Material de apoio às aulas Teóricas e Teórico-práticas

1. Alguns dos exercícios que se seguem estão assinalados com as marcas $\boxed{\text{A}}$ ou $\boxed{\text{C}}$:

   $\boxed{\text{A}}$ - Exercícios a resolver nas aulas Teórico-práticas;

   $\boxed{\text{C}}$ - Exercícios "mínimos" que os alunos deverão resolver fora das aulas.

2. CONSOLIDAÇÃO DE CONTEÚDOS/APRENDIZAGENS: Recomendamos um conjunto de vídeos do Professor Altino Santos na *Playlist* MATEMÁTICA I do seu canal do YouTube https://www.youtube.com/altinosantos.

Os docentes,

Altino Santos (afolgado@utad.pt)

Anabela Borges (aborges@utad.pt)

Isabel Nicolau (inicolau@utad.pt)

José Luís Cardoso (jluis@utad.pt)

Maria Luísa Morgado (luisam@utad.pt) **Docente Responsável**

I. FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

1. Decomponha cada um dos seguintes polinómios num produto de factores irredutíveis:

   (a) $p_1(x) = x^2 - \frac{1}{4}$;

   (b) $\boxed{A}$ $p_2(x) = 6x^2 - 5x + 1$;

   (c) $\boxed{C}$ $p_3(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, sabendo que uma das raízes é -1;

   (d) $p_4(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2$, sabendo que $\frac{1}{2}$ anula o polinómio;

   (e) $p_5(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$, sabendo que admite a raiz -2;

   (f) $\boxed{C}$ $p_6(x) = 2x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 4x + 16$, sabendo que admite raízes 1 e -1;

   (g) $\boxed{A}$ $p_7(x) = 3x^3 + x^2 - 3x - 1$, sabendo que é divisível por $x^2 - 1$;

   (h) $p_8(x) = x^4 + 1$. Note que: $(x^2+1)^2 = x^4 + 1 + 2x^2$.

2. $\boxed{C}$ Efetuando a divisão inteira de polinómios, determine $A(x)$ e $B(x)$, tais que

$$\frac{x^3 + 2x^2 - x - 1}{x^2 - x - 2} = A(x) + \frac{B(x)}{x^2 - x - 2}, \quad \text{onde o grau de } B(x) \text{ é menor do que 2.}$$

3. Determine o domínio e esboce o gráfico de cada uma das funções seguintes:

   (a) $f(x) = 1 - 2x$; (b) $\boxed{C}$ $f(x) = x^2 + 2x - 1$; (c) $f(x) = \sqrt{x-1}$;

   (d) $f(x) = |x+1|$; (e) $\boxed{A}$ $f(x) = x - |x|$; (f) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$;

   (g) $\boxed{C}$ $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq -1 \\ 3x+2 & \text{se } |x| < 1 \\ 7-2x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$; (h) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \leq -1 \\ x^2 & \text{se } x > -1 \end{cases}$; (i) $\boxed{A}$ $f(x) = \dfrac{x^2+5x+6}{x+2}$.

4. Determine o domínio das seguintes funções:

   (a) $\boxed{A}$ $f(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x}$; (b) $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$; (c) $f(x) = \sqrt{\ln|x|} + e^x$;

   (d) $\boxed{A}$ $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(\pi x)}$; (e) $\boxed{C}$ $f(x) = \tan(x-1)$; (f) $\boxed{C}$ $f(x) = \arccos(x^2-1)$;

   (g) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1} + \ln(4 - |2x+1|)$; (h) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-4}$; (i) $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$;

   (j) $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2} + \operatorname{arcsen}(|x-2|)$; (k) $\boxed{A}$ $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \ln(x+2)$; (l) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x+1)}$;

   (m) $\boxed{A}$ $f(x) = \operatorname{arcsen}(x^2-3)$; (n) $\boxed{C}$ $f(x) = \sqrt{|x+1|-4}$; (o) $f(x) = \operatorname{cotan}(2x)$;

   (p) $\boxed{C}$ $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x^2-2|-3}}{x^2-5}$; (q) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x^2-x-1}{-x^2+4}\right)$; (r) $\boxed{C}$ $f(x) = \ln(\ln x)$;

   (s) $f(x) = \sqrt{1-\cos^2 x}$; (t) $f(x) = \dfrac{x^2-x}{\cos(2\pi x)}$; (u) $f(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$.

5. Analise a injetividade das seguintes funções:

   (a) $\boxed{A}$ $f(x) = x^2 - 3$; (b) $\boxed{A}$ $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$; (c) $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$;

   (d) $\boxed{C}$ $f(x) = 3^{\log_3(x) - \log_3(x-1)}$; (e) $f(x) = |\tan x| - 2$; (f) $f(x) = \operatorname{arcsen}(x^2+2x)$;

   (g) $\boxed{C}$ $f(x) = \left(x^3 - x\right)^{\frac{1}{3}}$; (h) $f(x) = |x| - x$; (i) $\boxed{A}$ $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$.

6. Analise a paridade das seguintes funções:
   (a) $f(x) = x^2 + 2x^6$; (b) $f(x) = 5x^3 + 3x$; (c) $\boxed{\text{A}}$ $f(x) = 2^x - 2^{-x}$;
   (d) $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = \operatorname{sen}^4 x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$; (e) $f(x) = |\arccos x|$; (f) $\boxed{\text{A}}$ $f(x) = |\operatorname{arcsen} x|$.

7. $\boxed{\text{C}}$ Considere a função $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x < 2. \end{cases}$

   Represente graficamente uma extensão de f a $\mathbb{R}$ de modo a obter uma função:
   (a) par; (b) ímpar; (c) de período 2.

8. Mostre que as funções seguintes são periódicas:
   (a) $\boxed{\text{A}}$ $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$; (b) $\boxed{\text{C}}$ $g(x) = \tan(4x + 1)$; (c) $\boxed{\text{C}}$ $h(x) = \pi + \cos(-5x)$.

9. Verifique se as seguintes funções são ou não limitadas:
   (a) $\boxed{\text{A}}$ $f(x) = 1 - 3 \operatorname{sen} x$; (b) $\boxed{\text{A}}$ $g(x) = \frac{1}{\cos x - 1}$;
   (c) $h(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$; (d) $\boxed{\text{A}}$ $i(x) = \pi - \arccos(2x - 1)$.

10. Defina as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$ quando
    (a) $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = 3x + 5$; (b) $f(x) = |x|$ e $g(x) = -5$;
    (c) $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \sqrt{x - 1}$; (d) $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$;
    (e) $f(x) = (x - 1)^4$ e $g(x) = \sqrt{x}$; (f) $\boxed{\text{A}}$ $f(x) = \ln(x + 1)$ e $g(x) = e^x + 4$.

11. $\boxed{\text{C}}$ Considere as funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 4 \log_3 x$.
    (a) Determine os domínios e contradomínios das funções f e g;
    (b) Caracterize a função $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$.

12. Calcule o valor das seguintes expressões:
    (a) $\boxed{\text{C}}$ $\operatorname{sen}\left(\dfrac{17\pi}{6}\right) + 2\cos\left(\dfrac{40\pi}{3}\right) - \tan\left(\dfrac{29\pi}{4}\right)$; (b) $\cos\left(\dfrac{85\pi}{4}\right) - 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{163\pi}{4}\right) + \operatorname{cotan}\left(\dfrac{77\pi}{6}\right)$.

13. Simplifique as seguintes expressões:
    (a) $\boxed{\text{A}}$ $\log_2 64 - \log_3 1 - e^{\ln 5}$; (b) $e^{\frac{\ln x}{2}}, x > 0$; (c) $\boxed{\text{C}}$ $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{8}\right)^{2-x}$;
    (d) $\ln\left(e^{3-x^2}\right)^x + \ln\left(e^{x^3}\right)$; (e) $\boxed{\text{C}}$ $7^{5\log_7 x - 2\log_7 y}$; (f) $\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{4}{9}\right)^{x-\sqrt{5}}}{x^2 - 5}$;
    (g) $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\cos(2x)$; (h) $\dfrac{\operatorname{sen}^4 x - 1}{(1 + \operatorname{sen} x)^2}$; (i) $\dfrac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x + 2\cos x}$.

14. Resolva as seguintes equações trigonométricas:
    (a) $2 \operatorname{sen} x = -\sqrt{3}$; (b) $\operatorname{sen}(5x) - \cos(3x) = 0$; (c) $\boxed{\text{A}}$ $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos x$;
    (d) $-\operatorname{sen} x = 4\cos^2 x$; (e) $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{cotan} x$; (f) $\boxed{\text{C}}$ $4\cos^2 x - 12\cos x + 5 = 0$;
    (g) $\operatorname{sen} x = 4 \tan x$; (h) $\boxed{\text{C}}$ $\tan x - \operatorname{sen}(2x) = 0$; (i) $\boxed{\text{A}}$ $\cos x - \sqrt{3} \operatorname{sen} x = 1$.

15. Resolva as seguintes inequações:
    (a) $\boxed{\text{C}}$ $|1 - x^2| \geq 1$;

(b) $\boxed{\text{A}}$ $\arccos\left(|x^2 - \frac{1}{2}|\right) \leq \arcsin\left(\cos(-\frac{23\pi}{6})\right)$. Sugestão: Escreva o 2º membro na forma $\arccos a$.

16. Determine o conjunto solução de cada uma das seguintes condições:

(a) $\dfrac{1}{2}\log_2(x-8) + \log_4(x-2) = 0$;

(b) $\boxed{\text{C}}$ $\log_{\frac{1}{3}}(1-x) - 2 \leq 0$;

(c) $2^{1-x} \geq \frac{1}{\sqrt{8}}$;

(d) $\boxed{\text{A}}$ $\log_3(x^2+2) + \log_{\frac{1}{3}}(3x) \leq 0$.

