

1

Técnicas de Concepção de Algoritmos (1ª parte): algoritmos de retrocesso

R. Rossetti, A. P. Rocha, L. Ferreira, J. P. Fernandes, F. Ramos, G. Leão
CAL, MIEIC, FEUP

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL - MIEIC/FEUP

2

Para pensar...

- ◆ “Theory is when you know something, but it doesn’t work.
Practice is when something works, but you don’t know why.

Programmers combine theory and practice:
Nothing works and they don’t know why.”

(unknown)

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL - MIEIC/FEUP

3

Algoritmos de retrocesso (*backtracking*)

Técnicas de Conceção de Algoritmos, CAL - MIEIC/FEUP

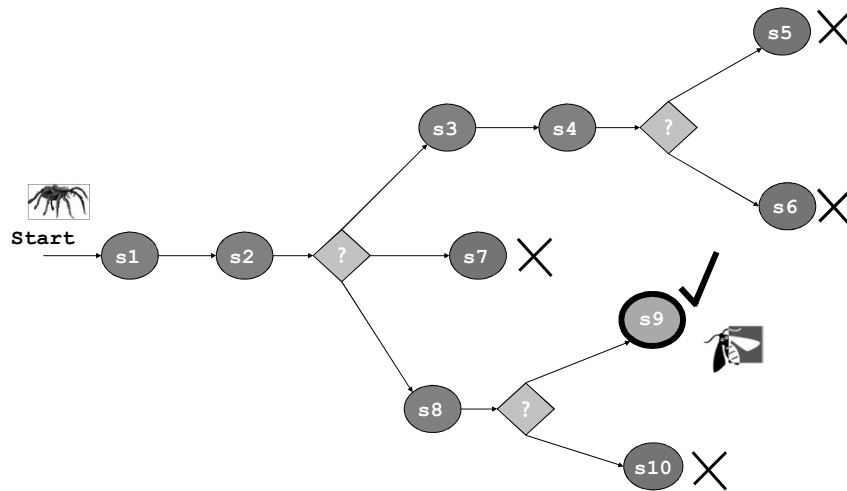
4

Algoritmos de retrocesso

- ◆ Algoritmos de *tentativa e erro*
- ◆ Contexto geral de aplicação:
 - Explorar um *espaço de estados* à procura dum *estado-objetivo*
 - Estado = estado de jogo, subproblema, solução parcial, etc.
 - Sem algoritmos eficientes que levem directamente ao objetivo
- ◆ Estratégia:
 - Ao chegar a um *ponto de escolha* (com vários estados seguintes), escolher uma das opções e prosseguir a exploração
 - Chegando a um “beco sem saída”, *retroceder* até ao ponto de escolha mais próximo com alternativas por explorar, e tentar outra alternativa

Técnicas de Conceção de Algoritmos, CAL - MIEIC/FEUP

Ilustração



Complicações: ciclos, caminhos paralelos

Técnicas de Conceção de Algoritmos, CAL - MIEIC/FEUP

Exemplos de aplicação

- ◆ Problema do troco com limitações de stock
- ◆ Sudoku
- ◆ 8 rainhas
- ◆ Labirintos

Técnicas de Conceção de Algoritmos, CAL - MIEIC/FEUP

7

Geração do espaço de estados

- ◆ Dado um **problema** com um conjunto de restrições e/ou uma função objetivo (maximizar ou minimizar).
- ◆ Procura-se uma **solução** que satisfaz as restrições e/ou optimize a função objetivo.
- ◆ Caso a solução possa ser construída passo a passo ...
- ◆ Pode-se representar (pelo menos concetualmente) o espaço de solução para o problema através de uma árvore de espaço de estados
 - A raiz da árvore representa o início (0 escolhas)
 - Nós ao nível 1 representam a primeira escolha
 - Nós ao nível 2 representam a segunda escolha, etc...
 - Caminhos da raiz até às folhas representam soluções candidatas

