Derivação implícita

Introdução

Já vimos como determinar a equação da recta tangente ao gráfico de uma função y=f(x), num ponto**.** Para tal era necessário calcular a derivada da função, i.e. determinar a derivada de y em relação a x (y'=dy/dx).

Mas e se a equação da curva em questão não puder ser representada na forma (explícita) y=f(x) ?

É o caso, por exemplo, de $\mathbf{x^2y + y^2 = 1}$**.**

Nesse caso, dy/dx ainda pode ser determinado por um processo denominado **derivação implícita**.

De acordo com este processo, considera-se y como uma função derivável implícita de x e aplica-se as regras usuais de derivação.

Derivadas de funções definidas implicitamente

Para derivarmos uma função y(x) que está definida implicitamente, devemos

1 – Derivar ambos os membros da equação em relação a x, considerando y como uma função derivável de x.

2 – Resolver a equação resultante em ordem a $y'=dy/dx$.

EXEMPLO

Determinar dy/dx se $\mathbf{y^2 = x^2 + sen\,xy}$.

Resolução

$y^2 = x^2 + \text{sen}\,xy$

$$\frac{d}{dx}\left[y^2\right] = \frac{d}{dx}\left[x^2\right] + \frac{d}{dx}\left[\text{sen}\,xy\right]$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy)\frac{d}{dx}[xy]$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy)\left(\frac{dx}{dx}y + x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy)\left(y + x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy)\left(y + x\frac{dy}{dx} \right)$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy)y + (\cos xy)\left(x\frac{dy}{dx} \right)$$

$$2y\frac{dy}{dx} - (\cos xy)\left(x\frac{dy}{dx} \right) = 2x + (\cos xy)y$$

$$\left(2y - x\cos xy \right)\frac{dy}{dx} = 2x + y\cos xy$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y\cos xy}{2y - x\cos xy}}$$

Note que para o caso de funções implícitas, a derivada envolve **ambas** as variáveis x e y, e não somente a variável independente x.

EXEMPLO

Mostrar que o ponto (2,4) pertence à curva

$$\mathbf{x^3 + y^3 - 9xy = 0}$$

e, em seguida, determinar a equação da recta tangente à curva nesse ponto.

Resolução

O ponto (2,4) pertence à curva porque

$$(2)^3 + (4)^3 - 9(2)(4) = 0$$

i.e., o ponto (x,y)=(2,4) satisfaz a equação que define a curva.

Para determinarmos a equação da recta tangente à curva em (2,4), precisamos de calcular dy/dx.

Ora

$x^3 + y^3 - 9xy = 0$

Derivando implicitamente:

$$\frac{d}{dx}\left[x^3\right]+\frac{d}{dx}\left[y^3\right]-\frac{d}{dx}\left[9xy\right]=0$$

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-9\left(\frac{dx}{dx}y+x\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-9y-9x\frac{dy}{dx}=0$$

$$\left(3y^2-9x\right)\frac{dy}{dx}=-3x^2+9y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-3x^2+9y}{3y^2-9x}=\frac{9y-3x^2}{3y^2-9x}=\frac{3(3y-x^2)}{3(y^2-3x)}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}}$$

Calculando a derivada no ponto (x,y) = (2,4) resulta:

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,4)} = \left.\frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}\right|_{(2,4)} = \frac{3(4) - (2)^2}{(4)^2 - 3(2)} = \frac{8}{10} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

Logo, a equação da recta tangente é dada por:

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

$$y - 4 = \frac{4}{5}(x - 2)$$

$$\boxed{y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}}$$

EXEMPLO

Seja y uma função definida implicitamente pela equação
$5y^2 + \text{sen}\, y = x^2$. Determinemos dy/dx.

$$5y^2 + \text{sen}\, y = x^2$$

$$\frac{d}{dx}\left[5y^2\right] + \frac{d}{dx}\left[\text{sen}\, y\right] = \frac{d}{dx}\left[x^2\right]$$

$$5(2y)\frac{dy}{dx} + (\cos y)\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\left(10y + \cos y\right)\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{10y + \cos y}}$$

EXEMPLO

Determinar $\frac{d^2y}{dx^2}$ sendo y definida por **$4x^2 - 2y^2 = 9$.**

Derivando implicitamente:

$4x^2 - 2y^2 = 9$

$$\frac{d}{dx}\left[4x^2\right] - \frac{d}{dx}\left[2y^2\right] = \frac{d}{dx}[9]$$

$$4(2x) - 2(2y)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}}$$

Derivando cada membro da equação:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$$

em relação a x resulta:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{y}\right)$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d[2x]}{dx}y - 2x\frac{d[y]}{dx}}{y^2} = \frac{2y - 2x\left(\frac{2x}{y}\right)}{y^2} = \frac{2y - \frac{4x^2}{y}}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{2y^2 - 4x^2}{y}}{y^2} = \frac{2y^2 - 4x^2}{y^3}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y^2 - 4x^2}{y^3}}$$

De acordo com a equação original, $4x^2 - 2y^2 = 9$, logo

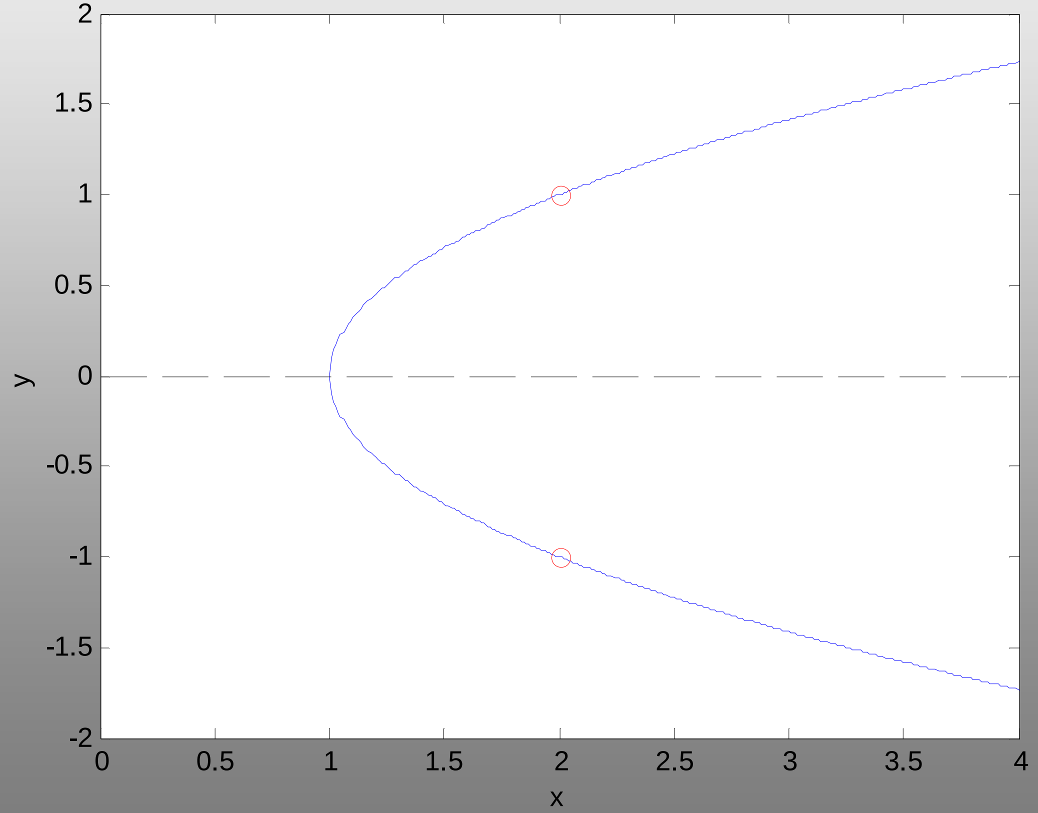
$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{9}{y^3}}$$

EXEMPLO

Determinar as equações das rectas tangentes nos pontos (2,-1) e (2,1) à curva y definida implicitamente por **$y^2 - x + 1 = 0$.**

