Álgebra Linear (LEI)

Determinantes

abento@[1] ::: eamaral@[1] ::: gsoares[1]

[1] Departamento de Matemática ::: ECT ::: UTAD

Editor: abento@ ::::: Versão de novembro.2020

Determinantes

O universo de trabalho é constituído por todas as matrizes quadradas.

Submatriz $B(i|j)$

Definição (Submatriz $B(i|j)$)

Seja B uma matriz $(m \times n)$.
A matriz resultante de B por supressão da linha i e da coluna j é uma submatriz de B. Denota-se por $B(i|j)$.

Exemplos

1. Se $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, então $B(1|1) = b_{22}$, $B(1|2) = b_{21}$, $B(2|1) = b_{12}$, $B(2|2) = b_{11}$.

2. Se $D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}$, então

$$D(1|1) = \begin{bmatrix} d_{22} & d_{23} \\ d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}, \quad D(1|2) = \begin{bmatrix} d_{21} & d_{23} \\ d_{31} & d_{33} \end{bmatrix}, \quad D(1|3) = \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{bmatrix},$$

$$D(2|1) = \begin{bmatrix} d_{12} & d_{13} \\ d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}, \quad D(2|2) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{13} \\ d_{31} & d_{33} \end{bmatrix}, \quad D(2|3) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{31} & d_{32} \end{bmatrix},$$

$$D(3|1) = \begin{bmatrix} d_{12} & d_{13} \\ d_{22} & d_{23} \end{bmatrix}, \quad D(3|2) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{13} \\ d_{21} & d_{23} \end{bmatrix}, \quad D(3|3) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}.$$

Exercício

Seja F uma matriz, de ordem 5, antissimétrica que tem o menor número de entradas repetidas.
Explicite todas as submatrizes de F, e de ordem 4, que são antissimétricas.

Determinante: caracterização

Notação

Se B é uma matriz quadrada, a forma $\det(B)$ denota a entidade determinante da matriz B.

A forma $|B|$ também será usada para denotar a mesma entidade.

Definição (Determinante de uma matriz quadrada)

Seja B, $B = [b_{ij}]$, uma matriz $(n \times n)$.
Se $n = 1$, então $\det(B) = b_{11}$.
Se $n > 1$, então

$$\det(B) = b_{11}(-1)^{1+1}\det\left(B(1|1)\right) + b_{12}(-1)^{1+2}\det\left(B(1|2)\right) + b_{13}(-1)^{1+3}\det\left(B(1|3)\right) + \cdots + b_{1n}(-1)^{1+n}\det\left(B(1|n)\right).$$

Exemplo

1. Se $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, então
   $\det(B) = b_{11}(-1)^{1+1}\det\left(B(1|1)\right) + b_{12}(-1)^{1+2}\det\left(B(1|2)\right) = b_{11}(1)b_{22} + b_{12}(-1)b_{21} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$.
   Portanto, fixando $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, temos $\det(B) = (2)(5) - (3)(4) = 10 - 12 = -2$.

Proposição (Determinante de uma matriz (2×2))

Se B é (2×2), então $\det(B)$ é a diferença entre o produto das entradas da diagonal principal e o produto das entradas da diagonal secundária. *Alerta! Para matrizes de ordens superiores a 2, isto já não vale*

Determinante de uma matriz (3 *por* 3)

Proposição (Determinante de uma matriz 3 *por* 3)

De acordo com a definição acima, sendo $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$, *então*

$$\begin{aligned} \det(B) &= b_{11}(-1)^2 \det\big(B(1|1)\big) + b_{12}(-1)^3 \det\big(B(1|2)\big) + b_{13}(-1)^4 \det\big(B(1|3)\big) \\ &= b_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} - b_{12} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} + b_{13} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplos

1. Calcular o $\det(\cdot)$ da matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2 & 3 & 4 \\ x & y & z \end{bmatrix}$. Pelo exposto acima:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a(-1)^2 \det\big(A(1|1)\big) - b \det\big(A(1|2)\big) + c \det\big(A(1|3)\big) \\ &= a \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ y & z \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ x & z \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ x & y \end{vmatrix} \\ &= a(3z-4y) - b(2z-4x) + c(2y-3x) = \ldots \end{aligned}$$

2. Calcular o $\det(\cdot)$ da matriz $B = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 2 & 3 & 4 \\ x & 5 & 6 \end{bmatrix}$. Pelo exposto acima:

$$\det(B) = a \det\big(B(1|1)\big) - 0 \det\big(B(1|2)\big) + c \det\big(B(1|3)\big) = a \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ x & 5 \end{vmatrix} = a(18-20) + c(10-3x) = \ldots$$

Cofator e matriz dos cofatores

Definição (Cofator de uma entrada numa matriz)

Seja B uma matriz quadrada. Cofator da entrada (i, j) *da matriz B, denotado por* $cof_B(i, j)$, *é o número* $(-1)^{i+j} \det\left(B(i|j)\right)$. *Formalmente, escrevemos* $\boxed{cof_B(i, j) = (-1)^{i+j} \det\left(B(i|j)\right)}$.

Definição (Matriz dos cofatores)

Seja B uma matriz $(n \times n)$. *Matriz dos cofatores de B —* $cof(B)$ *— é a matriz cuja entrada* (i, j) *é o número* $cof_B(i, j)$.
Nota: quando não houver ambiguidade, podemos usar $cof(i, j)$.

Exemplos

1. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2 & 3 & 4 \\ x & y & z \end{bmatrix}$. $cof(A) = \begin{bmatrix} cof(1,1) & cof(1,2) & cof(1,3) \\ cof(2,1) & cof(2,2) & cof(2,3) \\ cof(3,1) & cof(3,2) & cof(3,3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ y & z \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ x & z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ x & y \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = (\dots)$

   Observação. Produza algumas inferências... quanto à regularidade dos sinais.

2. Seja $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$.

$$cof(B) = \begin{bmatrix} cof(1,1) & cof(1,2) & cof(1,3) \\ cof(2,1) & cof(2,2) & cof(2,3) \\ cof(3,1) & cof(3,2) & cof(3,3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 10 & -1 \\ -11 & 19 & -7 \\ -3 & -18 & 12 \end{bmatrix}.$$

Matriz adjunta

Definição (Matriz adjunta da matriz B; denotada por $adj(B)$)

Seja B uma matriz $(n \times n)$. *Matriz adjunta de B é a transposta da matriz dos cofatores de B, isto é:* $adj(B) = [cof(B)]^T$.

Exemplos

1. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2 & 3 & 4 \\ x & y & z \end{bmatrix}$.

$$adj(A) = [cof(A)]^T = \begin{bmatrix} cof(1,1) & cof(1,2) & cof(1,3) \\ cof(2,1) & cof(2,2) & cof(2,3) \\ cof(3,1) & cof(3,2) & cof(3,3) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ y & z \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ x & z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ x & y \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = (\ldots).$$

2. Seja $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$.

$$adj(B) = [cof(B)]^T = \begin{bmatrix} cof(1,1) & cof(1,2) & cof(1,3) \\ cof(2,1) & cof(2,2) & cof(2,3) \\ cof(3,1) & cof(3,2) & cof(3,3) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 10 & -1 \\ -11 & 19 & -7 \\ -3 & -18 & 12 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 13 & -11 & -3 \\ 10 & 19 & -18 \\ -1 & -7 & 12 \end{bmatrix}.$$

introduzir exploração para o teorema de Laplace

Teorema de Laplace

Seja B uma matriz quadrada. $C_k(adj(B))$, $L_k(adj(B))$ denotam a coluna e a linha k da matriz $adj(B)$, respetivamente.

Teorema (Laplace)

Seja A, $A = [a_{ij}]$, uma matriz $(n \times n)$.

