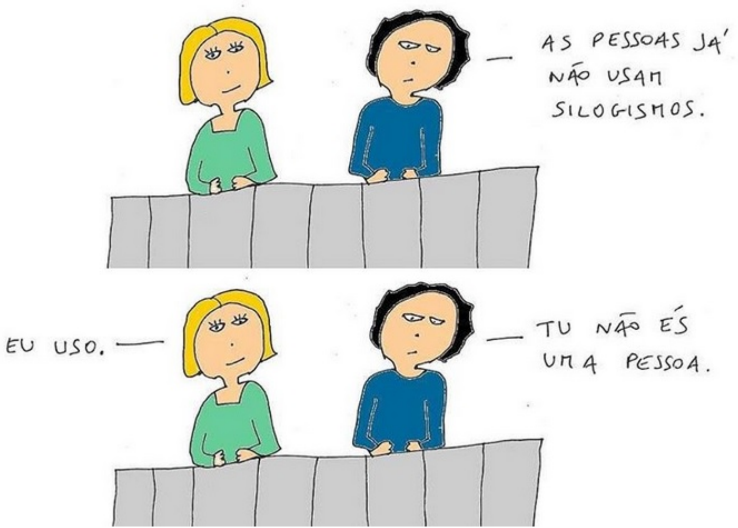
Lógica Proposicional

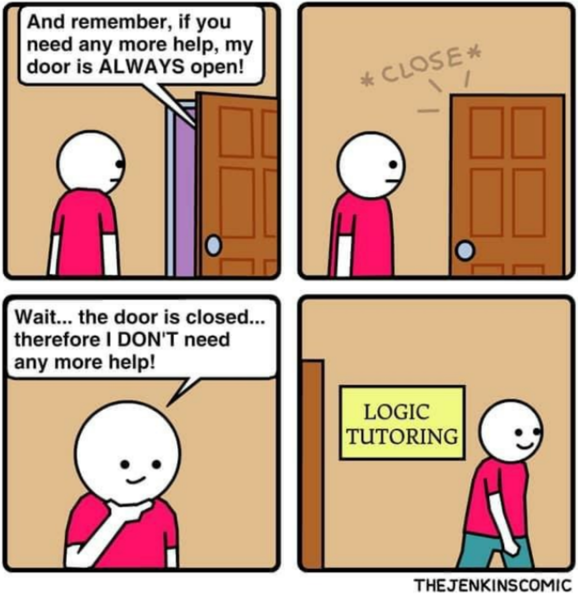
Tópicos de Matemática Discreta

EInf & MACD

— 12/13/14 de outubro de 2020 —



autor: Hugo van der Ding


And remember, if you need any more help, my door is ALWAYS open!
CLOSE
Wait... the door is closed... therefore I DON'T need any more help!
LOGIC TUTORING
THEJENKINSCOMIC

Alberto é mais velho que Bernardo. Carlos é mais velho que Alberto. Então, Bernardo é mais velho que Carlos.

Os semáforos previnem acidentes. O Miguel não teve nenhum acidente enquanto conduzia hoje. Portanto, o Miguel passou por algum semáforo.

Um gato preto atravessou-se no caminho da Margarida. A Margarida foi despedida no seu emprego. Podemos concluir que os gatos pretos dão azar.

Todos os portuenses são portugueses. O João não é portuense. Então, o João não é português.

Os hospitais estao cheios de pessoas doentes portanto os hospitais fazem as pessoas adoecer.

- Todos os escritores que entendem a natureza humana são inteligentes;
- Ninguém é um verdadeiro poeta a menos que possa mexer com os emoções dos homens;
- Shakespeare escreveu Hamlet;
- Só aqueles que entendem a natureza humana podem mexer com os emoções dos homens;
- Ninguém, exceto um verdadeiro poeta, poderia ter escrito Hamlet.
- Portanto, ???

Numa mansão victoriana, várias pessoas são suspeitas de um crime: o motorista (A), o cozinheiro (B), o mordomo (C) e o jardineiro (D). O famoso detetive Sherlock Holmes investiga e descobre os seguintes factos:

- B é culpado somente se A é culpado;
- A é culpado se e só se o crime foi cometido com um revólver;
- B é culpado ou A é culpado, ou C é culpado ou D é culpado;
- Se C é culpado então o crime não foi cometido com um revólver;
- D não é culpado se o crime não foi cometido com um machado;
- Se o crime foi cometido com um revólver ou com um machado então o crime foi premeditado e cometido suavemente;
- O crime não foi cometido suavemente.