17. $\boxed{\text{C}}$ Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$, para os quais se tem, $\log_2 x - 6\log_x 2 < 1$.

18. Resolva, em $[0, 2\pi[$ as seguintes inequações:

(a) $\operatorname{sen} x \geq 1$;

(b) $|\operatorname{sen} x| \leq 0$;

(c) $\boxed{\text{C}}$ $|\operatorname{sen} x| \leq |\cos x|$;

(d) $\cos x \geq -\frac{1}{2}$;

(e) $x|\operatorname{sen} x| \leq 0$;

(f) $\cos x > 0 \wedge \cos x > \operatorname{sen} x$;

(g) $\boxed{\text{C}}$ $\operatorname{sen} x \cos x(1 - 2\operatorname{sen} x) > 0$;

(h) $|\sqrt{2}\cos x| < 1$;

(i) $\tan x \operatorname{cotan} x \geq 0 \wedge \operatorname{sen} x > 0$.

19. Simplifique cada uma das seguintes expressões:

(a) $\boxed{\text{C}}$ $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\left(-\frac{3}{10}\right)\right)$;

(b) $\operatorname{sen}\left(\arccos\left(-\frac{2}{5}\right)\right)$;

(c) $\boxed{\text{A}}$ $\tan\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$;

(d) $\boxed{\text{A}}$ $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{9\pi}{14}\right)$;

(e) $\tan\Big(\arccos(-\frac{1}{2})\Big) + \tan\Big(\operatorname{arcsen}(-\frac{1}{4})\Big)$;

(f) $\boxed{\text{C}}$ $\operatorname{sen}\Big(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arcsen}\frac{5}{13}\Big)$;

(g) $\arccos\Big(\sin(\frac{31\pi}{6})\Big) + \operatorname{sen}\Big(\arctan 2\Big)$;

(h) $\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{3}} + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$;

(i) $\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{\pi}{4} - \arctan\sqrt{3}\right)$;

(j) $\boxed{\text{A}}$ $\tan\left(\arctan\frac{1}{3} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;

(k) $\boxed{\text{A}}$ $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \arccos\left(\frac{3}{5}\right)\right)$;

(l) $\boxed{\text{C}}$ $\cos\Big(\operatorname{arcsen}(-\frac{1}{5}) + 2\arccos\frac{2}{7}\Big)$.

20. Determine o domínio, o contradomínio e os zeros das seguintes funções (indicando a inversa onde for possível):

(a) $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = \pi - \arccos(2x+1)$;

(b) $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = \frac{\pi}{3} + \operatorname{arcsen}\left(|2x-1|\right)$.

21. Considere as funções definidas pelas seguintes expressões analíticas. Supondo que o contradomínio coincide com o conjunto de chegada, indique as funções que têm inversa e nesses casos determine-a.

(a) $f(x) = 7x^3 - 3$;

(b) $\boxed{\text{C}}$ $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}\setminus\,]-1,0[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq -1 \\ 1-x & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \end{array}$;

(c) $f(x) = |x^3 - x|$;

(d) $\boxed{\text{A}}$ $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}\setminus[-1,0[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < -1 \\ 1-x & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \end{array}$.

22. Caracterize a função inversa de cada uma das seguintes funções:

(a) $\boxed{\text{A}}$ $f_1(x) = \frac{\pi}{3} - \operatorname{arcsen}(x+2)$;

(b) $\boxed{\text{A}}$ $f_2(x) = 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$;

(c) $\boxed{\text{C}}$ $f_3(x) = \log_2(x+2)$;

(d) $\boxed{\text{C}}$ $f_4(x) = 1 + \sqrt{x+3}$;

(e) $f_5(x) = \log_x 3$;

(f) $f_6(x) = \arccos\left(\frac{2x}{x+1}\right)$.

23. Escreva como expressão algébrica em x, para $x > 0$.

(a) $\boxed{\text{A}}$ $\cos(\operatorname{arcsen} x)$;

(b) $\boxed{\text{C}}$ $\operatorname{sen}(\arctan x)$;

(c) $\boxed{\text{C}}$ $\operatorname{sen}\Big(\operatorname{arccotan}\left(\frac{1}{x}\right)\Big)$;

(d) $\cos(2\arctan x)$.

24. $\boxed{\text{A}}$ Considere a função real de variável real f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2+x & \text{se} \quad x < -1 \\ -x & \text{se} \quad -1 \leq x < 1 \\ (x-1)^2 & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \\ \cos(\pi x) & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases}.$$

Esboce o gráfico de f e use-o para determinar os valores de a para os quais $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.

25. Esboce o gráfico de uma função f que satisfaça as seguintes condições.

(a) $\boxed{\text{C}}$ $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 4,\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 2,\ \lim\limits_{x\to -2} f(x) = 2,\ f(3) = 3$ e $f(-2) = 1$;

(b) $\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty,\ f(0) = 1$ e $f(2) = 1$.

26. Usando o teorema do limite das funções enquadradas, calcule os os seguintes limites (caso existam):

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x \,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$;

(b) $\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{x\to 0} x^4 \,\text{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$;

(c) $\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x|x|}{\sqrt{x^6+x^2+1}}$;

(d) $\boxed{\text{C}}$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\text{sen}\,\frac{\pi}{x}}$.

27. Recorrendo aos limites notáveis

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

calcule:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(2x)}{x}$;

(b) $\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin^2(3x-3)}{(x^3-2x+1)(x-1)}$;

(c) $\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(3x)}{\tan(2x)}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3-3\cos x}{2x^2}$;

(e) $\boxed{\text{C}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(2x)}{e^x - e^{3x}}$;

(f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{\ln(2-x)}$;

(g) $\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^{x+1}-e^3}{\ln(2x-3)}$;

(h) $\boxed{\text{C}}$ $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\ln(x-1)}{x^2+x-6}$;

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^2\,\frac{x}{3}}{x^2}$;

(j) $\boxed{\text{C}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(2x)+\text{sen}\,x}{\text{sen}(2x)-\text{sen}\,x}$;

(k) $\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$;

(l) $\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\frac{\pi}{2} - \text{arcsen}\ x}{x-1}$.

28. Determine o valor dos seguintes limites:

(a) $\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,\text{sen}(\pi x)}{\ln(x^2-x+1)}$;

(b) $\boxed{\text{C}}$ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin^2(3x-6)\,(e^{x+1}-e^3)}{(x^4-2x^3-8x+16)\,\ln(2x-3)}$.

29. Calcule:

(a) $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4}$;

(b) $\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x}$;

(c) $\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\arctan(3x)}$;

(d) $\boxed{\text{C}}$ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-4x^3+3}{x^3-1}$;

(e) $\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\text{arcsen}(x-2)}{2-x}$;

(f) $\boxed{\text{C}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(2x)}{\text{arcsen}(3x)}$;

(g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \text{sen}x}{1-\text{sen}(2x)}$;

(h) $\boxed{\text{C}}$ $\lim\limits_{x\to \pi} \big((x-\pi)\,\text{cotan}(2x)\big)$;

(i) $\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

30. *Tendo em conta que* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$, *para qualquer* $\alpha \in \mathbb{R}$,

calcule:

(a) $\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$;

(c) $\boxed{\text{C}}$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$.

31. Determine, em cada caso, os valores de α e β de modo que as funções f e g sejam contínuas em $\mathbb{R}$.

(a) $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{se} \quad x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \alpha \operatorname{sen} x + \beta & \text{se} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 2\cos x & \text{se} \quad \frac{\pi}{2} \leq x \end{cases}$; (b) $g(x) = \begin{cases} \operatorname{arcsen} x\,, & -1 < x < 1 \\ \alpha|2x-1| + \beta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$.

32. Averigúe se existem constantes reais, k_1 e k_2, de modo que as funções f e g sejam contínuas nos pontos $x = 2$ e $x = 0$, respectivamente:

$$f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{se} \quad x < 2 \\ k_1 & \text{se} \quad x = 2 \\ -2x+7 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \boxed{\text{A}} \; g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(\pi x)}{k_2 x} & \text{se} \quad x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se} \quad x = 0 \\ \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x > 0 \end{cases} .$$

33. $\boxed{\text{C}}$ Estude a continuidade das funções f e g no ponto $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ \dfrac{1-\cos(3x)}{x} & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen} x}{|x|} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ -1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases} .$$

34. Determine em cada caso, o valor de k (caso exista) de modo a que as funções abaixo sejam contínuas nos respectivos domínios:

(a) $f(x) = \begin{cases} k, & x \leq 0 \\ \dfrac{x^2 - x}{\operatorname{sen}(\pi x)}, & 0 < x < 1 \end{cases}$; (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x^2 - 3x}{2x}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$;

(c) $f(x) = \begin{cases} \arctan k, & x = \frac{\pi}{2} \\ \dfrac{e^{\tan x}}{e^{\tan x} + 1}, & x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\end{cases}$; (d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(\pi x)}{kx}, & x < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \\ \arctan\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0 \end{cases}$.

35. Considere as funções f e g definidas por:

$$\boxed{\text{A}} \; f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} x + x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} & \text{se} \quad x > 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + 2}{\mathrm{e}^x} & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x-2}\right) \ln\left(\cos\left(x-2\right)\right) & \text{se} \quad 1 < x < 2 \\ 1 & \text{se} \quad x = 2 \\ \dfrac{\tan^2(x-2)}{x-2} & \text{se} \quad 3 > x > 2 \end{cases} .$$

Indique o tipo de descontinuidade de f no ponto $x = 0$ e de g no ponto $x = 2$.

36. Mostre que a função f definida por $f(x) = x^{10} + 3x^8 + 2x - 7$ admite pelo menos um zero no intervalo $[0, 2]$.

37. $\boxed{\text{C}}$ Verifique que a equação $x^5 + 3x^4 - x - 3 = 0$ tem uma raíz no intervalo $[0, 2]$.