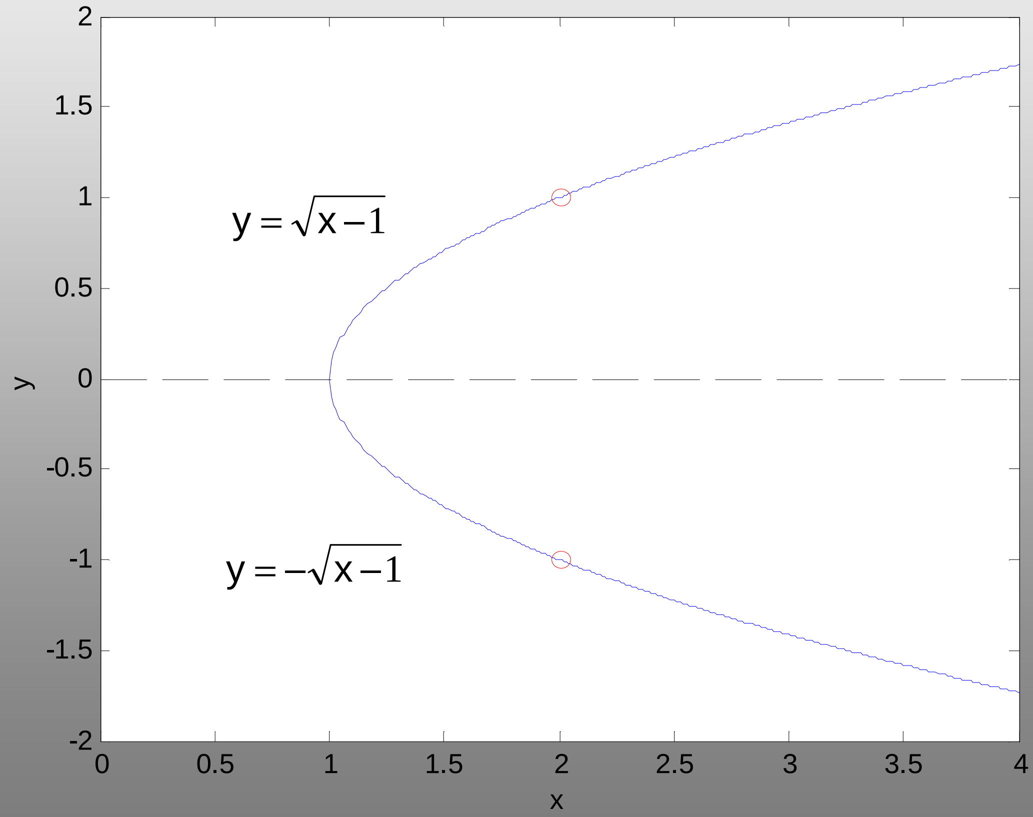
Resolução

A curva definida por $y^2 - x + 1 = 0$ está apresentada ao lado.



Uma maneira de resolver este problema seria resolver a equação para y em termos de x e, então, calcular a derivada de $y=\sqrt{x-1}$ no ponto (2,1) e a derivada de $y=-\sqrt{x-1}$ no ponto (2,-1).

No entanto, a derivação implícita é mais eficiente, uma vez que dá **ambos os declives** ao mesmo tempo.



Derivando **$y^2 - x + 1 = 0$** implicitamente, resulta:

$y^2 - x + 1 = 0$

$$\frac{d}{dx}\left[y^2\right] - \frac{d}{dx}[x] + \frac{d}{dx}[1] = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} - 1 + 0 = 0$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}}$$

Assim, os declives das rectas tangentes nos pontos (2,-1) e (2,1) são:

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=2\\y=-1}} = \frac{1}{2(-1)} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=2\\y=1}} = \frac{1}{2(1)} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Assim, as equações das rectas tangentes à curva nos pontos (2,-1) e (2,1) são dadas por:

ponto (2,-1):