1. *Para cada i,* $\det(A) = a_{i1} cof_A(i,1) + a_{i2} cof_A(i,2) + \cdots + a_{in} cof_A(i,n)$ $\boxed{= L_i^A \cdot C_i(adj(A))}$.
2. *Para cada j,* $\det(A) = a_{1j} cof_A(1,j) + a_{2j} cof_A(2,j) + \cdots + a_{nj} cof_A(n,j)$ $\boxed{= L_j(adj(A)) \cdot C_j^A}$.

Exemplo Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Usando a expansão de Laplace pela linha 1, temos:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2cof_A(1,1) + 3cof_A(1,2) + 4cof_A(1,3) \\ &= 2(-1)^2 \det\left(A(1|1)\right) + 3(-1)^3 \det\left(A(1|2)\right) + 4(-1)^4 \det\left(A(1|3)\right) \\ &= 2\det\left(A(1|1)\right) - 3\det\left(A(1|2)\right) + 4\det\left(A(1|3)\right) \\ &= 2\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 2(0-0) - 3(0-0) + 4(-5+18) = 52. \end{aligned}$$

Agora, usando a expansão de Laplace pela coluna 3 da matriz A, temos:

$$\begin{aligned} \det(A) = 4cof_A(1,3) + 0cof_A(2,3) + 0cof_A(3,3) = 4cof_A(1,3) = 4(-1)^4 \det\left(A(1|3)\right) &= 4\det\left(A(1|3)\right) \\ &= 4\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 4(-5+18) = 52. \end{aligned}$$

Alerta! Será que a existência de uma fila de zeros simplifica os cálculos ?

B, B^T, uma fila de zeros, duas filas iguais, triangular

Proposição (Determinante de uma matriz que tem uma fila de zeros)

Seja B uma matriz $(n \times n)$. *Se B tem uma fila de zeros, então* $\det(B) = 0$.

Proposição (Determinante de uma matriz que tem duas filas iguais)

Seja B uma matriz $(n \times n)$. *Se B tem duas filas iguais, então* $\det(B) = 0$.

Proposição (Determinante de uma matriz e o da sua transposta)

Se B é uma matriz $(n \times n)$, *então* $\det(B) = \det(B^T)$.

Proposição (Determinante de uma matriz triangular)

Se A, $A = [a_{ij}]$, *é uma matriz triangular, então* $\det(A)$ *é o produto das suas entradas diagonais. Isto é:*

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Exemplos

1. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & z & y \\ 0 & 0 & 0 & w \end{bmatrix}$. $\det(A) = (a)(3)(z)(w) = 3azw$.

2. Seja $B = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & z & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & w & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & \beta \end{bmatrix}$. $\det(B) = a \cdot cof(1,1) + b \cdot cof(1,2) = a \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & z & 0 & 0 \\ 2 & 4 & w & 0 \\ 5 & 3 & 0 & \beta \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \\ 3 & 4 & w & 0 \\ 3 & 3 & 0 & \beta \end{vmatrix} = 3azw\beta - 2bzw\beta$.

A função $det(\cdot)$ é aditiva, em cada fila (1)

Lema e prova

Por conveniência gráfica: se L_1, L_2, ..., L_m denotam as m linhas de uma matriz A; e se C_1, C_2, ..., C_n denotam as n colunas de uma matriz A, usamos as formas $\boxed{A = [L_1,\ L_2,\ L_3,\ \cdots,\ L_m];}$ $\boxed{A = [C_1,\ C_2,\ C_3,\ \cdots,\ C_n]}$.

Sabemos que qualquer número pode ser expresso pela soma de dois números. Portanto, qualquer linha (ou coluna) de uma matriz pode ser expressa pela soma de duas linhas (duas colunas).

Lema

Sejam B, B_1, B_2 matrizes $(n \times n)$. Se $B = [L_1, \cdots, L_{k-1}, L_k^{(1)} + L_k^{(2)}, L_{k+1}, \cdots, L_n]$, $B_1 = [L_1, \cdots, L_{k-1}, L_k^{(1)}, L_{k+1}, \cdots, L_n]$ e $B_2 = [L_1, \cdots, L_{k-1}, L_k^{(2)}, L_{k+1}, \cdots, L_n]$, então, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, os cofatores das entradas (k, j) destas matrizes são iguais; isto é: $cof_B(k, j) = cof_{B_1}(k, j) = cof_{B_2}(k, j)$.

Prova. Os cofatores referidos são construídos com as entradas das linhas diferentes da linha k. Assim, basta notar que para cada i, $i \neq k$, $L_i^B = L_i^{B_1} = L_i^{B_2}$.

Exemplo Consideremos as matrizes B, B_1, B_2:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \alpha_{31} + \beta_{31} & \alpha_{32} + \beta_{32} & \alpha_{33} + \beta_{33} & \alpha_{34} + \beta_{34} \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}.$$

(*Ver na pag. seguinte*)

A função $det(\cdot)$ é aditiva, em cada fila (2)

Exemplo relativo ao Lema precedente

Exemplo Consideremos as matrizes B, B_1, B_2:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \alpha_{31}+\beta_{31} & \alpha_{32}+\beta_{32} & \alpha_{33}+\beta_{33} & \alpha_{34}+\beta_{34} \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

De imediato, temos:

1. $cof_B(3,1) = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix} = cof_{B_1}(3,1) = cof_{B_2}(3,1)$
2. $cof_B(3,2) = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \end{vmatrix} = cof_{B_1}(3,2) = cof_{B_2}(3,2)$
3. $cof_B(3,3) = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \end{vmatrix} = cof_{B_1}(3,3) = cof_{B_2}(3,3)$
4. $cof_B(3,4) = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} = cof_{B_1}(3,4) = cof_{B_2}(3,4).$

A função $det(\cdot)$ é aditiva, em cada fila (3)

Proposição e prova

Proposição (A função $det()$ é aditiva em cada fila)

Sejam B, B_1, B_2 matrizes $(n \times n)$. *Se* $B = [L_1, \cdots, L_{k-1}, L_k^{(1)} + L_k^{(2)}, L_{k+1}, \cdots, L_n]$, $B_1 = [L_1, \cdots, L_{k-1}, L_k^{(1)}, L_{k+1}, \cdots, L_n]$, $B_2 = [L_1, \cdots, L_{k-1}, L_k^{(2)}, L_{k+1}, \cdots, L_n]$, *então,* $\det(B) = \det(B_1) + \det(B_2)$.

Prova. Consideremos que as entradas (k, j) das matrizes B_1 e B_2 são, respetivamente, α_{kj} e β_{kj}. Assim, aplicando a expansão de Laplace pela linha k da matriz B, e pelo Lema precedente, temos:

$$
\begin{aligned}
\det(B) &= (\alpha_{k1} + \beta_{k1})cof_B(k,1) + (\alpha_{k2} + \beta_{k2})cof_B(k,2) + \cdots + (\alpha_{kn} + \beta_{kn})cof_B(k,n) \\
&= (\alpha_{k1})cof_B(k,1) + (\alpha_{k2})cof_B(k,2) + \cdots + (\alpha_{kn})cof_B(k,n) + \\
&\qquad + (\beta_{k1})cof_B(k,1) + (\beta_{k2})cof_B(k,2) + \cdots + (\beta_{kn})cof_B(k,n) \\
&= (\alpha_{k1})cof_{B_1}(k,1) + (\alpha_{k2})cof_{B_1}(k,2) + \cdots + (\alpha_{kn})cof_{B_1}(k,n) + \\
&\qquad + (\beta_{k1})cof_{B_2}(k,1) + (\beta_{k2})cof_{B_2}(k,2) + \cdots + (\beta_{kn})cof_{B_2}(k,n) \\
&= \det(B_1) + \det(B_2).
\end{aligned}
$$

Exemplo Ver na página seguinte.