38. Verifique que as seguintes equações têm solução nos intervalos indicados.
(a) $x = -\ln x,\ x \in \,]0, 1]$; (b) $\cos x = x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; (c) $\boxed{\text{C}}$ $2 + x = e^x,\ x \in [1, 2]$.

39. $\boxed{\text{A}}$ Mostre que os gráficos das funções $f(x) = x^2 \cos x$ e $g(x) = 2(\sqrt{x} - 1)$ se intersectam em pelo menos um ponto.

40. $\boxed{\text{C}}$ Mostre que a equação $x^3 - 9x^2 + 7 = 0$ tem três raízes reais, localizadas nos intervalos $]-1, 0[$, $]0, 1[$ e $]6, 9[$.

41. $\boxed{\text{C}}$ Sendo f uma f.r.v.r. definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^{x-1}, & x < 1 \\ \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{3}\right), & x \geq 1 \end{cases},$$

mostre que $\exists c \in]0,2[\colon f(c) = 0$.

42. $\boxed{\text{A}}$ Seja $f(x) = \tan x$. Verifique que $f\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$, $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0$ e $f(x) \neq 0$, para todo o $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \cap D_f$. Isto contradiz o teorema de Bolzano? Justifique.

43. $\boxed{\text{A}}$ Em qual das metades do intervalo $[1,2]$, a equação $2^x + \log_4 x^2 = \sqrt{8}$ tem uma solução? Justifique convenientemente.

44. $\boxed{\text{C}}$ Indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição: "A função f de expressão $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 - \cos x} + \ln(x+1)$ tem um máximo e mínimo absolutos em $[0,1]$".

II. CÁLCULO DIFERENCIAL

45. $\boxed{\text{C}}$ Suponha que $S(t)$, $t \geq 0$, representa a distância percorrida (em metros) por um determinado objeto em função do tempo t (em segundos) e considere $t_1 > t_0$.

(a) O que representa o quociente $\dfrac{S(t_1) - S(t_0)}{t_1 - t_0}$?

(b) Qual o significado físico do limite $\displaystyle\lim_{t \to t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$?

(c) Suponha que $S(t) = t + t^2$, $0 \leq t \leq 3$. Calcule a velocidade média do objeto e a velocidade instantânea para $t = 1$.

46. Usando a definição de derivada de uma função num ponto, determine $f'(a)$ nos casos que se seguem:

(a) $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = x^3$, $a = 1$;

(b) $\boxed{\text{A}}$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $a = x_0$ ($x_0 \in \mathbb{R}$);

(c) $\boxed{\text{A}}$ $f(x) = \mathrm{e}^{3x+1}$, $a = -\frac{1}{3}$;

(d) $f(x) = \ln(2x+1)$, $a = 0$;

(e) $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = x\cos x$, $a = \frac{\pi}{2}$;

(f) $f(x) = \sin x$, $a = x_0$ ($x_0 \in \mathbb{R}$);

(g) $f(x) = \sqrt{x-4}$, $a = 6$;

(h) $\boxed{\text{A}}$ $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $a = 2$;

(i) $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = \pi - \arccos(x+1)$, $a = -1$;

(j) $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = \arctan(2x)$, $a = 0$.

47. Calcule a derivada das seguintes funções:

(a) $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = (4x^6 - 3x)^2$;

(b) $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = \dfrac{2^x}{x}$;

(c) $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = \sqrt{x^4 + 2x}$;

(d) $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = x|x|$;

(e) $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = x^2\cos(3x)$;

(f) $\boxed{\text{A}}$ $f(x) = \operatorname{sen}^5 x$;

(g) $\boxed{\text{A}}$ $f(x) = x\arctan x$;

(h) $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = \operatorname{sen} x^5$;

(i) $f(x) = \ln\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)$;

(j) $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$;

(k) $\boxed{\text{A}}$ $f(x) = \operatorname{arcsen}(1 - e^x)$;

(l) $f(x) = \operatorname{cotan}(\ln x)$;

(m) $f(x) = \ln^3(x^2 - 6x)$;

(n) $f(x) = \dfrac{6x-3}{x^2}$;

(o) $f(x) = \sqrt[4]{x-3}$;

(p) $f(x) = \tan(e^x)$;

(q) $\boxed{\text{A}}$ $f(x) = \log_3(x+1)$;

(r) $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = x\sec x^2$;

(s) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \leq 2 \\ 2x + 5, & x > 1 \end{cases}$;

(t) $f(x) = x^x$.

48. Determine $(f \circ g)'(x)$ nos casos que se seguem: (Num intervalo conveniente onde a função composta está definida.)

 Altino Santos, Anabela Borges, Isabel Nicolau, J. Luís Cardoso, M. Luísa Morgado

(a) A $f(x) = e^x, \quad g(x) = -x^2$;

(b) C $f(x) = \operatorname{arcsen} x, \quad g(x) = x^2 + 2x$;

(c) $f(x) = \ln x, \quad g(x) = \cos x$;

(d) $f(x) = e^x, \quad g(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

49. Sejam $f,\ g,\ h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ as funções definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases} ; \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases} ; \quad h(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases} .$$

Mostre que:

(a) f é contínua, mas não é derivável em 0 ;

(b) A g é derivável em 0, mas g' não é contínua em 0 ;

(c) h tem derivada contínua em 0 .

50. C Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função $y = e^x + \ln(x+1)$ no ponto de abcissa 0.

51. Determine equações da reta tangente e da reta normal ao gráfico das funções que se seguem no ponto de abcissa $x = 1$:

(a) $f(x) = x^2 - 1$;

(b) $f(x) = \operatorname{sen}((x-1)\pi)$;

(c) $f(x) = x\cos(\pi x)$;

(d) $f(x) = 4^x$;

(e) A $f(x) = e^{x^3} - 2$;

(f) C $f(x) = \log_2 x$.

52. Dadas as funções f e g definidas por $f(x) = 3 + 5\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ e $g(x) = \pi - \arctan(2x-1)$, determine:

(a) Uma equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1;

(b) A derivada de $f \circ g$ no ponto de abcissa 1.

53. Considere as seguintes funções reais de variável real:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{se} \quad x \leq 2 \\ 2\,x + 1 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x} & \text{se} \quad x < 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{se} \quad 0 \leq x < \dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \geq \dfrac{\pi}{4} \end{cases} .$$

(a) Calcule, caso existam, as derivadas laterais das funções f e g nos pontos de ramificação.

(b) Defina a função derivada de f e de g.

54. Determine a expressão da derivada de ordem n das seguintes funções:

(a) $f_1(x) = \ln(1+x), \quad x > -1$;

(b) $g_1(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x \neq 0$;

(c) C $f_2(x) = \operatorname{sen}(2x)$;

(d) $g_2(x) = 2^x$.

55. A Suponha que f é uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$. Sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = f\left(e^{\operatorname{sen} x}\right)$, mostre que $g''(0) - g'(0) = f''(1)$.

56. Considere a função real de variável real f definida por $f(x) = \left(1 + \dfrac{x}{2k}\right)\operatorname{sen}(kx)$, onde k é uma constante não nula.

(a) Mostre que $f''(x) + k^2 f(x) = \cos(kx)$;

(b) Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$.

57. Usando o teorema da derivada da função inversa, mostre que:

(a) C $(\arccos\, x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad x \in\,]-1, 1[$;

(b) A $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

(c) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}\,, \quad x \in \mathbb{R}^+$.

58. Usando o teorema da derivada da função inversa (num intervalo conveniente), calcule:

Altino Santos, Anabela Borges, Isabel Nicolau, J. Luís Cardoso, M. Luísa Morgado

(a) $\boxed{\text{C}}$ $\left(\operatorname{arcsen} x^2\right)'$; (b) $\boxed{\text{C}}$ $\left(\sqrt{x-2}\right)'$; (c) $\left(\arctan x^3\right)'$.

59. $\boxed{\text{A}}$ Considere a função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x} & \text{se} \quad x<0 \\ \operatorname{sen} x & \text{se} \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x+1-\frac{\pi}{4}\right) & \text{se} \quad x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$. Defina a função derivada de f.

60. ***Regra de L'Hôpital***: *Sejam f e g funções diferenciáveis em todos os pontos de um intervalo $I =]a,b[$, exceto possivelmente no ponto $c \in I$. Se $g'(x) \neq 0$ para $x \neq c$ e se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ é uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, então existindo $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ também existe $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ e tem-se*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Usando esta regra calcule:

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$;

(b) $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{4x}-1}{3x}$;

(c) $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln(1+5x)}$;

(d) $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^4}$;

(e) $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{x\to 0^+} x^x$;

(f) $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$;

(g) $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{\operatorname{sen} x}$;

(h) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$;

(i) $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right)$;

(j) $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{x\to 0} (1+3\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{6x}}$;

(k) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\ln\left(\frac{\pi}{2}-x+1\right)}$;

(l) $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\ln(1+x)\right)$;

(m) $\lim_{x\to 1} \left(\tan \frac{\pi x}{4}\right)^{\tan \frac{\pi x}{2}}$;

(n) $\lim_{x\to 0} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1-\cos x}$;

(o) $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\tan x}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$;

(p) $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x-1}}$.

61. Calcule os limites que se seguem:

(a) $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{x\to 0} \operatorname{arcsen} x \, \operatorname{cotan} x$;

(b) $\lim_{x\to 0} (1+\operatorname{sen} x)^{\sec\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$;

(c) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

(d) $\lim_{x\to +\infty} [e^x \ln(1+3e^{-x})]$;

(e) $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{x\to +\infty} x^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}$;

(f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sen} x} - e^{\tan x}}{\operatorname{sen}^3 x}$;

(g) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{1-e^x}}$;

(h) $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan(2x)}$;

(i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^{\arctan x} - b^{\arctan x}}{x}$ $\quad (a>0\,,\ b>0)$;

(j) $\lim_{x\to a} \left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}$ $\quad (a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$.

