Derivadas: Teoremas fundamentais

Matemática

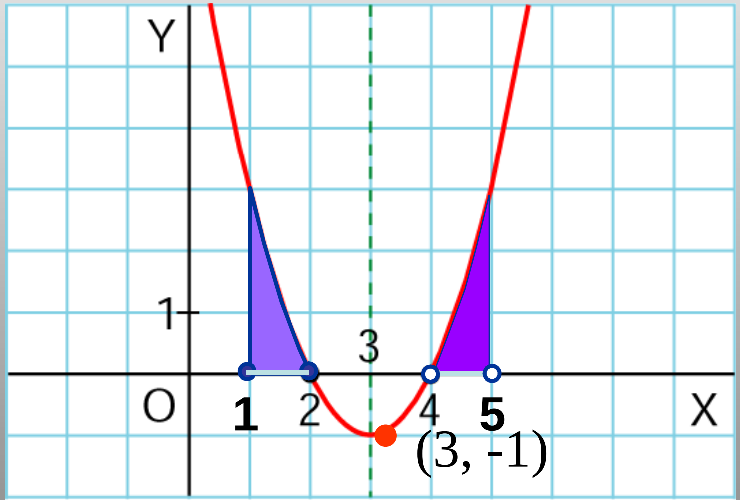
1º Ciclo Engª Informática

Luísa Morgado

Máximos e mínimos relativos

Diz-se que uma função *f(x)* tem um máximo (mínimo) relativo em *x* = *a* se existe un intervalo aberto]*a* – *h*, *a* + *h*[, *h* > 0 , tal que f(*x*)> f(*a*) (f(x)<f(a)) para todo x pertencente a esse intervalo.

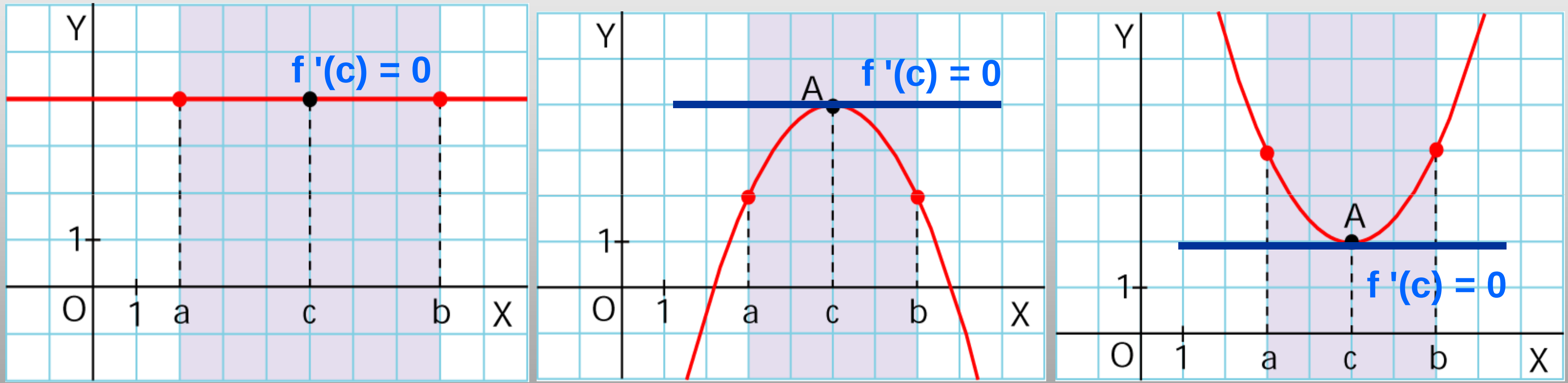
A função f(x) = x^2 – 6x + 8



- tem um mínimo relativo no ponto (3, -1). Não tem máximos relativos.
- tem um mínimo absoluto no seu dominio, R, no ponto (3, -1). Não tem máximo absoluto no seu dominio.
- tem um mínimo absoluto no intervalo [1, 2], no ponto (2, 0). Nesse mesmo intervalo tem um máximo absoluto no ponto (1, 3).
- não tem máximos nem mínimos no intervalo]4, 5[.

Derivada num ponto de máximo ou mínimo

Se uma função f tem um extremo local (relativo) no ponto c e é diferenciável nesse ponto, então f '(c) = 0.