A função $det(\cdot)$ é aditiva, em cada fila (4)

Exemplo relativo à proposição precedente

Exemplo Reconsideremos as matrizes B, B_1, B_2:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \alpha_{31}+\beta_{31} & \alpha_{32}+\beta_{32} & \alpha_{33}+\beta_{33} & \alpha_{34}+\beta_{34} \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Constatámos, ver página 12, que:

$$cof_B(3,1) = cof_{B_1}(3,1) = cof_{B_2}(3,1); \qquad cof_B(3,2) = cof_{B_1}(3,2) = cof_{B_2}(3,2);$$
$$cof_B(3,3) = cof_{B_1}(3,3) = cof_{B_2}(3,3); \qquad cof_B(3,4) = cof_{B_1}(3,4) = cof_{B_2}(3,4).$$

$$\begin{aligned} \det(B) &= (\alpha_{31}+\beta_{31})\, cof_B(3,1) + (\alpha_{32}+\beta_{32})\, cof_B(3,2) + (\alpha_{33}+\beta_{33})\, cof_B(3,3) + (\alpha_{34}+\beta_{34})\, cof_B(3,4) \\ &= (\alpha_{31})\, cof_B(3,1) + (\alpha_{32})\, cof_B(3,2) + (\alpha_{33})\, cof_B(3,3) + (\alpha_{34})\, cof_B(3,4) + \\ &\qquad + (\beta_{31})\, cof_B(3,1) + (\beta_{32})\, cof_B(3,2) + (\beta_{33})\, cof_B(3,3) + (\beta_{34})\, cof_B(3,4) \\ &= (\alpha_{31})\, cof_{B_1}(3,1) + (\alpha_{32})\, cof_{B_1}(3,2) + (\alpha_{33})\, cof_{B_1}(3,3) + (\alpha_{34})\, cof_{B_1}(3,4) + \\ &\qquad + (\beta_{31})\, cof_{B_2}(3,1) + (\beta_{32})\, cof_{B_2}(3,2) + (\beta_{33})\, cof_{B_2}(3,3) + (\beta_{34})\, cof_{B_2}(3,4) \\ &= \det(B_1) + \det(B_2). \end{aligned}$$

O *det*() da soma NÃO é a soma dos *det*()

Justificar o título deste slide não carece de trabalho fastidioso. De facto, basta apresentarmos exemplos em que o NÃO se constata.

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Assim: $A + B = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 10 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

   $\det(A) = 0$; $\det(B) = 0$; $\det(A+B) = (4)(5)(-2)(2) = -80$. $\boxed{\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)}$

2. Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Assim: $A + B = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 10 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

   $\det(A) = 10$; $\det(B) = -8$; $\det(A+B) = (4)(6)(-1)(3) = -72$. $\boxed{\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)}$

3. (a cargo do leitor)
4. (a cargo do leitor)
5. (a cargo do leitor)
6. (a cargo do leitor)

Operações elementares e determinante

Proposição (Operações elementares e determinante)

Sejam α, β números; e B uma matriz $(n \times n)$.

1. *Uma OE1 altera o sinal do determinante; isto é:* se $\boxed{B \xrightarrow[L_i \leftrightarrow L_j]{} B_1}$, então $\boxed{\det(B_1) = -\det(B)}$.
2. *Uma OE2(α) afeta o determinante pelo fator α; isto é:* se $\boxed{B \xrightarrow[\alpha L_i,\ \alpha \neq 0]{} B_1}$, então $\boxed{\det(B_1) = \alpha \det(B)}$.
3. *Uma OE3 deixa o determinante invariante; isto é:* se $\boxed{B \xrightarrow[L_i + \beta L_j,\ i \neq j]{} B_1}$, então $\boxed{\det(B_1) = \det(B)}$.

exemplos

1 Seja $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. $B \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = B_1$.
$\det(B) = ad - cb$. $\det(B_1) = cb - ad = -(ad - cb) = -\det(B)$.

....

2 Seja $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. $B \xrightarrow[\alpha L_2]{} \begin{bmatrix} a & b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix} = B_1$.
$\det(B) = ad - cb$. $\det(B_1) = a(\alpha d) - (\alpha c)b = \alpha ad - \alpha cb = \alpha(ad - cb) = \alpha \det(B)$.

....

3 Seja $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. $B \xrightarrow[L_2 + \beta L_1]{} \begin{bmatrix} a & b \\ c + \alpha a & d + \alpha b \end{bmatrix} = B_1$.
$\det(B) = ad - cb$. $\det(B_1) = a(d + \alpha b) - (c + \alpha a)b = ad + \alpha ab - cb - \alpha ab = ad - cb = \det(B)$.

Determinante de uma matriz elementar

Corolário (determinante de uma matriz elementar)

1. *Se E é uma matriz elementar 1, então* $\det(E) = -1$.
2. *Se E é uma matriz elementar 2 associada à OE2*(α), *então* $\det(E) = \alpha$.
3. *Se E é uma matriz elementar 3, então* $\det(E) = 1$.

Prova.

1 Sabemos que $\det(I_n) = 1$. Se E é matriz elementar 1, então $I_n \xrightarrow[L_i \leftrightarrow L_j]{} E$. Logo, pelo exposto na Proposição precedente,

$\det(E) = -\det(I_n) = -1$.

2 Se E é a matriz associada à OE(α), então E é uma matriz que difere da matriz I_n numa única entrada diagonal. Essa entrada vale α. Logo, $\det(E) = \alpha$.

3 Uma matriz elementar 3 difere da matriz I_n numa única entrada não diagonal. Logo, E é triangular e cada entrada da sua diagonal é o número 1. Portanto, $\det(E) = 1$. □

Exemplos

1. Seja $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Temos: $\det(E) \overset{\text{Laplace}}{\underset{\text{linha 2}}{=\!=\!=}} 1(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0-1) = -1$.
2. Seja $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Uma vez que E é triangular: $\det(E) = (1)(3)(1) = 3$.
3. Seja $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Uma vez que E é triangular: $\det(E) = (1)(1)(1) = 1$.

det(EB), quando E é matriz elementar 1

Proposição

Sejam A e E matrizes $(n \times n)$. *Se E é matriz elementar tipo 1, então* $\boxed{\det(EA) = \det(E) \cdot \det(A)}$.

Prova. Sabemos que $A \xrightarrow[L_i \leftrightarrow L_j]{} EA$, se E é a matriz elementar 1 associada à OE1 considerada.

(1) Sabemos que a matriz resultante da ação de tal OE1 tem determinante simétrico do determinante da matriz objeto; isto é: sabemos que $\det(EA) = -\det(A)$.
(2) Por outro lado, sabemos que $\det(E) = -1$.
Portanto, de (1) e (2) resulta: $\det(EA) = -\det(A) = (-1)\det(A) = \det(E)\det(A)$.

Exemplo

Sejam $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Assim, $EB = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

A matriz E é uma matriz elementar, uma vez que $I_4 \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_3]{} E$. Portanto, $\det(E) = -1$.

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} \overset{Laplace}{\underset{col\ 1}{=\!=\!=}} (-2)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} \overset{Laplace}{\underset{col\ 1}{=\!=\!=}} (-2)(2)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} =$$

$(-2)(2)(-1)(16 - 0) = 64$.
Agora, pelo exposto e notando que EB é triangular:

$$\det(EB) = (-2)(2)(2)(8) = (-8)(8) = -64 = (-1)\det(B) = \det(E)\det(B). \qquad \square$$

det(EB), quando E é matriz elementar 2

Proposição

Sejam A e E matrizes $(n \times n)$. Se E é matriz elementar do tipo 2, então $\boxed{\det(EA) = \det(E) \cdot \det(A)}$.