62. Mostre que o teorema de Rolle se pode aplicar a cada uma das seguintes funções nos intervalos indicados:

(a) $f(x) = 4x^2 - 4x + 5,\ [-1,2]$;

(b) $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = e^{x^2-x} - x^2 + x,\ \ [-1,2]$;

(c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x,\ \ [0, 3+\sqrt{5}]$;

(d) $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x,\ \ [0, 2\pi]$.

63. $\boxed{\text{A}}$ Considere a função f definida por $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$.

(a) Mostre que, no intervalo [-1,2], a função f satisfaz as condições do teorema de Rolle;

(b) Determine $c \in]-1,2[$ tal que $f'(c) = 0$.

64. A função definida por $f(x) = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ anula-se nas extremidades do intervalo $[-1, 1]$, no entanto a sua derivada não se anula em ponto algum do intervalo $]-1, 1[$. Confirme esta afirmação e explique porque não se pode aplicar aqui o teorema de Rolle.

65. Considere a função f definida por $f(x) = \dfrac{\pi \tan x}{2\sqrt{3}} + kx$, $k \in \mathbb{R}$. Determine k de modo que o teorema de Rolle seja aplicável à função no intervalo $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right]$.

66. Verifique que o teorema de Lagrange é aplicável às seguintes funções nos intervalos dados e determine, para cada caso, o *valor médio* c a que se refere o teorema.

(a) $\boxed{\text{A}}$ $f(x) = \ln(1+x)$, em $[0,\, \mathrm{e}-1]$; (b) $\boxed{\text{C}}$ $g(x) = \sqrt{x}$, em $[25,\, 36]$; (c) $h(x) = \dfrac{1}{x-7}$, em $[7.1, 7.2]$.

67. $\boxed{\text{A}}$ Considere a função $f(x) = 2^{1-x}$. Sendo $a = 1$ e $b = 2$ as abcissas dos extremos de uma corda do gráfico da função f, determine as coordenadas do ponto do gráfico onde a tangente é paralela a essa corda.

68. Prove, utilizando o Teorema de Lagrange, que:

(a) $\boxed{\text{A}}$ $\mathrm{e}^a \geq a + 1$, $a \geq 0$; (b) $\left|\text{sen } a - \text{sen } b\right| \leq \left|a - b\right|$, $a, b \in \mathbb{R}$;

69. Justifique que as funções que se seguem têm uma e uma só raíz nos intervalos indicados:

(a) $\boxed{\text{A}}$ $2x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 10 = 0$, $[-1, 3]$; (b) $\boxed{\text{C}}$ $x \tan x - 1 = 0$, $[\frac{1}{2}, 1]$.

70. $\boxed{\text{C}}$ Em cada caso determine, caso exista, o valor de k por forma a que as funções sejam contínuas nos pontos indicados:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\text{sen}\,(\ln x)} & \text{se} \quad 1 < x < 2 \\ k & \text{se} \quad x = 1 \\ \left(\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)^{\tan(x-1)} & \text{se} \quad 0 < x < 1 \end{cases}, \quad \text{em } x = 1;$$

$$g(x) = \begin{cases} (1 - \text{sen}\, x)^{\text{cotan}\, x} & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ k & \text{se} \quad x = 0 \\ \dfrac{x \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 + 2} + \dfrac{1}{e} & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}, \quad \text{em } x = 0.$$

71. Considere as seguintes funções reais de variável real definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} (\text{cotan}\, x)^{\frac{1}{\ln(\text{sen}\, x)}} & \text{se} \quad x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right] \\ e^{-1} & \text{se} \quad x = 0 \\ \dfrac{2}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & \text{se} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right[\end{cases}; \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 \text{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ (2^x + x)^{\frac{1}{x}} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases};$$

$$h(x) = \begin{cases} (\text{arcsen}\, x)^x & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{arcsen}\, x & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \end{cases}; \qquad i(x) = \begin{cases} \text{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right) e^{\frac{1}{x-1}} & \text{se} \quad x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad x = 1 \\ \left[x - \tan(x-1)\right]^{\frac{1}{(x-1)^2}} & \text{se} \quad 1 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases};$$

$$j(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2 \,\text{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right)}{\text{sen}\,(x-1)} & \text{se} \quad x < 1 \\ 0 & \text{se} \quad x = 1 \\ (-1 + x)^{\text{sen}(\ln x)} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}; \qquad k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\text{sen}\, x} - \dfrac{1}{\pi - x} & \text{se} \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[\\ 0 & \text{se} \quad x = \pi \\ \left(\dfrac{1}{1 + \cos x}\right)^{\text{sen}\, x} & \text{se} \quad x \in \left]\pi, 2\pi\right] \end{cases}.$$

Indique, justificando convenientemente, o tipo de descontinuidade das funções consideradas, no ponto de abcissa 0 para as funções f, g e h, no de abcissa 1 para as funções i e j e no ponto de abcissa π para a função k.

72. Determine todas as assintotas das funções:

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}$; (b) $\boxed{\text{C}}$ $g(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} + 2x + 1$; (c) $h(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^6+x}}{x}$.

73. Faça um estudo detalhado de cada uma das seguintes funções, indicando o seu domínio, zeros, intervalos de monotonia, extremos, pontos de inflexão e assintotas. De seguida esboce o respetivo gráfico.

(a) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$; (b) $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = x\,e^x$; (c) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$;

(d) $f(x) = \left|x^2 - 3x\right|$; (e) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^2}$; (f) $\boxed{\text{A}}$ $f(x) = \ln\left(4 - x^2\right)$;

(g) $f(x) = x\left(\ln x\right)^2$; (h) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$; (i) $f(x) = e^{-x^2}$;

(j) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{(x-1)^2}$; (k) $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$; (l) $f(x) = 1 + \operatorname{arcsen}(3x)$.

74. A variação da temperatura (em graus Fahrenheit) de um dado alimento num frigorífico pode ser bem modelada pela seguinte função: $T(t) = 10\,\dfrac{4t^2+16t+75}{t^2+4t+10}$, onde $t \geq 0$ representa o tempo decorrido em horas.

(a) Qual é a temperatura inicial do alimento?

(b) Qual a temperatura limite a que poderá chegar o alimento se se deixar indefinidamente no frigorífico?

(c) Determine a taxa de variação de T quando $t = 10$.

75. $\boxed{\text{C}}$ Pegue numa folha de cartolina quadrada com 1 metro de lado. Recorte 4 cantos (quadrados e todos iguais) e dobre o restante de maneira a formar uma caixa. Qual a medida dos cantos por forma a que o volume da caixa assim obtida seja máximo.

III. CÁLCULO INTEGRAL

76. Calcule:

(1) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int 4x^3 + 8x + 5\,dx$; (2) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int \frac{3}{x\sqrt{x}} + 2\sqrt[3]{x} + 3\,dx$; (3) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int x\left(x^2-2\right)^4\,dx$;

(4) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int \tan x + \operatorname{cotan} x\,dx$; (5) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx$; (6) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\; e^{\cos x}\,dx$;

(7) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int \frac{-3x}{1+x^4}\,dx$; (8) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int 1 - 2\,x^{-3}\,dx$; (9) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int \sqrt{2\,x}\,dx$;

(10) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$; (11) $\displaystyle\int \frac{x^2 e^{\operatorname{arcsen} x^3}}{\sqrt{1-x^6}}\,dx$; (12) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x)\ln(x+1)}\,dx$;

(13) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[5]{1-2x}}\,dx$; (14) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}} + \frac{1}{x^5} + \sqrt[5]{x}\,dx$; (15) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int (1+x)\,2^{\,x^2+2x}\,dx$;

(16) $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\,dx$; (17) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x)\cos x\,dx$; (18) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$;

(19) $\displaystyle\int \frac{\log_2 x}{x}\,dx$; (20) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int \tan^2 x\,\sec^2 x\,dx$; (21) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}\,dx$;

(22) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int \cos x\,\operatorname{sen}^3 x\,dx$; (23) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; (24) $\displaystyle\int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx$;

(25) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arccotan}(2x)}{4+16x^2}\,dx$; (26) $\displaystyle\int e^x\sqrt{1+2e^x}\,dx$; (27) $\displaystyle\int \sec x\,dx$;

(28) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^8+1}\,dx$; (29) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^3}}\,dx$; (30) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int x\,\operatorname{cosec} x^2\,dx$;

(31) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$; (32) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x\left(1-\ln^2 x\right)}\,dx$; (33) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\,dx$;

(34) $\displaystyle\int 3^{\operatorname{sen}^2 x}\operatorname{sen}(2x)\,dx$; (35) $\displaystyle\int \frac{1}{(4+x^2)\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx$; (36) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-(x+1)^2}}\,dx$.

77. Determine a função f, real de variável real, que verifica as seguintes condições:

(a) $\begin{cases} f'(x) = \cos x \\ f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = 1 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ f(0) = 0 \end{cases}$; (c) $\boxed{\text{C}}$ $\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \\ f(0) = 2 \end{cases}$;

(d) $\begin{cases} f'(x) = \dfrac{x\sqrt{\arctan(1+x^2)}}{x^4+2x^2+2} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \end{cases}$; (e) $\begin{cases} f''(x) = e^{3x} \\ f'(0) = 6 \\ f(0) = 1 \end{cases}$; (f) $\boxed{\text{A}}$ $\begin{cases} f''(x) = -\dfrac{1}{x^2},\ \forall x > 0 \\ f'(1) = 2 \\ f(1) = 1 \end{cases}$;

(g) $\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{\left(1+\arctan^2 x\right)(1+x^2)} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \end{cases}$; (h) $\begin{cases} f'(x) = \dfrac{\sqrt[4]{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}} \\ f(0) = 1 \end{cases}$; (i) $\boxed{\text{C}}$ $\begin{cases} f'(x) = \dfrac{\ln x}{x} \\ f(e) = 1 \end{cases}$.