A partir destes factos, deduza quem foi o culpado. Mostre que o seu raciocínio é válido.

Um raciocínio/argumento pode ser definido como uma sequência finita de afirmações (numa dada linguagem), digamos $A_1, A_2, \ldots, A_n, C, n \geq 1$. As primeiras n afirmações são ditas as premissas e C é dita a conclusão.
Um raciocínio é considerado correto se, sempre que as suas premissas forem simultaneamente verdadeiras, a conclusão também o for

Proposições

Definição

Uma **expressão** é uma combinação finita de símbolos bem formados, segundo regras do contexto em causa. Os símbolos podem ser valores (ou constantes), variáveis, operações, relações, sinais de pontuação ou outras entidades sintáticas.

Exemplos

- Hoje é quinta-feira. Podemos identificar o seu valor de verdade, mas...
- $2 + 2 = 5$. Podemos identificar o seu valor de verdade
- O Ronaldo é o melhor jogador do mundo. Não podemos identificar o seu valor de verdade
- Quando é que a aula acaba? É uma pergunta
- 1991. É a designação de um número
- Em 1991 houve uma guerra no golfo Pérsico. Podemos identificar o seu valor de verdade
- 20% de 1000 é 200. Podemos identificar o seu valor de verdade
- Todo o número maior ou igual a 4 pode ser escrito como a soma de dois números primos. Podemos identificar o seu valor de verdade, mas...
- $x^2 + 5 = 0$. Não podemos identificar o seu valor de verdade, depende do valor de x

Proposições

Designação

Às expressões que representam nomes, números, coisas, ..., chamamos **designações**.

Proposição

Às expressões que traduzem afirmações (frase declarativa) sobre as quais faz sentido interrogarmo-nos sobre o seu valor lógico chamamos **proposições** ou **variáveis proposicionais**.

Princípio do terceiro excluído

Uma proposição ou é verdadeira ou é falsa.

Princípio da não contradição

Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa em simultâneo.

O cálculo proposicional, incide sobre o conjunto de todas as proposições V_{Prop} que verificam os princípios enunciados.

Variáveis proposicionais

Usaremos os símbolos $p_0, p_1, \ldots, p_n, n \in \mathbb{N}$, a que chamamos **variáveis proposicionais**, para representar proposições genéricas verificando o Princípio do erceiro excluído e o Princípio da não contradição. Representamos o conjunto de todas as variáveis proposicionais por V_{Prop}.

Por facilidade de representação, as proposições (ou variáveis proposicionais) são por vezes representadas por letras minúsculas do alfabeto latino, usualmente: $a,\ b,\ c$ ou $p,\ q,\ r,\ s$, ou ainda, por letras gregas ψ, φ, θ.

Exemplos

. p: "A lua é um satélite natural da Terra"
. a: "Existem 195 países reconhecidos pelas Nações Unidas"
. φ: "Portugal tem 308 concelhos"

Proposições

"Os alunos de Engenharia Informática são bons alunos a Matemática e gostam de programação." pode decompor-se em duas afirmações:

> *"Os alunos de Engenharia Informática são bons alunos a Matemática"*
>
> *"Os alunos de Engenharia Informática gostam de programação"*

Estas duas proposições já não se podem decompor mais e dizem-se **proposições elementares** (ou átomos), enquanto que a primeira se chama de **proposição composta**.

Exemplos

- p_1: Se sair cedo do emprego posso ir buscar os filhos e fazer o jantar.
- p_2: Os covilhetes e as cristas são típicos de Vila Real.
- p_3: Se hoje é segunda, amanhã é terça e portanto há mercado.
- p_4: Em 1996, Portugal foi Campeão Europeu de futebol.
- p_5: Se o número natural n termina em zero ou 5 então é divísível por 5.

Conetivos

. $\wedge$ **(conjunção)**
. $\vee$ **(disjunção)**
. $\dot{\vee}$ **(disjunção exclusiva)**
. $\rightarrow$ **(implicação)**
. $\leftrightarrow$ **(equivalência)**
. $\neg$ **(negação)**

"Alfabeto e pontuação"

Para a construção das palavras (fórmulas) usaremos os seguintes símbolos primitivos:
. um conjunto infinito e numerável de variáveis proposicionais $V_{Prop} = \{p_0; p_1; p_2; \dots\}$;
. os conectores ou operadores lógicos: $\neg, \wedge, \vee, \dot{\vee}, \rightarrow, \leftrightarrow$;
. os parentesis: (,).

