Lógica Proposicional

Tópicos de Matemática Discreta

EInf & MACD

— 26/27/28 de outubro de 2020 —

Sistema MIU

- Alfabeto: M, I, U;
- Axioma: MI é uma palavra ou um teorema do Sistema MIU;
- Regras (de dedução/inferência): Sendo x e y expressões arbitrárias (possivelmente vazias):
  - R_1 : Se xI é teorema então xIU é teorema;
  - R_2 : Se Mx é teorema então Mxx é teorema;
  - R_3 : Se xIIIy é teorema então xUy é teorema;
  - R_4 : Se xUUy é teorema então xy é teorema.

- MUIU é um teorema?
- Será MU um teorema do sistema?

"Exigências de um sistema de axiomas"

- **independência** - nenhum dos axiomas deve poder ser demonstrado a partir dos restantes;
- **consistência** - não deve ser possível obter como teorema uma afirmação e a sua negação;
- **completude** - é possível demonstrar a veracidade ou falsidade de qualquer proposição.

O matemático Kurt Gödel (1906 - 1978) mostrou que, para sistemas axiomáticos complexos, completude e consistência são impossíveis de obter simultaneamente.

Definições

1. Ponto é o que não tem partes nem grandeza alguma.
2. Linha é o que tem comprimento e não tem largura.

   ...

35. Linhas paralelas ou equidistantes são linhas rectas, que existindo no mesmo plano, e sendo produzidas de ambas as partes, nunca se chegam a tocar

Noções Comuns

- Coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais uma à outra ($a = b, c = b \Rightarrow a = c$).
- Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais ($a = b \Rightarrow a + c = b + c$).
- Se iguais são subtraídos de iguais, os restantes são iguais ($a = b \Rightarrow a - c = b - c$).
- Coisas que coincidem uma com a outra são iguais uma à outra (formas geométricas isométricas são iguais).
- O todo é maior que a parte. ($x|y \Rightarrow x \leq y$).

Axiomas

- Axioma I: Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos.
- Axioma II: Pode-se continuar (de uma maneira única)qualquer reta finita continuamente em uma reta.
- Axioma III: Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.
- Axioma IV: Todos os ângulos retos são iguais.
- Axioma V: Se uma reta, ao cortar outras duas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Equivalentes do 5º Postulado

- Por um ponto exterior a uma reta passa uma única reta paralela à reta dada.
- A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois ângulos retos.
- Dados quaisquer três pontos não colineares, existe um círculo passando por eles.
- Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.
- Todo ângulo inscrito num semicírculo é reto.
- Quaisquer duas retas paralelas possuem uma perpendicular em comum.

Regras sistema dedutivo

Eliminação da conjunção

$p \wedge q$	Estive atento à aula e gostei da aula.
$\therefore \quad p \quad (q)$	∴ Então estive atento à aula (Então gostei da aula).

Introdução da conjunção

p	Estive atento à aula.
q	Gostei da aula.
$\therefore \quad p \wedge q$	∴ Então estive atento à aula e gostei da aula.

Eliminação da dupla negação

$\neg\neg p$	Não é verdade que eu não estive atento.
$\therefore \quad p$	∴ Então estive atento.

Modus Ponens (Eliminação do condicional)

$p \rightarrow q$	Se hoje chover vou ficar em casa.
p	Hoje está a chover.
$\therefore \quad q$	∴ Vou ficar em casa.

. $[p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r$

1	p	H
2	$p \rightarrow q$	H
3	$q \rightarrow r$	H
4	q	$(1,2)$ *Modus ponens*
5	r	$(3,4)$ *Modus ponens*

. $[p \wedge (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow r$

1	p	H
2	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	H
3	$p \rightarrow q$	H
4	$q \rightarrow r$	$(1,2)$ *Modus ponens*
5	q	$(1,3)$ *Modus ponens*
6	r	$(4,5)$ *Modus ponens*

Introdução do condicional

p	$[H]$	Suponhamos que vai chover.
$\vdots$		$\vdots$
q		Fiquei em casa
$\therefore \quad p \rightarrow q$		$\therefore$ Se chover então fico em casa.

. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$

1	$p \rightarrow q$	H
2	$q \rightarrow r$	$[H]$
3	p	$[H]$
4	q	$(1, 3)$ *Modus ponens*
5	r	$(2, 4)$ *Modus ponens*
6	$p \rightarrow r$	$(3-5)$ Introdução do condicional
7	$(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$(2-6)$ Introdução do condicional

Redução ao absurdo

p	$[H]$	Não estou desatento à aula
$\vdots$		$\vdots$
$q \wedge \neg q$		$2+2=4$ e $2+2 \neq 4$
$\therefore \quad \neg p$		$\therefore$ Estou desatento à aula.

Modus Tollens *

$p \rightarrow q$	Se hoje chover vou ficar em casa.
$\neg q$	Não fiquei em casa.
$\therefore \quad \neg p$	$\therefore$ Não choveu.

. $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$

1	$p \rightarrow q$	H
2	$\neg q$	H
3	p	$[H]$
4	q	$(1,3)$ *Modus ponens*
5	$q \wedge \neg q$	$(2,4)$ Introdução da conjunção
6	$\neg p$	$(3-5) RA$

Introdução da disjunção

$$\frac{p}{\therefore \quad p \vee q}$$

$$\frac{\text{Vou estar atento}}{\therefore \text{Vou estar atento ou vou estudar.}}$$

Eliminação da disjunção

$$\begin{array}{ccccc} & p & [H_1] & q & [H_2] \\ & \vdots & & \vdots & \\ p \wedge q & r & & r & \\ \hline \therefore & & r & & \end{array}$$

Eliminação da disjunção

$$\begin{array}{lll} & p \quad [H_1] & q \quad [H_2] \\ & \vdots & \vdots \\ p \vee q & r & r \\ \hline \therefore & r & \end{array}$$

. $[p \vee (q \wedge r)] \rightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

1	$p \vee (q \wedge r)$	H
2	p	$[H_1]$
3	$p \vee q$	2 Introdução da disjunção
4	$p \vee r$	2 Introdução da disjunção
5	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$(3, 4)$ Introdução da conjunção
6	$q \wedge r$	$[H_2]$
7	q	6 Eliminação da conjunção
8	$p \vee q$	7 Introdução da disjunção
9	r	6 Eliminação da conjunção
10	$p \vee r$	9 Introdução da disjunção
11	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$8, 10$ Introdução da conjunção
12	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$1, 2-5, 6-11$ Eliminação da disjunção

Eliminação universal

$\forall x, p(x)$	Para todo o x, x é branco.
$\therefore \quad p(a)$	$\therefore a$ é branco.

. $[(\forall x, p(x) \rightarrow q(x)) \wedge p(a)] \rightarrow q(a)$

1	$\forall x, p(x) \rightarrow q(x)$	H
2	$p(a)$	H
3	$p(a) \rightarrow q(a)$	1 Eliminação universal
4	$q(a)$	$2, 3\ MP$

Introdução universal

$p(a)$	a é branco.
$\therefore \quad \forall x, p(x)$	$\therefore x$ é branco.

É fundamental que $p(a)$ não seja uma hipótese e não dependa de nenhuma hipótese em que a ocorra e ainda que $p(x)$ resulte de $p(a)$, substituindo todas as ocorrências de a por x.

. $[(\forall x, p(x) \to q(x)) \wedge (\forall x, q(x) \to r(x))] \to (\forall x, p(x) \to r(x))$

1	$\forall x, p(x) \to q(x)$	H
2	$\forall x, q(x) \to r(x)$	H
3	$p(a)$	$[H]$
4	$p(a) \to q(a)$	1 Eliminação universal
5	$q(a)$	$3, 4$ MP
6	$q(a) \to r(a)$	2 Eliminação universal
7	$r(a)$	$5, 6$ MP
8	$p(a) \to r(a)$	$3 - 7$ Introdução da implicação
9	$\forall x, p(x) \to r(x)$	8 introdução universal

1	$\forall x, x = x$	H
2	$a = a$	1 Eliminação universal
3	$\forall y, a = y$	2 Introdução universal
4	$\forall x, y, x = y$	3 Introdução universal

Se ab é um número par, então a ou b é par.

Prova 1

Suponhamos que a e b são ímpares. Portanto, $a = 2k + 1$ e $b = 2m + 1$, para alguns inteiros k e m. Então

$$\begin{aligned} ab &= (2k+1)(2m+1) \\ &= 4km + 2k + 2m + 1 \\ &= 2(2km + k + m) + 1. \end{aligned}$$

Portanto ab é ímpar.

Prova 2

Suponhamos que a ou b é par - digamos que é a (o caso em que b é par, será análogo). Portanto, $a = 2k$ para algum inteiro k. Então

$$\begin{aligned} ab &= (2k)b \\ &= 2(kb). \end{aligned}$$

Portanto ab é par.

Se ab é um número par, então a ou b é par.

Prova 3

Suponhamos que ab é par, mas a e b são ambos ímpares. Portanto, $ab = 2n$, $a = 2k + 1$ e $b = 2j + 1$ para alguns inteiros n, k, e j. Então

$$\begin{array}{rcl} 2n & = & (2k+1)(2j+1) \\ 2n & = & 4kj + 2k + 2j + 1 \\ n & = & 2kj + k + j + 0,5. \end{array}$$

Mas $2kj + k + j$ é um inteiro o que implica que temos n igual a um número não inteiro, o que é impossível.

Prova 4

Suponhamos que ab é um número par, digamos $ab = 2n$, e que a é um número ímpar, digamos $a = 2k + 1$. Então

$$\begin{array}{rcl} ab & = & (2k+1)b \\ 2n & = & 2kb + b \\ 2n - 2kb & = & b \\ 2(n - kb) & = & b. \end{array}$$

Então b tem de ser par.

T: Se ab é um número par, então a ou b é par.

p: ab é um número par

q: a é par

r: b é par

$\boxed{\text{T: } p \to (q \lor r)}$

Prova 1: $(\neg q \land \neg r) \to \neg p \equiv \neg(q \lor r) \to \neg p \equiv p \to (q \lor r)$ $\boxed{\neg(q \lor r) \to \neg p}$ ✓

Prova 2: $(q \lor r) \to p \not\equiv p \to (q \lor r)$ $\boxed{(q \lor r) \to p}$ X

Prova 3: $(p \land \neg(q \lor r)) \to F \equiv p \to (q \lor r)$ $\boxed{(p \land \neg(q \lor r)) \to F}$ ✓

Prova 4: $(p \land \neg q) \to r \equiv p \to (q \lor r)$ $\boxed{(p \land \neg q) \to r}$ ✓