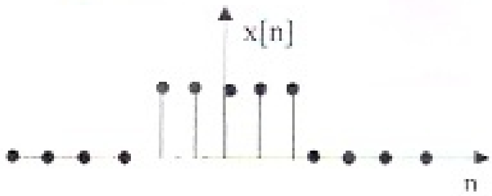
Processamento Digital de Sinal

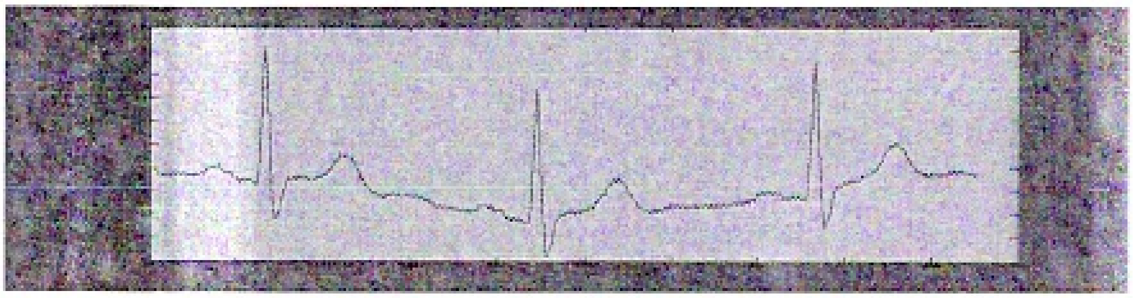
Miniteste1 2013/2014

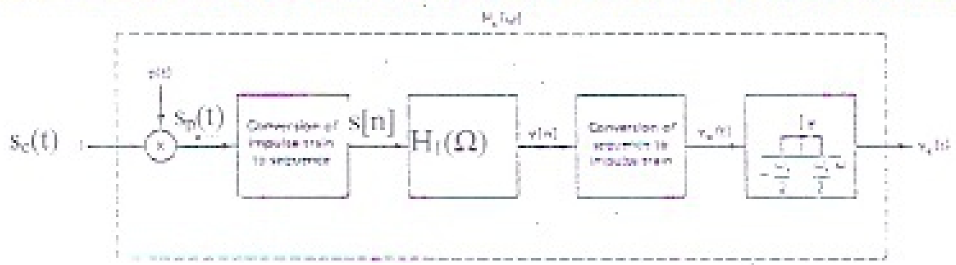
1. Considere o sinal $y[n]=\cos(2\pi n/12).x[n]$ onde $x[n]$ está representado na figura seguinte:



a) Represente graficamente $y[n]$ bem como o módulo e a fase de $Y(\Omega)$. Justifique.
b) Diga o que entende por DFT e explicite as motivações do seu aparecimento. Represente a DFT de 5 pontos do sinal $y[n]$. Justifique.
c) Diga o que entende por FFT e represente a FFT de mais de 5 pontos do sinal $y[n]$. Justifique.

2. Considere o sistema de processamento discreto de sinais continuous mostrado na figura 2 com o qual se pretende recuperar o sinal $x(t)$ que se apresenta à entrada do sistema degradado da forma mostrada na figura1.





a) Indique os 2 tipos de interferência presentes no sinal.
b) Projecte $H1(\Omega)$ de modo a retirar a interferência de baixa frequência. Justifique
c) Que alterações efectuaria em $H1(\Omega)$ para que ambas as interferências fossem retiradas do sinal. Considere que a frequência de amostragem é 500Hz. Justifique.

d) Determine a equação diferenças do sistema e codifique em Matlab o filtro H1(Ω). Justifique.

e) Suponha que o amostrador ideal é substituído pelo amostrador real. Que alterações efectuaria em H1(Ω) para compensar o efeito do amostrador real. Justifique.

f) Represente H1 em termos de transformada z, represente o diagrama de pólos e zeros do sistema H1 e refira-se com base neste à causalidade e estabilidade do sistema. Justifique.

3. Considere o sistema LTI discreto cuja resposta impulsional é:

$$h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1]$$

a) Determine a transformada z da resposta impulsional do sistema.

b) Determine a equação de diferenças do sistema.

