Processamento Digital de Sinal

Teste 3 2010-2011

1. Considere um sinal discreto x[n] obtido por amostragem de uma realização de um processo ruído branco estacionário de média nula e variância σ_x^2.
   a) Determine as médias temporais e de conjunto do PE.
   b) Considere a DFT de x[n]. Determine a sua média e sequência de autocorrelação.
   c) Determine a correlação cruzada entre os valores da DFT.

2. Considere um sistema discreto LTI caracterizado pela função de transferência

$$H(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

e ao qual é aplicado um sinal ruído branco de média nula.
   a) Explique o que entende por um sinal ruído branco e caracterize-o em termos de estatística temporal e de conjunto.
   b) Dos métodos de estimação espectral que conhece qual o mais indicado para estimar a densidade espetral de potência do processo de saída? Justifique.
   c) Mostre que a autocorrelação do sinal de saída é dada por

$$\varphi_{xx}(m) = \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_{xx}(m-k)$$

   d) Considere que dispõe de uma amostra do sinal de saída de 5 pontos {1, 0, -1, 0, 1}. Estime a sequência de autocorrelação do processo de saída para $-4 \leq m \leq 4$.
   e) Determine o erro do preditor.
   f) Estime a sequência de autocorrelação do processo de saída para m>4 e m<9.
   g) Determine o espectro de máxima entropia do sinal de saída do sistema.

3. Suponha o caso da detecção da direcção de fontes radiantes ou puras superfícies reflectoras através de um agregado linear e uniforme de sensores.

   a) Em sua opinião o método da decomposição da matriz correlação espacial dos dados em valores singulares (SVD) é adequado para a resolução deste problema? Justifique.
   b) Um dos algoritmos de DoA mais usado é o MUSIC. Descreva convenientemente o algoritmo apresentando a sua pricipal desvantagem.
   c) Suponha um sistema de comunicações móveis onde o sinal chega à antena receptora degradado por 2 ecos. Suponha ainda que o ângulo de chegada do sinal directo é perpendicular ao eixo do agregado e os ângulos de

UNIVERSIDADE DO MINHO

(a) ______ da disciplina de PDS ______ em ___ 20 ___

ALUNO (b) PROCESSOS ESTOCASTICOS E AFINS

curso de Teste 3 ______ Docente que recebeu a prova ______

2- Considere um sistema discreto LTI caracterizado pela função de transferência

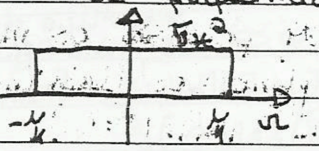
$$H(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

e ao qual é aplicado um sinal de ruído branco de média nula.

a) Explique o que entende por um sinal de ruído branco e caracterize-o em termos de estatística temporal e de conjunto.

Um processo de ruído branco é um tipo particular de processo estocástico. É um processo estocástico onde as variáveis aleatórias são não correladas, independentes

Parâmetros: Densidade espectral de potência que não depende da frequência (igual em todas as frequências)



$\Rightarrow \phi_{xx}[n] = (TF)^{-1}\{P_{xx}(\Omega)\} = \sigma_x^2 \delta[m]$

$\phi_{xx}[m] = E\{x[n]\, x^*[n+m]\}$

Sequência de autocovariância: $\gamma_{xx}[n] = E\{(x[n] - \cancel{m_x})(x^*[n+m] - \cancel{m_x})\} =$ média = 0

$= \phi_{xx}[m] = \sigma_x^2 \delta[m]$

A sequência de autocovariância é a dispersão dos valores N em torno da média.

?

O ruído branco é temporalmente (~~homogéneo~~), estacionário e sem dependência temporal.

