1

Análise de Algoritmos: funcionamento correto *(correctness)*

R. Rossetti, A. P. Rocha, L. Ferreira, J. P. Fernandes, F. Ramos, G. Leão
CAL, MIEIC, FEUP

2

Uma história …

- Funcionamento incorreto do novo sistema de colocação de professores em Portugal em 2004 causou o caos e um atraso de semanas no início das aulas.
  (https://www.educare.pt/paginasespeciais/docentes-a-concurso/ver/?id=31022)
- Uma nova empresa, concebeu um algoritmo de colocação de acordo com as novas regras, **provou que estava correto**, e resolveu a situação em 6 dias.
  (https://www.publico.pt/2004/09/30/portugal/noticia/nova-empresa-resolveu-colocacao-de-professores-em-seis-dias-1204777)
- Uma investigadora da UP mostrou depois que se tratava de uma instância do problema dos casamentos estáveis, resolúvel com algoritmos conhecidos.
  (https://www.dcc.fc.up.pt/Pubs/TR05/dcc-2005-02.pdf)

3

Para pensar …

- **É melhor um programa tão simples que obviamente não tem erros, do que um programa tão complexo que não tem erros óbvios.**
  - *There are two ways of constructing a software design: One way is to make it so simple that there are obviously no deficiencies, and the other way is to make it so complicated that there are no obvious deficiencies. The first method is far more difficult.*

C. A. R. Hoare (Tony Hoare)
(1980 Turing Award)
(inventor de quick sort)

4

Análise de algoritmos

	Análise estática (teórica)	**Análise dinâmica (experimental)**
Eficiência temporal e espacial	complexidade assintótica	testes de desempenho; *profiling*
Funcionamento correto	**prova ou argumentação sobre correção**	testes pontuais ou aleatórios (*)

(*) "*Testing shows the presence, not the absence of bugs.*" [Dijkstra]

5

Especificações

- Para provar que um algoritmo resolve corretamente um problema, precisamos de:
  - Especificação rigorosa do problema
  - Descrição rigorosa do algoritmo
- Muitos problemas podem ser especificados por um par:
  - Entradas: Dados de entrada e restrições associadas (**pré-condições**)
  - Saídas: Dados de saída e restrições associadas (**pós-condições**) *

  * Objetivos de maximização/minimização são redutíveis a restrições.

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP

6

Correção parcial e total

- Correção parcial: se o algoritmo (ou programa) for executado com entradas que obedecem às pré-condições, então, se terminar, produz saídas corretas, i.e., que obedecem às pós-condições.
- Correção total: se o algoritmo (ou programa) for executado com entradas que obedecem às pré-condições, então termina produzindo saídas que obedecem às pós-condições.

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP

7

Pré-condições e pós-condições

- double squareRoot(double x)
- Pré-condições?
  - x >= 0 (senão, implementação lança exceção)
- Pós-condições?
  - RESULT * RESULT == x … a menos de um certo erro!
  - RESULT >= 0
- Algoritmo?
  - Método babilónico (derivado de Newton-Raphson), …

8

Pré-condições e pós-condições

- template <typename T>
  int binarySearch(T a[ ], unsigned n, T x)
- Pré-condições?
  - Array a ordenado
  - a != NULL
  - Operadores de comparação definidos para o tipo T
- Pós-condições?
  - (0 <= RESULT < n && a[RESULT] == x) ||
  - (RESULT == -1 && *x não existe em a*)

9

Pré-condições e pós-condições

- template <typename T>
  void sort(T a[ ], unsigned n)
- Pré-condições?
  - a != NULL
  - Operadores de comparação definidos para o tipo T
- Pós-condições?
  - Array "a" está ordenado, isto é a[0] <= a[1] <= … <= a[n-1]
  - Array final tem os mesmos elementos que o array inicial

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP

10

Pré-condições e pós-condições

- template <typename T>
  T max(T a[ ], unsigned n)
- Pré-condições?
  - a != NULL
  - n > 0
  - Operadores de comparação definidos para o tipo T
- Pós-condições?
  - RESULT pertence a *a*
  - Nenhum elemento de *a* é maior que RESULT

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP

11

Invariantes e variantes de ciclos

- A maioria dos algoritmos são iterativos, com um ciclo principal.
- Para provar que um ciclo está correto, temos de encontrar um invariante do ciclo - uma expressão booleana (nas variáveis do ciclo) 'sempre verdadeira' ao longo do ciclo, e mostrar que
  - é verdadeira inicialmente, i.e., é implicada pela pré-condição;
  - é mantida em cada iteração, i.e., é verdadeira no fim de cada iteração, assumindo que é verdadeira no início da iteração;
  - quando o ciclo termina, garante (implica) a pós-condição.
- Para provar que um ciclo termina, temos de encontrar um variante do ciclo – uma função (nas variáveis do ciclo)
  - inteira; positiva; estritamente decrescente. (porquê?)

