Departamento de Matemática

utad

Teoria de Conjuntos

Tópicos de Matemática Discreta

EInf & MACD

— 2/3/4 de novembro de 2020 —

Definição

Um **conjunto** é uma coleção de objetos, chamados elementos (ou membros) do conjunto. Os conjuntos são representados por letras maiúsculas e os seus elementos por letras minúsculas. Se um objeto x é um elemento de um conjunto A, escrevemos $x \in A$. Caso contrário, escrevemos $x \notin A$.

Na definição de um conjunto, não deve haver ambiguidade em saber se um dado objeto lhe pertence ou não.

- O conjunto de vogais do alfabeto português, é um conjunto bem definido.
- Os alunos bonitos de Engenharia Informática não formam um conjunto bem definido.

Exemplos

Seja $A = \{0, 1, \{\ \}, \{-1\}\}$. Qual o valor lógico das seguintes proposições?

a) $0 \in A$

b) $-1 \in A$

c) $3 \notin A$

d) $\{\ \} \in A$

e) $\{-1\} \in A$

Conjunto vazio

Ao único conjunto que não tem qualquer elemento chamamos conjunto vazio e usamos a notação $\emptyset$ ou $\{\ \}$.

Igualdade de conjuntos

Dois conjuntos A e B dizem-se **iguais**, e escrevemos $A = B$, se e somente se

$$\forall x, x \in A \leftrightarrow x \in B.$$

Notas:

- Não é verdade que $\{\emptyset\} = \emptyset$.
- A ordem pela qual os elementos são enumerados é irrelevante.
- Se um elemento for repetido, apenas é considerado uma vez.

Assim, $\{x, x, y, z, x, y\}$, $\{x, y, z\}$ e $\{z, x, y\}$ representam o mesmo conjunto.

Cardinal de um conjunto

O número de elementos de um conjunto A diz-se o **cardinal de** A**,** $\#A$. Um conjunto com um número finito de elementos diz-se um conjunto finito. Caso contrário, diz-se um conjunto infinito.

Exemplos

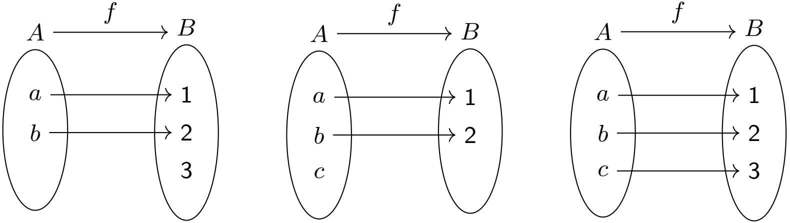
- $\#\emptyset = 0$
- $\#\{\emptyset\} = 1$
- $\#\{2, 5, -2\} = 3$

Conjuntos equipotentes

Dois conjuntos A e B dizem-se **equipotentes** se têm o mesmo cardinal.

Considerem-se dois conjuntos A e B. Então:

. $\#A \leq \#B$ se e só se existe uma aplicação injetiva $f : A \longrightarrow B$;
. $\#A \geq \#B$ se e só se existe uma aplicação sobrejetiva $f : A \longrightarrow B$;
. $\#A = \#B$, se e só se existe uma aplicação bijetiva $f : A \longrightarrow B$; .



Os conjuntos podem ser definidos ou listando todos os seus elementos **(definição em extensão)** ou definindo um domínio e a(s) propriedade(s) a que os seus elementos devem satisfazer para pertencer ao conjunto **(definição em compreensão)**. Neste último caso, a notação habitual é $\{x \in U : p(x)\}$, onde $p(x)$ é a condição que os elementos do conjunto têm de verificar. A notação $\{x \in U : p(x)\}$ lê-se *o conjunto cujos elementos são todos os objetos* x *de* U *que verificam a condição* $p(x)$.

Exemplos

$A_1 = \{x \in U : x \text{ é um mês com exatamente 30 dias}\}$

$A_2 = \{\text{abril, junho, setembro, novembro}\}$

$A_3 = \{1, 3, 7, 10\}$

$A_4 = \left\{x \in U : x^2 - 3x - 2 = 0\right\}$

$A_5 = \{x \in U : x \text{ é uma capital e } x \text{ está na europa}\}$

$A_6 = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$

Na definição de um conjunto por extensão, é necessário definir o universo de elementos que estamos a considerar. Assim, os conjuntos

$A_1 = \left\{x \in \mathbb{C} : x^4 = 1\right\}$
$A_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x^4 = 1\right\}$
$A_3 = \left\{x \in \mathbb{N} : x^4 = 1\right\}$

apesar de estarem definidos à custa da mesma proposição, não contêm os mesmos elementos.

