Processamento Digital de Sinal

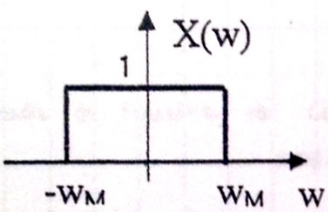
Miniteste 2 2006/2007

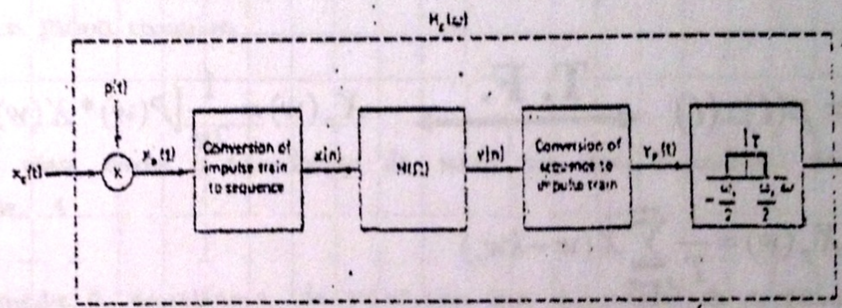
Teorema da amostragem, decimação e interpolação de sequências, processamento digital de sinais contínuos, transformada-z.

1. Explique de forma sucinta qual a principal diferença entre a transformada de Fourier e a transformada-z. (10 minutos)

2. Considere a amostragem por "Sample and Hold". Determine a equação do filtro que permite a recuperação integral de um sinal amostrado desta forma. (10 minutos)

3. Considere o sistema de processamento digital de sinais contínuos apresentado na figura seguinte





Pretende-se com este sistema recuperar o sinal x(t) que se apresenta degradado à entrada do sistema da forma $s_c(t)=x(t-2T0)-x(t+2T0)$. Considere que o espectro de x(t) é o que se encontra representado na figura e que $T0=\pi/(3w_M)$.

a) Verifique que se pode tomar como período de amostragem T=T0. (2 min.)
b) Tomando como período de amostragem T=T0 esboçe Sc(w), Sp(w) e S(Ω). Tente não dar muita importância à "forma" de Sc(w)/X(w). (10 min.)
c) Determine a resposta em frequência do filtro digital tal que y[n]=3.x(nT-4T0). (10 min.)
d) Represente Y(Ω) e diga qual deverá ser o ganho A do filtro passa-baixo ideal de forma que yc(t)=3.x(t-4T0). (5 min.)

4. Determine, usando a transformada-z, a resposta impulsional do sistema LTI discreto que para a entrada

$$x[n] = (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

tem como saída $$y[n] = n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

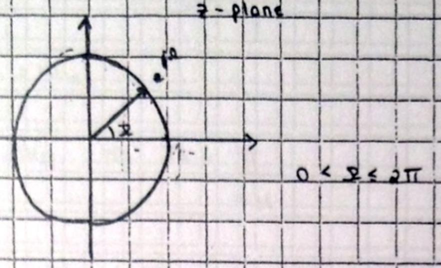
Faça o diagrama de zeros e pólos do sistema. Como caracteriza este sistema em termos de estabilidade e causalidade. O sistema é fisicamente realizável? (15 minutos)

①

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} \rightarrow \text{transformação Fourier}$$

transformação de z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n} \qquad z = Re^{j\Omega}$$



- O plano z é um número infinito de circunferências de Raio 0 até ∞

- A transformada de Fourier é uma circunferência do plano complexo
- A transformada de z é todo o plano complexo

Transformada de Fourier ⇒ Serve para medir a semelhança de x[n] com uma sinusoidal de amplitude 1

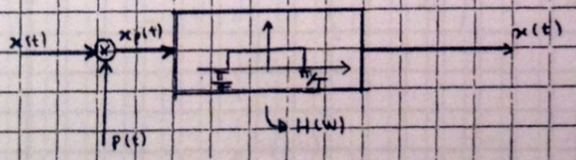
Transformada de z ⇒ serve para medir a semelhança de x[n] com uma sinusoidal de amplitude n

