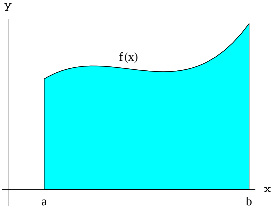
Cálculo Integral

Luísa Morgado

1^{o} Ciclo em Engenharia Informática

Seja f uma f.r.v.r. contínua e positiva num intervalo $[a, b]$



e suponhamos que pretendemos calcular a área da região azul, i.e., a área da região

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq f(x)\right\}.$$

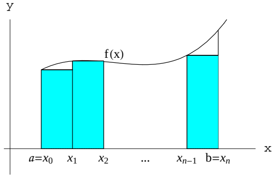
Para calcular um valor aproximado desta área:

- considere-se uma partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ em n subintervalos disjuntos, definida pelos pontos

$$\mathcal{P} = \{x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\} \,;$$

- considerem-se os rectângulos de base $\underbrace{\triangle x_i = x_{i+1} - x_i}_{\text{amplitude do intervalo } [x_i, x_{i+1}]}$

  e de altura $f(c_i)$, $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$;



Independentemente da escolha do ponto c_i, a área de cada rectângulo é dada por

$$\triangle x_i f(c_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

e portanto uma aproximação da área pretendida pode ser dada pela expressão

$$\underbrace{R_{\mathcal{P}} = \sum_{i=0}^{n-1} \triangle x_i f(c_i)}_{\text{Soma de Riemann de } f \text{ em relação à partição } \mathcal{P}}.$$

É claro que quanto maior for o número de pontos na partição, melhor será a aproximação, pelo que

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \triangle x_i f(c_i)$$

$\triangle x = \max_{i=0,1,\ldots,n-1} \triangle x_i$,

Seja f uma f.r.v.r. definida em $[a,b]$ e I um número real. Dizemos que

$$\lim_{\triangle x \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \triangle x_i f(c_i) = I$$

sse

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \quad \triangle x < \delta \Rightarrow \left| \sum_{i=0}^{n-1} \triangle x_i f(c_i) - I \right| < \varepsilon.$$

Seja f uma f.r.v.r. definida em $[a,b]$. **O integral definido de** f desde a até b, representado por $\int_a^b f(x)dx$, é dado por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\triangle x \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \triangle x_i f(c_i)$$

desde que este limite exista, caso contrário dizemos que f não é integrável em $[a,b]$.
a e b são os chamados **extremos de integração**, inferior e superior, respectivamente. A f dá-se o nome de **função integranda**.

Somas inferiores e somas superiores

Seja $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então, existem reais m e M, tais que

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a,b].$$

Seja ainda $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ uma partição arbitrária do intervalo $[a,b]$ e designemos por m_i (respetivamente M_i), o ínfimo [1] (respetivamente o supremo [2]) de f no subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

Chama-se:

- **soma inferior** de f relativamente à partição P a:

$$s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1});$$

- **soma superior** de f relativamente à partição P a:

$$S(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_n(x_n - x_{n-1}).$$

[1] Dizemos o número real a é o ínfimo de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ ($a = \inf X$), se: $\forall x \in X \;\; a \leq x$ e $\forall \epsilon > 0 \; \exists y \in X \; : \; a + \epsilon > y$.

[2] Dizemos o número real b é o supremo de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ ($b = \sup(X)$, se: $\forall x \in X \;\; b \geq x$ e $\forall \epsilon > 0 \; \exists y \in X \; : \; b - \epsilon < y$.

Integral inferior e integral superior

Dadas duas partições P e Q de $[a, b]$, dizemos que $\mathcal{Q}$ é mais fina do que $\mathcal{P}$, ou que $\mathcal{Q}$ refina $\mathcal{P}$, se todo o ponto de $\mathcal{P}$ é ainda um ponto de $\mathcal{Q}$, isto é, se $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$.

