Departamento de Matemática

utad

Lógica Proposicional

Tópicos de Matemática Discreta

EInf & MACD

— 2/3/4 de novembro de 2020 —

T: Se ab é um número par, então a ou b é par.

p: ab é um número par

q: a é par

r: b é par

$\boxed{\text{T: } p \rightarrow (q \vee r)}$

Prova 1: $(\neg q \wedge \neg r) \rightarrow \neg p \equiv \neg(q \vee r) \rightarrow \neg p \equiv p \rightarrow (q \vee r)$ $\boxed{\neg(q \vee r) \rightarrow \neg p}$ ✓

Prova 2: $(q \vee r) \rightarrow p \not\equiv p \rightarrow (q \vee r)$ $\boxed{(q \vee r) \rightarrow p}$ X

Prova 3: $(p \wedge \neg(q \vee r)) \rightarrow F \equiv p \rightarrow (q \vee r)$ $\boxed{(p \wedge \neg(q \vee r)) \rightarrow F}$ ✓

Prova 4: $(p \wedge \neg q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \vee r)$ $\boxed{(p \wedge \neg q) \rightarrow r}$ ✓

Prova direta

As provas diretas são as mais simples do ponto de vista lógico. Para provar uma implicação ($p \to q$), tendo em conta que a implicação é verdadeira sempre que o antecedente é falso, basta fazer a prova quando p é verdadeiro. Daí que a forma geral de uma prova seja:

> *" Suponhamos p. Explica, explica, ..., explica. Então q. "*

Se estivermos a provar uma afirmação do tipo $\forall x, p(x) \to q(x)$, continuamos a provar uma implicação, mas temos de ter em conta o x. Nestes casos, começamos, geralmente, a demonstração por:

> *"Fixemos um elemento arbitrário a que verifica $p(x)$, isto é, $p(a)$ é verdade. Explica, explica, ..., explica. Então $q(a)$."*

T: Para todo o inteiro n, se n é par, então n^2 é par.
Prova: Seja n um inteiro arbitrário tal que n é par. Explica, explica, ..., explica. Portanto n^2 é par.

T: Para todos os inteiros a, b e c, se $a|b$ e $b|c$ então $a|c$.
Prova: Sejam a, b e c inteiros tais que $a|b$ e $b|c$. Explica, explica, ..., explica. Portanto $a|c$.

T: Para todo o inteiro n, se n é par, então n^2 é par.
Prova: Seja n um inteiro arbitrário tal que n é par.

Portanto n^2 é par.

T: Para todos os inteiros a, b e c, se $a|b$ e $b|c$ então $a|c$.
Prova: Sejam a, b e c inteiros tais que $a|b$ e $b|c$.

Portanto $a|c$.

Prova por contra-recíproca

Como vimos, é válida a seguinte equivalência lógica: $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$. Assim, a prova por contra-recíproca é um caso análogo ao que vimos atrás, mas considerando a implicação $\neg q \to \neg p$. Por estranho que pareça, há imensos resultados em que esta "troca" facilita imenso a prova. A forma geral de uma prova por contra-recíproca é então:

> *Suponhamos $\neg q$. Explica, explica, …, explica. Portanto $\neg p$.*

Mais uma vez, se houver quantificadores universais envolvidos, teremos:

> *"Fixemos um elemento arbitrário a que verifica $\neg p(x)$, isto é, $\neg p(a)$ é verdade. Explica, explica, …, explica. Então $\neg p(a)$."*

T: Para todo o inteiro n, se n^2 é par então n é par".
Prova: Seja n um inteiro arbitrário tal que n é ímpar. Explica, explica, …, explica. Portanto n^2 é ímpar.

T: Para todos os inteiros a e b, se $a + b$ é ímpar então a é ímpar ou b é ímpar.
Prova: Sejam a e b inteiros arbitrários, ambos pares. Explica, explica, …, explica. Portanto $a + b$ é par.

T: Para todo o inteiro n, se n^2 é par então n é par".
Prova: Seja n um inteiro arbitrário tal que n é ímpar.

Portanto n^2 é ímpar.

T: Para todos os inteiros a e b, se $a + b$ é ímpar então a é ímpar ou b é ímpar.
Prova: Sejam a e b inteiros arbitrários, ambos pares.

Portanto $a + b$ é par.

Prova por contradição (redução ao absurdo)

A prova por redução ao absurdo é muito parecida com a prova por contra-recíproca. Ambas começam pela negação do consequente, mas em vez de chegarmos à negação do antecedente, chegamos a um absurdo. É uma aplicação direta do raciocínio $((p \wedge \neg q) \to F) \to (p \to q))$. A forma geral de uma prova por contradição é então:

> *Suponhamos que temos p e também $\neg q$. Explica, explica, ..., explica. Contradição. Portanto $p \to q$.*

T: $\sqrt{2}$ é irracional. (Se $a = \sqrt{2}$ então a é irracional.)
Prova: Seja $a = \sqrt{2}$ e suponhamos que a é racional. Explica, explica, ..., explica. Absurdo. Portanto a é irracional.

