7. A4 Descreva, analítica e geometricamente, o domínio de cada uma das seguintes funções:

AM I

F.r.v.r. ← 1 variável

$f(x)$ $\quad f: D \subseteq \mathbb{R} \to D' \subseteq \mathbb{R}$

$x \longmapsto y = f(x)$

$D = \{ x \in \mathbb{R} : \dots \}$

(c) $f(x,y) = \ln(x \ln(y - x^2))$

par ordenado

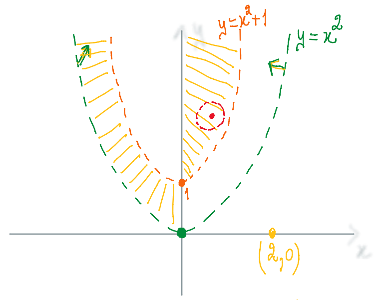
$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x.\ln(y-x^2) > 0 \wedge \underbrace{y - x^2 > 0}_{\boxed{y > x^2}} \}$

$(x > 0 \wedge \ln(y-x^2) > 0) \vee (x < 0 \wedge \ln(y - x^2) < 0)$

$(x > 0 \wedge y - x^2 > 1) \vee (x < 0 \wedge y - x^2 < 1)$

$(x > 0 \wedge y > x^2 + 1) \vee (x < 0 \wedge y < x^2 + 1)$

Representação geométrica do domínio:

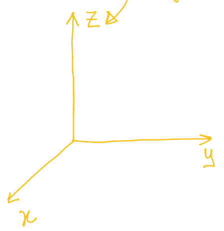


$(2,0)$ $\quad 0 > 4$ ✗

$(0,1)$ $\quad 1 > 0^2$ ✓

Gráfico da função (não é pedido no enunciado):

imagens



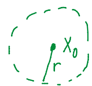
Conjunto limitado? Não, porque não existe nenhuma bola (por maior que seja) que o contenha todo.

Conjunto aberto? Um conjunto C diz-se aberto se $\overset{\circ}{C} = C$

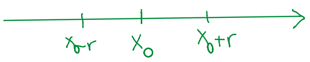
interior de C ($\text{int}(C)$ ou $\overset{\circ}{C}$)

Conjunto fechado?

$\underbrace{B(X_0, r)}_{\text{bola aberta com centro em } X_0 \text{ e raio } r} \to$ o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^n$ que estão a uma distância X_0 inferior a r

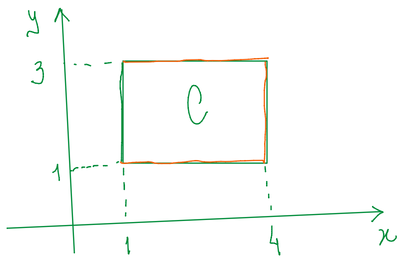


- Em $\mathbb{R}$, $B(X_0, r) = \,]X_0 - r, X_0 + r[$



- Em $\mathbb{R}^2$, $B(X_0, r) \to$ disco ou interior da circunferência com centro em X_0 e raio r.

- Em $\mathbb{R}^3$, $B(x_0, r) \to$ interior da esfera centrada em x_0 e raio r



$$C = [1,4] \times [1,3]$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 4 \ \wedge \ 1 \leq y \leq 3\}$$

interior de $C \longrightarrow \overset{\circ}{C} = \ ]1,4[\ \times \ ]1,3[\ = \operatorname{int}(C)$

Fronteira de $C \longrightarrow \operatorname{Fr}(C) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 4 \ \wedge \ y = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 4 \ \wedge \ 1 \leq y \leq 3\} \cup$
$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 4 \ \wedge \ y = 3\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1 \ \wedge \ 1 \leq y \leq 3\}$

Fecho de C (ou aderência de C) $\longrightarrow \underbrace{\overline{C}}_{\text{Fecho ou aderência de } C} = \overset{\circ}{C} \cup \operatorname{Fr}(C) = C \Rightarrow$ o conjunto C é fechado