Fórmulas

Fórmulas do Cálculo proposicional

Uma sequência finita de símbolos primitivos diz-se uma fórmula se pode ser obtida aplicando um número finito de vezes as regras seguintes:

- R_1- qualquer variável proposicional é uma fórmula;
- R_2- se p for fórmula, então $(\neg p)$ também é fórmula;
- R_3- se p e q forem fórmulas, então também são fórmulas: $(p \wedge q),\ (p \vee q),\ (p \dot{\vee} q),\ (p \rightarrow q),\ (p \leftrightarrow q)$.
- R_4- se p é uma fórmula, então (p) também é uma fórmula.

Exemplos

- A sequência $(p_1 \rightarrow ((\neg p_2) \wedge p_0))$ é uma fórmula do Cálculo Proposicional;
- A sequência $((\neg(p_0 \vee p_2)) \leftrightarrow (p_1 \wedge p_0))$ é uma fórmula do Cálculo Proposicional;
- A sequência $(\neg(p_0 \vee p_2) \leftrightarrow (p_1 \wedge))$ não é uma fórmula do Cálculo Proposicional.

Fórmulas

Simplificação de fórmulas

Prioridade das operações:
. negação;
. conjunção, disjunção e disjunção exclusiva;
. implicação e equivalência.
A fórmula $((\neg(p_0 \vee p_2)) \leftrightarrow (p_1 \wedge p_0))$ pode ser representada por $\neg(p_0 \vee p_2) \leftrightarrow p_1 \wedge p_0$.

"Sinónimos"

Designações equivalentes são aquelas que designam o mesmo ser: 2^3 e $5+3$ (utilizamos o símbolo "$=$"entre designações equivalentes). Proposições equivalentes são as que têm o mesmo valor lógico: a terra gira à volta do sol e $(-3)^3$ é um número negativo (utilizamos o símbolo $\equiv$ entre proposições equivalentes).

Negação

Dada uma proposição p, **a negação de** p, que se representa por $\neg p$ (ou $\sim p$), é ainda uma proposição que se lê, formalmente, por *não* p. O valor lógico da negação de uma proposição pode ser relacionado com o valor lógico da proposição inicial, de acordo com as seguintes tabelas:

p	$\neg p$
V	F
F	V

ou

p	$\neg p$
1	0
0	1

Exemplos

p: *"A Matemática é uma ciência"*

$\neg p$: *"Não é verdade que a Matemática é uma ciência"*

$\neg p$: *"A Matemática não é uma ciência"*

q: *"Todas as pessoas têm os olhos castanhos"*

$\neg q$: *"Não é verdade que todas as pessoas têm os olhos castanhos"*

$\neg q$: *"Nem todas as pessoas têm os olhos castanhos"*

$\neg q$: *"Existe pelo menos uma pessoa que não tem os olhos castanhos"*

Propriedades da negação

- dupla negação: $\neg(\neg p) \equiv p$

Conjunção

Dada duas proposições p e q, **a conjunção de** p **e** q, que se representa por $p \wedge q$, é ainda uma proposição que se lê, formalmente, por p *e* q. O valor lógico da conjunção de duas proposições pode ser relacionado com o valor lógico das proposições iniciais, de acordo com a seguinte tabela de verdade:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

ou

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Conetivos/Operadores

Exemplos

p: *"Os covilhetes são típicos de Vila Real"*

q: *"O barro preto é típico de Vila Real"*

$p \wedge q$: *"Os covilhetes são típicos de Vila Real e o barro preto é típico de Vila Real*

$p \wedge q$: *"Os covilhetes e o barro preto são típicos de Vila Real*

p: *"Todos os alunos estudam muito"*

q: *"Todos os alunos passam às UC"*

$p \wedge q$: *"Todos os alunos estudam muito e passam às UC"*

Propriedades da conjunção

- Comutatividade: $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$
- Associatividade: $((p \wedge q) \wedge r) \equiv (p \wedge (q \wedge r))$
- Existência de elemento neutro: $(p \wedge V) \equiv (V \wedge p) \equiv p$
- Existência de elemento absorvente: $(p \wedge F) \equiv (F \wedge p) \equiv F$
- Idempotência: $(p \wedge p) \equiv p$

Disjunção

Dada duas proposições p e q, **a disjunção de p e q**, que se representa por $p \vee q$, é ainda uma proposição que se lê, formalmente, por p *ou* q. O valor lógico da disjunção de duas proposições pode ser relacionado com o valor lógico das proposições iniciais, de acordo com a seguinte tabela de verdade:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

ou

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exemplos

p: *"O João vai de carro para a Universidade"*

q: *"O João não vai às aulas"*

$p \vee q$: *"O João vai de carro para a Universidade ou o João não vai às aulas"*