Subconjuntos

Dados dois conjuntos A e B, dizemos que A é subconjunto de B ou A é uma parte de B,e escrevemos $A \subseteq B$, se todo o elemento de A for um elemento de B, ou seja,

$$\forall x, x \in A \rightarrow x \in B.$$

Para mostrar que A é um subconjunto de B, escolhemos um elemento arbitrário a de A e, usando regras lógicas e fatos conhecido, mostramos que a também está em B. Para mostrar que $A \nsubseteq B$, "basta"encontrar um elemento $a \in A$ que não pertença a B.

Princípio da dupla inclusão

Dados dois conjuntos A e B são iguais se e só se $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.

Notas

- Se $A \subseteq B$ e $A \neq B$, A é um **subconjunto próprio** de B e escrevemos $A \subset B$.
- $\emptyset \subseteq A$ para todo o conjunto A.
- $A \subseteq A$ para todo o conjunto A.

Exemplo

Supõe que $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ e ainda que $1 \in A, 2 \in B, 3 \in C, 4 \notin A, 5 \notin B$ e $6 \notin C$. Quais as afirmações que são necessariamente verdadeiras?

a) $1 \in B$

b) $2 \in A$

c) $3 \in A$

d) $4 \in B$

e) $5 \notin A$

f) $5 \in C$

g) $6 \notin B$

Partes de um conjunto

Dado um conjunto A, ao conjunto de todos os subconjuntos de A chamamos o conjunto das partes de A, e representa-se por $\mathcal{P}(A)$.

Exemplos

- Determinar $\mathcal{P}(A)$, para $A = \{1, 2, 3\}$
- Se A é um conjunto com n elementos, então $\#\mathcal{P}(A) = 2^n$

União

A união de dois conjuntos A e B, denotada por $A \cup B$, é o conjunto constituído pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos. Simbolicamente,

$$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Se $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d, e\}$, então $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$.

Interseção

A interseção de dois conjuntos A e B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto constituído pelos elementos que pertencem simultaneamente aos dois conjuntos. Simbolicamente,

$$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Se $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d, e\}$, então $A \cap B = \{b, c\}$.

Complementar de um conjunto

Num dado universo U, chama-se complementar de um conjunto A, denotada por $\bar{A}$, ao conjunto de todos os elementos de U que não pertencem a A. Simbolicamente,

$$\bar{A} = \{x \in U : x \notin A\}$$

.

Se $U = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A = \{b, c, d, e\}$ então $\bar{A} = \{a, f\}$.

Diferença entre conjuntos

A diferença de dois conjuntos A e B, denotada por $A \backslash B$, é o conjunto constituído pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B. Simbolicamente,

$$A \backslash B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

Se $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d, e\}$ então $A \backslash B = \{a\}$.

Diferença simétrica

A diferença simétrica entre os conjuntos A e B, denotada por $A\diamondsuit B$, é o conjunto definido por

$$(A\backslash B) \cup (B\backslash A).$$

Se $A = \{a, b, c, d, f, g\}$, $B = \{b, c, d, e\}$ então $A\diamondsuit B = \dots.$

Propriedades das operações com conjuntos

Sejam A, B e C três conjuntos de um dado universo U. Então

$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
$A \cup \emptyset = A$	$A \cap U = A$
$A \cup U = U$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
$A \cup \bar{A} = U$	$A \cap \bar{A} = \emptyset$
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
$\bar{\bar{A}} = A$	
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$

Propriedades das operações com conjuntos (cont.)

Sejam A, B e C três conjuntos de um dado universo U.

- Se $A \subseteq B$ então $A \cap B = A$
- Se $A \subseteq B$ então $A \cup B = B$
- Se $A \subseteq B$ então $\bar{B} \subset \bar{A}$
- $A \backslash B = A \cap \bar{B}$
- $A \diamondsuit B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$