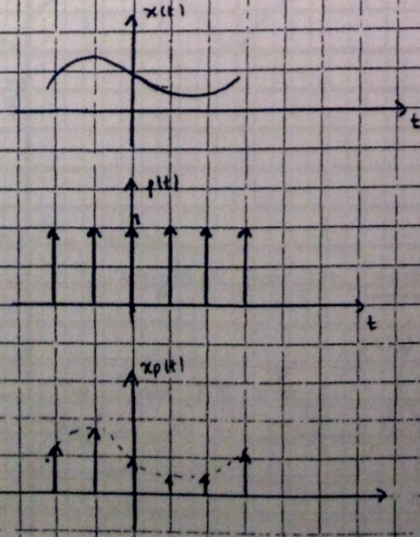
→ A transformada de z é mais abrangente, pois há sinais que não têm transformada de Fourier mas que têm transformada de z

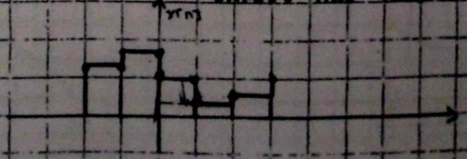
→ A transformada de z permite analisar uma maior variedade de sinais

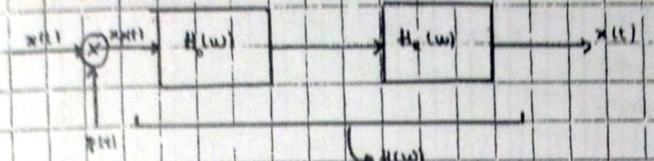
②

Amostrador ideal + Recuperação do sinal analógico





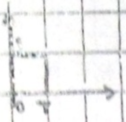




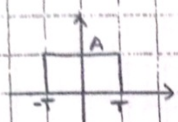
↳ $H(\omega)$

↳ filtro passa-baixo

$x_0(t) = x_p(t) * h_p(t)$

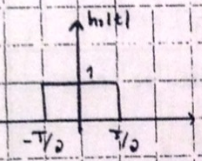


$$H_e(\omega) = \frac{H(\omega)}{H_p(\omega)}$$



$$\longleftrightarrow \quad 2AT \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$

$$H_0(\omega) = T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) e^{-j\omega \frac{T}{2}}$$



$$\xleftrightarrow{TF} \quad T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) = H_1(\omega)$$

$h_0(t) = h_1(t - T/2)$

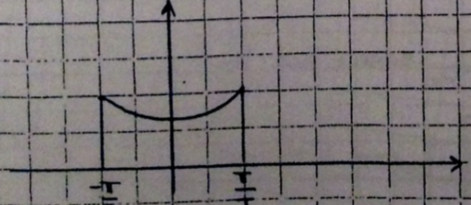
↓ Deslocamento no tempo

$H_0(\omega) = H_1(\omega)\, e^{-j\omega \frac{T}{2}}$

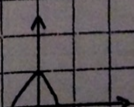
então:

$$H_e(\omega) = \frac{H(\omega)}{H_0(\omega)}$$

$$H_e(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\cancel{T} e^{-j\omega T/2}}{\cancel{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)} = \dfrac{e^{-j\omega T/2}}{\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)}, & \omega < \frac{\pi}{T} \\ 0, & \omega > \frac{\pi}{T} \end{cases}$$



⇒ Teste, veo com triângulo:



$$\xleftrightarrow{TF} \quad AT \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$