(a) – Exercício escrito ou exame final

(b) – Nome completo em letra de imprensa

d) Considere que dispõe de uma amostra do sinal de saída de 5 pontos $\{\underset{0}{1}, \underset{1}{0}, \underset{2}{-1}, \underset{3}{0}, \underset{4}{1}\}$. Estime a sequência de autocorrelação do processo de saída para $-4 \leq m \leq 4$.

d)

$$C_{xx}(m) = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4-|m|} x[n]\cdot x[n+m] = \begin{cases} 3/5 & m=0 \\ 0 & |m|=1 \\ -2/5 & |m|=2 \\ 0 & |m|=3 \\ 1/5 & |m|=4 \end{cases}$$

m=0, 5 casos

$$\frac{1}{5}\left(1\cdot1+0\cdot0+(-1)\cdot(-1)+0\cdot0+1\cdot1\right)=\frac{3}{5}$$

m=1, 4 casos

$$\frac{1}{5}\cdot\left(1\cdot0+0\cdot(-1)+(-1)\cdot0+0\cdot1\right)=0$$

b) Dos métodos de estimação espectral que conhece qual o mais indicado para estimar a densidade espectral de potência do processo de saída. Justifique. → Método da maxima entropia pk trata-se de um processo autoregressivo só tem um polo

Os métodos de estimação espectral conhecidos mais apropriados para estimar a densidade espectral de potência são:

- Clássicos — $C_{xx}[m] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]\cdot x[n+m]$

- MEM — $C_{xx}(k) = \sum_{i=1}^{k} a_i\, C_{xx}[m-k]$ Metodo da máxima entropia não trunca a sequência de autocorrelação

Na minha opinião são os MEM, pois são os mais apropriados para sinais com densidade espectral não plana (os clássicos truncam a sequência de autocorrelação $C_{xx}[m] \; |m|>N=0$).

e) Determine o erro do preditor

CHEGAR À FORMULA

$$MMSE = \phi_{xx}(0) - \sum_{k=1}^{4} a_k\,\phi_{xx}(k) =$$

$$= 3 - \left(\frac{4}{6}\cdot(-2) + \frac{7}{6}\cdot 1\right) = \frac{18}{6} - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{19}{6}$$

f) Estime a sequência de autocorrelação do processo de saída para $m>4$ e $m<9$.

$$\begin{array}{c} \phi_{xx}[0] \\ \phi_{xx}[-1] \\ \dots \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \phi_{xx}[1] \\ \dots \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{cases} 3a_1 - 2a_3 = 0 \\ -2a_1 + 3a_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a_1 - \frac{4a_1}{3} = 0 \\ a_3 = \frac{2a_1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a_2 - 2a_4 = -2 \\ -2a_2 + 3a_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a_2 - 2\cdot\left(\frac{1+2a_2}{3}\right) = -2 \\ a_4 = \frac{1+2\cdot a_2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_2 - 2 - 4a_2 = -2 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = 4/6 \\ a_4 = \frac{1+8/6}{3} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{3}{1}} = 7/6 \end{cases}$$

$$\boxed{\hat{x}[n] = \frac{4}{6} x[n-2] + \frac{7}{6} x[n-4]}$$

$$\hat{x}[5] = \frac{4}{6} x[3] + \frac{7}{6} x[1] = \frac{7}{6}$$

$$\hat{x}[6] = \frac{4}{6} x[4] + \frac{7}{6} x[2] = -\frac{3}{6}$$

$$\hat{x}[7] = \frac{4}{6} x[5] + \frac{7}{6} x[3] = \frac{28}{36} = \frac{7}{9}$$

$$\hat{x}[8] = \frac{4}{6} x[6] + \frac{7}{6} x[4] = \frac{28}{54} + \frac{63}{54} = \frac{91}{54}$$

g) Determine o espectro de máxima entropia do sinal de saída do sistema.

O espectro de máxima entropia é dado por:

$$P_{MEM}(\omega) = \frac{MMSE}{\left|1 - \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-j\omega k}\right|^2}$$

c) Mostre que a autocorrelação do sinal de saída é dada por

$$\phi_{xx}(m) = \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_{xx}(m-k)$$

$$E\left\{\left(x_n - \sum_{k=1}^{N} a_i x_{n-i}\right) \cdot x_{n-k}\right\} = 0 \qquad k = 1, \ldots, N$$

$$\Leftrightarrow \quad E\left\{x_n x_{n-k} - x_{n-k} \sum_{i=1}^{N} a_i x_{n-i}\right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad E\{x_n x_{n-k}\} - E\left\{x_{n-k} \sum_{i=1}^{N} a_i x_{n-i}\right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad E\{x_n x_{n-k}\} = E\left\{\sum_{i=1}^{N} a_i x_{n-k} x_{n-i}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi_{xx}(k) = \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_{xx}(k-i)$$

UNIVERSIDADE DO MINHO

(a) Teste 3 – 2010/2011 da disciplina de ______ em ___ 20 ___

ALUNO (b) ①

curso de ______ Docente que recebeu a prova ______

① Considere um sinal discreto $x[n]$ obtido por amostragem de uma realização de um processo de ruído branco estacionário de média nula e variância σ_x^2.

a) Determine as médias temporais e de conjunto do PE.

