Algoritmos em Grafos: Caminho mais curto (Parte II)

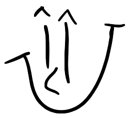
R. Rossetti, L. Ferreira, H. L. Cardoso, F. Andrade

FEUP, MIEIC, CAL

Índice

- Caminho mais curto entre dois pontos numa rede viária
  - Método base → Cálculo entre a origem e qualquer outro vértice
  - Pesquisa bidirecional
  - Pesquisa orientada
  - Redes hierárquicas (*highway networks*)
  - Nós de trânsito (*transit-node routing*)
- Caminho mais curto entre todos os pares de vértices
  - Algoritmo de Floyd-Warshall

Caminho mais curto entre dois pontos numa rede viária

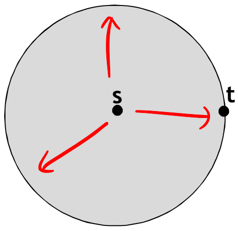


Caminho mais curto entre dois vértices

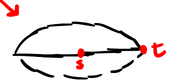
- Problema muito importante na prática
  - Exemplo: caminho mais curto entre dois pontos num mapa de estradas
- Não se conhece algoritmo mais eficiente a resolver este problema do que a resolver o mais geral (de um vértice para todos os outros)
- Portanto, acha-se o caminho mais curto da origem para todos os outros, e seleciona-se depois o caminho da origem para o destino pretendido
- Otimização: parar assim que chega a vez de processar o vértice de destino → e não calculamos para todos
  - Num mapa de estradas, ajuda para distâncias curtas, mas não para distâncias longas!

Método base (rede viária)

- Rede viária pode ser representada por um grafo dirigido em que
  - os vértices representam interseções
  - as arestas representam vias (possivelmente de sentido único)
  - os pesos representam distâncias, tempos, custos, etc.
    portagens
- O algoritmo de Dijkstra é a base para encontrar o caminho mais curto entre dois pontos *s* e *t*, parando-se a pesquisa quando o próximo nó a processar é o nó *t*.
  já encontramos o que precisavamos
- Uma vez que o algoritmo processa os vértices por distâncias crescentes ao vértice de partida, é inspecionado um círculo em torno de *s* de raio igual à distância entre *s* e *t* (na métrica escolhida)



- Também pode ser considerada uma elipse no caso de queremos uma dist. máxima, ou se quisermos dar alguma tolerância



Otimizações

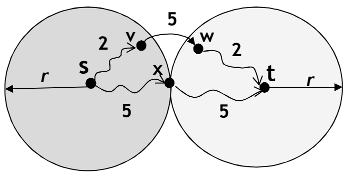
- Mas os mapas de estradas são enormes
  - Mapa de 17 países da Europa ocidental, do 9º desafio DIMACS sobre caminhos mais curtos (2009), tem cerca de 19×10^6 nós e 23×10^6 arestas.
  - Em Fev. de 2018, open street maps (mapas disponíveis publicamente) tinha cerca de 4.3×10^9 nós
- Algoritmo de Dijkstra pode demorar muitos segundos ou minutos a encontrar o caminho mais curto em trajetos de longa distância
- Otimizações que não exigem pré-processamento conseguem ganhos (*speedup*) de desempenho modestos (até 10x)
- Com pré-processamento, conseguem-se ganhos da ordem de 10^3 ou mesmo 10^6, reduzindo tempo de pesquisa para ms ou µs!
  - Compromisso entre tempo de pré-processamento, tempo de pesquisa, espaço de armazenamento, facilidade de atualização c/info. dinâmica

Pesquisa bidirecional (1/2)

origem desti

- Executar o algoritmo de Dijkstra no sentido de *s* para *t* e em sentido inverso de *t* para *s* (no grafo invertido), alternando entre um e outro
- Terminar quando se vai processar um vértice *x* já processado na outra direção (podendo o caminho mais curto passar por *x* ou não)
- Manter a distância μ do caminho mais curto conhecido entre *s* e *t*: ao processar uma aresta (*v*, *w*) tal que *w* já foi processado na outra direção, verificar se o correspondente caminho *s*-*t* melhora μ
- Retornar a distância μ e o caminho correspondente

·tentar encontrar um ponto comum



Área processada ~ $2\pi r^2$, em vez de ~ $4\pi r^2$ na pesquisa unidirecional.