$S_c(t) = x(t - 2T_0) - x(t + 2T_0)$

$T_0 = \frac{\pi}{3W_M}$ → Largura de banda do sinal $x(t)$

a) verificar o Teorema de Nyquist

$W_S \geq 2W_M$

ou $\frac{2\pi}{T_0} \geq 2W_M \Rightarrow T_0 \leq \frac{\pi}{W_M}$

To pode ser $\frac{\pi}{3W_M} < \frac{\pi}{W_M}$

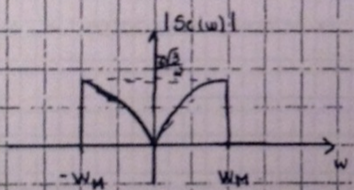
b) $T = \frac{\pi}{3W_M}$

$S_c(t) = x(t - 2T_0) - x(t + 2T_0)$ Linearidade e deslocamento no tempo

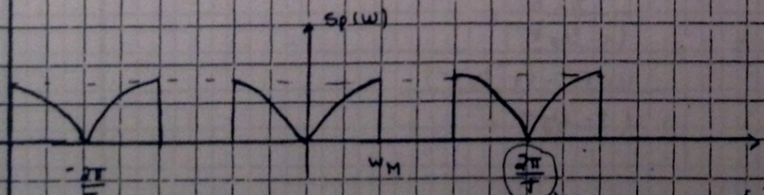
TF

$S(w) = X(w)\left[e^{-2jwT_0} - e^{2jwT_0}\right] =$ Fórmula de Euler

$= -2j\,\text{sen}(2wT_0) \cdot X(w)$ → como $T = \frac{\pi}{3W_M} \Rightarrow \text{sen}\left(2W_M \frac{\pi}{3W_M}\right)$



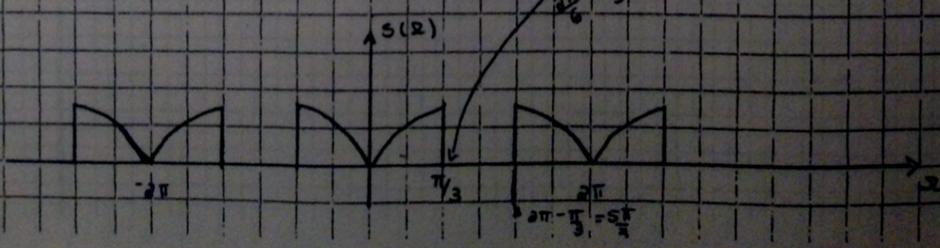
$S_p(w) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_c\left(w - k\frac{2\pi}{T}\right)$ → pega em $S(w)$ e repete de $\frac{2\pi}{T}$ em $\frac{2\pi}{T}$



→ $2\pi \frac{3W_M}{\pi} = 6W_M$

$S(\Omega) = S_p(w)\Big|_{w = \frac{\Omega}{T}}$

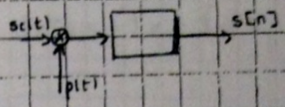
$\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$



c)

$s[n] \longrightarrow \boxed{H(\Omega)} \longrightarrow 3x(nT - 4T_0) = y[n]$

$\hookrightarrow 3x[n-4]$



$s[n] = s_c(nT) = x(nT - 2T_0) - x(nT + 2T_0) =$ Período de amostragem = 0

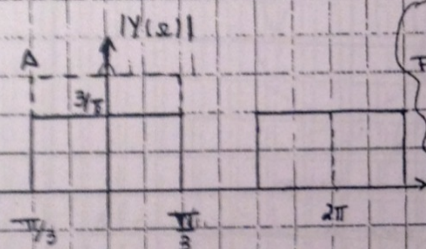
$= x\left(\frac{nT - 2T_0}{T}\right) - x\left(\frac{nT + 2T_0}{T}\right) =$, $T = T_0$

$= x[n-2] - x[n+2]$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{S(\Omega)} = \frac{3\cancel{X(\Omega)}e^{-4j\Omega}}{\cancel{X(\Omega)}(e^{-2j\Omega} - e^{2j\Omega})} =$$

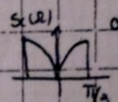
$$= \frac{3e^{-4j\Omega}}{-2j\,\mathrm{sen}(2\Omega)}$$

d) $Y(\Omega) = ?$

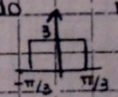


O $H(\Omega)$ é uma constante (3) a dividir por um seno

Faz com que em: $S(\Omega)$ anule no $\frac{\pi}{3}$ e fique



novamente quadrado mas agora com amplitude 3



$\frac{3}{T} \cdot A = 3 \Rightarrow A = T$

$A = T = \frac{\pi}{2\omega_M}$

4

$\boxed{h[n] = ?} \longrightarrow y[n]$

$x[n] = (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] = n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