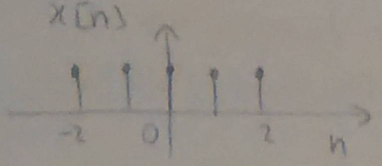
c) Determine a resposta do sistema à entrada

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

d) Determine a entrada do sistema cuja saída é

$$y[n] = n\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

1)

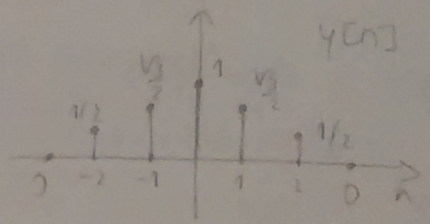


$y[n] = \cos(2\pi n/12) \cdot x[n]$

$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq 2 \\ 0, & |n| > 2 \end{cases}$

a Representar módulo e fase de $Y(\Omega)$, e $y[n]$

- $n = -2 \rightarrow \cos(-2 \times 2\pi/12) = \cos(-\pi/3) = -1/2$
- $n = -1 \rightarrow \cos(-2\pi/12) = \cos(-\pi/6) = -\sqrt{3}/2$
- $n = 0 \rightarrow \cos(0) = 1$

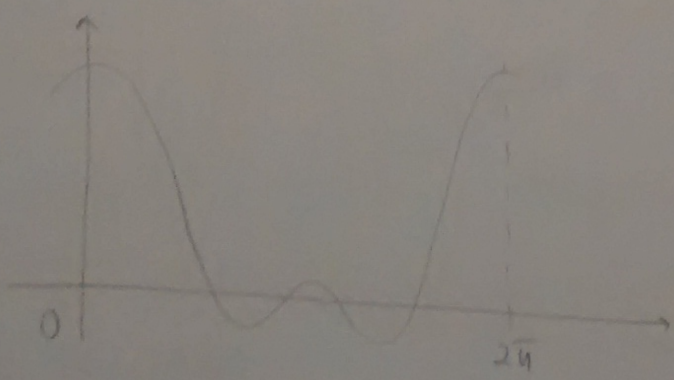


$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]\, e^{-j\Omega n}$$

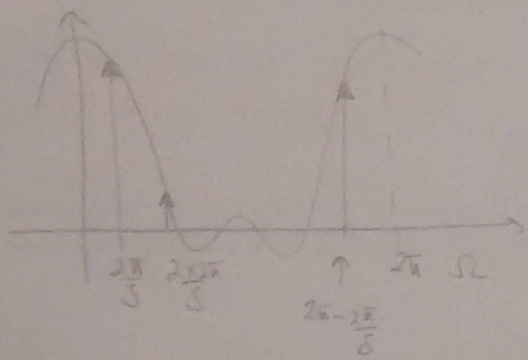
$$= \frac{1}{2} e^{-j\Omega \cdot -2} + \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-j\Omega \cdot -1} + 1\, e^{-j\Omega \cdot 0} + \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-j\Omega 1} + \frac{1}{2} e^{-j\Omega 2}$$

$$= \frac{e^{j2\Omega} - e^{-j2\Omega}}{2} + \sqrt{3}\, \frac{e^{j\Omega} - e^{j\Omega}}{2} + 1$$

$$= \cos(2\Omega) + \sqrt{3}\cos(\Omega) + 1$$

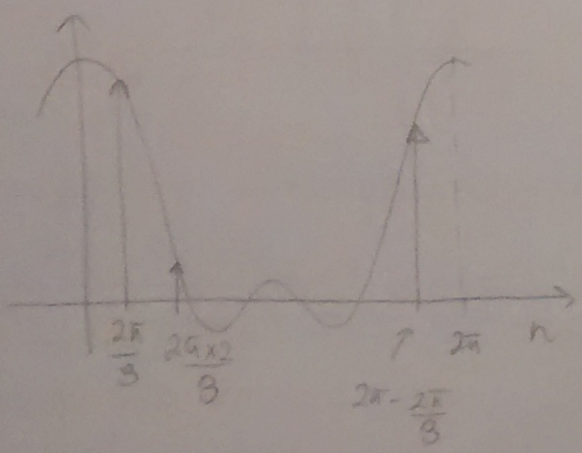


b. Diga o que entende por DFT, represente $y[n]$ por 5 pontos



A DFT, ou transformada de Fourier discreta, torna processável algum sinal discreto com período e frequências limitados, através da DTFT.