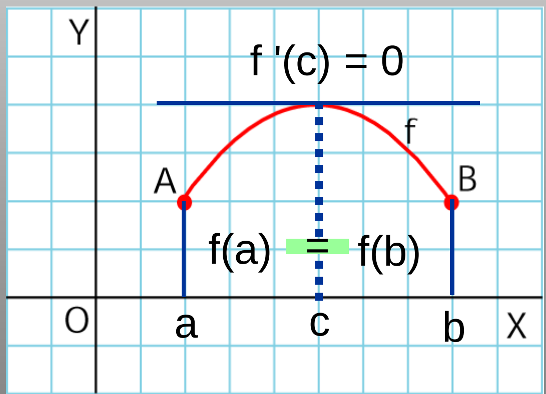
Teorema de Rolle

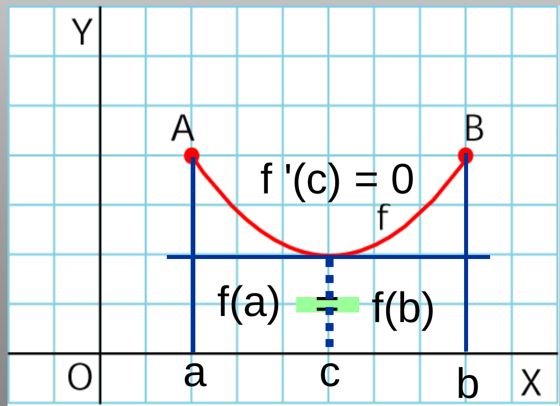
Seja f(x) uma f.r.v.r.. Se

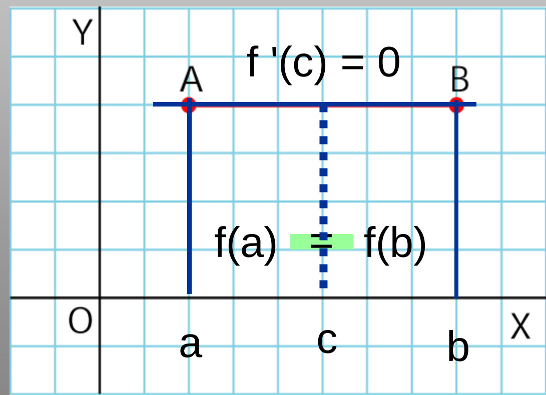
- f é contínua em [a, b],
- f é diferenciável em]a, b[,
- f(a) = f(b),

então existe pelo menos um ponto $c \in$]a, b[tal que f '(c) = 0.

Geometricamente este teorema garante que uma função que satisfaça as hipóteses anteriores tem, pelo menos, um ponto (c, f(c)) no qual a tangente é horizontal.







Dem.:

Sendo f contínua en [a,b], pelo Teor. de Weierstrass f tem máximo M e mínimo m em [a,b].

- Se $m = M$, então $\forall\ x \in [a,b]$ $f(x) = M$ (f é uma função constante nesse intervalo), logo $f'(x) = 0$, $\forall\ x \in [a,b]$.

- Senão, $m < M$ e como por hipótese $f(a)=f(b)$, então o máximo ou o mínimo terá que ser atingido num ponto c interior ao intervalo.

- Como f é diferenciável em]a,b[, então $f'(c)=0$.

Consequências do teorema de Rolle

Entre dois zeros de uma função diferenciável num intervalo, há pelo menos um zero da sua derivada.

Entre dois zeros consecutivos da derivada de uma função diferenciável num intervalo, há no máximo um zero dessa função.

Teorema do valor médio de Lagrange.

Se a função f(x) é

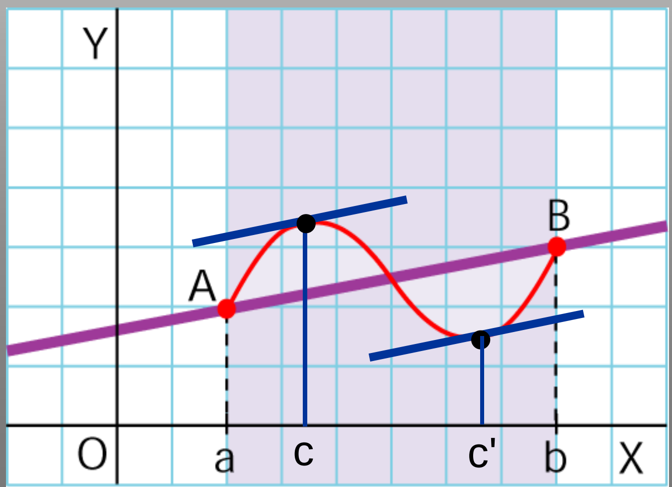
- continua em [a, b],
- diferenciável em]a, b[,

Então existe pelo menos um $c \in$]a, b[tal que:

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

- **Interpretação geométrica**: para uma função que satisfaça as hipóteses anteriores, existe sempre pelo menos um ponto (c, f(c)) no qual a recta tangente é paralela à recta secante que passa pelos pontos (a, f(a)) e (b, f(b)).