Quando se refina uma partição $\mathcal{P}$, a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta. Assim, se designarmos por A o valor exato da área da região, e se a partição $\mathcal{Q}$ for mais fina do que a partição $\mathcal{P}$, tem-se

$$m(b-a) \leq s(f;P) \leq s(f;Q) \leq A \leq S(f;Q) \leq S(f;P) \leq M(b-a).$$

Designemos por $\mathbb{P}$ o conjunto de todas as partições de $[a, b]$.

Chama-se:

- **integral inferior** de f em $[a, b]$, a:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{\mathcal{P}\in\mathbb{P}} s(f;\mathcal{P});$$

- **integral superior** de f em $[a, b]$, a:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_{\mathcal{P}\in\mathbb{P}} S(f;\mathcal{P}).$$

Função integrável em $[a,b]$

Uma função limitada $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se integrável à Riemann quando

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Este valor comum designa-se por **integral definido** de f em $[a,b]$ e denota-se simplesmente por

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Exemplo

Consideremos a função de Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & se \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$ *. Qualquer intervalo* $[t_{i-1}, t_i]$ *contém sempre pontos racionais e pontos irracionais. Assim, tem-se sempre* $m_i = 0$ *e* $M_i = 1$ *e, portanto,*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = c(b-a).$$

Logo, a função de Dirichlet não é uma função integrável.

✍

1. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = x$ e considere a partição $\mathcal{P}_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ do intervalo $[0, 1]$, com n um número natural arbitrário superior ou igual a 2.
   1. Mostre que a soma inferior de f relativamente à partição $\mathcal{P}_n$ é dada por $s(f, \mathcal{P}_n) = \dfrac{n-1}{2n}$.
   2. Mostre que a soma superior de f relativamente à partição $\mathcal{P}_n$ é dada por $S(f, \mathcal{P}_n) = \dfrac{n+1}{2n}$.
   3. Calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} s(f, P_n)$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} S(f, P_n)$ e conclua que f é integrável em $[0, 1]$, indicando o valor do integral $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

2. Seguindo um raciocínio análogo ao do exercício anterior, mostre que a função $f(x) = x$ é integrável num intervalo arbitrário $[a, b]$, com $a < b$, e conclua que

$$\int_a^b x\, dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Seja f uma f.r.v.r. definida e integrável em $[a, b]$. Então

- $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
- se $a \in D_f$ então $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Se f é contínua em $[a, b]$ então f é integrável em $[a, b]$.

Nota: O recíproco deste teorema nem sempre é verdade! Isto significa que podemos ter funções integráveis num dado intervalo que não sejam contínuas nesse intervalo.

Resumindo:

Se f é uma f.r.v.r. contínua e positiva em $[a, b]$ então

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

representa a área da região sob a curva de f e acima do eixo dos xx, limitada pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

Propriedades do integral definido

(I) Se f é uma função constante em $[a,b]$, i.e., $f(x) = C, \forall x \in [a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = C(b-a).$$

Dem.: Com efeito, $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \sum_i f(c_i)\triangle x_i$.

Como f é constante e igual a C em $[a,b]$, então $f(c_i) = C, \forall i$, logo

$$\sum_i f(c_i)\triangle x_i = \sum_i C\triangle x_i = C\sum_i \triangle x_i = C(b-a).$$

Exemplo

$\int_1^5 \pi dx = \pi(5-1) = 4\pi.$

(II) Se f é integrável em $[a,b]$ e se C é uma constante, então Cf também é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$$

Dem.: Ora,

$$\begin{aligned}\int_a^b Cf(x)dx &= \lim_{\triangle x\to 0}\sum_i Cf(c_i)\triangle x_i = \lim_{\triangle x\to 0} C\sum_i f(c_i)\triangle x_i\\ &= C\lim_{\triangle\to 0}\sum_i f(c_i)\triangle x_i = C\int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

(III)

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

(IV) Se $a \leq c \leq b$,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

(V) Se $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

(VI)