Prova. Sabemos que $A \xrightarrow[\alpha L_i,\ \alpha \neq 0,1]{} EA$, se E é a matriz elementar 2 associada à OE2(α) considerada.

(1) Sabemos que a matriz resultante da ação de tal OE2(α) tem determinante igual ao produto de α pelo determinante da matriz objeto; isto é: sabemos que $\det(EA) = \alpha \det(A)$.
(2) Por outro lado, uma vez que a matriz E difere da matriz I_n na entrada (i, i) cujo valor é α, temos $\det(E) = \alpha$.
Portanto, de (1) e (2) resulta: $\det(EA) = \alpha \det(A) = (\alpha) \det(A) = \det(E) \det(A)$.

Exemplo

Sejam $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha \neq 0, 1$. Assim, $EB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2\alpha & 4\alpha & 5\alpha \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

A matriz E é uma matriz elementar 2, uma vez que $I_4 \xrightarrow[\alpha L_2,\ \alpha \neq 0,1]{} E$; e $\det(E) = \alpha$.

$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} \underset{col\ 1}{\overset{Laplace}{=\!=\!=}} (-2)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} \underset{col\ 1}{\overset{Laplace}{=\!=\!=}} (-2)(2)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} =$ $(-2)(2)(-1)(16 - 0) = 64$. Agora,

$\det(EB) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2\alpha & 4\alpha & 5\alpha \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} \underset{col\ 1}{\overset{Laplace}{=\!=\!=}} (-2)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2\alpha & 4\alpha & 5\alpha \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2\alpha & 4\alpha & 5\alpha \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} \underset{col\ 1}{\overset{Laplace}{=\!=\!=}}$

$(-2)(2\alpha)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = (-2)(2\alpha)(-1)(16 - 0) = (\alpha)(64) = \det(E) \det(B)$.

det(EB), quando E é matriz elementar 3

O que expomos, abaixo, pode parecer um pouco redundante.

Expomo-lo porque completa o tópico det(EB), quando E é matriz elementar e, também, porque a reflexão é enriquecedora.

Proposição

Sejam A e E matrizes $(n \times n)$. Se E é matriz elementar do tipo 3, então $\boxed{\det(EA) = \det(E) \cdot \det(A)}$.

Prova. Sabemos que $A \xrightarrow[L_i+\beta L_j,\ i \neq j]{} EA$, se E é a matriz elementar 3 associada à OE3 considerada.

(1) Sabemos que a matriz resultante da ação de tal OE3 tem determinante igual ao determinante da matriz objeto; isto é: sabemos que $\det(EA) = \det(A)$.

(2) Por outro lado, uma vez que a matriz E difere da matriz I_n numa entrada não diagonal, a entrada (i, j) cujo valor é β, esta matriz E é uma matriz triangular e tem diagonal igual à diagonal da matriz I_n. Portanto, $\det(E) = 1$.

Portanto, de (1) e (2) resulta: $\det(EA) = \det(A) = (1)\det(A) = \det(E)\det(A)$.

. . . .

MÉTODO de cálculo do determinante de uma matriz

Já sabemos que o cálculo do determinante de uma matriz é menos fastidioso se tal matriz tiver muitas entradas nulas.
Ora, se a matriz não tiver muitas entradas nulas, podemos usar a OE3 para produzir uma outra matriz que tenha muitas entradas nulas e que tem o mesmo determinante.
Esta operação elementar 3 é, assim, um facilitador no contexto do cálculo de determinantes de matrizes.

Esta operação elementar 3 e o teorema de Laplace constituem O MÉTODO de eleição para calcular o determinante de uma matriz.

Método (cálcular $det(B)$)

Seja B uma matriz $(n \times n)$.

1. *Usar a expansão de Laplace pela fila da matriz que tem o maior números de entradas nulas;*
2. *Ou, construir a forma-de-escada da matriz (esta forma-de-escada é uma matriz triangular). Esta opção impõe registo das alterações provocadas por OE1 ou OE2.*
3. *Ou, usar a OE3 para produzir entradas nulas e, de seguida, usar a expansão de Laplace pela fila que tem as ditas entradas nulas.*

Determinante do produto de duas matrizes

é o produto dos determinantes dos fatores

Teorema (Determinante do produto de duas matrizes ($n \times n$))

Se A e B são matrizes ($n \times n$), então $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$. *o determinante do produto é o produto dos determinantes*

Prova. (...)

Exemplo Consideremos as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & b & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & c & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & d & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & y & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & z & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & w & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t \end{bmatrix}$.

$$AB = \begin{bmatrix} a & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & b & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & c & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & d & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & y & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & z & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & w & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & L_1C_2 & L_1C_3 & L_1C_4 & L_1C_5 \\ 0 & by & L_2C_3 & L_2C_4 & L_2C_5 \\ 0 & 0 & cz & L_3C_4 & L_4C_5 \\ 0 & 0 & 0 & dw & L_4C_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & et \end{bmatrix}.$$

$\det(A) = abcde$; $\det(B) = xyzwt$; $det(AB) = (ax)(by)(cz)(dw)(et) = (abcde)(xyzwt) = \det(A)\det(B)$.

Exercício Sejam A e B duas matrizes ($n \times n$).

Justificar a proposição: se A e B são triangulares inferiores, então a matriz (AB) é triangular inferior.

Determinante de uma matriz invertível

Proposição (Determinante de uma matriz invertível)

Se B é uma matriz quadrada, então: *B é invertível se, e só se,* $\det(B) \neq 0$.

Prova. Provemos que a condição é necessária.

Temos: $BB^{-1} = I \Longrightarrow \det(BB^{-1}) = \det(I) \Longleftrightarrow \det(B)\det(B^{-1}) = 1$. Portanto, $\det(B) \neq 0$.

Provemos que a condição é suficiente.
Seja B tal que $\det(B) \neq 0$. A matriz $B_{(fer)}$ é triangular. Consideremos que E_1, E_2, ..., E_k são as matrizes elementares associadas às OE que transformam B na matriz $B_{(fer)}$. Assim, $E_k E_{k-1}(\cdots)E_2 E_1 B = B_{(fer)}$.
Aplicando $\det(.)$, concluímos que $\det\left(B_{(fer)}\right) \neq 0$. Por isto, decorre que todas as entradas diagonais da matriz $B_{(fer)}$ são iguais a 1.
Logo: $B_{(fer)} = I_n$. Consequentemente: $E_k E_{k-1}(\cdots)E_2 E_1 B = I_n$. Daqui, infere-se que B é invertível. □

Proposição (Determinante da inversa)

Se a matriz B é invertível, então $\det\left(B^{-1}\right) = (\det B)^{-1}$.

Prova. Hipótese existe B^{-1} tal que $BB^{-1} = I$. Tese $\det\left(B^{-1}\right) = (\det B)^{-1}$.
Temos:

$$BB^{-1} = I \Longrightarrow \det(BB^{-1}) = \det(I) \Longleftrightarrow \det(B)\cdot\det(B^{-1}) = 1 \Longleftrightarrow \det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)} \Longleftrightarrow \det(B^{-1}) = (\det B)^{-1}.$$ □

Exercício Mostre que há matrizes que têm igual determinante mas são diferentes.

O produto de uma matriz pela sua adjunta (1)

Seja B uma matriz quadrada. Pelo teorema de Laplace, sabemos que o produto da cada linha L_i de B pela coluna C_i da matriz $adj(B)$ é o número $\det(B)$. Assim, é pertinente perguntar: e se for cada linha L_i de B pela coluna C_j da matriz $adj(B)$, quando $i \neq j$?

Exploremos esta situação. Consideremos a matriz $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$.