$y - y_0 = m_{tg}(x - x_0)$

$y - (-1) = (-\frac{1}{2})(x - 2)$

$y + 1 = (-\frac{1}{2})x + 1$

$\boxed{\mathbf{y = -\frac{1}{2}\, x}}$

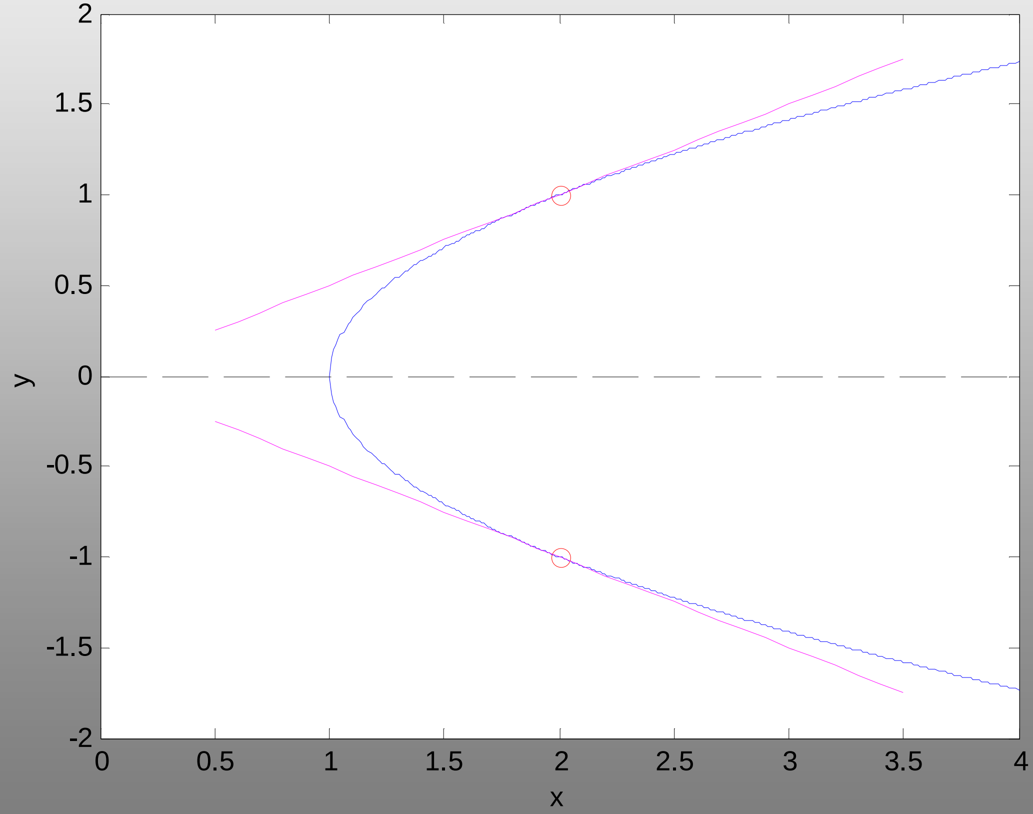
ponto (2,1):

$y - y_0 = m_{tg}(x - x_0)$

$y - 1 = (\frac{1}{2})(x - 2)$

$y - 1 = (\frac{1}{2})x - 1$

$\boxed{\mathbf{y = \frac{1}{2}\, x}}$



EXEMPLO

(a) Usando derivação implícita calcule dy/dx, sendo y definida por $\mathbf{x^3 + y^3 = 3xy}$**.**

(b) determine a equação da recta tangente à curva no ponto (3/2,3/2)

(c) Em que pontos da curva a recta tangente é horizontal ?

Resolução (a)

$x^3 + y^3 = 3xy$

$$\frac{d}{dx}\left[x^3\right] + \frac{d}{dx}\left[y^3\right] = \frac{d}{dx}\left[3xy\right]$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{dx}{dx}y + x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{dx}{dx} y + x \frac{dy}{dx}\right)$$

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 3y + 3x \frac{dy}{dx}$$

$$3y^2 \frac{dy}{dx} - 3x \frac{dy}{dx} = 3y - 3x^2$$

$$\left(3y^2 - 3x\right)\frac{dy}{dx} = 3y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - 3x^2}{3y^2 - 3x}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}}$$

(b)

A inclinação da recta tangente à curva no ponto (3/2,3/2) é dada por:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=3/2\\y=3/2}} = \frac{\frac{3}{2}-\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2}-\frac{9}{4}}{\frac{9}{4}-\frac{3}{2}} = \frac{\frac{-3}{4}}{\frac{3}{4}} = -\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = \boxed{-1}$$

A equação da recta tangente à curva nesse ponto é dada por:

$y - y_0 = m_{tg}(x - x_0)$

$y - 3/2 = (-1)\,(x - 3/2)$

$y - 3/2 = -x + 3/2$

$y = -x + 3/2 + 3/2$

$\boxed{y = 3 - x}$

(c)