Se f e g são funções integráveis em $[a,b]$ e se $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$ então

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Dem.: Se f é integrável, por (II), $-g$ também o é. Por (III) conclui-se que o mesmo é verdade para $(f + (-g)) = (f - g)$.
Finalmente, atendendo a (V), como $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$, resulta

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \int_a^b f(x)dx + \int_a^b (-g(x))\,dx \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx
\end{aligned}$$

(VII) Se f é integrável em $[a,b]$ e se $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$ então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Dem.: De (VI) resulta

$$\underbrace{\int_a^b m dx}_{m(b-a)} \leq \int_a^b f(x)dx \leq \underbrace{\int_a^b M dx}_{M(b-a)}$$

(VIII) Se f é contínua e não negativa em $[a,b]$ e se existe pelo menos um $c \in [a,b]$ tal que $f(c) > 0$ então

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

(IX) Sendo f e g funções contínuas em $[a,b]$ tais que $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a,b]$. Se $f \neq g$, então

$$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx.$$

Teorema do valor intermédio para integrais

Se f é uma f.r.v.r. contínua em $[a, b]$, então existe pelo menos um $c \in]a, b[$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Dem.: Se f é uma função constante em $[a, b]$, este resultado já está provado em (I). Suponhamos então que f não é constante em $[a, b]$. Se m e M forem, respectivamente, o mínimo e o máximo de f em $[a, b]$, então $m < M$ e pelo teorema do valor intermédio, existe pelo menos um $w \in]a, b[$ tal que $m < f(w) < M$. Como além disto, $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$, de (IX) resulta que

$$\underbrace{\int_a^b m dx}_{m(b-a)} < \int_a^b f(x)dx < \underbrace{\int_a^b M dx}_{M(b-a)} \Leftrightarrow m < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx < M.$$

Supondo que m e M são atingidos em u e v, respectivamente, temos

$$f(u) < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx < f(v)$$

e novamente pelo teorema do valor intermédio, existe um $c \in]a, b[$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Teorema fundamental do cálculo

Se f é uma f.r.v.r. contínua em $[a,b]$, então a função $G(x) = \int_a^x f(t)dt$, para $x \in [a,b]$ é uma primitiva de f em $[a,b]$.

Dem.: Temos que mostrar que $G'(x) = f(x)$ em $[a,b]$. Por definição

$$G'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h}.$$

$$\begin{aligned} G(x+h) - G(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt. \end{aligned}$$

Pelo teorema do valor médio para integrais, existe $c \in]x, x+h[$ tal que

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c)(x+h-x) = f(c)h \Rightarrow \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(c), \quad \text{com} \quad x < c < x+h.$$

Como f é contínua, $\lim_{h\to 0^+} f(c) = \lim_{c\to x^+} f(c) = f(x) = \lim_{x\to c^+} f(c) = \lim_{h\to 0^-} f(c)$ pelo que

$$\lim_{h\to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c) = f(x).$$

Fórmula de Barrow

Se f é uma f.r.v.r. contínua em $[a,b]$. Sendo F uma primitiva de f então
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Dem.: Sabemos já que a função $G(x) = \int_a^x f(t)dt$, para $x \in [a,b]$ é uma primitiva de f em $[a,b]$. Sendo F uma outra primitiva de f no mesmo intervalo, sabemos também que

$$\int_a^x f(t)dt - F(x) = C, \quad C \quad \text{é uma constante} \quad , \forall x \in [a,b].$$

Se $x = a$ então $\underbrace{\int_a^a f(t)dt}_{0} - F(a) = C \Leftrightarrow F(a) = -C$, e portanto

$$\int_a^x f(t)dt - F(x) = -F(a), \quad \forall x \in [a,b].$$

Em particular, esta igualdade é satisfeita quando $x = b$, donde

$$\int_a^b f(t)dt - F(b) = -F(a) \Leftrightarrow \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Nota: É usual representar-se $F(b) - F(a)$ por $[F(x)]_a^b$.