Denotemos a coluna j da matriz $adj(B)$ por $C_j(adj(B))$. Sabemos que:

$$L_1^B C_1(adj(B)) = b_{11} cof_B(1,1) + b_{12} cof_B(1,2) + b_{13} cof_B(1,3) + b_{14} cof_B(1,4) = \det(B);$$

$$L_2^B C_2(adj(B)) = b_{21} cof_B(2,1) + b_{22} cof_B(2,2) + b_{23} cof_B(2,3) + b_{24} cof_B(2,4) = \det(B);$$

$$L_3^B C_3(adj(B)) = b_{31} cof_B(3,1) + b_{32} cof_B(3,2) + b_{33} cof_B(3,3) + b_{34} cof_B(3,4) = \det(B);$$

$$L_4^B C_4(adj(B)) = b_{41} cof_B(4,1) + b_{42} cof_B(4,2) + b_{43} cof_B(4,3) + b_{44} cof_B(4,4) = \det(B).$$

Perguntamos:

$$L_2{}^B C_4(adj(B)) = b_{21} cof_B(4,1) + b_{22} cof_B(4,2) + b_{23} cof_B(4,3) + b_{24} cof_B(4,4) = \boxed{?} \tag{1}$$

Ora, de acordo com o que sabemos sobre a expansão de Laplace, podemos inferir que o primeiro membro da relação (1) representa o determinante da matriz, B_1, que resulta da matriz B por substituição da sua linha L_4 pela sua linha L_2. Esta inferência decorre dos cofatores da linha L_4 e das entradas $(2, j)$ que estão explicitados em (1). Formalmente, escrevemos:

$$L_2{}^B C_4(adj(B)) = b_{21} cof_B(4,1) + b_{22} cof_B(4,2) + b_{23} cof_B(4,3) + b_{24} cof_B(4,4) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{vmatrix} = |B_1|. \tag{2}$$

Notando que a matriz B_1 tem duas linhas iguais, decorre que $\boxed{\det(B_1) = 0}$. **Resposta encontrada!**

O produto de uma matriz pela sua adjunta (2)

A exploração registada na página precedente ilumina o caminho para demonstrar a seguinte proposição.

Proposição

Seja B uma matriz quadrada, de ordem superior a 1. Denotemos a linha i da matriz B por L_i^B; e a coluna k da matriz $adj(B)$ por $C_k(adj(B))$. Assim: $\boxed{se \quad i \neq k, \quad então \quad L_i^B \cdot C_k(adj(B)) = 0}$.

Prova. (...)

Exemplo Seja $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$. Assim, $adj(B) = [cof(B)]^T = \begin{bmatrix} cof(1,1) & cof(1,2) & cof(1,3) \\ cof(2,1) & cof(2,2) & cof(2,3) \\ cof(3,1) & cof(3,2) & cof(3,3) \end{bmatrix}^T =$

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 13 & 10 & -1 \\ -11 & 19 & -7 \\ -3 & -18 & 12 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 13 & -11 & -3 \\ 10 & 19 & -18 \\ -1 & -7 & 12 \end{bmatrix}.$$

De modo a simplificar a escrita, usemos L_i para denotar a linha i da matriz B; e C_k para denotar a coluna k da matriz $adj(B)$. No produto seguinte, ponhamos o nosso foco nos produtos da forma $L_i C_k$, $i \neq k$. Assim:

$$B \cdot adj(B) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & -11 & -3 \\ 10 & 19 & -18 \\ -1 & -7 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1C_1 & L_1C_2 & L_1C_3 \\ L_2C_1 & L_2C_2 & L_2C_3 \\ L_3C_1 & L_3C_2 & L_3C_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} L_1C_1 & (-22+57-35) & (-6-54+60) \\ (-26+30-4) & L_2C_2 & (6-54+48) \\ (-13+20-7) & (11+38-49) & L_3C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1C_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2C_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_3C_3 \end{bmatrix}. \quad \square$$

O produto de uma matriz pela sua adjunta (3)

A prova da proposição seguinte é semelhante à da proposição precedente.

Proposição

Seja B uma matriz quadrada, de ordem superior a 1. Denotemos a linha i da matriz $adj(B)$ por $L_i(adj(B))$; e a coluna k da matriz B por C_k^B. Assim: $\boxed{\text{se} \quad i \neq k, \quad \text{então} \quad L_i(adj(B)) \cdot C_k^B = 0}$

Prova. (...)

Exemplo Seja $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$. Assim, $adj(B) = [cof(B)]^T = \begin{bmatrix} cof(1,1) & cof(1,2) & cof(1,3) \\ cof(2,1) & cof(2,2) & cof(2,3) \\ cof(3,1) & cof(3,2) & cof(3,3) \end{bmatrix}^T =$

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 13 & 10 & -1 \\ -11 & 19 & -7 \\ -3 & -18 & 12 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 13 & -11 & -3 \\ 10 & 19 & -18 \\ -1 & -7 & 12 \end{bmatrix}.$$

De modo a simplificar a escrita, usemos L_i para denotar a linha i da matriz $adj(B)$; e C_k para denotar a coluna k da matriz B. No produto seguinte, ponhamos o nosso foco nos produtos da forma $L_iC_k, \ i \neq k$. Assim:

$$adj(B) \cdot B = \begin{bmatrix} 13 & -11 & -3 \\ 10 & 19 & -18 \\ -1 & -7 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1C_1 & L_1C_2 & L_1C_3 \\ L_2C_1 & L_2C_2 & L_2C_3 \\ L_3C_1 & L_3C_2 & L_3C_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} L_1C_1 & (39-33-6) & (65-44-21) \\ (20-38+18) & L_2C_2 & (50+76-126) \\ (-2+14-12) & (-3-21+24) & L_3C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1C_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2C_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_3C_3 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

O produto de uma matriz pela sua adjunta (4)

Sendo B uma matriz quadrada, já sabemos tudo sobre o resultado de multiplicar uma linha da matriz B por uma coluna da matriz $adj(B)$; e, também, sobre o resultado de multiplicar uma linha da matriz $adj(B)$ por uma coluna da matriz B. Para memória futura, este "tudo" fica resumido na seguinte proposição.

Proposição (O produto de uma matriz pela sua adjunta)

Se B é uma matriz $(n \times n)$*, então:* $\boxed{B \cdot adj(B) = \det(B) \cdot I_n \qquad (*)}$ *e* $\boxed{adj(B) \cdot B = \det(B) \cdot I_n \qquad (**)}$

Prova. $(*)$ Denotemos a linha i da matriz B por L_i^B; e a coluna k da matriz $adj(B)$ por $C_k(adj(B))$.

Pelo teorema de Laplace, é verdade que $L_i^B C_i(adj(B)) = \det(B)$.

Agora, pela proposição da página 25, é verdade que: se $i \neq k$, então $L_i^B C_k(adj(B)) = 0$.

Portanto, a matriz $\Big(B \cdot adj(B)\Big)$ é uma matriz diagonal cuja entrada (i, i) é o número $\det(B)$; isto é: $B \cdot adj(B) = \det(B) \cdot I_n$. □

....

Na página seguinte, ver um exemplo com uma matriz (3×3).

....

Reflexão Salientemos: a única condição de existência da fórmula $B \cdot adj(B) = \det(B) \cdot I$ é a matriz é quadrada.

Se $\det(B) \neq 0$, a matriz B é invertível. Caso contrário, existe uma matriz que multiplicada por B resulta na matriz nula. Para além de outras propriedades já estudadas, esta regista uma das GRANDES diferenças entre a estrutura dos números reais $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, na qual todos os números não nulos têm inverso, e estas novas estruturas algébricas que estamos a estudar.

O produto de uma matriz pela sua adjunta (5)

Exemplo Seja $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$.