Se tivermos um PE temos:

$x_1 \quad x_2 \; \cdots \; x_N$

$$x[n] = [\, x[0] \quad x[1] \quad x[2] \cdots x[N] \,]$$

Se houve uma realização do processo há uma média temporal, ou seja:

$$m = \sum_{n=0}^{N} x[n]$$

A média de conjunto é um vector $\rightarrow m = [m_1 \quad m_2 \cdots m_N]$

. Se o processo for estacionário, m_i (todas as médias) são constantes (independentes no tempo)
Neste caso a média de conjunto seria dada por: $\langle x_n \rangle = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} x_n$

b) Determine a DFT de $x[n]$. ~~Determine~~ a sua média e sequência de autocorrelação.

Se temos um $x[n]$, a DFT é dada por:

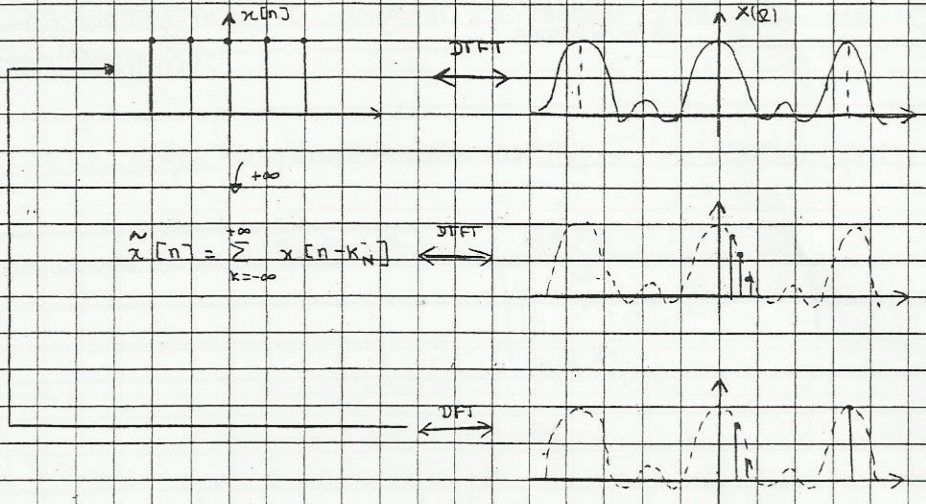
$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

(A DFT é uma amostragem da DTFT no domínio dos tempos)

(a) — Exercício escrito ou exame final

(b) — Nome completo em letra de imprensa

• A DFT é a versão discreta da DTFT de uma versão periódica do sinal, ou seja:



$$E\{X(k)\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} E\{x[n]\}\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = 0 \rightarrow \text{porque a média é nula}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

ou aqui

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(k)\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

→ o 1/N tem de estar num dos 2

$$E\{X(k)\,X^*(k)\}$$

$$= E\left\{\sum_{n_1=0}^{N-1} x[n_1]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_1} \sum_{n_2=0}^{N-1} x^*[n_2]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_2}\right\}$$

$$= E\left\{\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1} x[n_1]\,x^*[n_2]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}(n_1-n_2)}\right\}$$

$$= \sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1} \underbrace{E\{x[n]\,x^*[n_2]\}}_{\sigma_x^2\,\delta[n_2-n_1]}\, e^{-j\frac{2\pi}{N}(n_1-n_2)}$$

Mudança de variável

garante que:

. se $n_2 = n_1 \rightarrow$ então dá σ_x^2

. se $n_2 \neq n_1 \rightarrow$ então dá 0

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_x^2 = N\sigma_x^2$$

UNIVERSIDADE DO MINHO

(a) Teste 3 – 2010/2011 da disciplina de ____ em ___ 20 ___

ALUNO (b) ②

curso de ____ Docente que recebeu a prova ____

②

e) Determine o erro do preditor.

