto entre *u* e *v*. Seja G* o grafo resultante.
- Passo 6: Achar um circuito de Euler em G*. Este circuito é um percurso óptimo do carteiro Chinês.

G*:

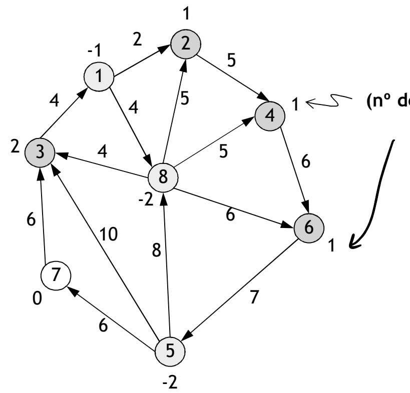


Nº de sequência de visita no circuito Euleriano (pesos omitidos)

Método para grafos dirigidos (1/4)

- Passo 1: No grafo *G* dado, identificar os vértices com nºs diferentes de arestas a entrar e a sair

G:

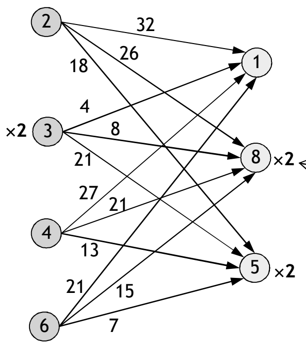


(nº de entradas) - (nº de saídas)

Método para grafos dirigidos (2/4)

- Passo 2: Determinar os caminhos mais curtos de vértices que têm défice de saídas para vértices que têm défice de entradas e representar as distâncias respetivas num grafo bipartido *G'*.
  - Vértices são anotados com multiplicidade (nº de parelhas em que deve participar) igual ao défice absoluto

G':

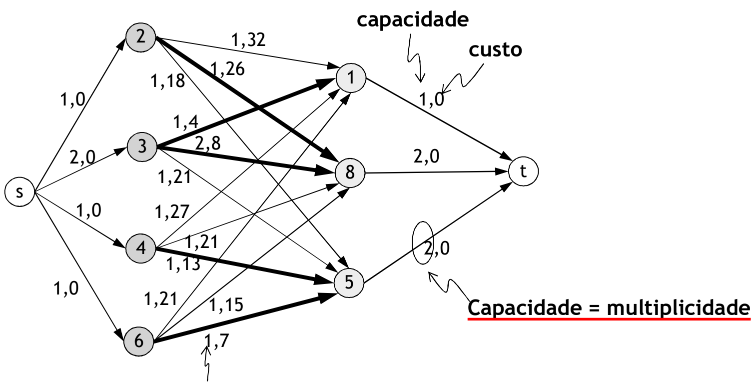


multiplicidade dupla (deve participar em duas parelhas)

Método para grafos dirigidos (3/4)

- Passo 3: Formular problema de emparelhamento óptimo como problema de fluxo máximo de custo mínimo e resolver.

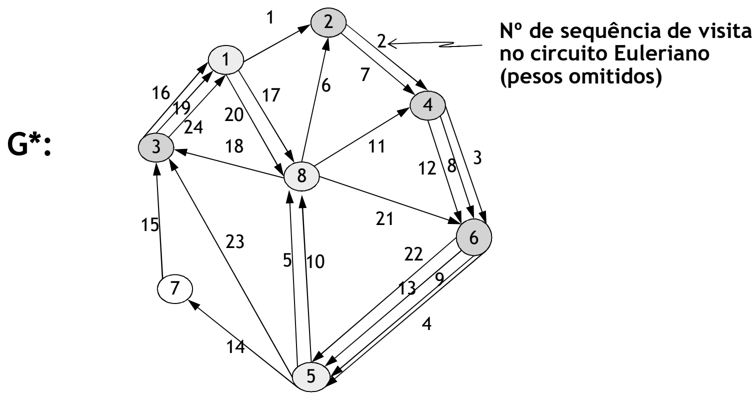
G'':



Capacidade = min(multiplicidade(origem),multiplicidade(destino))

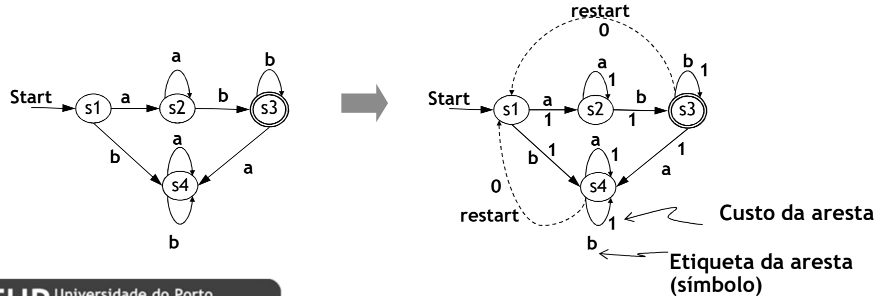
Método para grafos dirigidos (4/4)

- Passo 4: Obter grafo Euleriano *G**, duplicando em *G* os caminhos mais curtos entre os vértices emparelhados no passo 3, e obter um circuito Euleriano.



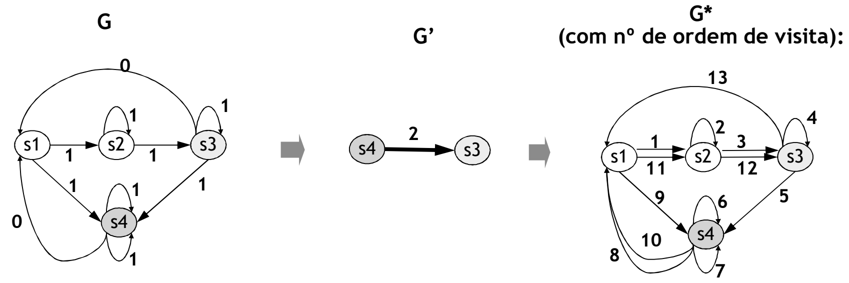
* Exemplo de aplicação (1/2)

- Achar um conjunto de sequências de teste completas (do estado inicial a um estado final) de comprimento total mínimo cobrindo todas as transições num autómato finito
  - Ligam-se os estados finais ao estado inicial e procura-se um percurso ótimo do carteiro
  - Nota: conceito de estado final faz mais sentido em máquinas de estados UML; no caso de autómatos finitos, podem-se considerar como tal estados de aceitação e estados absorventes (donde não é possível sair)



* Exemplo de aplicação (2/2)

- Resolução do problema do carteiro chinês dirigido:



- Solução final:
  - Caminho de Euler usando etiquetas:
    a-a-b-b-a-a-b-restart-b-restart-a-b-restart
  - Strings de teste: aabbaab, b, ab

Referências e mais informação

- "The Algorithm Design Manual", Steven S. Skiena, Springer-Verlag, 1998