$y[n] = n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}}{\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}} = \frac{\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\cancel{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}}}{\frac{\frac{1}{2}z^{-1} - (1 - \frac{1}{2}z^{-1})}{\cancel{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{z^{-1} - 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H(z) = -\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

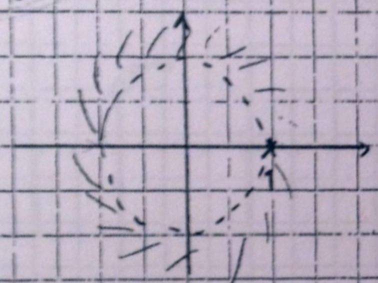
$a^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{1 - a z^{-1}}$

$u[n] \longrightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}}$

$. \; h[n] = -\frac{1}{2} u[n-1]$

ZEROS: $z^{-1} = 0 \Rightarrow \frac{b_1}{z^2} = 0 \Rightarrow \infty$ (não pomos)

Pólos: $z = 1$



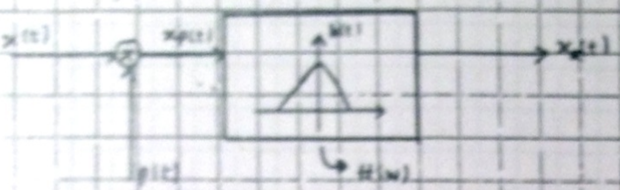
A circunferência de Raio unitário não pertence à ROC, logo os pólos não estão dentro da ROC logo o sistema é instável

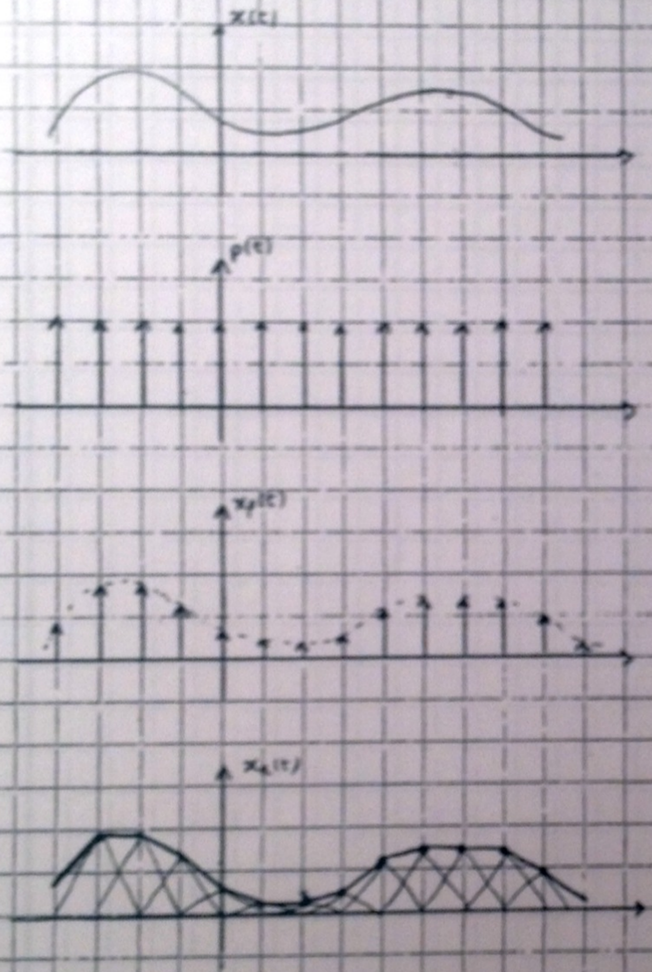
ROC: $|z| > 1 \Rightarrow$ o sistema é causal

O sistema é fisicamente Realizável porque é causal

Exercício 2 para o caso de interpolação linear: Determine a eq. do filtro que permite a recuperação integral de um sinal amostrado

A interpolação linear consiste em ligar as amostras através de segmentos de recta desta forma





$$H(\omega) = T\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$

. A interpolação linear é teoricamente melhor que a interpolação por amostragem e retenção, uma vez que a função <u>sinc²</u> atenua mais as altas frequências que a função <u>sinc</u>.