78. Usando o método de primitivação por partes, calcule:

(1) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int x\cos x\,dx$; (2) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int e^x\cos x\ dx$; (3) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int x^3\ln x\,dx$;

(4) $\displaystyle\int (x+1)^2\ln(x+1)\,dx$; (5) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int \ln x\ dx$; (6) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\ln x\,dx$;

(7) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\,dx$; (8) $\displaystyle\int x\,5^x\,dx$; (9) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int (x+1)\,e^{4x}\ dx$;

(10) $\displaystyle\int \arccos x\ dx$; (11) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$; (12) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\ dx$;

(13) $\displaystyle\int \ln^2 x\,dx$; (14) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int x^2e^{-x}\,dx$; (15) $\displaystyle\int x\log_3 x\ dx$;

(16) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int x\operatorname{sen}(5x)\,dx$; (17) $\displaystyle\int \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\ dx$; (18) $\displaystyle\int \ln(x^2+4)\,dx$;

(19) $\displaystyle\int x^4\,e^x\,dx$; (20) $\displaystyle\int \left(x^2+2x-1\right)e^{4x}\,dx$; (21) $\displaystyle\int x\operatorname{arcsen} x^2\,dx$;

(22) $\displaystyle\int \ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$; (23) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int \frac{x\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; (24) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$;

(25) $\displaystyle\int (\sec x\ \operatorname{cosec} x)^2\,dx$; (26) $\displaystyle\int e^{\operatorname{arcsen} x}\,dx$; (27) $\displaystyle\int e^{2x}\operatorname{sen}(5x)\ dx$.

(28) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int x\arccos(x^2)\,dx$; (29) $\displaystyle\int \cos(\ln x)\,dx$;

79. Calcule as primitivas das seguintes funções racionais:

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x-2}\,dx$; (2) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2+4}\,dx$; (3) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int \frac{2x}{(2+x)(x-3)}\,dx$;

(4) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int \frac{x^4}{x-1}\,dx$; (5) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)^2}\,dx$; (6) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx$;

(7) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2}{\left(x^2+2\right)^2}\,dx$; (8) $\displaystyle\int \frac{x^2+6x-1}{(x-3)^2(x-1)}\,dx$; (9) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+3}\,dx$;

(10) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}\,dx$; (11) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4-x^3-x+1}\,dx$; (12) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^3-x}\,dx$;

(13) $\boxed{\text{A15}}$ $\displaystyle\int \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}\,dx$; (14) $\displaystyle\int \frac{-x^3-5x+9}{(x-1)^3(x+2)}\,dx$; (15) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+x^2+x}\,dx$;

(16) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int \frac{x^4-3x^3}{x^2-3x+2}\,dx$; (17) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-x)(x^2+1)}\,dx$; (18) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+8}\,dx$;

(19) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$; (20) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int \frac{x-1}{3x+x^3}\,dx$; (21) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}\,dx$.

 Altino Santos, Anabela Borges, Isabel Nicolau, J. Luís Cardoso, M. Luísa Morgado

80. $\boxed{C}$ Calcule uma primitiva da função racional: $f(x) = \dfrac{x^5 - 4x^4 + 14x^3 - 36x^2 + 41x - 5}{x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 36x + 36}$.

81. Usando o método de substituição de variável, calcule:

(1) $\boxed{A}$ $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$; (2) $\boxed{A}$ $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$; (3) $\boxed{C}$ $\int \dfrac{e^x}{e^{-x}+e^x}\,dx$;

(4) $\boxed{C}$ $\int \dfrac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$; (5) $\int \dfrac{e^{2x}}{e^{4x}-1}\,dx$; (6) $\int \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{3-x}}\,dx$;

(7) $\int \dfrac{2-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$; (8) $\int \dfrac{2^x}{2^x+2^{-x}}\,dx$; (9) $\boxed{C}$ $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$;

(10) $\int \dfrac{e^x}{e^{3x}+e^{-x}}\,dx$; (11) $\int \dfrac{e^x}{e^{2x}-e^x-2}\,dx$; (12) $\int \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\,dx$;

(13) $\boxed{A}$ $\int \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}+2}\,dx$; (14) $\boxed{A}$ $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$; (15) $\boxed{C}$ $\int \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$;

(16) $\boxed{C}$ $\int \dfrac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$; (17) $\boxed{C}$ $\int \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x+2}+1}\,dx$; (18) $\boxed{C}$ $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$.

82. Calcule as seguintes primitivas de funções trigonométricas:

(1) $\boxed{A}$ $\int \operatorname{sen}^2 x\ dx$; (2) $\boxed{C}$ $\int \cos^2 x\ dx$; (3) $\boxed{A}$ $\int \tan^2 x\,dx$;

(4) $\boxed{A}$ $\int \cos^3 x\ dx$; (5) $\boxed{C}$ $\int \tan^3 x\,dx$; (6) $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^4 x\,dx$;

(7) $\boxed{C}$ $\int \sec^3 x\,dx$; (8) $\int \dfrac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$; (9) $\boxed{A}$ $\int \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}\,dx$;

(10) $\boxed{A}$ $\int \operatorname{sen}^2(2x)\cos^3(2x)\,dx$; (11) $\boxed{C}$ $\int \dfrac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx$; (12) $\int \operatorname{cotan}^5 x\,dx$.

83. Calcule os seguintes integrais definidos:

(1) $\boxed{C}$ $\int_1^2 x^2 - 2x + 3\,dx$; (2) $\boxed{A}$ $\int_{-2}^2 |x|\ dx$; (3) $\boxed{C}$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$;

(4) $\boxed{A}$ $\int_0^1 \operatorname{arcsen} x\,dx$; (5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1+\cos^2 x\,dx$; (6) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x + |\cos x|\,dx$;

(7) $\boxed{C}$ $\int_{-1}^2 x^2 - |x|\,dx$; (8) $\int_2^4 \dfrac{\ln(\ln x)}{2x}\,dx$; (9) $\boxed{C}$ $\int_0^4 \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$;

(10) $\boxed{C}$ $\int_1^{\mathrm{e}} \cos(\ln x)\,dx$; (11) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{1-\operatorname{sen}^2 x}\,dx$; (12) $\boxed{C}$ $\int_{-3}^{-2} \dfrac{1}{x^2-1}\,dx$;

(13) $\int_1^2 \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x^2}\,dx$; (14) $\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{x\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; (15) $\int_0^1 \dfrac{x}{1+x^2+\sqrt{1+x^2}}\,dx$;

(16) $\boxed{C}$ $\int_{-2}^5 |x-3|\,dx$; (17) $\boxed{C}$ $\int_{-1}^0 \dfrac{x^4+x^2+1}{x-1}\,dx$; (18) $\int_2^3 \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx$;

(19) $\boxed{A}$ $\int_0^3 \dfrac{|2-x|}{1+|x-1|}\,dx$; (20) $\int_{\mathrm{e}}^4 \sqrt{x\ln x - x}\ \ln x\,dx$; (21) $\int_4^9 \dfrac{2x+3}{\sqrt{x}+1}\,dx$;

(22) $\boxed{A}$ $\int_1^3 \dfrac{2+x}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$; (23) $\boxed{A}$ $\int_{-1}^0 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$; (24) $\int_1^2 \dfrac{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{2x+1}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}\,dx$;

(25) $\int_{\frac{5}{4}}^{\frac{5}{\sqrt{8}}} \dfrac{x^2}{\sqrt{25-4x^2}}\,dx$; (26) $\int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx$; (27) $\boxed{C}$ $\int_0^1 \sqrt{2-y^2}\,dy$.

84. $\boxed{C}$ Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{\mathrm{e}^x} + 3\sqrt{2x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$. Calcule $\int_{-2}^1 f(x)\,dx$.

 Altino Santos, Anabela Borges, Isabel Nicolau, J. Luís Cardoso, M. Luísa Morgado

85. Seja f uma função contínua em $[-a,a]$. Mostre que:

(a) $\boxed{\text{A}}$ Se $f(-x)=f(x)$, então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$;

(b) $\boxed{\text{C}}$ Se $f(-x)=-f(x)$, então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

86. $\boxed{\text{A}}$ Seja f uma função integrável em $[a,b]$. Mostre que

$$\int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

87. $\boxed{\text{A}}$ Mostre que se f é uma função diferenciável em $[0,1]$, então

$$\int_0^1 x\,f'(1-x)\;dx = \int_0^1 f(x)\,dx\; - f(0)\,.$$

88. Determine as derivadas das funções F definidas por:

(a) $F(x)=\displaystyle\int_0^{3x+2} t\,e^t\,dt$, em $x=1$; (b) $\boxed{\text{C}}$ $F(x)=\displaystyle\int_1^{x^2+x+1} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$; (c) $\boxed{\text{A}}$ $F(x)=\displaystyle\int_{\sqrt{\ln x}}^{x} e^{t^2}\,dt$.

89. Calcule, usando integrais definidos, o valor da área da região $\mathcal{A}$, definida por:

(a) $\boxed{\text{A}}$ $\mathcal{A}=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2-2\le y\le -x \,\wedge\, x\le 0\big\}$;

(b) $\boxed{\text{C}}$ $\mathcal{A}=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 0\le x\le 4 \,\wedge\, 0\le y\le 4x-x^2\big\}$;

(c) $\boxed{\text{A}}$ $\mathcal{A}=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 1\le x\le 2 \,\wedge\, \dfrac{1}{x}\le y\le x^2\big\}$;

(d) $\boxed{\text{A}}$ $\mathcal{A}=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, -1\le x\le 4 \,\wedge\, 0\le y\le \big|x^2-3x\big|\big\}$;

(e) $\boxed{\text{C}}$ $\mathcal{A}=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x\ge y^2-1 \,\wedge\, y\ge x-1\big\}$;

(f) $\boxed{\text{C}}$ $\mathcal{A}=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, y\ge -1 \,\wedge\, y\le x^3 \,\wedge\, y\le 2-x\big\}$;

(g) $\boxed{\text{A}}$ $\mathcal{A}=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, y^2\le x\le 4 \,\wedge\, -2\le y\le 2\big\}$.