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP

12

Exemplo 1: Insertion Sort

Ideia principal …

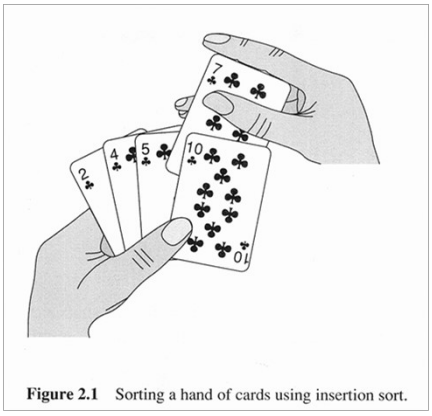
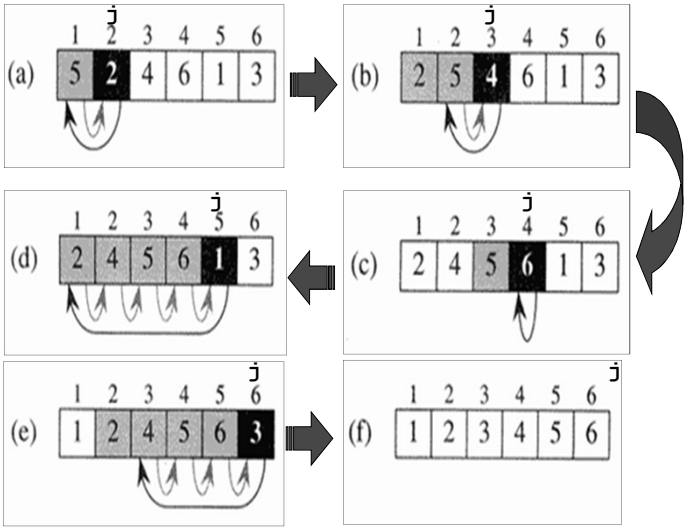


Figure 2.1 Sorting a hand of cards using insertion sort.

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP

13

Funcionamento



14

Algoritmo em pseudo-código

```
INSERTION-SORT(A, n)
for j = 2 to n
    key = A[j]
    // Insert A[j] into the sorted sequence A[1 .. j − 1].
    i = j − 1
    while i > 0 and A[i] > key
        A[i + 1] = A[i]
        i = i − 1
    A[i + 1] = key
```

15

Análise (1/2)

- Invariante do ciclo principal [I(j)] ?

  A[1, …, j−1] contém os elementos originais, mas ordenados (j = 2, …, n+1)

  - ✓ É válido inicialmente (j=2)
    - É óbvio que A[1..1] contém os elementos originais, mas ordenados
  - ✓ É mantido em cada iteração
    - Assume-se que o invariante se verifica no início da iteração
    - O alg. insere A[j] na posição certa em A[1.. j] e incrementa j
    - Logo, no fim da iteração (com novo j), verifica-se o invariante
  - ✓ No fim do ciclo (j = n+1), garante a pós-condição
    - Invariante refere-se a A[1.. n] ou seja todo o array
    - Logo, implica trivialmente a pós-condição, pois é coincidente

16

Análise (2/2)

- Variante do ciclo principal [v(j)] ?

  `n + 1 − j` `(j=2, …, n+1)`

  - ✓ Inteiro, pois `n` e `j` são inteiros
  - ✓ Não negativo, pois o valor máximo de `j` é `n+1`
  - ✓ Estritamente decrescente, pois `j` é sempre incrementado

- Logo, o algoritmo está correto e termina (correção total)

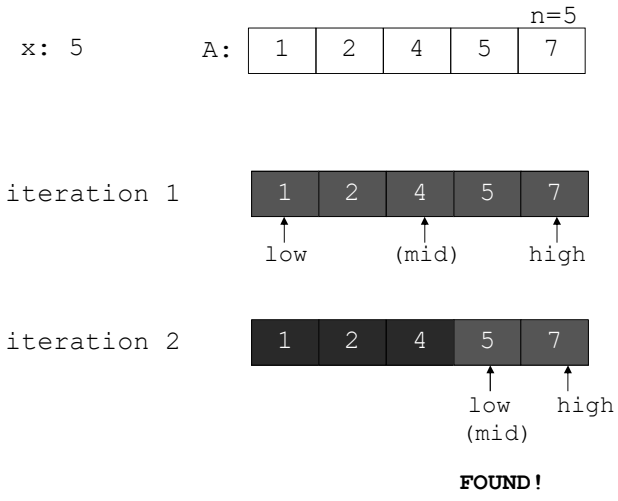
17

Exemplo 2: Binary Search

```
BINARY-SEARCH(A, n, x)
  low ← 1
  high ← n
  while low ≤ high
    mid ← ⌊ (low + high) / 2⌋
    if x = A[mid] then
        return mid
    else if  x < A[mid] then
        high ← mid − 1
    else
        low ←  mid + 1
  return -1
```