- **Interpretação analítica**: se uma função satisfaz as hipóteses anteriores, em algum ponto $c \in]a,b[$ a razão incremental ou a taxa de variação média (f(b) – f(a)) / (b – a), é igual à derivada da função nesse ponto.



Declive recta AB: $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$$f'(c) = f'(c') = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

c e *c*' são os pontos cuja existência é garantida pelo teorema

Dem.

- Consideremos a função auxiliar g(x) = f(x) + hx, h ∈ **R**.

- g é continua em [a,b] por ser a soma de funcões contínuas. g é diferenciável em]a,b[por ser a soma de funcões diferenciáveis.

- Para podermos aplicar o teorema de Rolle teremos que ter
- f(a)=f(b)⇔ f(a) + ha = f(b) + hb ⇔ f(a) - f(b) = h(b - a), i.e.,

$$h = \frac{f(a) - f(b)}{b - a}$$

- Nestas condições, o teorema de Rolle garante a existência de um c ∈]a,b[tal g'(c) = 0

- Ora g'(x) = f '(x) +h, g'(c) =f '(c) +h =0 donde f '(c) = − h

resultando:

$$\boxed{f'(c) = -h = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Teorema de Cauchy

Se f e g são funções contínuas em [a, b] e diferenciáveis em]a, b[, então existe um c $\in$]a, b[tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{desde que } g(b) \neq g(a) \text{ e } g'(c) \neq 0$$

Dem.: Seja h(x) = f(x) + kg(x)

- h é continua en [a,b] por ser a soma de funções contínuas em [a,b].
- h é diferenciável em]a,b[por ser a soma de funções diferenciáveis em]a,b[.

h(a)=h(b)$\Leftrightarrow$ f(a)+kg(a)=f(b)+kg(b)

$\Leftrightarrow$k(g(a)-g(b))=f(b)-f(a)$\Leftrightarrow$ $-k = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

Pelo teorema de Rolle $\exists$ c $\in$(a,b) tal que h'(c) = 0.

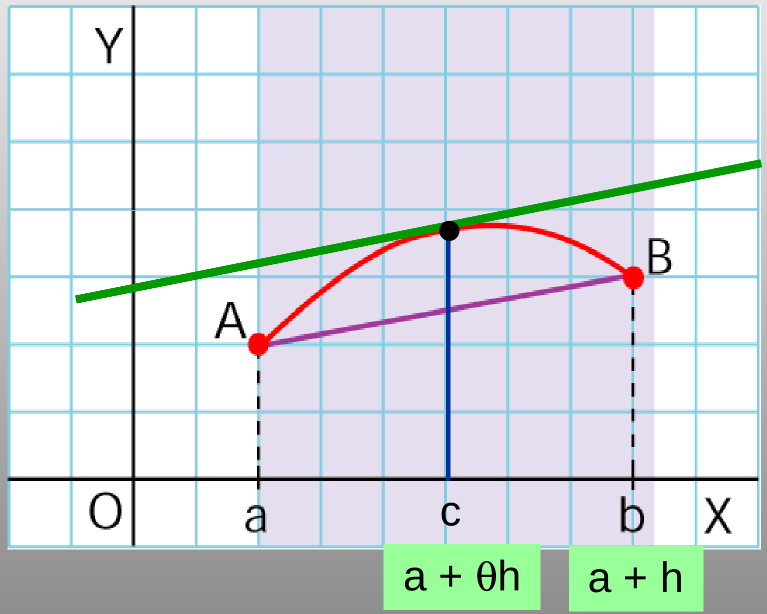
h'(x)=f'(x)+kg'(x), h'(c)=0$\Leftrightarrow$f'(c)+kg'(c)=0$\Leftrightarrow$f'(c)/g'(c) = -k

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Consequências do teorema do valor médio

I. Se f(x) é uma função contínua em [a – h, a + h] e diferenciável em]a – h, a + h[, então :

$$f(a + h) = f(a) + h \cdot f'(a + \theta h) \text{ com } \theta \in (0, 1).$$



- f(x) satisfaz as hipóteses do teorema do valor médio de Lagrange, logo

$$f(a) = f(b) + (b – a)\ \ f'(c) \text{ con } c \in (a, b).$$

- Se $b = a + h$, então $c = a + \theta h$ con $\theta \in (0, 1)$.