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_1+2L_3 \\ L_2-2L_3}}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 7 & 19 \\ 0 & -1 & -10 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix} \underset{col\ 1}{\overset{Laplace}{=\!=\!=}} (-1)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 7 & 19 \\ -1 & -10 \end{vmatrix} = (-1)(-70+19) = 51.$$

$$adj(B) = [cof(B)]^T = \begin{bmatrix} cof(1,1) & cof(1,2) & cof(1,3) \\ cof(2,1) & cof(2,2) & cof(2,3) \\ cof(3,1) & cof(3,2) & cof(3,3) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 10 & -1 \\ -11 & 19 & -7 \\ -3 & -18 & 12 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 13 & -11 & -3 \\ 10 & 19 & -18 \\ -1 & -7 & 12 \end{bmatrix}.$$

$$B \cdot adj(B) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & -11 & -3 \\ 10 & 19 & -18 \\ -1 & -7 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (26+30-5) & (-22+57-35) & (-6-54+60) \\ (-26+30-4) & (22+57-28) & (6-54+48) \\ (-13+20-7) & (11+38-49) & (3-36+84) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51 & 0 & 0 \\ 0 & 51 & 0 \\ 0 & 0 & 51 \end{bmatrix} = 51 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 51 \cdot I_3.$$

A matriz inversa em função da matriz adjunta

Proposição (A matriz inversa em função da matriz adjunta)

Se a matriz B é invertível, então $\boxed{B^{-1} = (\det B)^{-1} \cdot adj(B)}$.

Prova. Invocando a proposição da página 27, e porque existe B^{-1}, temos:

$$B \cdot adj(B) = \det(B) \cdot I \iff B^{-1}B \cdot adj(B) = B^{-1}\det(B) \iff I \cdot adj(B) = B^{-1}\det(B) \iff (\det B)^{-1} \cdot adj(B) = B^{-1}.$$

Reflexão

Usar esta fórmula para construir a inversa de uma matriz não é, para matrizes de ordem superior a 2, a opção mais eficiente. O trabalho envolvido no cálculo dos cofatores desencoraja a sua utilização. No entanto, é uma fórmula que permite construir outras leis, como veremos mais adiante.

Exemplo

Retomemos o exemplo apresentado na página 28. Assim:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}; \quad \det(B) = 51. \quad adj(B) = \begin{bmatrix} 13 & -11 & -3 \\ 10 & 19 & -18 \\ -1 & -7 & 12 \end{bmatrix}. \quad \text{Portanto:} \quad B^{-1} = \frac{1}{51}\begin{bmatrix} 13 & -11 & -3 \\ 10 & 19 & -18 \\ -1 & -7 & 12 \end{bmatrix}.$$

De facto, pela exposição constante na página 28, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{51}\begin{bmatrix} 13 & -11 & -3 \\ 10 & 19 & -18 \\ -1 & -7 & 12 \end{bmatrix} = \frac{1}{51}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 13 & -11 & -3 \\ 10 & 19 & -18 \\ -1 & -7 & 12 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{51}(51 \cdot I_3) = I_3.$$

Op. elementares, homogeneidade, aditividade (1)

Retomemos o conceito de função homogénea.

Função homogénea Seja $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $X \mapsto \Psi(X)$. A função Ψ diz-se homogénea se, para cada $k \in \mathbb{R}$, $\Psi(kX) = k\Psi(X)$.

Definição ($\det()$ é homogénea em cada fila)

Sendo B uma matriz $(n \times n)$, a representação de B pode ser por intermédio das suas linhas, escrevendo $B = [L_1,\ L_2,\ L_3,\ \cdots,\ L_n]$; ou, por intermédio das suas colunas, escrevendo $B = [C_1,\ C_2,\ C_3,\ \cdots,\ C_n]$. Seja B_1 tal que $B \xrightarrow[kL_i,\ k\neq 0,1]{} B_1$. Sabemos que $\det(B_1) = k\det(B)$. Assim, de outro modo, podemos escrever

$$\det\left[L_1,\ L_2,\ \cdots,\ kL_i,\ \cdots,\ L_n\right] = k\det\left[L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_i,\ \cdots,\ L_n\right].$$

Por este facto, dizemos que *a função $\det()$ é uma função homogénea em cada fila*.

Exemplo Consideremos a matriz quadrada $B = \left[L_1,\ L_2,\ L_3,\ L_4,\ L_5\right]$.

Em função de $\det(B)$, explicite o $\det()$ da matriz $B_1 = \left[L_1,\ -3L_2,\ 4L_3,\ L_4,\ -L_5\right]$. Temos:

$$\begin{aligned}
\det(B_1) &\underset{homog(lin2)}{=\!=\!=\!=} (-3)\left|L_1,\ L_2,\ 4L_3,\ L_4,\ -L_5\right| \\
&\underset{homog(lin3)}{=\!=\!=\!=} (-3)(4)\left|L_1,\ L_2,\ L_3,\ L_4,\ -L_5\right| \\
&\underset{homog(lin4)}{=\!=\!=\!=} (-3)(4)(-1)\left|L_1,\ L_2,\ L_3,\ L_4,\ L_5\right| \\
&= 12\det(B).
\end{aligned}$$

Op. elementares, homogeneidade, aditividade (2)

Definição (A função det() é aditiva em cada fila)

Sendo $B = \left[L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_i^{(1)} + L_i^{(2)},\ \cdots,\ L_n\right]$, *já sabemos que*

$$\det\left[L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_i^{(1)} + L_i^{(2)},\ \cdots,\ L_n\right] = \det\left[L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_i^{(1)},\ \cdots,\ L_n\right] + \det\left[L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_i^{(2)},\ \cdots,\ L_n\right].$$

Por este facto, dizemos que *a função* det() *é uma função aditiva em cada fila* .

(Ver detalhes na página 13)

Recordemos o efeito de uma OE1 no determinante de uma matriz.

Definição (det() é uma função alternada)

Sendo B uma matriz $(n \times n)$ *e* $B = \left[L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_i,\ \cdots,\ L_j,\ \cdots,\ L_n\right]$, *então*

$$\det\left[L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_i,\ \cdots,\ L_j,\ \cdots,\ L_n\right] = -\det\left[L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_j,\ \cdots,\ L_i,\ \cdots,\ L_n\right].$$

Por este facto, dizemos que a função det() *é uma função alternada* .

Op. elementares, homogeneidade, aditividade (3)

Exemplos Seja $A = \begin{bmatrix} C_1 \ , \ C_2 \ , \ C_3 \ , \ C_4 \end{bmatrix}$ uma matriz quadrada tal que $\det(A) = \beta$.

1. Calcular o determinante da matriz $B = \begin{bmatrix} C_1 + 2C_3 \ , \ -C_2 \ , \ C_3 + C_4 \ , \ C_4 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\det(B) &\underset{homog(col2)}{=\!=\!=\!=} -\begin{vmatrix} C_1 + 2C_3 \ , \ C_2 \ , \ C_3 + C_4 \ , \ C_4 \end{vmatrix} \\
&\underset{col3-col4}{=\!=\!=\!=} -\begin{vmatrix} C_1 + 2C_3 \ , \ C_2 \ , \ C_3 \ , \ C_4 \end{vmatrix} \\
&\underset{(col1)-2(col3)}{=\!=\!=\!=} -\begin{vmatrix} C_1 \ , \ C_2 \ , \ C_3 \ , \ C_4 \end{vmatrix} \\
&= -\det(A) = -\beta. \qquad \square
\end{aligned}$$

2. Calcular o determinante da matriz $D = \begin{bmatrix} 2C_2 - C_3 \ , \ C_1 \ , \ C_3 \ , \ 2C_4 - 3C_1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\det(D) &\underset{(col4)+3(col2)}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 2C_2 - C_3 \ , \ C_1 \ , \ C_3 \ , \ 2C_4 \end{vmatrix} \\
&\underset{(col1)+(col3)}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 2C_2 \ , \ C_1 \ , \ C_3 \ , \ 2C_4 \end{vmatrix} \\
&\underset{homog(col1;\ col4)}{=\!=\!=\!=} (2)(2)\begin{vmatrix} C_2 \ , \ C_1 \ , \ C_3 \ , \ C_4 \end{vmatrix} \\
&\underset{col1 \leftrightarrow col2}{=\!=\!=\!=} 2(-1)\begin{vmatrix} C_1 \ , \ C_2 \ , \ C_3 \ , \ C_4 \end{vmatrix} \\
&= -4\det(A) = -4\beta. \qquad \square
\end{aligned}$$

3. Calcular o determinante da matriz $F = \begin{bmatrix} C_3 - 2C_2 \ , \ C_3 \ , \ -2C_4 \ , \ -5C_2 + C_4 \end{bmatrix}$. (...)