Técnicas de Conceção de Algoritmos, CAL - MIEIC/FEUP

8

Exemplo: soma de subconjuntos

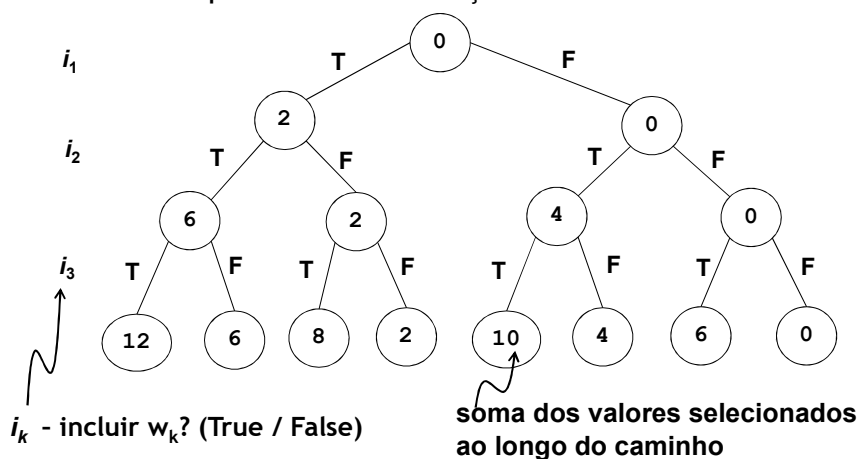
- ◆ Problema: dado um conjunto (ou multiconjunto) $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ de inteiros positivos e uma soma S a perfazer, encontrar um subconjunto R de W com soma S
- ◆ Exemplo: $W = \{2, 4, 6\}$ e $S = 6$
- ◆ Solução: $\{2, 4\}$ ou $\{6\}$

Técnicas de Conceção de Algoritmos, CAL - MIEIC/FEUP

9

Árvore de espaço de estados binária

- ◆ Uma possibilidade é uma árvore binária em que, em cada nível k , se decide da inclusão ou não do valor w_k
- ◆ As folhas representam as soluções candidatas.



Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL - MIEIC/FEUP

10

Algoritmo geral de pesquisa

- ◆ Algoritmo recursivo de visita em profundidade da árvore de espaço de estados
 - avanço corresponde a uma chamada recursiva
 - retrocesso corresponde a retorno de chamada recursiva falhada

Explore state/node N:

1. if N is a goal state/node, return "success"
2. for each successor/child C of N,
 - 2.1. (optional) set new state
 - 2.2. explore state/node C
 - 2.3. if exploration was successful, return "success"
 - 2.4 (optional) restore previous state
3. return "failure"

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL - MIEIC/FEUP

11

Exemplo de implementação

```
//Inputs: int W[], int n, int S
//Outputs: bool sel[] - sel[i]=true means W[i] selected (initially false)
//Call initially: sumOfSubsets(0, 0)
bool sumOfSubsets(int i, int sumSel) {
    // if solution found, print and terminate
    if (sumSel == S) {printSolution(); return true;}

    // if there is no child to explore, just backtrack
    if (i == n) return false;

    // explore item W[i] (try using and not using) (choice point)
    sel[i] = true;
    if (sumOfSubsets(i+1, sumSel + W[i])) return true;
    sel[i] = false;
    if (sumOfSubsets(i+1, sumSel)) return true;

    // no solution found
    return false;
}
```

Sum of items already selected

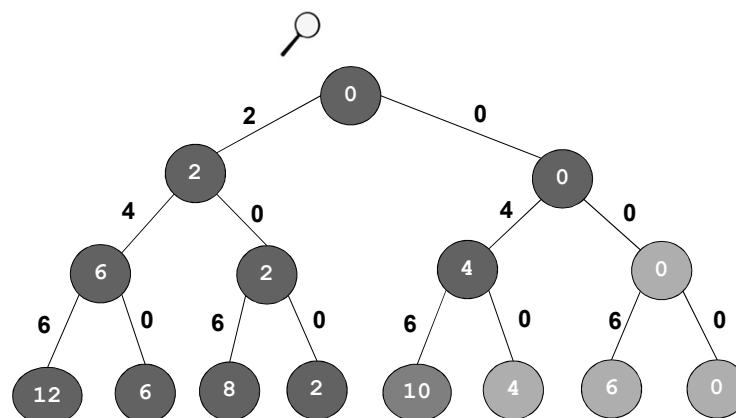
Index of next item to explore
(=level in search tree).