2. Se uma função *f(x)* tem derivada nula em todos os pontos de um intervalo aberto I, então é constante nesse intervalo.

Dem.: Sejam u e v dois pontos distintos de I, tais que $u<v$. f é diferenciável e portanto contínua no intervalo $[u,v]$. O teorema de Lagrange garante a existência de um ponto $c \in]u,v[$ tal que

$$f(v)-f(u)=(v-u)f'(c).$$

Como, por hipótese, $f'(c)=0$ então $f(u)=f(v)$, ou seja, f é constante em I.

3. Se f e g são duas funções diferenciáveis em I e se, para qualquer $x \in I$, $f'(x)=g'(x)$, então a diferença f-g é constante em I.

Dem.: Basta notar que nestas condições se tem

$$[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)=0,$$

para todo o $x \in I$ e atender ao resultado anterior.

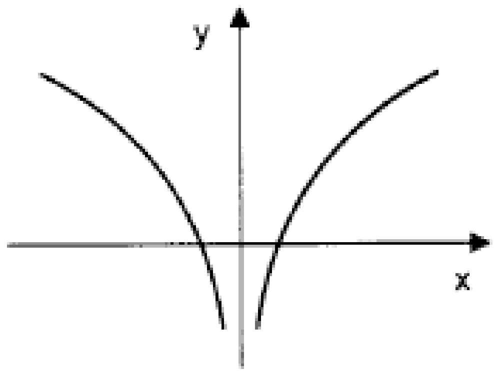
3. Se, para todo o $x \in I$, se tem $f'(x)>0$, f é estritamente crescente em I;
Se, para todo o $x \in I$, se tem $f'(x)<0$, f é estritamente decrescente em I.

Exemplo: Para a função $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

a derivada $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

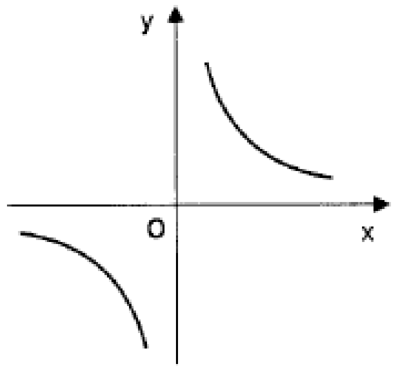
é positiva sempre que x é negativo e negativa para x positivo. É portanto crescente para $x<0$ e decrescente para $x>0$. Atendendo à continuidade no ponto 0, podemos afirmar que atinge o seu máximo absoluto nesse ponto.

Na figura ao lado está parte da representação gráfica de uma função g, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

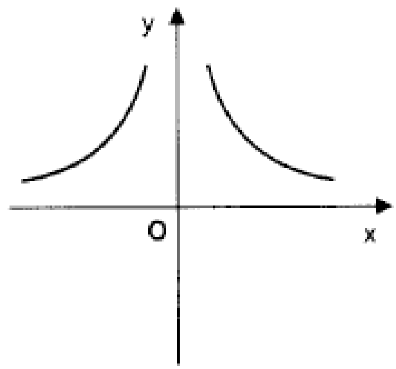


Qual das figuras seguintes poderá ser parte da representação gráfica da função g', **derivada** de g ?

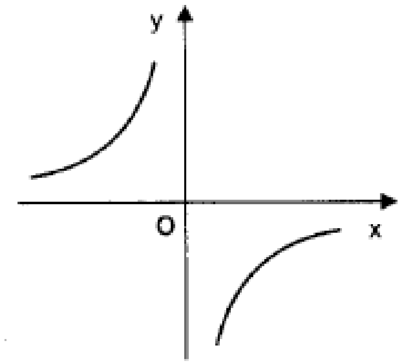
(A)



(B)



(C)



Teste da primeira derivada : Suponhamos que *c* é um ponto crítico da função contínua *f* (i.e., f'(c)=0).

Se *f '* troca de sinal positivo a negativo em *c*, então *f* tem um máximo relativo em *c*.

Se *f '* troca de sinal negativo a positivo em *c*, então *f* tem um mínimo relativo em *c*.