Op. elementares, homogeneidade, aditividade (4)

Exemplos Sejam $A = \big[L_1\ ,\ L_2\ ,\ L_3\ ,\ L_4\big]$ e P uma matriz (1×4). Consideremos $B = \big[-L_2\ ,\ L_3\ ,\ 2L_1\ ,\ P\big]$ e $G = \big[L_1\ ,\ L_2\ ,\ P\ ,\ L_4\big]$. Admitamos que: $\det(A) = \alpha$, $\det(B) = \beta$, $\det(G) = \theta$.

1. Calcular o $\det(.)$ da matriz D, $D = \big[L_1\ ,\ L_2 - L_3\ ,\ L_3 + 2L_1\ ,\ P + L_4\big]$.

$$\det(D) \underset{(lin3)-2(lin1)}{=\!=\!=\!=} \big|L_1\ ,\ L_2 - L_3\ ,\ L_3\ ,\ P + L_4\big|$$

$$\underset{(lin2)+(lin3)}{=\!=\!=\!=} \big|L_1\ ,\ L_2\ ,\ L_3\ ,\ P + L_4\big|$$

$$\underset{adit(lin4)}{=\!=\!=\!=} \big|L_1\ ,\ L_2\ ,\ L_3\ ,\ P\big| + \big|L_1\ ,\ L_2\ ,\ L_3\ ,\ L_4\big| = \big|L_1\ ,\ L_2\ ,\ L_3\ ,\ P\big| + \det(A).$$

$$\big|L_1\ ,\ L_2\ ,\ L_3\ ,\ P\big| \underset{homog(lin1;\ lin2)}{=\!=\!=\!=} \tfrac{1}{2}(-1)\big|2L_1\ ,\ -L_2\ ,\ L_3\ ,\ P\big|$$

$$\underset{lin1 \leftrightarrow lin2}{=\!=\!=\!=} -\tfrac{1}{2}(-1)\big|-L_2\ ,\ 2L_1\ ,\ L_3\ ,\ P\big|$$

$$\underset{lin2 \leftrightarrow lin3}{=\!=\!=\!=} -\tfrac{1}{2}(-1)(-1)\big|-L_2\ ,\ L_3\ ,\ 2L_1\ ,\ P\big| = -\tfrac{1}{2}\det(B) = -\frac{1}{2}\beta.$$

Portanto : $\det(D) = -\dfrac{1}{2}\beta + \alpha.$

2. Calcular $\det(.)$ da matriz F, $F = \big[-L_2\ ,\ L_2 - L_3\ ,\ L_3 + 2L_1\ ,\ P + L_4\big]$. (...) $|F| = -\beta + 2\alpha.$

3. Calcular $\det(.)$ da matriz $(A + B)$. Calcular $\det(.)$ da matriz $(A + G)$.

Um SEL quadrado e a regra de Cramer (1)

Seja B uma matriz quadrada.

1. Já sabemos que o produto da cada linha L_i da matriz $adj(B)$ pela coluna C_i da matriz B é o número $\det(B)$. [pag. 27]
2. Já sabemos que o produto da cada linha L_i da matriz $adj(B)$ pela coluna C_k da matriz B é zero, se $i \neq k$. [pag. 27]

Agora, queremos construir um modelo para descrever o produto de (uma linha da adjunta de uma matriz) por (uma coluna).

Exploremos! Consideremos as matrizes: $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$; $B_3 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & q_1 & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & q_2 & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & q_3 & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & q_4 & b_{44} \end{bmatrix}$.

Dizemos que a matriz B_3 resulta da matriz B por substituição da sua coluna C_3 por uma outra coluna Q.

Pelo exposto, é verdade que os cofatores da coluna C_3^B são iguais, respetivamente, aos cofatores da coluna 3 da matriz B_3. Basta notar que tais cofatores são construídos com as mesmas colunas, de uma matriz para a outra. Formalmente:

$\boxed{cof_B(1,3) = cof_{B_3}(1,3)}$, $\boxed{cof_B(2,3) = cof_{B_3}(2,3)}$, $\boxed{cof_B(3,3) = cof_{B_3}(3,3)}$, $\boxed{cof_B(4,3) = cof_{B_3}(4,3)}$.

Portanto:

$$\det(B) \overset{Laplace}{\underset{C_3}{=\!=\!=}} b_{13}\,cof_B(1,3) + b_{23}\,cof_B(2,3) + b_{33}\,cof_B(3,3) + b_{43}\,cof_B(4,3) = L_3\big(adj(B)\big) \cdot C_3^B.$$

$$\det(B_3) \overset{Laplace}{\underset{C_3}{=\!=\!=}} q_1\,cof_B(1,3) + q_2\,cof_B(2,3) + q_3\,cof_B(3,3) + q_4\,cof_B(4,3) = \boxed{L_3\big(adj(B)\big) \cdot Q}.$$

Resumo: o produto da linha $L_3\big(adj(B)\big)$ por uma coluna Q, (4×1), é o determinante da matriz resultante da matriz B por substituição da coluna C_3^B pela coluna Q.

Caro leitor: escreva no seu caderno os casos em que a coluna Q ocupa cada uma das outras colunas da matriz B.

Um SEL quadrado e a regra de Cramer (2)

Lema

Seja B *uma matriz* $(n \times n)$; *e* Q *uma matriz coluna* $(n \times 1)$.
O produto da linha $L_i(adj(B))$ *pela coluna* Q *é o determinante da matriz* $\left[C_1^B,\ C_2^B,\ \cdots,\ C_{(i-1)}^B,\ Q,\ C_{(i+1)}^B,\ \cdots,\ C_n^B\right]$.
Formalmente:

para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\boxed{L_i(adj(B)) \cdot Q = \left|C_1^B,\ C_2^B,\ \cdots,\ C_{(i-1)}^B,\ Q,\ C_{(i+1)}^B,\ \cdots,\ C_n^B\right|}$.

Prova. Consideremos:

$$B = \left[C_1^B,\ C_2^B,\ \cdots,\ C_{(i-1)}^B,\ C_i^B,\ C_{(i+1)}^B,\ \cdots,\ C_n^B\right], \qquad B_i = \left[C_1^B,\ C_2^B,\ \cdots,\ C_{(i-1)}^B,\ Q,\ C_{(i+1)}^B,\ \cdots,\ C_n^B\right].$$

Notemos que os cofatores da coluna i da matriz B coincidem, respetivamente, com os cofatores da coluna i da matriz B_i, uma vez que são formados pelas mesmas colunas.
Pelo teorema de Laplace: $L_i(adj(B)) \cdot C_i^B$ é o determinante da matriz B, expandido pela coluna i de B. Isto é:
$\det(B) = L_i(adj(B)) \cdot C_i^B = \left|C_1^B,\ C_2^B,\ \cdots,\ C_{(i-1)}^B,\ C_i^B,\ C_{(i+1)}^B,\ \cdots,\ C_n^B\right|$.
Consequentemente, $\boxed{L_i(adj(B)) \cdot Q}$ é o determinante da matriz resultante de B por substituição da sua coluna C_i^B pela coluna Q, expandido pela coluna i de tal matriz; isto é:

$$\boxed{L_i(adj(B)) \cdot Q = \left|C_1^B,\ C_2^B,\ \cdots,\ C_{(i-1)}^B,\ Q,\ C_{(i+1)}^B,\ \cdots,\ C_n^B\right|}. \qquad \square$$

O que acabámos de expor é a chave para compreendermos a fórmula que vamos apresentar na página seguinte.