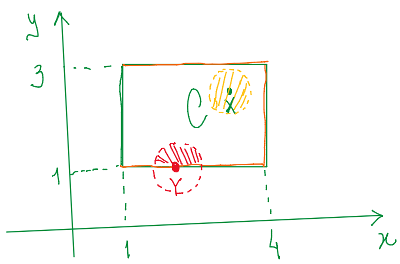
$\operatorname{int}(C) = \overset{\circ}{C}$ é sempre um conjunto aberto $\quad \overset{\circ}{C} \subseteq C$

★ No caso de se ter $\overset{\circ}{C} = C$ dizemos que C é aberto

$\overline{C}$ é sempre um conjunto fechado

★ No caso de se ter $C = \overline{C}$ dizemos que C é fechado

$$\boxed{\overset{\circ}{C} \subseteq C \subseteq \overline{C}} \qquad \overline{C} = \underbrace{\operatorname{int} C}_{\overset{\circ}{C}} \cup \operatorname{Fr}(C)$$



X é um ponto interior a C se existir uma bola centrada em X contida no conjunto

Y é um ponto fronteiro a C se qualquer que seja a bola centrada em Y interseta o conjunto e o complementar do conjunto (isto é,

$\mathbb{R}^2 \setminus C$

se qualquer que seja a bola centrada em Y, contém pontos que pertencem a C e pontos que não pertencem a C)

a C)

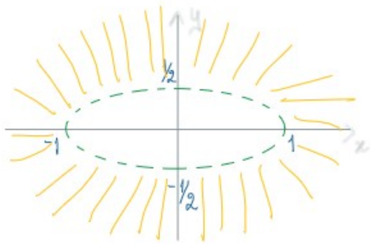
Z é ponto aderente a C (isto é pertence ao conjunto $\overline{C} = \text{int}(C) \cup \text{Fr}(C)$) se qualquer que seja a bola centrada em Z contém algum ponto de C)

(d) $f(x, y) = \ln(x^2 + 4y^2 - 1)$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 - 1 > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 > 1\}$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} > 1 \right\}$$

exterior da elipse centrada em (0,0) e semi-eixos $a = 1$ e $b = \frac{1}{2}$

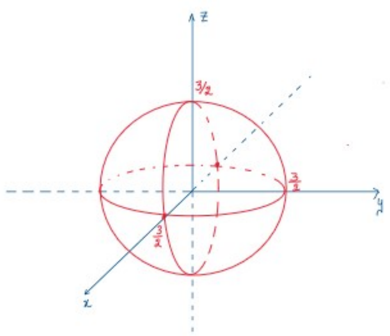


9.d) Não é limitado
é aberto

(e) $f(x, y, z) = \sqrt{\frac{9}{4} - x^2 - y^2 - z^2}$

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{9}{4} - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0 \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{9}{4} \right\}$$

esfera de centro (0,0,0) e raio $\frac{3}{2}$



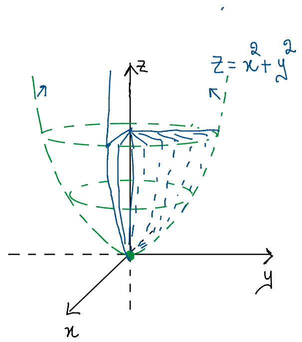
9. e) Limitado Sim
Fechado Sim

(f) $f(x, y, z) = \dfrac{\ln y + 3z \ln x}{\sqrt{z - x^2 - y^2}}$

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{\sqrt{z - x^2 - y^2} \neq 0 \wedge z - x^2 - y^2 \geq 0}_{z - x^2 - y^2 > 0} \wedge y > 0 \wedge x > 0\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > x^2 + y^2 \wedge \underline{y > 0} \wedge \underline{x > 0}\}$$

interior do



Parte do interior do parabolóide (que está no 1.º octante)

9. f) Não é limitado
é aberto