Exemplo

1. $\int_0^1 (4x-1)dx = \left[2x^2 - x\right]_0^1 = (2-1) - (0-0) = 1;$
2. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4};$
3. $\int_{-1}^1 |x|\, dx = \int_{-1}^0 |x|\, dx + \int_0^1 |x|\, dx = \int_{-1}^0 (-x)dx + \int_0^1 x dx =$ $\int_0^{-1} x dx + \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{-1} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

Calcule os seguintes integrais definidos:

1. $\int_1^e \cos(\ln(x))\, dx$
2. $\int_{-1}^0 x^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$

No software maxima, a solução do exercício 1. é (no maxima %e é o nº de Nepper))

wxMaxima document 1 / 1

```
(%i3) integrate(cos(log(x)), x, 1, %e);
```

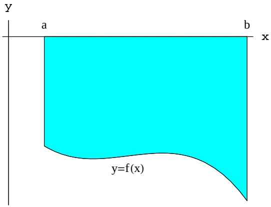
(%o3) $\frac{\%e \sin(1) + \%e \cos(1)}{2} - \frac{1}{2}$

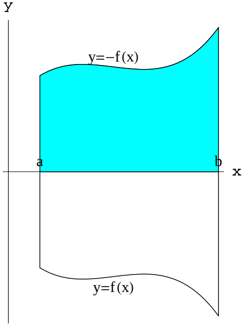
Nota: De acordo com a definição de integral definido, se a função integranda f é contínua e não negativa em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx$ representa a área limitada pelas rectas verticais $x = a$, $x = b$, Pelo eixo dos xx e pela curva $y = f(x)$.

E se f for uma função negativa em $[a, b]$?

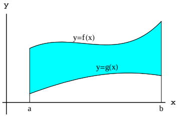
Neste caso, $\int_a^b f(x)dx$ não representa a área pretendida, mas sim o *simétrico* dessa área, i.e.:

$$A = -\int_a^b f(x)dx$$



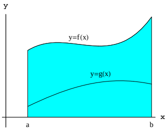


E se pretendermos calcular a área limitada por duas curvas contínuas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$?

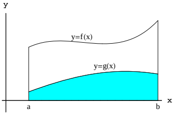


Supondo que f e g são não negativas,

- $\int_a^b f(x)dx$ representa a área limitada por $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e $y = f(x)$;



- $\int_a^b g(x)dx$ representa a área limitada por $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e $y = g(x)$;

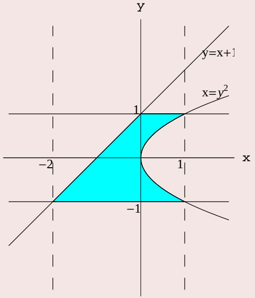


logo, a área pretendida é dada por $A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$.

Exemplo

Calculemos a área limitada pelas curvas de equações

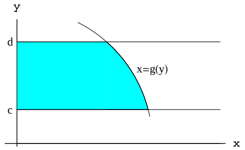
$$x = y^2, x = y - 1, y = -1 \quad e \quad y = 1$$



$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{0} (x + 1 - (-1))\, dx + \int_{0}^{1} \left(1 - \sqrt{x}\right) dx + \int_{0}^{1} \left(-\sqrt{x} - (-1)\right) dx \\ &= \int_{-2}^{0} (x + 2)\, dx + \int_{0}^{1} \left(2 - 2\sqrt{x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{0} + \left[2x - 2x^{\frac{2}{3}}\,\frac{2}{3}\right]_{0}^{1} \\ &= -2 + 4 + 2 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

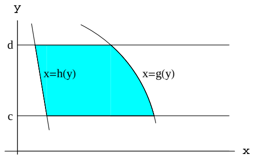
Pode definir-se também o integral definido de $x = g(y)$ de c a d do mesmo modo que foi feito para uma função $y = f(x)$ de a a b.