90. Determine o valor da área da região definida pelas condições:

(a) $\boxed{\text{A}}$ $\operatorname{sen} x\le y\le \cos x$, $-\frac{3\pi}{4}\le x\le \frac{\pi}{4}$;

(b) $\boxed{\text{C}}$ limitada pelas curvas $y=x^2$ e $y=x^3-2x$;

(c) $\boxed{\text{A}}$ $0\le y\le \frac{1}{1+x^2}$, $-1\le x\le 1$;

(d) $\boxed{\text{C}}$ $y\le 2x$, $x^2+y^2\le 4$, $y^2\ge 2(1-x)$, $y\ge 0$;

(e) definida por $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}\le 1$, $y\ge 0$;

(f) $\boxed{\text{A}}$ $-\frac{1}{\sqrt{x}}\le y\le \frac{1}{x^2}$, $1\le x\le 3$.

91. Determine o valor da área da região limitada:

(a) $\boxed{\text{A}}$ pelas curvas de equações $y=x^3$ e $y=x$;

(b) $\boxed{\text{C}}$ pelas curvas de equações $y=x^2$ e $y=|x|$;

(c) $\boxed{\text{C}}$ pelas curvas de equações $y=\ln x$, $y=e^x$, $x=1$ e $x=2$;

(d) $\boxed{\text{C}}$ pelas curvas de equações $y=\operatorname{sen} x$, $y=\operatorname{sen}^3 x$, $x=0$ e $x=\frac{\pi}{2}$;

(e) $\boxed{\text{A}}$ pela parábola de equação $y^2=-x+2y$ e pela reta de equação $x=0$;

(f) pela parábola de equação $x^2=-y+2x$ e pela reta de equação $y=0$;

(g) $\boxed{\text{C}}$ pelas curvas de equações $y=-x^2$ e $x+y+2=0$;

(h) $\boxed{\text{C}}$ pelas curvas de equações $y^2 = 4x$ e $y^2 = 5x - 4$;

(i) $\boxed{\text{A}}$ pelas curvas de equações $y = \operatorname{arcsen} x$, $x = 1$ e $y = 0$;

(j) pelas curvas de equações $y = \sqrt{2}\,(x+1)$, $\;y^2 = x\;$ e $\;x^2 + y^2 = 2$.

92. $\boxed{\text{C}}$ Determine o valor da área da região plana limitada pelas curvas de equações:

$$9y - x^2 - 81 = 0,\ 4y - x^2 - 16 = 0,\ \ y - x^2 - 1 = 0 \ \text{ e o eixo dos } yy.$$

93. Em cada uma das alíneas seguintes, determine o valor do integral definido, identificando-o com o valor da área de uma região plana que especificar.

(a) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int_{-3}^{2} 2x + 6\,dx$;

(b) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int_{-1}^{2} 7 - 3x\,dx$;

(c) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int_{0}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,dx$;

(d) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^2 + 1\ dx$;

(e) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\ dx\,,\ a > 0$;

(f) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{2 - y^2} - y\ dy$;

(g) $\displaystyle\int_{1}^{2} \sqrt{2x - x^2} - \sqrt{2 - x}\ dx$;

(h) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{4 - x^2} - \sqrt{3x}\ dx$;

(i) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{2 - y^2} - \tfrac{2}{\pi}\operatorname{arcsen} y\ dy$.

94. Seja $\mathcal{A}$ a região do plano definida por:

(a) $\boxed{\text{A}}$ $\ 0 \le y \le \sin x\ ,\ 0 \le x \le \pi$;

(b) $\boxed{\text{A}}$ $\ 0 \le y \le \dfrac{1}{\sqrt{x}}\ ,\ 1 \le x \le e$.

Em cada caso, determine o volume do sólido de revolução, Ω, que se obtém ao rodar $\mathcal{A}$ em torno do eixo das abcissas.

95. Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada pelas curvas de equações:

(a) $\boxed{\text{C}}$ $y = x^2,\ x = 0,\ x = 1$ e $y = 0$, em torno do eixo dos xx ;

(b) $\boxed{\text{A}}$ $y = \sqrt{4 - x^2}$ e $y = 0$, em torno do eixo dos xx ;

(c) $y = x^2,\ x = 0,\ x = 1$ e $y = 0$, em torno do eixo dos yy ;

(d) $x = 1,\ x = 2,\ \ y = 10\ $ e $\ y = 0$, em torno do eixo dos yy ;

(e) $\boxed{\text{C}}$ $x = y - y^2\ $ e $\ x = 0$, em torno do eixo dos yy ;

(f) $\boxed{\text{C}}$ $y = x$ e $y = \sqrt{x}$, em torno da reta $y = 1$;

(g) $y = x\ $ e $\ y = \sqrt{x}$, em torno da reta $x = 2$;

(h) $y = \operatorname{sen} x,\ x = \frac{\pi}{2},\ x = \pi\ $ e $\ y = 0$, em torno do eixo dos xx .

96. $\boxed{\text{C}}$ Determine o volume do cone de altura h e raio da base r.

97. $\boxed{\text{A}}$ Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^2$, $\;\mathcal{A} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ y \le \dfrac{1}{x}\ \wedge\ y \le 4x\ \wedge\ y \ge \frac{x}{4}\ \wedge\ 0 \le x \le 2\right\}$.

(a) Esboce a região plana que caracteriza o conjunto $\mathcal{A}$;

(b) Calcule o valor da área de $\mathcal{A}$;

(c) Calcule o volume do sólido de revolução que se obtém por rotação de $\mathcal{A}$ em torno do eixo dos xx .

98. $\boxed{\text{A}}$ Considere as curvas de equações $y = x^2 - 2x\ $ e $\ y = -x^2 + 6x - 6$.

(a) Faça a representação geométrica das curvas e identifique a região plana, $\mathcal{R}$, limitada por essas curvas ;

(b) Determine:

i. o valor da área da região $\mathcal{R}$;

ii. o valor do volume do sólido de revolução que se obtém por rotação da região $\mathcal{R}$ em torno do eixo dos yy.

99. $\boxed{\text{A}}$ Considere o subconjunto $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^2$ definido por $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \ \wedge \ 0 \leq y \leq \cos x$.

   (a) Esboce a região plana que caracteriza o conjunto $\mathcal{A}$;

   (b) Calcule o valor da área da região $\mathcal{A}$ e o valor do volume do sólido de revolução que se obtém por rotação de $\mathcal{A}$ em torno do eixo dos yy.

100. $\boxed{\text{C}}$ Usando uma substituição adequada, mostre que

$$\int_0^1 \big(\arccos y\big)^2 \, dy = \pi - 2\,.$$

101. $\boxed{\text{C}}$ Considere as curvas de equação $x = y^2$ e $x = 2y - y^2$.

   (a) Faça a representação geométrica das curvas e identifique a região plana, $\mathcal{R}$, limitada por essas curvas;

   (b) Determine o valor da área da região $\mathcal{R}$ e o valor do volume do sólido de revolução que se obtém por rotação da região $\mathcal{R}$ em torno do eixo dos xx.

102. Considere a região $\mathcal{R} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 - 1 \leq y \leq 0 \ \wedge \ y \geq -(x-1)^2\Big\}$.

   (a) Represente geometricamente a região $\mathcal{R}$;

   (b) Calcule o valor da área da região $\mathcal{R}$ e o valor do volume do sólido de revolução que se obtém por rotação de $\mathcal{R}$ em torno do eixo dos xx.

103. Calcule o comprimento de arco das seguintes curvas:

   (a) $\boxed{\text{C}}$ $y = 3x$, entre $x = -1$ e $x = 2$;

   (b) $y^2 = x^3$, entre $x = 0$ e $x = 1$;

   (c) $\boxed{\text{C}}$ $y = \frac{a}{2}\big(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\big)$, entre $x = 0$ e $x = a$ $(a > 0)$;

   (d) $y = \ln \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$, entre $x = 1$ e $x = 3$;

   (e) $y = \frac{2}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3}$, entre os seus pontos de intersecção com o eixo das abcissas;

   (f) $y = \ln(\operatorname{sen} x)$, entre $x = \frac{\pi}{3}$ e $x = \frac{\pi}{2}$;

   (g) $\boxed{\text{C}}$ $y = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2}$, entre $x = 1$ e $x = 2$;

   (h) $y = \sqrt{x^3} + 2$, entre $y = 2$ e $y = 10$;

   (i) $\boxed{\text{A}}$ $y = \ln x$, entre $x = 2\sqrt{2}$ e $x = 2\sqrt{6}$;

   (j) $x = 6y$, entre $y = 1$ e $y = 2$.

104. Calcule o comprimento de arco das seguintes curvas, nos intervalos indicados.

   (a) $y = 2x + 1$, $x \in [0, 2]$; (b) $\boxed{\text{C}}$ $2y = x^2$, $x \in [0, \sqrt{3}]$; (c) $\boxed{\text{A}}$ $3y = 2(x-1)^{\frac{3}{2}}$, $x \in [2, 5]$.

105. Calcule o comprimento de arco da curva de equação $5y^3 = x^2$ situado no interior da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 6$.

106. Estude a convergência dos seguintes integrais impróprios e calcule os que forem convergentes.

   (a) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$; (b) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x-1}\,dx$; (c) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} e^x\,dx$; (d) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$;

   (e) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int_0^{3} \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx$; (f) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$; (g) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int_0^{4} \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$; (h) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int_{-2}^{7} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\,dx$.