Ganho (*speedup*) ~2x

Área — Antes: $\pi \times (2R)^2$ — Depois: $\pi \times (R)^2$

Pesquisa bidirecional (2/2)

Dijkstra clássico: 493 passos; Dijkstra bidirecional: 285 passos
https://www.youtube.com/watch?v=1oVuQsxkhY0

Pesquisa orientada (1/3)

- **Algoritmo A*:** escolher para processar o vértice *v* com **valor mínimo de $d_{sv} + \pi_{vt}$** , parando quando se vai processar o vértice *t*
  - d_{sv} - distância mínima conhecida de *s* a *v* (como no algoritmo de Dijkstra) → desde a origem até ao vértice
  - π_{vt} - **estimativa por baixo da dist. mínima de *v* a *t*** (função potencial) → estimativa da dist. entre vértice e destino
- Em geral, não garante o ótimo
- Em certos casos, garante o ótimo, por exemplo:
  - Pesos das arestas são distâncias em km
  - π_{vt} é a distância Euclidiana (em linha reta) de *v* a *t* → destino

    vértice atual   v — t
  - Equivale então a aplicar o algoritmo de Dijkstra com pesos das arestas modificados $w'_{uv} = w_{uv} - \pi_{ut} + \pi_{vt}$, somando-se no final π_{st} à distância mínima obtida de *s* para *t* (ver justificação a seguir).

    → tentar alterar os pesos de forma a privilegiar os vértices que têm > probabilidade de ter a dmin
  - Pode ser combinado com pesquisa bidirecional
  - Ganho (*speedup*) na prática é moderado

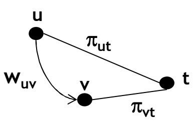
FEUP Universidade do Porto Faculdade de Engenharia

CAL, Algoritmos em Grafos: Caminho mais curto (Parte II) 9

Pesquisa orientada (2/3)

$w_{ut} + \pi_{vt} \geq \pi_{ut}$ → 

- Justificação:
  - Pela desigualdade triangular, garante-se $\pi_{ut} \leq w_{uv} + \pi_{vt}$, logo $w'_{uv} = w_{uv} - \pi_{ut} + \pi_{vt} \geq 0$.



  - O peso ao longo de um caminho $(s, v_1, v_2, \ldots, v_k)$, fica igual ao do grafo original, acrescido de $\pi_{st} - \pi_{v_k t}$ (pois os potenciais intermédios cancelam-se)
  - Logo, escolher o vértice *v* com menor $d_{sv} + \pi_{vt}$ no grafo modificado (A*), é o mesmo que escolher o vértice com menor d_{sv} no grafo original (Dijkstra)

FEUP Universidade do Porto Faculdade de Engenharia

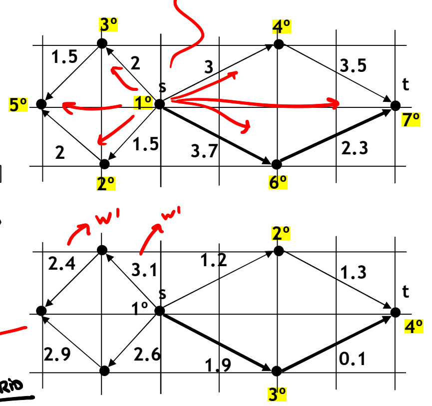
CAL, Algoritmos em Grafos: Caminho mais curto (Parte II) 10

Pesquisa orientada (3/3)

7 vértices
8 arestas

- Exemplo

6 expansões



Distância mínima: 6

Expande 6 nós

Somar/subtrair dist. geom. a *t* do vértice final/inicial

Recalcular os pesos

Já não vamos para o lado contrário

Distância mínima: 2+4=6
(4 = dist. geom. de *s* a *t*)

Expande 3 nós (50%)

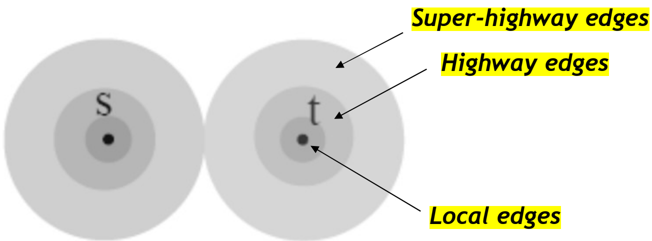
Ganhos

Redes hierárquicas (*highway networks*) (1/2)

- Pré-processamento decompõe a rede em vários níveis hierárquicos
  - Analogia com mapa de estradas nacional e mapas de ruas locais
  - Uma aresta *(u, v)* é classificada automaticamente como ***highway edge*** se existe pelo menos um par de nós *s* e *t* da rede tal que:
    (i) o caminho mais curto de *s* a *t* passa em *(u, v)*;
    (ii) *u* está a mais de *H* nós de distância de *s*;
    (iii) *v* está a mais de *H* nós de distância de *t*.
  - *H* é um parâmetro configurável (por, exemplo, 40)
  - Aplicável a mais níveis (local, *highway*, *super-highway*, etc.)
  - Pré-processamento de mapa de USA ou Europa Ocidental pode ser efetuado em tempo da ordem de 15 minutos.