Se a função $x = g(y)$ for contínua no intervalo $[c, d]$ e se $g(y) \geq 0$ $\forall y \in [c, d]$, então $\int_c^d g(y)dy$ representa a área limitada pelas rectas $y = c$, $y = d$, pelo eixo dos yy e pela curva $x = g(y)$.



Do mesmo modo,

$\int_c^d (g(y) - h(y))\, dy$, $g(y) \geq h(y)$, $\forall y \in [c, d]$, representa a área limitada pelas rectas $y = c$, $y = d$, pelo eixo dos yy e pelas curvas $x = g(y)$ e $x = h(y)$.



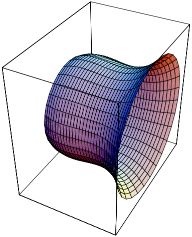
Exemplo

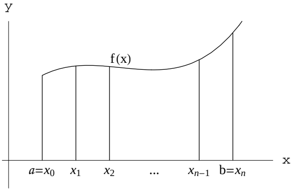
A área pretendida do exemplo anterior pode assim ser representada através de um único integral definido:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{1} \left(y^2-(y-1)\right) dy = \int_{-1}^{1} \left(y^2-y+1\right) dy \\
&= \left[\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}+y\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}.
\end{aligned}
$$

Volumes de sólidos de revolução

Considere-se uma região plana limitada pela curva $y = f(x)$ que se supõe positiva e contínua em $[a, b]$, pelo eixo dos xx e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$.
Considere-se o sólido obtido por revolução dessa região em torno do eixo dos xx que, assim sendo, se chama eixo de revolução.





A uma decomposição do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ corresponde uma decomposição do volume V em n volumes V_k.
Sendo m_k e M_k o mínimo e o máximo de f em $[x_{k-1}, x_k]$, então

$$\pi m_k^2 (x_k - x_{k-1}) \leq V_k \leq \pi M_k^2 (x_k - x_{k-1}), \quad k = 1, \ldots, n,$$

pelo que

$$\pi \underbrace{\sum_{k=1}^{n} m_k^2 \left(x_k - x_{k-1}\right)}_{\text{S. de Riemann de } f^2} \leq \sum_{k=1}^{n} V_k \leq \pi \underbrace{\sum_{k=1}^{n} M_k^2 \left(x_k - x_{k-1}\right)}_{\text{S. de Riemann de } f^2} .$$

Ora f contínua em $[a,b] \Rightarrow f^2$ contínua em $[a,b] \Rightarrow f^2$ integrável em $[a,b]$, logo se fizermos tender para zero a amplitude dos intervalos:

$$\lim_{\triangle x \to 0} \pi \sum_{k=1}^{n} m_k^2 \left(x_k - x_{k-1}\right) = \pi \sum_{k=1}^{n} M_k^2 \left(x_k - x_{k-1}\right) = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$

e portanto

$$\boxed{V = \sum_{k=1}^{n} V_k = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx.}$$

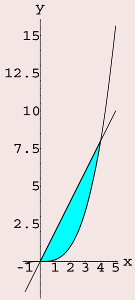
Exemplo

Uma esfera de raio r pode ser considerada como um sólido de revolução gerado por rotação de um semi-círculo ($f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$, $-r \leq x \leq r$) em torno dos xx.
Assim, o seu volume é dado por

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2-x^2\right) dx \\ &= \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3}\right) \\ &= 2\pi \frac{2}{3} r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

Exemplo

Faz-se rodar em torno do eixo dos yy a região do primeiro quadrante limitada pelas curvas $y = \frac{1}{8}x^3 \Leftrightarrow x = 2y^{\frac{1}{3}}$ *e* $y = 2x \Leftrightarrow x = \frac{y}{2}$. *Determinemos o volume do sólido assim obtido.*

