Séries Numéricas

Luísa Morgado

1^{o} Ciclo em Engenharia Informática

Neste capítulo pretende-se estender a noção de soma (até agora estudada para um número finito de parcelas), a uma infinidade de parcelas. Isto é, pretende-se atribuir significado a expressões do tipo

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1$$

$$\text{ou}\quad 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots=e.$$

As igualdades acima equivalem a dizer que

$$\lim_n \left(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=1$$

$$\text{ou}\quad \lim_n \left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=e.$$

Seja $(a_n)_n$ uma sucessão de números reais. Com esta sucessão podemos formar uma nova sucessão, $(S_n)_n$, colocando:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 = S_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n\,, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

A $(S_n)_n$ dá-se o nome de sucessão associada da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e a a_n chama-se termo geral da série ou n-ésimo termo da série. Assim, se existir e for finito o limite

$$\lim_n S_n = S$$

dizemos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge e tem soma igual a S. Neste caso escreve-se

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Caso contrário, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Condição necessária de convergência

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente, então $\lim_n a_n = 0$.

<u>Nota:</u> O recíproco desta proposição nem sempre é verdadeiro. Existem séries divergentes cujo limite do termo geral é igual a zero, como, por exemplo, a série harmónica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

De facto, seja $(S_n)_n$ a sucessão associada da série e considere-se a subsucessão $(S_{2^k})_k$. Então,

$$\begin{aligned} S_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \\ & \quad \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}+2^{k-1}}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \ldots + \frac{2^{k-1}}{2^k} = 1 + \frac{k}{2} \end{aligned}$$

Como $\lim_k \left(1 + \frac{k}{2}\right) = +\infty$, então $\lim_n S_n = +\infty$ e, como tal, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

Analogamente se prova que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, com $0 < p < 1$, é divergente ($n > n^p \implies \frac{1}{n} < \frac{1}{n^p}$, $\forall n$.)

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries convergentes e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ é convergente e tem-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\,;$$

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda\, a_n$ é convergente e tem-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda\, a_n = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

<u>Nota:</u> Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente se e só se $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ converge, onde $p \in \mathbb{N}$ é fixado arbitrariamente.
Dito de outra forma, significa que a natureza de uma série não se altera se a ela acrescentarmos ou omitirmos um número finito de termos. É claro que a soma, no caso de séries convergentes, se altera.

Exemplo

- *Série geométrica:* $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$, *com* $r \in \mathbb{R}$;

  A sucessão associada da série é dada por

$$\begin{aligned} S_n &= r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n \\ &= r\left(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}\right) \\ &= r\,\frac{1-r^n}{1-r}\,. \end{aligned}$$

  Ora, $\lim_n S_n = \lim_n r\,\frac{1-r^n}{1-r}$ *e*

$$\lim_n r^n = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad |r| < 1 \\ 1 & \text{se} \quad r = 1 \\ +\infty & \text{se} \quad r > 1 \\ \text{não existe} & \text{se} \quad r \leq -1 \end{cases} \quad .$$

  Assim, se $|r| < 1$, *a série geométrica* $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$ *é convergente e tem soma* $\frac{r}{1-r}$. *No caso em que* $|r| \geq 1$, *a condição necessária de convergência permite concluir que a série* $\sum^{+\infty} r^n$ *é divergente.*

Exemplo

- *Série telescópica ou de Mengoli:* $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_{n+p})$, *com* $p \in \mathbb{N}$;

  A sucessão associada da série é dada por

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 - a_{1+p} + a_2 - a_{2+p} + \ldots + a_n - a_{n+p} \\ &= a_1 + a_2 + \ldots + a_p + a_{1+p} + \ldots + a_n - a_{1+p} - a_{2+p} - \ldots - a_{n+p} \\ &= a_1 + a_2 + \ldots + a_p - a_{n+1} - \ldots - a_{n+p}\,. \end{aligned}$$

  Logo, se existir $\lim\limits_n a_n$, *a série* $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_{n+p})$ *é convergente e tem-se, neste caso,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_{n+p}) = a_1 + a_2 + \ldots + a_p - p \lim_n a_n.$$

  Caso contrário, a série é divergente.

Exemplo

Calculemos a soma das seguintes séries.

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4}{2^n}$;

  A série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ *é uma série geométrica de razão* $r = \frac{1}{2} < 1$, *logo convergente. Tem-se, então,*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Logo,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4}{2^n} = 4\,\frac{1}{2} = 2.$$

Exemplo

- $$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=4}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

  Trata-se de uma série de Mengoli, com $p = 1$ *e* $a_n = \frac{1}{n}$. *Como* $\lim_n \frac{1}{n} = 0$, *a série é convergente e tem-se*

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{4} - 1 \times \lim_n \frac{1}{n} = \frac{1}{4}.$$

Critério do integral

Seja $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, não negativa e decrescente no intervalo $[1, +\infty[$. Então o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ e a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ são da mesma natureza.

✍ Utilize o critério do integral para mostrar que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente para $p > 1$ e é divergente para $0 < p \leq 1$.

Primeiro critério de comparação

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries de termos não negativos. Se existem $k \in \mathbb{R}^+$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$a_n \leq k\, b_n, \quad \forall n > n_0,$$

então,

1. se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente;
2. se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente.

Exemplo

Determine a natureza das seguintes séries.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{2^n}$;

  Note-se que $0 < \frac{\pi}{n} \leq \pi$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *o que implica que* $\sin\frac{\pi}{n} \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Logo, a série dada é de termos positivos. Por outro lado, atendendo a que*

  $$\sin\frac{\pi}{n} \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

  tem-se

  $$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

  e, sendo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ *uma série geométrica convergente, o 1º critério de comparação permite concluir que a série dada é convergente.*

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, com $p > 1$ (Série de Riemann ou de Dirichlet);

Seja $(S_n)_n$ a sucessão associada da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ e calculemos o seu termo de ordem $m = 2^n - 1$:

$$\begin{aligned}
S_m &= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \ldots + \\
&\quad \left(\frac{1}{(2^n - 2^{n-1})^p} + \frac{1}{(2^n - (2^{n-1} - 1))^p} + \frac{1}{(2^n - (2^{n-1} - 2))^p} + \ldots + \frac{1}{(2^n - 1)^p}\right) \\
&< 1 + 2\frac{1}{2^p} + 4\frac{1}{4^p} + \ldots + 2^{n-1}\frac{1}{(2^n - 2^{n-1})^p} \\
&= 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^p} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^i}{(2^i)^p} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2}{2^p}\right)^i = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^i .
\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{2^p}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $\frac{2}{2^p}$ e, como

$$p > 1 \implies 2^p > 2 \implies \frac{2}{2^p} < 1,$$

a série é convergente.

Assim, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $0 < p \leq 1$. Esta série é conhecida por Série de Riemann ou de Dirichlet.

Segundo critério de comparação

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries de termos não negativos, com $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
Então,

1. se o limite $\lim_n \frac{a_n}{b_n}$ existir, for finito e diferente de zero, então as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são da mesma natureza;
2. se $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 0$ e se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente;
3. se $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ e se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Exemplo

Determine a natureza das seguintes séries.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}2\sin^2\frac{1}{2n}$;

  Considere-se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$. *Trata-se de uma série de Dirichlet com* $p=2>1$, *logo convergente.*

$$\lim_n 2\,\frac{\sin^2\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_n \frac{2}{4}\,\frac{\sin^2\frac{1}{2n}}{\left(\frac{1}{2n}\right)^2}=\frac{1}{2}.$$

  Pelo 2º critério de comparação, concluímos que as séries são da mesma natureza, i.e., ambas convergentes.

Exemplo

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$;

  Considere-se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. *Trata-se da série harmónica, logo divergente.*

$$\lim_n \frac{\frac{n^2+1}{n^3}}{\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{n^3+n}{n^3} = 1.$$

  Pelo 2º critério de comparação, as séries são da mesma natureza, i.e., ambas divergentes.

Critério da raiz

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos não negativos e suponhamos que

$$L = \lim_n \sqrt[n]{a_n}.$$

Então,

1. se $L > 1$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente;
2. se $0 \leq L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente;
3. se $L = 1$, nada se pode concluir relativamente à natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Exemplo

Determine a natureza da seguinte série.

1. $$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\,\ln\frac{n+1}{n}\right)^{n};$$

Trata-se de uma série de termos não negativos, uma vez que

$$0<\frac{1}{n}\leq 1,\ \ \forall n\ \implies\ \tan\frac{1}{n}>0,\ \ \forall n.$$

$$\lim_n\sqrt[n]{\left(n\tan\frac{1}{n}\,\ln\frac{n+1}{n}\right)^{n}}=\lim_n\frac{\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1\times\ln 1=0<1,$$

logo, pelo critério da raiz, a série dada é convergente.

Critério de D'Alembert ou da razão

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos positivos e suponhamos que

$$L = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Então,

1. se $0 \leq L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente;
2. se $L > 1$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente;
3. se $L = 1$, nada se pode concluir relativamente à natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Exemplo

Determine a natureza da seguinte série.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{2^n}$;

   Trata-se de uma série de termos positivos. Pode, então, aplicar-se o critério de D'Alembert:

$$\lim_n = \lim_n \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\frac{n!}{2^n}} = \lim_n \frac{(n+1)!2^n}{n!2^{n+1}} = \lim_n \frac{n+1}{2} = +\infty,$$

   logo a série dada é divergente.

E que critérios aplicar a séries não necessariamente de termos positivos?

1. Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diz-se absolutamente convergente quando a série dos módulos $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ é uma série convergente.
2. Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diz-se simplesmente convergente quando a série é convergente mas a série dos módulos diverge.

Toda a série absolutamente convergente é convergente.

Critério de Leibniz

Se $(a_n)_n$ é uma sucessão monótona decrescente, com $a_n \geq 0, \forall n$, e $\lim_n a_n = 0$, então a série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ é convergente.

Exemplo

- *A série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *é simplesmente convergente.*

  Efetivamente, a sucessão de termo geral $a_n = \frac{1}{n}$ *é monótona decrescente e satisfaz* $a_n > 0, \forall n$, *e* $\lim_n a_n = 0$. *Como tal, a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *é convergente. No entanto, a série dos módulos,* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, *é divergente.*

- *A série* $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n}$ *é simplesmente convergente.*

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\ln(n+1)} - \frac{1}{\ln n} = \frac{\ln n - \ln(n+1)}{\ln n \ln(n+1)} = \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}{\ln n \ln(n+1)} < 0, \quad \forall n \geq 2,$$

logo $(a_n)_n$ *é monótona decrescente,* $a_n > 0, \forall n \geq 2$, *e* $\lim_n \frac{1}{\ln n} = 0$. *Assim, a série* $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n}$ *é simplesmente convergente.*

Exemplo

- *A série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2}$ *é absolutamente convergente.*

  Consideremos a série dos módulos $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\cos(n\pi)|}{n^2}$. *Atendendo a que*

  $$\frac{|\cos(n\pi)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \quad \forall n,$$

  e a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *é convergente, o 1º critério de comparação permite-nos concluir que a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\cos(n\pi)|}{n^2}$ *é convergente. Assim,* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2}$ *é absolutamente convergente.*