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL - MIEIC/FEUP

12

Exemplo de exploração

$W = \{2, 4, 6\}; S = 10$



Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL - MIEIC/FEUP

13

Eficiência temporal

- ◆ Tempo de execução no pior caso (pesquisa exaustiva do espaço de estados) é determinado pela dimensão do espaço de estados, que muitas vezes é exponencial
- ◆ Exemplo no problema da soma de subconjuntos:
 - As folhas da árvore binária representam os possíveis subconjuntos de W , em número $\# \mathcal{P}(W) = 2^{\#W} = 2^n$
 - O nº de nós da árvore é sensivelmente o dobro ($2^{n+1}-1$)
 - Se a soma S a perfazer for próxima de $\text{sum}(W)$, mas não for realizável, resulta uma pesquisa exaustiva ou quase!
 - No pior caso, tempo portanto $T(n) = O(2^n)$
- ◆ Como se pode melhorar?

Técnicas de Conceção de Algoritmos, CAL - MIEIC/FEUP

14

Poda da pesquisa (*pruning*)

- ◆ Interromper (podar) a pesquisa e retroceder em nós que garantidamente não levam a uma solução viável (chamados nós não promissores)
- ◆ No problema da soma de subconjuntos, pode-se podar a pesquisa quando:
 - ◆ a soma já selecionada é superior à soma a perfazer
 - ◆ a soma ainda selecionável é inferior à soma a perfazer
- ◆ A uma árvore de espaço de estados que contém apenas nós expandidos chama-se árvore de espaço de estados podada

Técnicas de Conceção de Algoritmos, CAL - MIEIC/FEUP

15

Algoritmo geral

```

exploreNode(v):
    if aSolutionAt(v) then
        write the solution and terminate
    else if promising(v) then
        for each u ∈ child(v) do
            exploreNode(u)
  
```

- *aSolutionAt(v)* - verifica se a solução parcial representada pelo nó *v* resolve o problema em questão
- *promising(v)* - verifica se a solução parcial representada pelo nó *v* poderá levar à solução desejada

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL - MIEIC/FEUP

16

Exemplo de implementação

```

// Call initially: sumOfSubsets(0, 0, sum(w,n))
bool sumOfSubsets(int i, int sumSel, int sumLeft) {
    // if solution found, print and terminate
    if (sumSel == S) {printSolution(); return true;}

    // if there is no child to explore, just backtrack
    if (i == n) return false;

    // if not a promising state, prune the search
    if (sumSel + sumLeft < S || sumSel + w[i] > S) return false;

    // explore item W[i] (try using and not using) (choice point)
    sel[i] = true;
    if (sumOfSubsets(i+1, sumSel+w[i], sumLeft-w[i])) return true;
    sel[i] = false;
    if (sumOfSubsets(i+1, sumSel, sumLeft-w[i])) return true;

    // no solution found
    return false;
}
  