$p \vee q$: *"O João vai de carro para a Universidade ou não vai às aulas"*

p: *"O Eduardo comeu sobremesa"*

q: *"O Miguel comeu peixe"*

$p \vee q$: *"O Eduardo comeu sobremesa ou o Miguel comeu peixe"*

Conetivos/Operadores

Propriedades da Disjunção

- Comutatividade: $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
- Associatividade: $((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r))$
- Existência de elemento neutro: $(p \vee F) \equiv (F \vee p) \equiv p$
- Existência de elemento absorvente: $(p \vee V) \equiv (V \vee p) \equiv V$
- Idempotência: $(p \vee p) \equiv p$

Propriedades interconetivos

- Distribuição da conjunção em relação à disjunção: $(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
- Distribuição da disjunção em relação à conjunção: $(p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
- Princípio do terceiro excluído: $(p \vee \neg p) \equiv V$
- Princípio da não contradição: $(p \wedge \neg p) \equiv F$
- Leis de Morgan: $(\neg(p \wedge q)) \equiv (\neg p \vee \neg q)$
- Leis de Morgan: $(\neg(p \vee q)) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$

Disjunção exclusiva

Dada duas proposições p e q, **a disjunção exclusiva de** p **e** q, que se representa por $p\dot{\vee}q$, é ainda uma proposição que se lê, formalmente, por *ou* p *ou* q. O valor lógico da disjunção exclusiva de duas proposições pode ser relacionado com o valor lógico das proposições iniciais, de acordo com a seguinte tabela de verdade:

p	q	$p\dot{\vee}q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

ou

p	q	$p\dot{\vee}q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exemplos

p: *"A entrada do almoço é sopa"*

q: *"A entrada do almoço é presunto"*

$p\dot{\vee}q$: *"Ou a entrada do almoço é sopa ou a entrada do almoço é presunto"*

$p\dot{\vee}q$: *"A entrada do almoço ou é sopa ou presunto"*

p: *"O Eduardo é espanhol"*

q: *"O Eduardo é português"*

$p\dot{\vee}q$: *"O Eduardo ou é espanhol ou é português"*

Implicação

Dada duas proposições p e q, **a implicação entre p e q**, que se representa por $p \rightarrow q$, é ainda uma proposição que se lê, formalmente, por p *implica* q. O valor lógico da implicação entre duas proposições pode ser relacionado com o valor lógico das proposições iniciais, de acordo com a seguinte tabela de verdade:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

ou

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- p diz-se o **antecedente** e q é o **consequente**
- A proposição $q \rightarrow p$ diz-se a **recíproca**
- A proposição $\neg q \rightarrow \neg p$ diz-se a **contrarrecíproca**
- A proposição $\neg p \rightarrow \neg q$ diz-se a **inversa**

Exemplos

- p: "O Eduardo é estudioso"
- q: "O Eduardo vai acabar o curso em três anos"
- $p \to q$: "O Eduardo ser estudioso implica que o Eduardo vai acabar o curso em três anos"
- Se p então q;
- Se p, q;
- p é suficiente para q;
- q é necessária a p;
- Uma condição necessária para p é q;
- q se p;
- q sempre que p;
- q quando p;
- p só se q;
- q segue de p;

Propriedades da implicação

- Transitividade: $(((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)) \equiv V$
- Relação da implicação com a disjunção: $(p \to q) \equiv (\neg p \vee q)$
- Negação da implicação: $(\neg(p \to q)) \equiv (p \wedge \neg q)$
- Implicação contrarrecíproca: $(p \to q) \equiv ((\neg q) \to (\neg p))$

Equivalência

Dada duas proposições p e q, **a equivalência entre** p **e** q, que se representa por $p \leftrightarrow q$, é ainda uma proposição que se lê, formalmente, por p *é equivalente a* q. O valor lógico da equivalência entre duas proposições pode ser relacionado com o valor lógico das proposições iniciais, de acordo com a seguinte tabela de verdade:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

ou

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Exemplos

p: *"O Eduardo é estudioso"*

q: *"O Eduardo vai acabar o curso em três anos"*

$p \leftrightarrow q$: *"O Eduardo ser estudioso é equivalente a o Eduardo vai acabar o curso em três anos"*

$p \leftrightarrow q$: *"O Eduardo é estudioso se e só se (sse) acabar o curso em três anos"*

Propriedades da equivalência

. Princípio da dupla implicação: $(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$

Valorização

A uma função $v : V_{Prop} \to \{V, F\}$ que a cada variável proposicional atribui um valor de verdade, chamamos **valorização**. Toda a valorização pode ser estendida ao conjunto de todas as fórmulas, da forma seguinte:

- para $p \in V_{Prop}$, o valor de $v(p)$ já está definido;
- para $p \in V_{Prop}$, se $v(p) = 1$ então $v(\neg p) = 0$ e se $v(p) = 0$ então $v(\neg p) = 1$;
- se $p, q \in V_{Prop}$ e $\diamondsuit$ é um conetivo, $v(p \diamondsuit q) = v(p) \diamondsuit v(q)$.