O valor estimado para x é:

$$\hat{x}[n] = a_1 x[n-1] + a_2 x[n-2] + \dots + a_k x[n-k] = \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell x[n-\ell]$$

Erro:

$$\overline{e}^2 = E\{(x[n]-\hat{x}[n])^2\} = E\{(x[n]-\hat{x}[n])(x[n]-\hat{x}[n])\} =$$

$$= E\{x[n](x[n]-\hat{x}[n]) - \underbrace{\hat{x}[n](x[n]-\hat{x}[n])}_{\text{erro ortogonal dos dados}}\} =$$

$$= E\left\{x[n]\left(x[n] - \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell x[n-\ell]\right)\right\}$$

Equações de Yule walker

$$\begin{bmatrix} \phi(0) & \phi(1) & \phi(2) & \phi(3) \\ \phi(-1) & \phi(0) & \phi(1) & \phi(2) \\ \phi(-2) & \phi(-1) & \phi(0) & \phi(1) \\ \phi(-3) & \phi(-2) & \phi(-1) & \phi(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a_1 - 2a_3 = 0 \\ 3a_2 - 2a_4 = -2 \\ -2a_1 - 3a_3 = 0 \\ -2a_2 + 3a_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = -4/5 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = -1/5 \end{cases}$$

$$\hat{x}[n] = -\frac{4}{5} x[n-2] - \frac{1}{5} x[n-4]$$

(a) — Exercício escrito ou exame final

(b) — Nome completo em letra de imprensa

34a)

g) Determine o espectro de máxima entropia do sinal de saída do sistema.

$$P_{MEM} = \frac{\phi_{xx}(0) - \sum_{k=0}^{K} a_k \phi_{xx}[k]}{\left| 1 - \sum_{k=1}^{M} a_k e^{-jk\Omega} \right|^2}$$

③ Suponha o caso da detecção de fontes radiantes ou puras superfícies reflectoras através de um agregado linear e uniforme de sensores.

a) Em sua opinião o método da decomposição da matriz correlação em valores singulares (SVD) é adequado à resolução deste problema? Justifique.

A decomposição da matriz correlação espacial dos dados singulares consiste em decompor a matriz de autocorrelação em vectores ortogonais (ortogonais entre si e ortogonais aos vectores do espaço do sinal). E os vectores do espaço do sinal têm de ser ortogonais entre si.

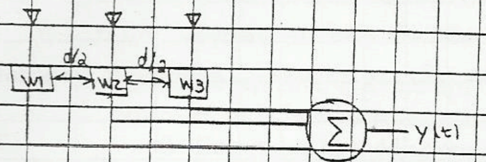
Tendo um espaço vectorial com a dimensão da matriz correlação, o método pega na matriz correlação e faz o espaço ortogonal. Todos os espaços ortogonais têm uma direcção. Temos que ver os que têm maior significância (esses são as nossas fontes, fazem parte do espaço do sinal). Os que tiverem menos significância são os valores do espaço do ruído, fazemos o inverso da transformada de Fourier deles e somamos os seus valores. Esso soma dá valores grandes para a direcção do ruído. Ficamos depois com os valores do espaço do sinal.

b) Um dos algoritmos de DoA mais usado é o Music. Descreva-o apresentando a sua principal desvantagem.

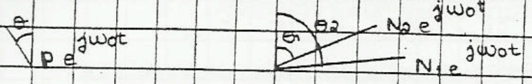
Este método baseia-se na decomposição singular da matriz espacial dos dados.
Sabendo a dimensão do espaço do sinal, ou seja, o número de fontes que ele tem, determina-se a transformada de Fourier dos vectores do espaço do ruído. A densidade espectral de potência obtida é o inverso da transformada de Fourier dos vectores do espaço do ruído.

c) Suponha um sistema de comunicações móveis onde o sinal chega à antena receptora degradado por 2 ecos. Suponha ainda que o ângulo de chegada directo é perpendicular ao eixo do agregado e os ângulos de chegada das reflexões são respectivamente θ_1 e θ_2 relativamente à perpendicular ao eixo do agregado. escrever as eq. lineares.