Redes hierárquicas (*highway networks*) (2/2)

- Pesquisa é bidirecional e usa rede mais densa próximo de *s* e *t* e mais esparsa longe de *s* e *t*
- A pesquisa realiza-se em tempo da ordem de 1ms
- Exige pouco espaço adicional: um campo por aresta

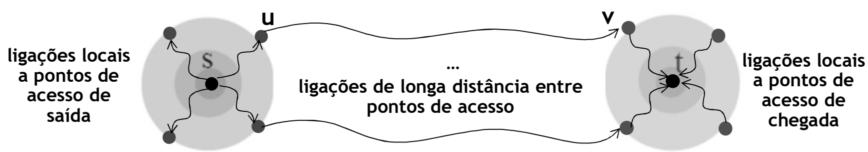


Nós de trânsito (*transit-node routing*)

- Pré-processamento determina:
  - nós de trânsito - nós tal que o caminho mais curto entre quaisquer 2 nós da rede que não estão "muito perto" entre si passa por pelo menos um dos nós de trânsito
    - Exemplo: acessos de auto-estradas
    - Há cerca de 10^4 nós de trânsito na Europa Ocidental e USA
    - Armazenam-se numa tabela as distâncias entre todos os pares de nós de trânsito
  - nós de acesso - para cada nó da rede, são os nós de trânsito mais próximos
    - Tipicamente há 10 nós de acesso por nó da rede
    - Armazenam-se numa tabela, para cada nó da rede, os nós de acesso e distâncias
    - Na verdade, determinam-se dois conjuntos de nós de acesso: nós de saída (*forward*, A_F) e nós de entrada (*backward*, A_B)

Nós de trânsito (*transit-node routing*)

- A pesquisa do caminho mais curto entre dois pontos afastados é reduzida a poucos *table lookups*, e realizada em tempo da ordem de 10μs
  (mas exige espaço de armazenamento adicional significativo)
  - Obter nós de acesso dos nós de partida (*s*) e chegada (*t*)
  - Para cada par (nó de acesso inicial (*u*), nó de acesso final (*v*)), obter distância de *s* a *t* em 3 *table lookups*



dmin(s,t) = min {d(s,u) + d(u,v) + d(v,t) | u$\in$ A_F(s), v$\in$ A_B(t)}

com A_F(s), A_B(t), d(x,y) pré-processados

PROCESSAR nas tabelas as distâncias pré-processadas

Caminho mais curto entre todos os pares de vértices

Caminho mais curto entre todos os pares de vértices

- Relevante por exemplo para pré-processamento de mapa de estradas
- Execução repetida do algoritmo de Dijkstra (ganancioso): $O(|V| (|V|+|E|) \log|V|)$ → Multiplicar, pois aplicamos o algoritmo a todos os vértices
  - Bom se o grafo for esparso ($|E| \sim |V|$), como é o caso das redes viárias
- Algoritmo de Floyd-Warshall, programação dinâmica: $\Theta(|V|^3)$
  - Melhor que o anterior se o grafo for denso ($|E| \sim |V|^2$)
  - Mesmo em grafos pouco densos pode ser melhor porque o código é mais simples
  - Baseia-se em matriz de adjacências W[i,j] com pesos (∞ quando não há aresta; 0 quando i = j)
  - Calcula matriz de distâncias mínimas D[i,j] e matriz P[i,j] de predecessor no caminho mais curto de *i* para *j* → vertices que dão origem ao caminho

FEUP Universidade do Porto Faculdade de Engenharia — CAL, Algoritmos em Grafos: Caminho mais curto (Parte II) — 17

Algoritmo de Floyd-Warshall

- Invariante do ciclo principal: em cada iteração k (de 0 a |V|), D[i,j] tem a distância mínima do vértice i a j, usando apenas vértices intermédios do conjunto {1, …, k}
- Inicialização (k=0):
  $D[i,j]^{(0)} = W[i,j]$ $\quad$ $P[i,j](0) = nil$ { DIST
- Recorrência (k=1,…,|V|):
  $D[i,j]^{(k)} = \min(D[i,j]^{(k-1)}, \underbrace{D[i,k]^{(k-1)} + D[k,j]^{(k-1)}}_{})$ → Atualizamos, se for menor ao que lá estava
  - Valor de $P[i,j]^{(k)}$ é atualizado conforme o termo mínimo escolhido
- Para minimizar memória, pode-se atualizar a matriz em cada iteração k, em vez de criar uma nova

FEUP Universidade do Porto Faculdade de Engenharia — CAL, Algoritmos em Grafos: Caminho mais curto (Parte II) — 18

```
DIST[V.size()][V.size()];
PATH[V.size()][V.size()];

for (int i=0 ; i<V.size() ; i++)
    for (int j=0 ; j<V.size() ; j++)
        i == j ? DIST[i][j] = 0 , DIST[i][j] = ∞ ;

for (vertex : V)
    for (edge : vertex.adj)
        DIST[vertex.index][edge->vertex.index] = edge.weight;
        PATH[vertex.index][edge->vertex.index] = vertex.index:

for (int k=0 ; k<V.size() ; k++)
    for (int i=0 ; i<V.size() ; i++)
        for (int j=0 ; j<V.size() ; j++)
            if (DIST[i][k] + DIST[k][j] < DIST[i][j]){
                DIST[i][j] = DIST[i][k] + DIST[k][j];
                PATH[i][j] = PATH[k][j];
            }
```