T: Não existem inteiros x e y tais que $x^2 = 4y + 2$. (Se x e y são tais que $x^2 = 4y + 2$ então x e y não são inteiros.)
Prova: Suponhamos que $x^2 = 4y + 2$ e que x e y são inteiros. Explica, explica, ..., explica. Absurdo. Portanto x e y não podem ser inteiros.

T: $\sqrt{2}$ é irracional. (Se $a = \sqrt{2}$ então a é irracional.)
Prova: Seja $a = \sqrt{2}$ e suponhamos que a é racional.

Absurdo. Portanto a é irracional.

T: Não existem inteiros x e y tais que $x^2 = 4y + 2$. (Se x e y são tais que $x^2 = 4y + 2$ então x e y não são inteiros.)
Prova: Suponhamos que $x^2 = 4y + 2$ e que x e y são inteiros.

Absurdo. Portanto x e y não podem ser inteiros.

O consequente é uma disjunção: $p \to (q \vee r)$

Para $(q \vee r)$ ser verdade basta que uma das proposições o seja. Assim, nestes casos basta provar $p \to q$ ou $p \to r$. Em algumas situações, torna-se útil supor que uma das condições q ou r não se verifica e provar que a outra tem de ser verdadeira (ver Prova 4). A forma geral de uma prova nestes casos é:

Suponhamos que temos p e $\neg q$. Explica, explica, ..., explica. Então r.

T: Se p é primo, então $p = 2$ ou p é ímpar.
Prova: Seja p um primo arbitrário e suponhamos que p não é ímpar. Explica, explica, ..., explica. Então $p = 2$.

T: Sejam x, y reais tais que $x.y = 0$. Então $x = 0$ ou $y = 0$.
Prova: Sejam x, y reais arbitrários tais que $x.y = 0$ e suponhamos que $x \neq 0$. Explica, explica, ..., explica. Então $y = 0$.

T: Se p é primo, então $p = 2$ ou p é ímpar.
Prova: Seja p um primo arbitrário e suponhamos que p não é ímpar.

Então $p = 2$.

T: Sejam x, y reais tais que $x.y = 0$. Então $x = 0$ ou $y = 0$.
Prova: Sejam x, y reais arbitrários tais que $x.y = 0$ e suponhamos que $x \neq 0$.

Então $y = 0$.

Prova por casos: o antecedente é uma disjunção: $(p \vee q) \to r$

Nesta situação, temos de provar as implicações $p \to r$ e $q \to r$. Normalmente, a consideração dos casos p e q não surge no enunciado mas é uma necessidade que facilita a demonstração. A forma geral de uma prova por casos é então:

> *Suponhamos que temos p. Explica, explica, ..., explica. Então r. Suponhamos que temos q. Explica, explica, ..., explica. Então r.*

T: Para todo o inteiro n, $n^3 - n$ é par.
Prova: Seja n um inteiro arbitrário:
Caso 1: Suponhamos que n é par. Explica, explica, ..., explica. Então $n^3 - n$ é par.
Caso 2: Suponhamos que n é ímpar. Explica, explica, ..., explica. Então $n^3 - n$ é par.

T: Se a, b são reais tais que $0 \leq a < b$, então $a^2 < b^2$.
Prova: Sejam a, b reais arbitrários tais que $0 \leq a < b$.
Caso 1: Suponhamos que $a > 0$. Explica, explica, ..., explica. Então $n^3 - n$ é par.
Caso 2: Suponhamos que $a = 0$. Explica, explica, ..., explica. Então $n^3 - n$ é par.

T: Para todo o inteiro n, $n^3 - n$ é par.
Prova: Seja n um inteiro arbitrário:
Caso 1: Suponhamos que n é par. Então $n^3 - n$ é par.

Caso 2: Suponhamos que n é ímpar. Então $n^3 - n$ é par.

T: Se a, b são reais tais que $0 \leq a < b$, então $a^2 < b^2$.
Prova: Sejam a, b reais arbitrários tais que $0 \leq a < b$.
Caso 1: Suponhamos que $a > 0$. Então $a^2 < b^2$.

Caso 2: Suponhamos que $a = 0$. Então $a^2 < b^2$.

Equivalência $(p \leftrightarrow q)$

Tendo em conta que a equivalência é uma "abreviatura" da conjunção de duas implicações ($p \to q$ e $q \to p$), a demonstração de um equivalência faz-se, normalmente, provando cada uma das implicações em separado.

T: Para todo o inteiro n, n^2 é par se e só se n é par".
Prova: Seja n um inteiro.
i) $(\to)$ Suponhamos que n^2 é par. ...
ii) $(\leftarrow)$ Suponhamos que n é par. ...

É preciso ter consciência de que a prova de um teorema vai muito além das questões lógico-formais. É um momento em que genialidade criativa e saber profundo de técnicas e conceitos se encontram para produzir algo que se manterá verdade até ao fim dos tempos. (https://www.youtube.com/watch?v=jej8qlzlAGw)