2 ecos $\longrightarrow$ 3 antenas



$e^{j(w_0 t + kd \operatorname{sen}\theta)}$



- saída devida à fonte $\rightarrow y(t) = P_e^{j w_0 t}(w_1 + w_2 + w_3)$

- saída devida ao eco (θ_1):

$$y(t) = N_1 e^{j(w_0 t + kd \operatorname{sen}\theta_1)} w_1 + w_2 + N_1 e^{j(w_0 t + kd \operatorname{sen}\theta_1)} w_3 = 0$$

$$= N_1 e^{j w_0 t}\Big[\underbrace{[\cos(kd \operatorname{sen}\theta_1) - j \operatorname{sen}(kd \operatorname{sen}\theta_1)]}_{\alpha}\Big] w_1 + w_2 + N_1 e^{j w_0 t}\Big[\underbrace{[\cos(kd \operatorname{sen}\theta_1) - j \operatorname{sen}(kd \operatorname{sen}\theta_1)]}_{\beta}\Big] w_3 = 0$$

- saída devido ao eco (θ_2):

$$y(t) = N_2 e^{j(w_0 t + kd \operatorname{sen}\theta_2)} w_1 + w_2 + N_2 e^{j(w_0 t + kd \operatorname{sen}\theta_2)} w_3 = 0$$

$$= N_2 e^{j w_0 t}\Big[\underbrace{[\cos(kd \operatorname{sen}\theta_2) - j \operatorname{sen}(kd \operatorname{sen}\theta_2)]}_{\alpha}\Big] w_1 + w_2 + N_2 e^{j w_0 t}\Big[\underbrace{[\cos(kd \operatorname{sen}\theta_2) - j \operatorname{sen}(kd \operatorname{sen}\theta_2)]}_{\beta}\Big] w_3 = 0$$

$$\begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 = 1 \\ \alpha w_1 + w_2 + \beta w_3 = 0 \end{cases}$$

c) Determine a correlação cruzada entre os valores da DFT

$$E\{X(k)X^*(\ell)\} = E\left\{\sum_{n_1=0}^{N-1} x[n_1]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_1} \sum_{n_2=0}^{N-1} x^*[n_2]\, e^{j\ell\frac{2\pi}{N}n_2}\right\} =$$

$$= \sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1} \underbrace{E\{x[n_1]\,x^*[n_2]\}}_{\sigma^2 \delta[n_2-n_1]}\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_1}\, e^{j\ell\frac{2\pi}{N}n_2}$$

ficamos só com n porque n_1 tem de ser igual a n_2 se não a esperança matemática desaparece

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_x^2\, e^{-j(k-\ell)\frac{2\pi}{N}n} =$$

$$= \sigma_x^2 \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(k-\ell)\frac{2\pi}{N}n} \quad (*)$$

se $(k-\ell) \neq 0 \Rightarrow \Sigma$ é nulo
se $(k-\ell) = 0 \Rightarrow \Sigma$ é N
então podemos dizer que dá: $N\delta(k-\ell)$

$$= N\sigma_x^2\, \delta(k-\ell)$$

② Considere o sinal discreto LTI caracterizado pela função de transferência $H(z) = \dfrac{1}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$ e ao qual é aplicado um sinal de ruído branco com média nula.

a) Explique o que entende por um sinal de ruído branco e caracterize-o em termos de estatística temporal e de conjunto.

Um processo de ruído branco é um tipo particular de processo estocástico, onde as variáveis aleatórias que o compõe são não correlados, ou seja:

$$\phi[m] = E\{x[n]\,x^*[n+m]\} = \sigma_x^2\,\delta[m]$$

Um sinal de ruído branco é um processo estocástico em que as variáveis são independentes entre si (não correlados)

Os parâmetros que o compõe são os seguintes:

- densidade espectral de potência não depende da frequência

- A sequência de autocovariância é definida por:

$$\gamma_{xx}[m] = E\{(x_n - m_{x_n})(x^*_{n+m} - m_{x_{n+m}})\} = E\{(x[n]-m_x)(x^*[n+m]-m_x)\}$$

Como a média do processo é nula e este é estacionário, então:

$m_{x_n} = m_{x_{n+m}} = 0$, pelo que:

$$\gamma_{xx}[m] = E\{x[n]\,x^*[n+m]\} = \phi_{xx}[m] = \sigma_x^2\,\delta[m]$$