Integrais Impróprios

Luísa Morgado

1^{o} Ciclo em Engenharia Informática

Integrais Impróprios

O integral de Riemann foi definido para funções integráveis num intervalo limitado e fechado $[a, b]$, assumindo que a função é limitada nesse intervalo.

E o que acontece se

- A função não for limitada no intervalo $[a, b]$? Fará sentido, p.e., definir $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$?
- A função for integrável em qualquer intervalo $[a, y]$, para qualquer $y \in \mathbb{R}$? Fará sentido definir, p.e., $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$?

Integrais Impróprios de 1ª Espécie

Seja $a \in \mathbb{R}$ e $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$. Se f é integrável em qualquer intervalo $[a, y]$, para qualquer $a < y \in \mathbb{R}$, define-se integral impróprio de f em $[a, +\infty[$, e denota-se por $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, como sendo o limite $\displaystyle\lim_{y \to +\infty} \int_a^y f(x)\,dx$.

Analogamente, se f é integrável em qualquer intervalo $[y, b]$, $y < b$, define-se integral impróprio de f em $]-\infty, b]$, e denota-se por $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$, como sendo o limite $\displaystyle\lim_{y \to -\infty} \int_y^b f(x)\,dx$.

No caso de existir e ser finito tal limite dizemos que o integral impróprio é convergente, caso contrário dizemos que é divergente ou não existe.

Em caso de convergência, tal como o integral definido, o integral impróprio também é linear.

Integrais Impróprios de 2ª Espécie

- Seja $F :]a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em qualquer intervalo $[a+\epsilon, b]$, $\epsilon > 0$, mas não integrável em $[a, b]$. Define-se integral impróprio de f em $]a, b]$, e denota-se por $\int_a^b f(x)\,dx$, como sendo o limite $\lim_{y \to a^+} \int_y^b f(x)\,dx$.
  No caso de existir e ser finito tal limite dizemos que o integral impróprio é convergente, caso contrário dizemos que é divergente ou não existe.
- Seja $F : [a, b[\to \mathbb{R}$ uma função integrável em qualquer intervalo $[a, b-\epsilon]$, $\epsilon > 0$, mas não integrável em $[a, b]$. Define-se integral impróprio de f em $[a, b[$, e denota-se por $\int_a^b f(x)\,dx$, como sendo o limite $\lim_{y \to b^-} \int_a^y f(x)\,dx$.
  No caso de existir e ser finito tal limite dizemos que o integral impróprio é convergente, caso contrário dizemos que é divergente ou não existe.
- Seja $F : [a, c[\cup]c, b] \to \mathbb{R}$, $a < c < b$, uma função integrável em qualquer intervalo $[a, c-\epsilon] \cup [c+\epsilon, b]$, $\epsilon > 0$, mas não integrável em $[a, b]$. Define-se integral impróprio de f em $[a, c[\cup]c, b]$, e denota-se por $\int_a^b f(x)\,dx$, como sendo a soma dos limites
  $\lim_{y \to c^-} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{y \to c^+} \int_c^b f(x)\,dx$.
  No caso de existirem e serem finito tais limite dizemos que o integral impróprio é convergente, caso contrário dizemos que é divergente ou não existe.

Exemplo

Analisemos a natureza dos seguintes integrais impróprios:

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx;\quad \lim_{y\to 0^+}\int_y^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{y\to 0^+}\left[2\sqrt{x}\right]_y^1 = \lim_{y\to 0^+}(2-2\sqrt{y}) = 2;$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx;\quad \lim_{y\to +\infty}\int_1^y \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{y\to +\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^y = \lim_{y\to +\infty}\left(-\frac{1}{y}+1\right) = 1;$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx;\quad \lim_{y\to +\infty}\int_1^y \frac{1}{x}\,dx = \lim_{y\to +\infty}\left[\ln x\right]_1^y = \lim_{y\to +\infty}\ln y = +\infty.$

Os dois primeiros integrais impróprios são convergentes e o último é divergente.