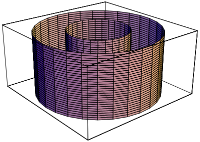


$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^8 \left[\left(2y^{\frac{1}{3}}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 \right] dy = \pi \int_0^8 \left(4y^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{4}y^2 \right) dy \\
&= \pi \left[\frac{4y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - \frac{1}{4}\frac{y^3}{3} \right]_0^8 = \pi \left[\frac{12}{5}y^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{12}y^3 \right]_0^8 \\
&= \pi \left(\frac{12}{5}8^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{12}8^3 \right) = \frac{512}{15}\pi
\end{aligned}
$$

Cascas cilindricas

Considere-se a rotação em torno do eixo dos yy de de um rectângulo limitado pelo eixo dos xx, a recta $y = h$ e as rectas $x = r_1$ e $x = r_2$, com $0 \leq r_1 \leq r_2$ e $h > 0$.
O sólido assim obtido designa-se por casca cilindrica e o seu volume é dado por

$$\begin{aligned} V &= \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h \\ &= \pi h \left(r_2^2 - r_1^2\right) \\ &= 2\pi h \frac{r_1 + r_2}{2} \left(r_2 - r_1\right) \end{aligned}$$



i.e., o volume de uma casca cilíndrica obtém-se multiplicando 2π pelo raio médio, a altura e a espessura.

Seja f uma função contínua e não negativa em $[a,b]$ com $a>0$ e R uma região do plano limitada pelo gráfico de f, pelo eixo dos xx e pelas rectas $x=a$ e $x=b$. Suponhamos que pretendemos determinar o volume do sólido gerado por rotação da região R em torno do eixo dos yy.
Para tal, considere-se uma partição de $[a,b]$ em n subintervalos $[x_{k-1},x_k]$, $k=1,\ldots,n$ e seja $\bar{x}_k$ o ponto médio de cada um desses intevalos: $\bar{x}_k=\frac{x_{k-1}+x_k}{2}$.
O volume V_k da casca cilíndrica obtida por rotação em torno do eixo dos yy do rectângulo de base x_k-x_{k-1} e de altura $f(\bar{x}_k)$ é dado por

$$V_k=2\pi f(\bar{x}_k)\,\bar{x}_k\,(x_k-x_{k-1})\,,\quad k=1,\ldots,n.$$

Somando estes n volumes obtemos o volume total pretendido:

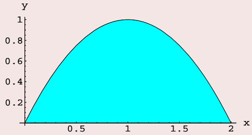
$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}2\pi f(\bar{x}_k)\,\bar{x}_k\,(x_k-x_{k-1})}_{\text{Soma de Riemann de } 2\pi x f(x)}$$

Fazendo a amplitude dos subintervalos tender para zero, obtemos

$$\boxed{V=2\pi\int_a^b xf(x)dx.}$$

Exemplo

Considere-se a região limitada pelo gráfico da função $y = 2x - x^2$ e pelo eixo dos xx, a rodar em torno do eixo dos yy. Calculemos o volume do sólido assim obtido.



$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^2 x\left(2x - x^2\right) dx = 2\pi \int_0^2 \left(2x^2 - x^3\right) dx \\
&= 2\pi \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 \\
&= \frac{8\pi}{3}
\end{aligned}
$$

Comprimento do arco de uma curva plana

Seja f uma função derivável com derivada contínua em $[a, b]$. O comprimento do arco da curva $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$ é dado por

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

Exemplo

Calculemos o comprimento do arco da curva $y = \sqrt{4 - x^2}$ *entre* $x = 0$ *e* $x = 2$.
Sendo $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, *então* $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ *e portanto*

$$s = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}}dx = \int_0^2 \sqrt{\frac{4}{4 - x^2}}dx.$$

Efectuando a substituição $x = 2\sin t$ *vem*

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{4}{4 - 4\sin^2 t}}2\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{2|\cos t|}2\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos t}2\cos t dt = 2\frac{\pi}{2} = \pi.$$