Um SEL quadrado e a regra de Cramer (3)

Proposição (Regra de Cramer)

Considere-se o SEL de n equações e n incógnitas, $BX = Q$. Denotemos por B_{x_i} a matriz resultante da matriz B por substituição da coluna i pela coluna dos termos independentes do sistema.
Se B é invertível, então cada x_i da solução do sistema é $x_i = \frac{1}{|B|}\left|B_{x_i}\right|$. Portanto, a solução do SEL $BX = Q$ é:

$$\boxed{X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|B|}\begin{bmatrix} |B_{x_1}| \\ |B_{x_2}| \\ \vdots \\ |B_{x_n}| \end{bmatrix}}.$$

Prova. Consideremos $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Por B ser invertível, temos:

$BX = Q \Longleftrightarrow B^{-1}(BX) = B^{-1}Q \Longleftrightarrow (B^{-1}B)X = B^{-1}Q \Longleftrightarrow (I_n)X = B^{-1}Q \Longleftrightarrow \boxed{X = B^{-1}Q \quad (*)}$.

Por outro lado, da relação $\left(B \cdot adj(B) = \det(B) \cdot I_n\right)$, resulta $\boxed{B^{-1} = \frac{1}{|B|}adj(B) \quad (**)}$.

Usando $(**)$ em $(*)$, obtemos: $X = \frac{1}{|B|}adj(B) \cdot Q$.

Daqui, concluímos que: para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\boxed{x_i = \frac{1}{|B|}L_i(adj(B)) \cdot Q \quad (\dagger)}$.

Agora, invocando o Lema precedente, $\boxed{L_i(adj(B)) \cdot Q = \left|C_1^B, \ C_2^B, \ \cdots, \ C_{(i-1)}^B, \ Q, \ C_{(i+1)}^B, \ \cdots, \ C_n^B\right| = \left|B_{x_i}\right|}$.

Usando isto em $(\dagger)$, resulta: $\boxed{x_i = \frac{1}{|B|}\left|B_{x_i}\right|}$.

Um SEL quadrado e a regra de Cramer (3)

Exemplo

1. Seja $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$; $Q = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$.
   Resolver, pela regra de Cramer, o sistema $BX = Q$.

Resposta

Seja $X = (x, y, z)$. $\left|B\right| = (1)(4)(6) = 24$. Portanto, $BX = Q$ é, de facto, um SEL de Cramer.

$B_x = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$; $B_y = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$; $B_z = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$\left|B_x\right| = 6(-1)^6 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 6(24 - 16) = 48.$ $\left|B_y\right| = (1)(8)(6) = 48.$ $\left|B_z\right| = (1)(4)(0) = 0.$

Por conseguinte: $\text{solução} = X = \frac{1}{|B|} \begin{bmatrix} |B_x| \\ |B_y| \\ |B_z| \end{bmatrix} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 48 \\ 48 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Um SEL quadrado e a regra de Cramer (4)

Exemplo

1. Seja: H, $H = \begin{bmatrix} C_1, & C_2, & C_3, & C_4 \end{bmatrix}$, uma matriz tal que $\det(H) = 6$; e $G = -2C_2 + 3C_4$. Resolva o SEL $HX = G$.
   Resposta. $\det(H) \neq 0$. Assim, $HX = G$ é um SEL de Cramer (é quadrado e tem coeficiente invertível).
   Seja $X = (x, y, z, w)$.
   $H_x = \begin{bmatrix} G, & C_2, & C_3, & C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2C_2 + 3C_4, & C_2, & C_3, & C_4 \end{bmatrix}$. Logo:

$$\begin{aligned} \left|H_x\right| &= \left| -2C_2 + 3C_4, \ C_2, \ C_3, \ C_4 \right| \\ &\xlongequal[(col1)+2(col2)]{} \left| 3C_4, \ C_2, \ C_3, \ C_4 \right| \\ &\xlongequal[(col1)-3(col4)]{} \left| 0, \ C_2, \ C_3, \ C_4 \right| \\ &\xlongequal[(col1)=0]{} 0. \end{aligned}$$

   $H_y = \begin{bmatrix} C_1, & G, & C_3, & C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1, & -2C_2 + 3C_4, & C_3, & C_4 \end{bmatrix}$. Logo:

$$\begin{aligned} \left|H_y\right| &= \left| C_1, \ -2C_2 + 3C_4, \ C_3, \ C_4 \right| \\ &\xlongequal[(col2)-3(col4)]{} \left| C_1, \ -2C_2, \ C_3, \ C_4 \right| \\ &\xlongequal[homog(col2)]{} -2\left| C_1, \ C_2, \ C_3, \ C_4 \right| \\ &= -2\left|H\right| = -2(6) = -12. \end{aligned}$$

>>>>>>

Um SEL quadrado e a regra de Cramer (5)

$H_z = \begin{bmatrix} C_1, & C_2, & G, & C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1, & C_2, & -2C_2 + 3C_4, & C_4 \end{bmatrix}$. Logo:

$$\begin{aligned} \left|H_z\right| &= \left|C_1, \ C_2, \ -2C_2 + 3C_4, \ C_4\right| \\ &\xlongequal[(col3)-3(col4)]{} \left|C_1, \ C_2, \ -2C_2, \ C_4\right| \\ &\xlongequal[(col3)+2(col2)]{} \left|C_1, \ C_2, \ 0, \ C_4\right| \\ &\xlongequal[(col3)=0]{} 0. \end{aligned}$$

$H_w = \begin{bmatrix} C_1, & C_2, & C_3, & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1, & C_2, & C_3, & -2C_2 + 3C_4 \end{bmatrix}$. Logo:

$$\begin{aligned} \left|H_w\right| &= \left|C_1, \ C_2, \ C_3, \ -2C_2 + 3C_4\right| \\ &\xlongequal[(col4)+2(col2)]{} \left|C_1, \ C_2, \ C_3, \ 3C_4\right| \\ &\xlongequal[homog(col4)]{} 3\left|C_1, \ C_2, \ C_3, \ C_4\right| \\ &= 3\left|H\right| = 3(6) = 18. \end{aligned}$$

Portanto, a solução é:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \frac{1}{|H|} \begin{bmatrix} |H_x| \\ |H_y| \\ |H_z| \\ |H_w| \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Bibliografia

1. **Álgebra Linear**; Isabel Cabral & Cecília Perdigão & Carlos Saiago; Escolar Editora, Lisboa; ISBN: 978-972-592-2309-2.
2. **Introdução à Álgebra Linear**; Santana, A. P. & Queiró, J. F.; Coleção: Trajetos Ciências, Publicações Gradiva, Lisboa; ISBN: 978-989-616-372-3.
3. **Álgebra Linear e Geometria Analítica**; Emília Giraldes & Vitor Hugo Fernandes & Maria Helena Santos; Editora McGraw-Hill de Portugal, Lisboa; ISBN: 972-9241-73-2.
4. **Elementary Linear Algebra**; Howard Anton & Chris Rorres; Wiley; ISBN: 978-1-118-43441-3.
5. **Matrix Analysis**; Roger A. Horn & Charles R. Johnson; Cambridge University Press; ISBN: 0-521-38632-2.