Se *f '* não troca de sinal em *c*, então *f* não tem máximo nem mínimo em *c*.

Exemplo: Determinemos os mínimos e máximos da função

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 5$$

Como *f '* (x) = 3(x + 1)(x - 2)

f ' troca de sinal positivo a negativo em -1, logo *f* (-1) = 8.5 é um máximo local de f ;

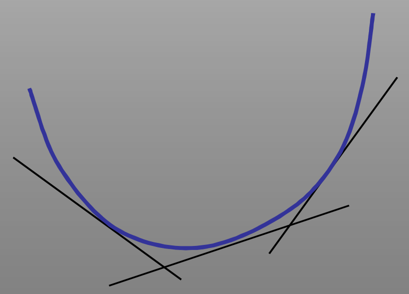
f ' troca de sinal negativo a positivo em 2, logo *f* (2) = -5 é um mínimo local de f .

Concavidade

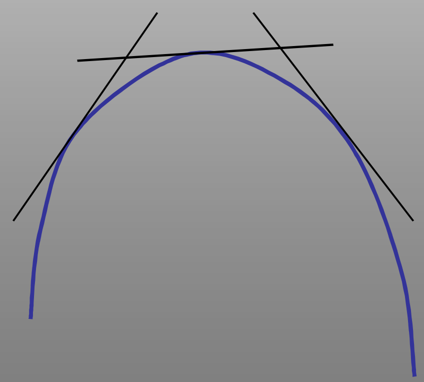
Definição:

(a) Se o gráfico de f se encontra acima de todas as suas rectas tangentes em pontos de um dado intervalo, então f tem a **concavidade voltada para cima** nesse intervalo**.**

(b) Se o gráfico de f se encontra abaixo de todas as suas rectas tangentes em pontos de um dado intervalo, então f tem a **concavidade voltada para baixo** nesse intervalo**.**



Concavidade voltada para cima

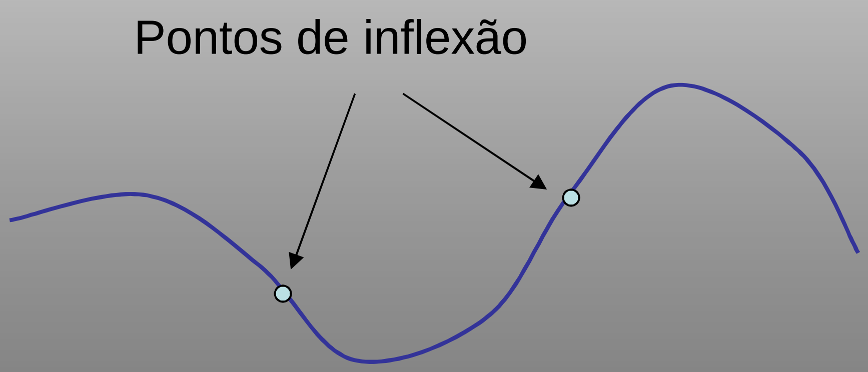


Concavidade voltada para baixo

Pontos de Inflexão

Definição:

Um ponto P de uma curva $y = f(x)$ é um ponto de **inflexão** se f é contínua nesse ponto e nesse ponto a curva muda o sentido da sua concavidade



Teste da concavidade :

(a) Se $f''(x) > 0$ para todo o x num dado intervalo, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima nesse intervalo.

(b) Se $f''(x) < 0$ para todo o x num dado intervalo, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo nesse intervalo.

Exemplo: No caso da função do exemplo anterior, como

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 \qquad f''(x) = 6x - 3$$

$f''(x) > 0$ para $x > 0.5$, logo f tem a concavidade voltada para cima em $]0.5, +\infty[$.

$f''(x) < 0$ para < 0.5 , logo f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0.5[$.

O gráfico tem portanto um ponto de inflexão em $x = 0.5$.

Teste da segunda derivada: Suponhamos que f é contínua numa vizinhança de c.

(a) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$ então f tem um mínimo relativo em c.

(b) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$ então f tem um máximo relativo em c.

Exemplo: No caso do exemplo anterior

$$f'(x) = 3x^2 – 3x – 6 = 3(x + 1)(x - 2) ,$$

logo $f'(x) = 0$ em $x=-1$ e em $x=2$

$f''(x) = 6x - 3$

$f''(-1) = 6(-1) – 3 = -9 < 0$, donde $x = -1$ é um máximo relativo.