c. Diga o que entende por FFT, represente $y[n]$ com mais de 5 pontos



A FFT, ou "Fast Fourier Transform", é o algoritmo de cálculo rápido da DTFT. Neste algoritmo, o número de pontos é usado tendo de ser uma potência de base 2.

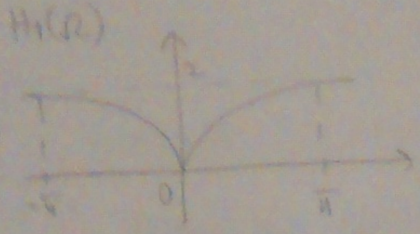
$2^3 = 8 > 5$ ✓

2)

a. Tipos de interferência do sinal

O sinal apresenta um ruído que é proveniente de baixa frequência, e interferência devido à frequência de alimentação da rede

b. Projete $H_1(\Omega)$ de modo a conseguir retirar interferência de baixa f



Aplicando simples filtro para dh, é possível eliminar as frequências em torno de zero.

$$H_1(\Omega) = 1 - e^{-j\Omega}$$

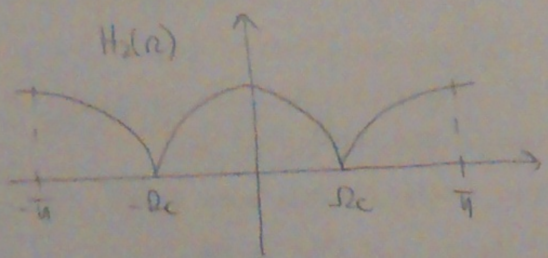
$$H_1(0) = 1 - e^{-j0} = 1 - 1 = 0$$

$$H_1(\pi) = H_1(-\pi) = 1 - (-1) = 2$$

c. Efectue alterações de modo a retirar ambas as frequências do sin

$\Omega_s = 500\ Hz$.

As baixas frequências já foram eliminadas recorrendo ao filtro da alínea anterior. Sabendo que $H(\Omega) = H_1(\Omega)\, H_2(\Omega)$, procederemos à realização do filtro para frequência alimentação da rede



$$H_2(\Omega) = (1 - \alpha e^{-j\Omega})(1 - \beta e^{-j\Omega})$$

$$\to \alpha \to (1 - \alpha e^{-j\Omega})\big|_{\Omega = -\Omega c} = e^{-j\Omega c}$$

$$\to \beta \to (1 - \beta e^{-j\Omega}) = 0\big|_{\Omega = \Omega c} = e^{j\Omega c}$$

$$H_2(\Omega) = (1 - e^{-j\Omega c} \cdot e^{-j\Omega})(1 - e^{j\Omega c} \cdot e^{-j\Omega})$$

$$= 1 - e^{j\Omega c} e^{-j\Omega} - e^{-j\Omega c} e^{-j\Omega} + e^{\cancel{-j\Omega c + j\Omega c}} \cdot e^{-2j\Omega}$$

$$= 1 - 2 e^{-j\Omega} \left(\frac{e^{j\Omega c} + e^{-j\Omega c}}{2}\right) + e^{-2j\Omega}$$

$$= 1 - 2 e^{-j\Omega} \cos(\Omega c) + e^{-2j\Omega}$$

junção dos 2 filtros

↓

$$H(\Omega) = H_1(\Omega)\, H_2(\Omega)$$

$$= (1 - e^{-j\Omega})(1 - 2 e^{-j\Omega} \cos(\Omega c) + e^{-2j\Omega})$$

$$= (1 - e^{-j\Omega})(1 - 2 e^{-j\Omega} \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + e^{-2j\Omega})$$