Tabelas de verdade - exemplo

Verificar o valor lógico da fórmula $\neg p_0 \vee (p_1 \to p_0)$.

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_1 \to p_0$	$\neg p_0 \vee (p_1 \to p_0)$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

Valorização

A uma função $v : V_{Prop} \to \{V, F\}$ que a cada variável proposicional atribui um valor de verdade, chamamos **valorização**. Toda a valorização pode ser estendida ao conjunto de todas as fórmulas, da forma seguinte:

- para $p \in V_{Prop}$, o valor de $v(p)$ já está definido;
- para $p \in V_{Prop}$, se $v(p) = 1$ então $v(\neg p) = 0$ e se $v(p) = 0$ então $v(\neg p) = 1$;
- se $p, q \in V_{Prop}$ e $\diamondsuit$ é um conetivo, $v(p \diamondsuit q) = v(p) \diamondsuit v(q)$.

Tabelas de verdade - exemplo

Verificar o valor lógico da fórmula $\neg p_0 \vee (p_1 \to p_0)$.

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_1 \to p_0$	$\neg p_0 \vee (p_1 \to p_0)$
1	1	0		
1	0	0		
0	1	1		
0	0	1		

Valorização

A uma função $v : V_{Prop} \to \{V, F\}$ que a cada variável proposicional atribui um valor de verdade, chamamos **valorização**. Toda a valorização pode ser estendida ao conjunto de todas as fórmulas, da forma seguinte:

- para $p \in V_{Prop}$, o valor de $v(p)$ já está definido;
- para $p \in V_{Prop}$, se $v(p) = 1$ então $v(\neg p) = 0$ e se $v(p) = 0$ então $v(\neg p) = 1$;
- se $p, q \in V_{Prop}$ e $\diamondsuit$ é um conetivo, $v(p \diamondsuit q) = v(p) \diamondsuit v(q)$.

Tabelas de verdade - exemplo

Verificar o valor lógico da fórmula $\neg p_0 \vee (p_1 \to p_0)$.

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_1 \to p_0$	$\neg p_0 \vee (p_1 \to p_0)$
1	1	0	1	
1	0	0	0	
0	1	1	1	
0	0	1	1	

Valorização

A uma função $v : V_{Prop} \to \{V, F\}$ que a cada variável proposicional atribui um valor de verdade, chamamos **valorização**. Toda a valorização pode ser estendida ao conjunto de todas as fórmulas, da forma seguinte:

- para $p \in V_{Prop}$, o valor de $v(p)$ já está definido;
- para $p \in V_{Prop}$, se $v(p) = 1$ então $v(\neg p) = 0$ e se $v(p) = 0$ então $v(\neg p) = 1$;
- se $p, q \in V_{Prop}$ e $\diamondsuit$ é um conetivo, $v(p \diamondsuit q) = v(p) \diamondsuit v(q)$.

Tabelas de verdade - exemplo

Verificar o valor lógico da fórmula $\neg p_0 \vee (p_1 \to p_0)$.

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_1 \to p_0$	$\neg p_0 \vee (p_1 \to p_0)$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Temos assim informação sobre o valor de verdade da proposição em função do valor de verdade de cada uma das proposições que a constitui. É possível elaborar uma versão condensada desta tabela. Por exemplo, para a fórmula $\neg p_0 \vee (p_1 \rightarrow p_2)$, obteríamos

p_0	p_1	p_2	$\neg p_0$	$\vee$	$(p_1 \rightarrow p_2)$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1
			(1)	(3)	(2)

Questões

- Quantas operações lógicas binárias é possível definir?
- Mostrar que $\neg$ e $\wedge$ são suficientes para definir as restantes operações estudadas $\vee, \dot{\vee}, \rightarrow, \leftrightarrow$.
- Mostrar a operação lógica $\downarrow$, onde $p \downarrow q$ representa *"nem p nem q"* é suficiente para exprimir os operadores $\vee, \wedge$ e $\neg$.