12. A6 Determine e esboce as curvas de nível c ($c \in \mathbb{R}$) de cada uma das funções que se seguem. De seguida, descreva e faça o esboço do respetivo gráfico.

(b) $g(\underbrace{x,y}_{X}) = x^2 + y^2$ $\qquad D_g = \mathbb{R}^2$

Definição 13 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$. O conjunto de nível c de f é*

$$L_c = \{X \in D : f(X) = c\}. \qquad L_c(f)$$

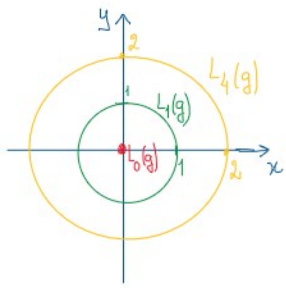
Se $n = 2$ geralmente L_c é uma curva no plano. $\longrightarrow$ L_c designa-se curva de nível

Se $n = 3$ geralmente L_c é uma superfície no espaço.

$L_c(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = c\}$ $\qquad$ c constante

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = c\}$

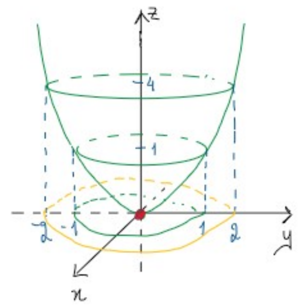
- Se $c < 0$ então $L_c(f) = \emptyset$ porque $\underbrace{x^2 + y^2}_{\text{positivo ou zero}} = c$ é impossível quando $c < 0$
- Se $c = 0$ então $L_0(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\} = \{(0,0)\}$
- Se $c > 0$ então $L_c(f)$ é uma circunferência centrada na origem e raio $\sqrt{c}$.



$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto x^2 + y^2 = z$

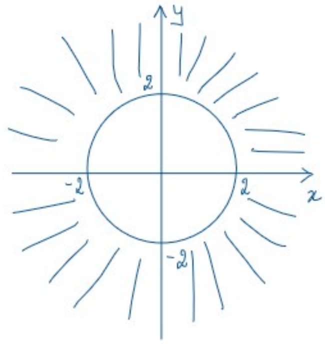
$z = x^2 + y^2$



(c) $h(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ $\qquad z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

$L_c = \{(x,y) \in D_h : h(x,y) = c\}$, c constante

$L_c = \{ (x,y) \in D_h : h(x,y) = c \}$, c constante



$D_h = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4 \}$

$L_c = \{ (x,y) \in D_h : \sqrt{x^2+y^2-4} = c \}$

• Se $c < 0$ então $L_c = \emptyset$

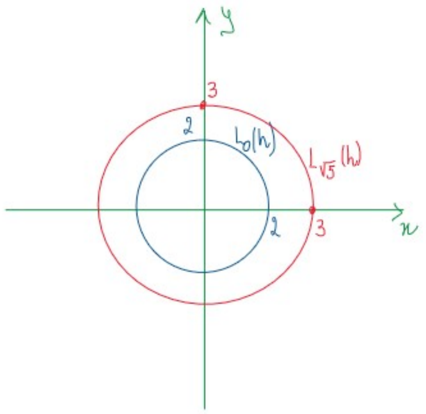
• Se $c = 0$ então $\sqrt{x^2+y^2-4} = 0 \Rightarrow x^2+y^2-4 = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 4$

$L_0 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4 \}$

• Se $c > 0$ então $L_c = \{ (x,y) \in D_h : \sqrt{x^2+y^2-4} = c \}$

$= \{ (x,y) \in D_h : x^2 + y^2 - 4 = c^2 \}$

$= \{ (x,y) \in D_h : x^2 + y^2 = c^2 + 4 \}$ conjunto de circunf. centradas na origem e com raio $\sqrt{c^2+4}$.



$c^2 + 4 = 9$

$c^2 = 5$

$c = \sqrt{5}$

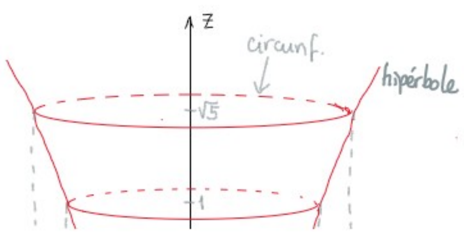
$L_1(h) = \{ (x,y) \in D_h : x^2 + y^2 = 5 \}$