Ωs — 500 Hz — 2

50 Hz —

$\Omega c = \frac{2\pi \times 5}{500}$

d. desenvolva a equação de diferenças e codifique $H_1(\Omega)$ no matlab

$$H(\Omega) = (1 - e^{-j\Omega})(1 - 2e^{-j\Omega}\cos(\pi/5) + e^{-2j\Omega})$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$H(z) = (1 - z^{-1})(1 - 2z^{-1}\cos(\pi/5) + z^{-2})$$

$$Y(z) = X(z)H(z) = (X(z) - X(z)z^{-1})(1 - 2z^{-1}\cos(\pi/5) + z^{-2})$$

$$= X(z) - X(z)2z^{-1}\cos(\pi/5) + X(z)z^{-2} - X(z)z^{-1}$$

$$+ X(z)z^{-1}2z^{-1}\cos(\pi/5) - X(z)z^{-1}z^{-2}$$

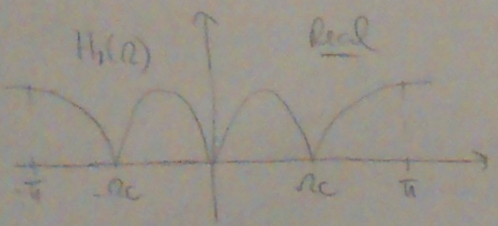
$$Y(z) = X(z) - 2\cos(\pi/5)(X(z)z^{-1} - X(z)z^{-2}) + X(z)z^{-2} - X(z)z^{-1} - X(z)z^{-3}$$

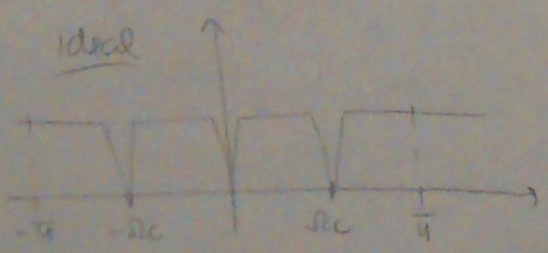
$$y[n] = x[n] - 2\cos(\pi/5)[x[n-1] - x[n-2]] + x[n-2] - x[n-1] - x[n-3]$$

MATLAB:

```
for i=3:length(x)
  y(i) = x(i) - 2*cos(pi/5)*(x(i-1) - x(i-2)) + x(i-2) - x(i-1) - x(i-3)
end
plot(y)
```

e. Substituindo anulador real pelo ideal, que alterações efectuaria;





A queda/corte no filtro real não é tão abrupta, de modo que algumas frequências que se deveriam manter, acabam por também ser cortadas. Para compensar, adicionamos um pólo compensando efeito de cada um dos zeros:

$$H_1(\Omega) = \frac{(1 - e^{-j\Omega})(1 - e^{-j\Omega c}e^{-j\Omega})(1 - e^{j\Omega c}e^{-j\Omega})}{(1 - \gamma e^{-j\Omega})(1 - \alpha e^{j\Omega c}e^{-j\Omega})(1 - \beta e^{-j\Omega c}e^{-j\Omega})}$$

valores de γ, α, β devem ser inferiores a 1, mas próximos de 1, para garantir estabilidade, compensando ao máximo o efeito do zero

3)

SISTEMA LIT: RESPOSTA impulsional

$$h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \cdot u[n-1]$$

a. TRANSFORMADA z da RESPOSTA IMPULSIONAL: $(H(z))$

$$H(z) = Z\{h[n]\}$$

$$= Z\left\{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1]\right\} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\, z^{-1}$$

b. EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS $y[n]$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\cdot z^{-1}$$

$$Y(z)\left[1-\frac{1}{3}z^{-1}\right] = X(z)\left[\frac{1}{3}\cdot z^{-1}\right]$$

$$\Leftrightarrow Y(z) - \frac{Y(z)}{3}\cdot z^{-1} = \frac{X(z)}{3}\cdot z^{-1}$$

$$\Leftrightarrow y[n] - \frac{1}{3}y[n-1] = \frac{1}{3}x[n-1]$$

$$\Leftrightarrow y[n] = \frac{1}{3}y[n-1] + \frac{1}{3}x[n-1]$$