```

Soma dos itens remanescentes

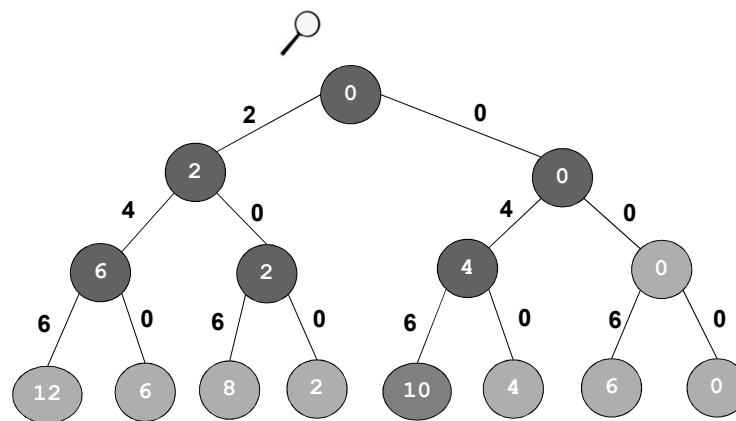
Assumindo itens por ordem crescente

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL - MIEIC/FEUP

17

Exemplo de poda

$W = \{2, 4, 6\}; S = 10$



Técnicas de Conceção de Algoritmos, CAL - MIEIC/FEUP

18

Variantes do problema

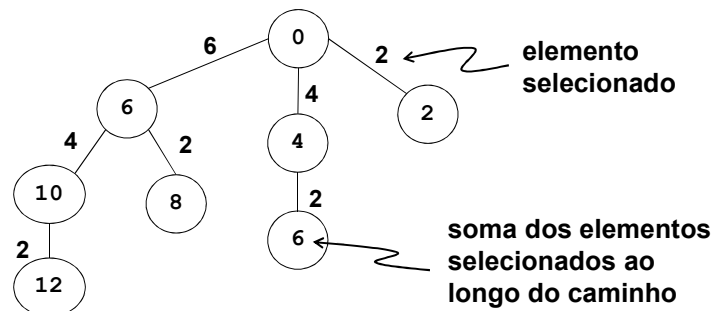
- ◆ Encontrar uma solução (caso considerado até aqui)
 - A pesquisa pára assim que se encontra a primeira solução
- ◆ Encontrar todas as soluções
 - Quando se encontra uma solução, processa-se essa solução (imprimir, guardar, etc.), mas não se pára a exploração
- ◆ Encontrar a melhor solução
 - Exemplo: encontrar um subconjunto de W de cardinal mínimo e soma S (como no problema do troco)
 - Variante de encontrar todas as soluções, em que se vai guardando a melhor solução encontrada até ao momento
 - Pode-se podar a pesquisa quando um nó não leva a uma solução melhor que a(s) encontrada(s) até ao momento

Técnicas de Conceção de Algoritmos, CAL - MIEIC/FEUP

19

Outras árvores de espaço de estados

- ◆ Outra possibilidade no problema da soma de subconjuntos: árvore n-ária em que, em cada nível, se escolhe o próximo valor a incluir.
- ◆ Para evitar repetir soluções, valores são escolhidas por ordem crescente ou decrescente.
- ◆ Cada nó representa uma solução candidata (total 2^n).



Técnicas de Conceção de Algoritmos, CAL - MIEIC/FEUP

20

Outras otimizações

- ◆ Combinar com algoritmo ganancioso para procurar chegar mais rapidamente à solução (ou a uma boa solução quando se procura o ótimo)
 - Por exemplo, no problema do troco ou da soma de subconjuntos, começar a pesquisa pelos valores mais elevados
- ◆ Combinar com técnicas de memorização para evitar explorar repetidamente o mesmo nó, na presença de caminhos paralelos ou ciclos
 - Por exemplo, ao pesquisar num espaço de estados em forma de grafo, marcar os nós já visitados
- ◆ Em combinação com técnica de poda da pesquisa, podem melhorar o desempenho mas podem continuar a existir casos patológicos com tempo exponencial

Técnicas de Conceção de Algoritmos, CAL - MIEIC/FEUP

Referências

- ◆ Mark Allen Weiss. Data Structures & Algorithm Analysis in Java. Addison-Wesley, 1999
- ◆ Steven S. Skiena. The Algorithm Design Manual. Springer 1998
- ◆ Robert Sedgewick. Algorithms in C++. Addison-Wesley, 1992