107. Determine os valores de k para os quais os seguintes integrais impróprios convergem.

   (a) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k}\,dx$; (b) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{x^k}\,dx$; (c) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^k}\,dx$; (d) $\displaystyle\int_0^{1} x^k \ln x\,dx$.

108. Utilizando a definição, determine a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

(1) A $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx\,;$ (2) C $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx\,,\ \ p>1\,;$ (3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,dx\,;$

(4) C $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\,5^{-x^2}\,dx\,;$ (5) C $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^2+1}\,dx\,;$ (6) C $\displaystyle\int_{-3}^{2} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx\,;$

(7) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\,dx\,,\ \ a>0\,;$ (8) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}\,dx\,;$ (9) $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2(x^2-x-2)}\,dx\,;$

(10) A $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2(x^2-2x+5)}\,dx\,;$ (11) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{2x^4+5x^2+3}\,dx\,;$ (12) $\displaystyle\int_0^{2} x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\sqrt{2x}}\,dx\,;$

(13) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1-x^2}\,dx\,;$ (14) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{(2x-x^3)^2}}\,dx\,;$ (15) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x}{x^3+2x^2-x-2}\,dx\,.$

109. C Determine o valor de α de modo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha\, e^{-3|x-1|}\,dx = 1\,.$$

110. Atribua, se possível, um valor à área da região $\mathcal{R}$ e um valor ao volume do sólido de revolução obtido pela rotação em torno do eixo dos xx, sendo:

(a) $\mathcal{R} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0<x\le 1\ \wedge\ 0\le y\le \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right\};$

(b) C $\mathcal{R} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0<x\le 1\ \wedge\ 0\le y\le \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right\};$

(c) A $\mathcal{R} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\le 0\ \wedge\ \mathrm{e}^{2x}\le y\le \mathrm{e}^{x}\right\}.$

111. A Considere a região do plano,

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ \left(0\le y\le \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\ \wedge\ |x|>1\right)\vee\left(0\le y\le \frac{1}{2}\ \wedge\ |x|\le 1\right)\right\}.$$

Faça um esboço gráfico da região $\mathcal{R}$ e determine o volume do sólido de revolução, Ω, que se obtém ao rodar $\mathcal{R}$ em torno do eixo das abcissas.

112. Utilizando critérios de comparação, determine a natureza dos seguintes integrais impróprios:

(a) A $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx$; (b) A $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$; (c) C $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$;

(d) C $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$; (e) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x-2}{x\sqrt{x}+1}\,dx$; (f) A $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^2+1}{(x+1)\sqrt{x}}\,dx$;

(g) C $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{3}{x\,\sqrt[3]{x}}\,dx$; (h) A $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2+\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx$; (i) C $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\ln x}{1+x^2}\,dx\,;$

(j) C $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}-1}\,dx$; (k) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{sen} x)\,dx$; (l) C $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-2)\ln^2 x}\,dx\,.$

IV. SUCESSÕES E SÉRIES NUMÉRICAS / FÓRMULA E SÉRIE DE TAYLOR / SÉRIES DE POTÊNCIAS

113. Dada uma sequência (finita) de números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (com $n\in\mathbb{N}$), a soma $x_1+x_2+\cdots+x_n$ pode ser representada, de forma abreviada, por

$$\sum_{k=1}^{n} x_k\,,$$

onde $\sum$ é o símbolo de somatório. Lê-se: *somatório desde* $k=1$ *até* n *de* x_k (onde k é o índice da soma).

Utilize a indução matemática para provar a propriedade telescópica dos somatórios:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k) = a_{n+1}-a_1.$$

114. Mostre que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$. Prove esta igualdade usando:

(a) a indução matemática;

(b) $\boxed{\text{C}}$ a propriedade telescópica dos somatórios.

115. Utilize a indução matemática para mostrar que, para todo o $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$;

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$;

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r},\ r \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

116. Estude quanto à monotonia as sucessões de termos gerais:

(a) $u_n = \dfrac{n}{3^n}$;

(b) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$;

(c) $u_n = \begin{cases} \frac{1-n}{n} & \text{se } n \text{ par} \\ -1 + \frac{2}{n} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$;

(d) $u_n = \left|(-1)^n n^2 + n\right|$;

(e) $u_n = 2 + \sqrt{3(2n+1)}$;

(f) $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = \frac{1}{4} + u_n^2 & \text{se} \quad n \geq 1 \end{cases}$;

(g) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$;

(h) $u_n = 3 + \dfrac{n!}{n^n}$;

(i) $u_n = \begin{cases} \dfrac{n^2+2n-3}{n^2+n} & \text{se } n \text{ par} \\ 1 - \frac{4}{n} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$.

117. Averigúe se as seguintes sucessões são ou não limitadas:

(a) $u_n = \dfrac{2n}{3n+5}$;

(b) $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{2+n}$;

(c) $\boxed{\text{C}}$ $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big[\cos\big((k+1)\pi\big) - \cos\big(k\pi\big)\big]$;

(d) $u_n = \dfrac{n^3+2}{n^3+1}$;

(e) $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$;

(f) $u_n = (-1)^n n^2$.

118. Considere as sucessões de termos gerais

$$u_n = \frac{(-1)^n + 2n}{n+1} \qquad \text{e} \qquad v_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}.$$

Determine uma ordem a partir da qual se tem

(a) $\left|u_n - 2\right| < 0.001$;

(b) $\left|v_n - 1\right| < \frac{1}{10}$.

119. Seja u_1 um número real. Uma progressão aritmética é uma sucessão de números reais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cujos termos são

$$u_1,\ u_1 + r,\ u_2 + r,\ u_3 + r, \ldots$$

onde a constante real r é designada por razão da progressão aritmética.

(a) Escreva uma expressão geral da sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

(b) Deduza uma fórmula para a soma, S_n, dos n primeiros termos da progressão aritmética dada e comprove-a utilizando a indução matemática.

120. Seja u_1 um número real. Uma progressão geométrica de razão r é uma sucessão de números reais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cujos termos são

$$u_1,\ u_1 r,\ u_2 r,\ u_3 r, \ldots$$

(a) Escreva uma expressão geral da sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

(b) Deduza uma fórmula para a soma, S_n, dos n primeiros termos da progressão geométrica dada e comprove-a utilizando a indução matemática.

121. Determine, caso existam, os limites das sucessões cujos termos gerais são:

(a) $u_n = \dfrac{n^3 - 2n^2 + 3}{2n^3 + n + 2}$; (b) $u_n = \dfrac{2n+3}{n^3+2}$; (c) $u_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$;

(d) $u_n = \dfrac{2 + (-4)^n}{3^n - 2^n}$; (e) $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{1 - 2^n}$; (f) $u_n = \dfrac{(-1)^n\, n^3 + 1}{n^4 + 2}$;

(g) $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$; (h) $u_n = \sqrt{\dfrac{4n^2 + n - 1}{n^2 + 9}}$; (i) $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$;

(j) $\boxed{\text{C}}$ $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k$; (k) $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^k$; (l) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{3^{3+2k}}$.

122. Utilizando o teorema das sucessões enquadradas, estude a natureza das seguintes sucessões:

(a) $\boxed{\text{C}}$ $u_n = \dfrac{6n+2}{3n+1}$; (b) $u_n = \dfrac{\operatorname{sen} n}{n}$; (c) $u_n = \dfrac{(-1)^n + n}{n}$;

(d) $u_n = \left(\dfrac{3n}{1+4n}\right)^n$; (e) $\boxed{\text{C}}$ $u_n = \left(\dfrac{n}{2n-1}\right)^n$; (f) $u_n = \dfrac{2 + \cos^2 n}{3n}$;

(g) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}$; (h) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{8n}{\sqrt{n^4 + 2k}}$; (i) $\boxed{\text{C}}$ $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$;

(j) $u_n = \left(\dfrac{n^2}{2 + 2\,n^2}\right)^n$; (k) $u_n = \left(\dfrac{1 + \sqrt{n}}{n}\right)^n$; (l) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^7}}$.

123. *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão limitada de números positivos.*
Pode provar-se que, se existe $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, então existe também $\lim \sqrt[n]{a_n}$ e tem o mesmo valor.

Considere as sucessões de termos gerais $a_n = \sqrt[n]{2}$, $b_n = \sqrt[n]{n}$, $c_n = \sqrt[n]{2^n + n^2}$, $d_n = \sqrt[n]{\ln n}$ e $e_n = \sqrt[n]{n \ln n}$.

(a) $\boxed{\text{C}}$ Calcule os limites: $\lim a_n$, $\lim b_n$, $\lim c_n$, $\lim d_n$ e $\lim e_n$;

(b) Deduza o valor do limite da sucessão de termo geral $u_n = \sqrt[n]{\ln(n!)}$. (Note que $n \le n! \le n^n, \forall n \in \mathbb{N}$.)

124. Determine, caso existam, os limites das sucessões cujos termos gerais são:

(a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{2}{k^2 - 1}$; (b) $\boxed{\text{C}}$ $u_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^2 + n - 1}{n+3}}$; (c) $\boxed{\text{C}}$ $u_n = \sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n^{2n+1}}}$;

(d) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{3n}\right)^{2n}$; (e) $u_n = \left(\dfrac{n^2 + 3n - 1}{n^2 + 1}\right)^{n-1}$; (f) $u_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} [\cos((k+1)\pi) - \cos(k\pi)]$;

(g) $u_n = \dfrac{(n+2)! - n!}{n!(5n^2 + 1)}$; (h) $u_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+2)$; (i) $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{k^2 + k}\right)^{\frac{5n}{2}}$;

(j) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k(k+1)}$; (k) $u_n = \dfrac{5^{n+1} + 2^n}{1 + (-7)^n} \cos\sqrt{n+1}$; (l) $u_n = n^{n^2} (1 + n^2)^{-\frac{n^2}{2}}$.

125. Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão definida por recorrência do seguinte modo: $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{3(1+u_n)}{3+u_n} \end{cases}$.

(a) Verifique que $u_{n+1} - \sqrt{3} = \dfrac{(3-\sqrt{3})(u_n - \sqrt{3})}{3+u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

(b) Prove, pelo princípio de indução, que $\sqrt{3} < u_n \leq 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

(c) Justifique que $(u_n)_n$ é convergente e calcule $\lim u_n$.

126. Considere a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por recorrência através de

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \end{cases} .$$

(a) Recorra ao princípio de indução matemática para mostrar que $1 < u_n \leq 2,\ \forall n \in \mathbb{N}$;

(b) Mostre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão monótona decrescente;

(c) Justifique que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e, em seguida, calcule o seu limite.

127. Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão definida por recorrência do seguinte modo:

$$\begin{cases} u_1 = 1; \\ 5\,u_{n+1} = u_n + 8, \end{cases}$$

e considere a sucessão de termo geral $v_n = u_n - 2$.

(a) Mostre, recorrendo ao princípio de indução, que $v_n = -\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1},\ \forall n \in \mathbb{N}$;

(b) Mostre, sem utilizar o método anterior, que $\frac{9}{5} \leq u_n < 2, \quad \forall n \geq 2$;

(c) Calcule, caso exista, $\lim u_n$.

128. Considere as sucessões de termos gerais:

$$u_n = \frac{n^{n-2}}{(n+\pi)^n}(n^2+1) \quad \text{e} \quad v_n = \frac{n! + \sqrt{n}}{(n+1)!}.$$

(a) Calcule $\lim u_n$;

(b) Utilize o teorema das sucessões enquadradas para mostrar que $\lim v_n = 0$. (Note que $n! \geq \sqrt{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.)

129. Determine a soma das seguintes séries geométricas:

(a) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$;

(b) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$;

(c) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$;

(d) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-2}$;

(e) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{2n+1}}{10^{n-1}}$;

(f) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{3^{n+1}}$.

130. $\boxed{\text{A}}$ Seja $x \in]-1,1[$. Prove as seguintes igualdades:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\,x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad , \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\,x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} .$$

131. Generalize o exercício 130 .

132. Indique a natureza das seguintes séries numéricas e, no caso de convergência, determine a sua soma:

(a) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$; (b) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}3^{-3n}$; (c) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n-\operatorname{sen} n}{2^{n+1}}$;

(d) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^{n-1}}$; (e) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\,2^{3n}}{3^{2n}}$; (f) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{3^n}$;

(g) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n+2^{2n}}{3^{2n}}$; (h) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$; (série harmónica) (i) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$;

(j) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[n+1]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right)$; (k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4n+4}{n^2(n+2)^2}$; (l) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+8n+7}$; (n) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}n\ln\frac{n-1}{n+1}$; (o) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

(p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(2^{\frac{2}{3n}}-2^{\frac{2}{3n+6}}\right)$; (q) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+4)^2-9}$; (r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\,(n+3)\,(n+6)}$.

133. Escreva sob a forma fracionária as seguintes dízimas infinitas periódicas:

(a) $\boxed{\text{A}}$ $2.(6)$; (b) $\boxed{\text{C}}$ $1.(12)$; (c) $0.(132)$.

134. Sabe-se que a série de termos não nulos $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ é convergente e que tem soma igual a S. Determine a natureza das seguintes séries e, no caso de convergência, indique a sua soma:

(a) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{u_n}{n}-\frac{u_{n+1}}{n+1}\right)$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{u_n}-1}{u_n}$; (c) $u_1+\frac{1}{3}+u_2+\frac{1}{3\cdot 5}+u_3+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots$;

(d) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(u_n)}{u_n}$; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{2^n}-u_n\right)$; (f) $2u_1-\frac{1}{3}+2u_2-\frac{1}{8}+2u_3-\frac{1}{15}+2u_4-\frac{1}{24}-\cdots$.

135. Indique, justificando, a natureza das seguintes séries:

(a) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{sen}\frac{1}{n}$; (b) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}$ (c) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^4}}$;

(d) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}$; (e) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{2^n}$; (f) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln^2 n}{n^3}$;

(g) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$; (h) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2+1}{2+n^3}$; (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$;

(j) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$; (k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}-n+1}$; (l) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!-2^{n-1}}{n^n}$;

(m) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)$; (n) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2+1}{2^n\sqrt{n}}$; (o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$;

(p) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^3+1}\right)$; (q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!+\sqrt{n}}{(n+1)!}$; (r) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^2\sqrt{n+1}}$;

(s) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{4^n}$; (t) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[n\tan\frac{1}{n}\,\ln\frac{n+1}{n}\right]^n$; (u) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n}{(\ln n)^n}$.

136. Verifique se as seguintes séries alternadas são absolutamente convergentes ou simplesmente convergentes:

(a) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{1}{n}$; (b) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n^2}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{(n+1)^2}{\mathrm{e}^n}$;

(g) $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{2^{n-2}+1}{2^{n+3}+3}$; (h) $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$; (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

137. $\boxed{\text{A}}$ Considere a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}\,.$$

Pretende-se que conclua que $\lim u_n = 0$. Para isso, proceda do seguinte modo:

(a) Comece por calcular $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$;

(b) Diga, justificando, o que pode concluir relativamente à natureza da série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$;

(c) Utilize a alínea anterior para justificar que $\lim u_n = 0$.

138. Considere a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$u_n = \frac{n^{2n}}{(2n)!}\,.$$

(a) Calcule $\lim \dfrac{u_n}{u_{n+1}}$;

(b) Indique, justificando, qual a natureza da série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{u_n}$;

(c) Será $\lim \dfrac{1}{u_n} = 0$? Justifique a sua resposta.

139. Determine o Polinómio de Taylor no ponto a de ordem n das funções que se seguem:

(a) $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = 3^x$, $a=2$, $n=3$; (b) $\boxed{\text{A}}$ $f(x)=\operatorname{sen} x$, $a=0$, $n=7$;

(c) $\boxed{\text{A}}$ $f(x) = x\ln x - x + 1$, $a=1$, $n=2$; (d) $\boxed{\text{C}}$ $f(x)=\operatorname{sen} x$, $a=0$, $n=8$;

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a=1$, $n=2$; (f) $\boxed{\text{A}}$ $f(x)=\ln(1+x)$, $a=0$, $n=5$;

(g) $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$, $a=0$, $n=3$; (h) $\boxed{\text{C}}$ $f(x)=e^x$, $a=0$, $n\in\mathbb{N}$.

140. Determine a fórmula de MacLaurin com resto de Lagrange de ordem n ($n\in\mathbb{N}$) para cada uma das seguintes funções:

(a) $\boxed{\text{A}}$ $f(x)=e^x$; (b) $\boxed{\text{A}}$ $g(x) = x+\cos x$; (c) $\boxed{\text{C}}$ $h(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

141. Exprima os polinómios seguintes como polinómios das potências indicadas:

(a) $\boxed{\text{A}}$ $P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 1\,,\quad x-1$;

(b) $Q(x) = 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1\,,\quad x+2$;

(c) $R(x) = x^3 - 2x^2 + 3\,,\quad x-1$;

(d) $\boxed{\text{A}}$ $S(x) = (x-1)^4\,,\quad x$.

142. Determine a série de MacLaurin das seguintes funções:

(a) $\boxed{\text{A}}$ $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$; (b) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$; (c) $\boxed{\text{A}}$ $f(x) = \ln(x+1)$;

(d) $\boxed{\text{A}}$ $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$; (e) $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = \cos x$; (f) $f(x) = 2^{\,x}$.

143. Prove que:

(a) $\boxed{\text{C}}$ $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$;

(b) $\boxed{\text{C}}$ $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$;

(c) $\boxed{\text{C}}$ $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$;

(d) $\boxed{\text{C}}$ $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots \quad \big(x \in \,]-1,1]\big)$;

(e) $\boxed{\text{A}}$ $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \quad \big(x \in [-1,1]\big)$.

144. Determine o raio do intervalo de convergência das séries de potências, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$, que se seguem:

(a) $\boxed{\text{C}}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$;

(b) $\boxed{\text{A}}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n x^n$;

(c) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$;

(d) $\boxed{\text{C}}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{2^n} (x-1)^n$;

(e) $\boxed{\text{A}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$;

(f) $\boxed{\text{C}}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} (x-2)^n$;

(g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x-1)^n}{2n}$;

(h) $\boxed{\text{A}}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x-3)^n}{4^{2n}}$;

(i) $\boxed{\text{C}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n2^n}$;

(j) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$;

(k) $\boxed{\text{C}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n}$;

(l) $\boxed{\text{C}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2n}$;

(m) $\boxed{\text{C}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4^n+1}$;

(n) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}+1} x^{2n}$;

(o) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2n+1}$.

145. Desenvolva em séries de potências de x as seguintes funções e indique o maior intervalo onde esse desenvolvimento é válido:

(a) $\boxed{\text{A}}$ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$;

(b) $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$;

(c) $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$;

(d) $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = \frac{1}{1-2x}$;

(e) $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = x \ln(1+x)$;

(f) $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = 2^x + \frac{1}{2+x}$.

146. $\boxed{\text{A}}$ Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

(a) Desenvolva a função f em série de MacLaurin e conclua que a função f é analítica ; Note que $\lim \frac{x^n}{n!} = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Indique, justificando, qual a soma da série numérica $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$;

(c) Utilize a alínea (a) para obter o desenvolvimento da função $h(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$ em série de potências de x .

147. $\boxed{\text{C}}$ Considere a função real de variável real f, definida por $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

(a) Utilize o princípio de indução matemática para mostrar que $f^{(n)}(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{-x}(x-n), \ \forall n \in \mathbb{N}$;

(b) Desenvolva em série de MacLaurin a função f e indique, justificando, se a função dada é analítica .