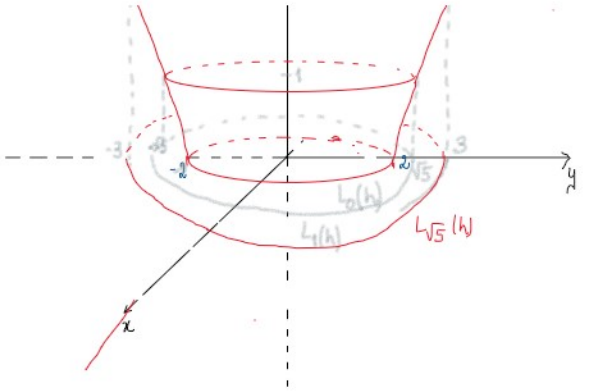
$z = \sqrt{x^2+y^2-4} \Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 - 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1$

sempre ≥ 0

$\wedge \; z \geq 0$

metade de hiperbolóide de 1 folha ao longo do eixo dos zz



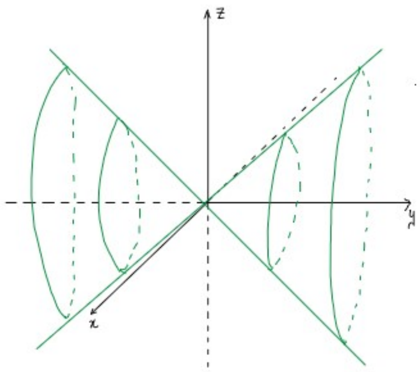


13. Descreva, analítica e geometricamente, as superfícies de nível c ($c \in \mathbb{R}$) de cada uma das funções que se seguem:

(c) $\varphi(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$

$$L_c = \{ (x,y,z) \in \underset{D_f}{\mathbb{R}^3} : \underbrace{x^2 - y^2 + z^2}_{\varphi(x,y,z)} = c \}$$

- Se $c = 0$ então $L_0 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 + z^2 = 0 \}$

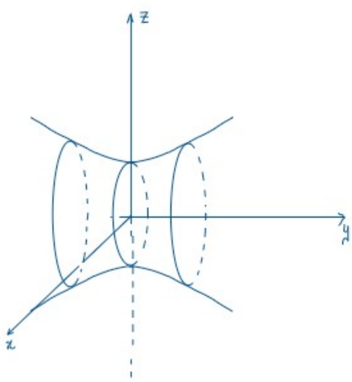


- Se $c > 0$ então $L_c = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \boxed{x^2 - y^2 + z^2 = c} \}$

$x^2 + z^2 = c + y^2$

$\frac{x^2}{c} - \frac{y^2}{c} + \frac{z^2}{c} = 1$

Hiperbolóide de 1 folha ao longo do eixo dos yy



• Se $\underbrace{c<0}_{-c>0}$ então $L_c = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \boxed{x^2 - y^2 + z^2 = c} \}$

$$\underbrace{x^2+z^2}_{\geq 0} = \underbrace{y^2+c}_{\geq 0}$$

implica

Portanto $y^2 + c \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \geq \underbrace{-c}_{\text{positivo}}$

$+ \quad - \quad +$; $\sqrt{-c} \quad \sqrt{-c}$

$y^2 = -c$

$y = \pm\sqrt{-c}$

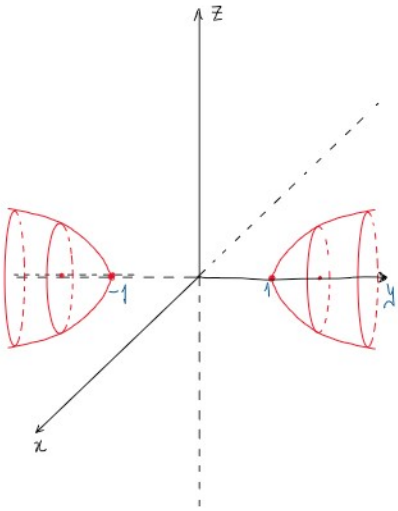
$y \leq \sqrt{-c} \quad \vee \quad y \geq \sqrt{-c}$

Por exemplo, $c = -1 < 0$ $\quad x^2 - y^2 + z^2 = -1 \Rightarrow -x^2 + y^2 - z^2 = 1$ hiperbolóide de 2 folhas ao longo do eixo das yy

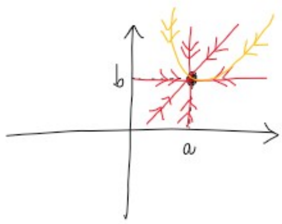
$$\underbrace{x^2+z^2}_{\geq 0} = \underbrace{y^2-1}_{\geq 0}$$

$y^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow y \leq -1 \quad \vee \quad y \geq 1$

$+ \quad - \quad +$; $-1 \quad 1$



$\lim\limits_{x\to a} f(x)$



15. Calcule os seguintes limites (caso existam):

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(e^2,\sqrt{3}\,)} \underbrace{\left(5\ln x - 3\arccos y\right)}_{f(x,y)}$;

$= 5\underbrace{\ln e^2}_{2} - 3\arccos\sqrt{3}$???

não existe

$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$

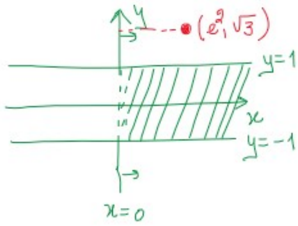
(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} e^x \arctan y$;

$= e^0 \arctan 1 = 1 . \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

$\cos\big|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$

$\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$

Domínio : $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \ \wedge \ y \in [-1,1] \}$



$(e^2, \sqrt{3})$ não é ponto de acumulação
(é um ponto isolado)