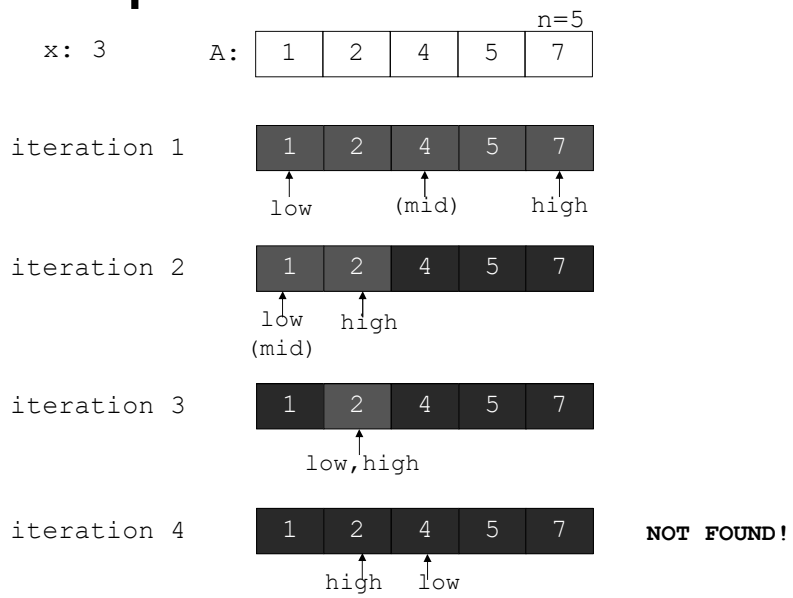

18

Exemplo de funcionamento



19

Exemplo de funcionamento



20

Análise (1/2)

- Invariante do ciclo [`I(low, high)`]?

  `x` só pode existir na área de pesquisa, entre `low` e `high`

  - ✓ É válido inicialmente (`low=1, high = n`), pois a área de pesquisa é todo o array
  - ✓ É mantido em cada iteração
    - ✓ Uma vez que se assume que o array está ordenado …
    - ✓ quando se recua `high`, excluem-se apenas elementos > `x`
    - ✓ quando se avança `low`, excluem-se apenas elementos < `x`
  - ✓ No fim do ciclo, garante a pós-condição
    - ➢ Se o ciclo é interrompido (`A[mid] = x`), garante-se a cláusula em que se encontra `x`
    - ➢ Se o ciclo for até ao fim, a área de pesquisa fica vazia, o que, pelo invariante, implica que `x` não existe em `A`

21

Análise (2/2)

- Variante do ciclo [`v(low, high)`] ?
  - Largura da área de pesquisa: **`high – low + 1`**
  - ✓ Inteiro, pois `low` e `high` são inteiros
  - ✓ Não negativo, pois no pior caso é `low = high`
  - ✓ Estritamente decrescente, pois em cada iteração ou aumenta-se `low` ou diminui-se `high` , estreitando-se a área de pesquisa
- Logo, o algoritmo está correto e termina (correção total)

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP

22

Revisão

- Quais são as 3 qualidades principais a analisar num algoritmo?
- Que técnicas de análise estática e dinâmica existem?
- O que são pré-condições e pós-condições? Para que servem?
- O que é correção parcial e total?
- O que são invariantes e variantes de ciclos? Para que servem?
- Quais são as 3 propriedades que temos de verificar num invariante de ciclo?
- Quais são as 3 propriedades que temos de verificar num variante de ciclo?

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP

Referências

- T.H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest , C. Stein. Introduction to Algorithms, 3rd Edition. MIT Press, 2009
  - Capítulo 2 (Getting Started)
- C.A. Furia, B. Meyer, S. Velder, 2014. Loop invariants: Analysis, classification, and examples. *ACM Comput. Surv*. 46(3): Article 34 (January 2014), 51 pages. DOI=http://dx.doi.org/10.1145/2506375