$f''(2) = 6.2 – 3 = 9 > 0$, logo $x = 2$ é um mínimo relativo

Assímptotas

- Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$
  f tem uma assímptota vertical em $x = x_0$

- Se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$
  f tem uma assímptota horizontal em $y = l$

- Se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$
  f tem uma assímptota oblíqua de equação $y = ax+b$

se $a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ $\quad$ $b = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax$

Passos a seguir para fazer o traçado de um gráfico de uma função

- Determinar o domínio
- Determinar os pontos de intersecção com os eixos
- Verificar simetrias
- Determinar assímptotas
- Intervalos de monotonia
- Calcular pontos de máximo e mínimo
- Estudar a concavidade e determinar os pontos de inflexão

Exemplo: Tracemos o gráfico da seguinte função

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$$

- Domínio:

  D= $\{x : x^2 - 1 \neq 0\} = \{x : x \neq \pm 1\}$

  $= (-\infty, -1) \cup (-1, -1) \cup (1, \infty)$

- Pontos de intersecção com os eixos:

Pontos de intersecção com o eixo dos xx:

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$, ponto (0,0)

Pontos de intersecção com o eixo dos yy

$f(0)=0$, ponto (0,0)

- Simetrias:

Como $f(-x) = f(x)$, a função é par, o que significa que o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo dos yy.

- Asímptotas:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} = \frac{2}{1-1/x^2} = 2$$

logo $y = 2$ é uma assímptota horizontal ao gráfico de f.

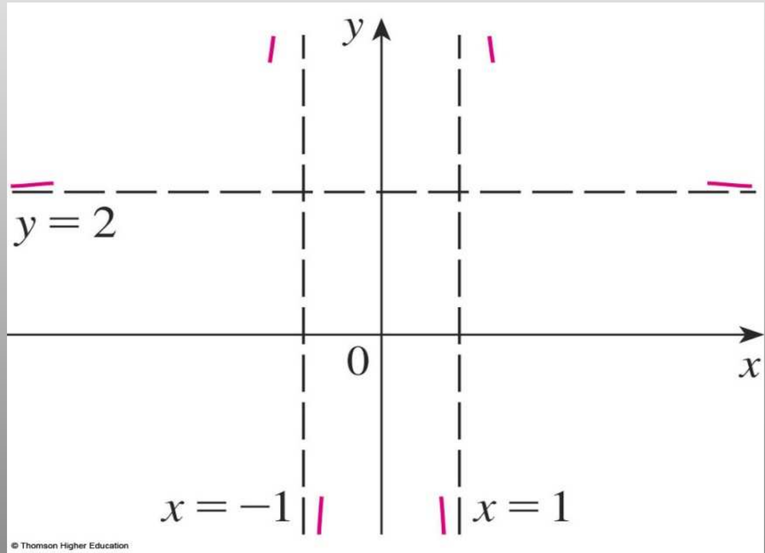
Uma vez que o denominador é 0 quando $x = \pm 1$, vamos calcular os seguintes limites:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2}{x^2-1} = \infty \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2}{x^2-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2}{x^2-1} = \infty$$

Então, as rectas $x = 1$ and $x = -1$ são assímptotas verticais.

- A informação obtida até agora permite-nos fazer o seguinte esboço



- Intervalos de monotonia:

$$f'(x) = \frac{4x(x^2-1) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

Como $f'(x) > 0$ sempre que $x < 0$ ($x \neq 1$) e $f'(x) < 0$ quando $x > 0$ ($x \neq 1$), *f* é:

- crescente em $(-\infty, -1)$ e $(-1, 0)$
- decrescente em $(0, 1)$ e $(1, \infty)$

- Máximos e mínimos:

A primeira derivada anula-se apenas em $x = 0$.

Uma vez que f' muda de sinal positivo para negativo nesse ponto, então $f(0) = 0$ é um máximo local.

- Concavidade e pontos de inflexão:

$$f''(x) = \frac{-4(x^2-1)^2 + 4x \cdot 2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

Uma vez que f''(x)>0⇔|x|>1 e f''(x)<0⇔ |x|<1, então o gráfico da função tem a concavidade voltada para cima nos intervalos (-∞, -1) e (1, ∞) e voltada para baixo no intervalo (-1, -1).

Não tem pontos de inflexão uma vez que os pontos 1 e -1 não pertencem ao domínio de *f*.

Podemos agora fazer o esboço do gráfico: