Teoria de Conjuntos

Tópicos de Matemática Discreta

EInf & MACD

— 16/17/18 de novembro de 2020 —

Diagrama de Hasse

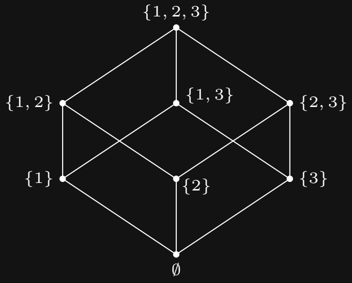
Considere-se um conjunto parcialmente ordenado $(S, \preceq)$.

- Cada elemento de S é representado por um ponto chamado **vértice**.
- Se y é sucessor imediato de x, coloca-se o vértice de y acima do vértice de x, ligados por um segmento de reta, dita **aresta**.

Exemplo

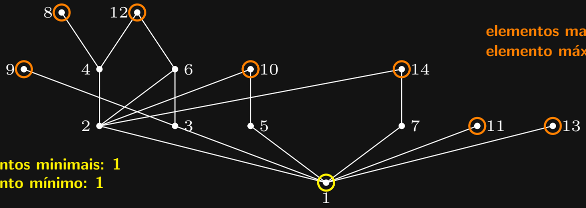
Consideremos $S = \{1, 2, 3\}$ e o conjunto parcialmente ordenado

$$(\mathcal{P}(S), \subseteq) = (\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}, \subseteq)$$



Exemplo

Consideremos a relação "|" definida em $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$. O diagrama de Hasse deste c.p.o é



elementos maximais: 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14
elemento máximo: não tem

elementos minimais: 1
elemento mínimo: 1

Elementos especiais num conjunto parcialmente ordenado

Num conjunto parcialmente ordenado $(S, \preceq)$:

- se existir um elemento $y \in S$ tal que $y \preceq x$ para todo o $x \in S$, diz-se que y é o **elemento mínimo** de $(S, \preceq)$
- um elemento $y \in S$ diz-se **minimal** em $(S, \preceq)$ se não existir $x \in S$ tal que $x \prec y$
- se existir um elemento $y \in S$ tal que $y \succeq x$ para todo o $x \in S$, diz-se que y é o **elemento máximo** de $(S, \preceq)$
- um elemento $y \in S$ diz-se **maximal** em $(S, \preceq)$ se não existir $x \in S$ tal que $x \succ y$

Nota: Um elemento mínimo é sempre minimal e um elemento máximo é sempre maximal. O contrário nem sempre se verifica.

Teorema: Num conjunto parcialmente ordenado $(S, \preceq)$,

(a) se existe um elemento mínimo ele é único.

(b) se existe um elemento máximo ele é único.

Relação de ordem total

Uma relação binária definida num conjunto S que seja transitiva e tricotómica diz-se uma **relação de ordem total** ou **cadeia**.

Exemplos

- A relação "$<$" no conjunto dos números reais é uma relação de ordem total;
- A relação "$\leq$" no conjunto dos números reais não é uma relação de ordem total;

Relação de equivalência

Um relação binária definida num conjunto S que seja reflexiva, simétrica e transitiva diz-se uma relação de equivalência em S.

Exemplo

Seja ρ a relação binária em $\mathbb{Z}$ definida por $a\rho b \Leftrightarrow a - b$ é divisível por 3.

. Reflexividade: $\forall x \in \mathbb{Z}, x\rho x$;

. Simetria: $\forall x, y \in \mathbb{Z}, x\rho y \to y\rho x$;

. Transitividade: $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}, (x\rho y \wedge y\rho z) \to x\rho z$;

Exemplo (cont.)

Nas relações de equivalência assume particular importância o conjunto de todos os elementos que estão em relação com um dado elemento a. Vejamos, para a relação definida atrás, os exemplos para $a = 1, 2, 3$:

. $a_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x\rho 1\}$. Temos

$$\begin{aligned} x\rho 1 \quad &\Leftrightarrow x - 1 \text{ é divisível por 3} \\ &\Leftrightarrow x - 1 = 3k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = 3k + 1, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x \text{ tem resto 1 na divisão por 3} \end{aligned}$$

. $a_2 = \{x \in \mathbb{Z} : x\rho 2\}$. Temos

$$\begin{aligned} x\rho 2 \quad &\Leftrightarrow x - 2 \text{ é divisível por 3} \\ &\Leftrightarrow x - 2 = 3k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = 3k + 2, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x \text{ tem resto 2 na divisão por 3} \end{aligned}$$

. $a_3 = \{x \in \mathbb{Z} : x\rho 3\}$. Temos

$$\begin{aligned} x\rho 2 \quad &\Leftrightarrow x - 3 \text{ é divisível por 3} \\ &\Leftrightarrow x - 3 = 3k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = 3k + 3, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = 3(k + 1), \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x \text{ tem resto 0 na divisão por 3} \end{aligned}$$

$\mathbb{Z}$

a_0	a_1	a_2
3 **0**	4 **1**	5 **2**
-225	-227	53
99	87	-254
-3 $\cdots$	-5 $\cdots$	-10 $\cdots$

Classe de Equivalência

Se ρ é uma relação de equivalência definida no conjunto S e $x \in S$, representa-se por $[x]$ o conjunto de todos os elementos de S relacionados com x e chama-se classe de equivalência de x:

$$[x] = \{y \in S : x\rho y\}$$

Exemplo

Seja $S = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ e ρ a relação binária definida sobre S, por

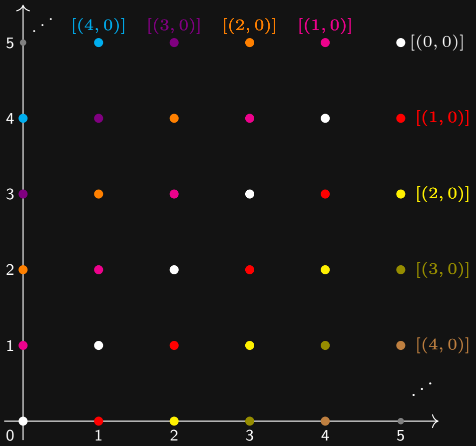
$$(a, b)\rho(c, d) \text{ se e só se } a + d = b + c.$$

- Mostre que ρ é uma relação de equivalência;
- Determine as classes de equivalência dos elementos $(0, 0), (m, 0)$ e $(0, n)$ onde $m, n \in \mathbb{N}$;
- Mostre que $\{[(0, 0)], [(m, 0)], [(0, n)] : m, n \in \mathbb{N}\}$ é uma partição de S.

$S = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ e $(a, b)\rho(c, d)$ se e só se $a + d = b + c$.

$S = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ e $(a,b)\rho(c,d)$ se e só se $a+d = b+c$.

$$\{[(0,0)]\,, [(m,0)]\,, [(0,n)] : m,n \in \mathbb{N}\}$$



Para toda a relação de equivalência ρ definida num conjunto S, o conjunto das classes de equivalência distintas de S constitui uma partição de S.

Dada uma partição de um conjunto S, a relação ρ definida por $x\rho y$ se e só se "x e y pertencem ao mesmo subconjunto da partição" é uma relação de equivalência.

Exemplo

Dada a partição $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$ do conjunto $S=\{1,2,3,4\}$, liste os pares ordenados da correspondente relação de equivalência.

Conjunto Quociente

O conjunto das classes de equivalência definidas num conjunto S, diz-se o conjunto quociente de S por ρ e escreve-se:

$$S/\rho=\{[x]:x\in S\}$$

Para toda a relação de equivalência ρ definida num conjunto S, existe uma bijeção entre S e S/ρ.