A recta tangente é horizontal a uma curva nos pontos onde dy/dx = 0.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y^2 - x} = 0$$

Portanto, as rectas tangentes ocorrem em:

$$y = x^2$$

Substituindo esta expressão para y na equação original, resulta:

$x^3 + (x^2)^3 = 3x(x^2)$

$2x^3 - x^6 = 0$

ou:

$x^6 - 2x^3 = 0$

$\mathbf{x^6 - 2x^3 = 0}$ pode ser escrito como $\mathbf{x^3(x^3 - 2) = 0}$

Assim, as raízes de $\mathbf{x^3(x^3 - 2) = 0}$ são $\mathbf{x = 0}$ e $\mathbf{x = 2^{1/3}}$.

Utilizando $y = x^2$, **a recta tangente é horizontal** nos pontos:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{(0,0)} \\ \mathbf{(2^{1/3}, 2^{2/3})} \end{array}}$$

EXEMPLO

Use derivação implícita para calcular dy/dx , sendo y definida através da equação .

$$y\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{y}\right)=1-xy$$

Resolução

$$y\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{y}\right)=1-xy$$

$$\frac{dy}{dx}\mathrm{sen}\left(\frac{1}{y}\right)+y\frac{d}{dx}\left[\mathrm{sen}\left(\frac{1}{y}\right)\right]=\frac{d}{dx}[1]-\left(\frac{dx}{dx}y+x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}\mathrm{sen}\left(\frac{1}{y}\right)+y\left(\cos\left(\frac{1}{y}\right)\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{y}\right]\right)=-\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)+y\left(\cos\left(\frac{1}{y}\right)\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{y}\right]\right)=-\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)+y\cos\left(\frac{1}{y}\right)\frac{d}{dx}\left[y^{-1}\right]=-y-x\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)+y\cos\left(\frac{1}{y}\right)\left[(-1)y^{-1-1}\frac{dy}{dx}\right]=-y-x\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)-\frac{1}{y}\cos\left(\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{dx}=-y-x\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)-\frac{1}{y}\cos\left(\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{dx}=-y-x\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)-\frac{1}{y}\cos\left(\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{dx}+x\frac{dy}{dx}=-y$$

$$\frac{dy}{dx}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)-\frac{1}{y}\cos\left(\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{dx}+x\frac{dy}{dx}=-y$$

$$\left[\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)-\frac{1}{y}\cos\left(\frac{1}{y}\right)+x\right]\frac{dy}{dx}=-y$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)-\frac{1}{y}\cos\left(\frac{1}{y}\right)+x}}$$

ou:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{-y^{2}}{y\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)-\cos\left(\frac{1}{y}\right)+xy}}$$

EXEMPLO

Determine a equação da recta normal à curva definida implicitamente por **sen(x^2y^2) = x-1,** no ponto $(1,\sqrt{\pi})$

Resolução

sen(x^2y^2) = x

$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{sen}(x^2y^2)\right]=\frac{dx}{dx}$$

$$\cos(x^2y^2)\frac{d}{dx}\left[x^2y^2\right]=1$$

$$\cos(x^2y^2)\left\{\left(\frac{d}{dx}\left[x^2\right]\right)y^2+x^2\left(\frac{d}{dx}\left[y^2\right]\right)\right\}=1$$

$$\cos(x^2y^2)\left(2xy^2+x^2(2y)\frac{dy}{dx}\right)=1$$

$$\cos(x^2y^2)\left(2xy^2 + x^2(2y)\frac{dy}{dx}\right) = 1$$

$$2xy^2\cos(x^2y^2) + x^2(2y)\cos(x^2y^2)\frac{dy}{dx} = 1$$

$$x^2(2y)\cos(x^2y^2)\frac{dy}{dx} = 1 - 2xy^2\cos(x^2y^2)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2xy^2\cos(x^2y^2)}{2x^2y\cos(x^2y^2)}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=1 \\ y=\sqrt{\pi}}} = \frac{1 - 2\pi\cos(\pi)}{2\sqrt{\pi}\cos(\pi)} = -\frac{1 + 2\pi}{2\sqrt{\pi}} = m$$

A equação da recta normal é então dada por

$$\boxed{y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)}$$

$$\boxed{y - \sqrt{\pi} = -\frac{1}{m}(x - 1)}$$