Seja f uma função integrável em qualquer intervalo $[a, b]$, com $a < b$. Diz-se que o integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

é convergente sse existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que os integrais impróprios $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx$ e $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(x)\, dx$ são ambos convergentes. Caso contrário, o integral diz-se que é divergente ou que não existe.
Em caso de convergência, podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Exemplo

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx \quad = \quad \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx \lim_{\alpha \to -\infty} [\arctan x]_{\alpha}^{0} = \pi,$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx \quad = \quad \lim_{\beta \to +\infty} \int_{0}^{\beta} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{\beta \to +\infty} [\arctan x]_{0}^{\beta} = \pi,$$

e portanto o integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ *é convergente.*

O mesmo procedimento se aplica se em vez de termos $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$, tivermos $\int_a^b f(x)\, dx$, onde f é não limitada quer em $x = a$ quer em $x = b$, e até mesmo a uma combinação dos dois.

Exemplo

Analisemos a natureza do integral $\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2-1}\, dx$. *Ora*

$$\int_1^2 \frac{x}{x^2-1}\, dx = \lim_{\alpha\to 1^+} \int_\alpha^2 \frac{x}{x^2-1}\, dx = \lim_{\alpha\to 1^+} \left[\sqrt{x^2-1}\right]_1^2 = \sqrt{3},$$

mas

$$\int_2^{+\infty} \frac{x}{x^2-1}\, dx = \lim_{\beta\to+\infty} \int_2^\beta \frac{x}{x^2-1}\, dx = \lim_{\beta\to+\infty} \left[\sqrt{x^2-1}\right]_2^{+\infty} = \infty,$$

então o integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ *é divergente.*

Critérios de convergência

1º Critério de comparação

Sejam $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ dois integrais impróprios da mesma espécie. Se $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in]a,b[$, então

1. Se $\int_a^b g(x)\,dx$ é convergente então $\int_a^b f(x)\,dx$ é convergente;
2. Se $\int_a^b f(x)\,dx$ é divergente então $\int_a^b g(x)\,dx$ é divergente.

Exemplo

Analisemos a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$. *Como* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,dx$ *é convergente e como*

$$\frac{1}{1+x^4} \leq \frac{1}{x^4},$$

então, o 1º critério de comparação permite-nos concluir que o integral impróprio em questão é convergente.

2º Critério de comparação

Sejam $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ dois integrais impróprios de 1ª ou de 2ª espécie relativamente, por exemplo, ao limite de integração superior b, com f e g funções positivas no intervalo $[a,b[$, e tais que $\displaystyle\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda\in\mathbb{R}_0^+$.

Então,

1. se $\lambda>0$, então os integrais impróprios $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ são da mesma natureza, isto é, são ambos convergentes ou ambos divergentes;
2. se $\lambda=0$ e se o integral impróprio $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ é convergente então também o integral impróprio $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ é convergente;
3. se $\lambda=+\infty$ e se o integral impróprio $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ é divergente então também o integral impróprio $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ é divergente.

Exemplo

Determinemos a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2+3}{3x^3+5x+1}\,dx$.

Como

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2+3}{3x^3+5x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+3x}{3x^3+5x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{3}{x^2}}{3+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \frac{1+0}{3+0+0} = \frac{1}{3}$$

então, pelo 2º critério de comparação, os integrais $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2+3}{3x^3+5x+1}\,dx$ *e* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ *têm a mesma natureza. Como o último é divergente, então o integral em questão também é divergente.*

Exemplo

Determinemos a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3}$. *Como*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln x}{x^3}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0,$$

então como o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ *é convergente, usando o 2º critério de comparação, podemos concluir que o integral em questão também é convergente.*

Convergência absoluta ou simples

Seja $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ um integral impróprio de 1ª ou 2ª espécie. Se $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ é convergente então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ também é convergente.

- Se $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge, diz-se que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ é absolutamente convergente.
- Se $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ é convergente mas $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ não converge, dizemos que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ é simplesmente convergente.

Determinemos a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\, dx$. Ora

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2},$$

logo, pelo 1º critério de comparação, e atendendo ao facto de que o integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ é convergente, podemos concluir que o integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right|\, dx$ também é convergente. Logo o integral em questão diz-se absolutamente convergente, e portanto é convergente.