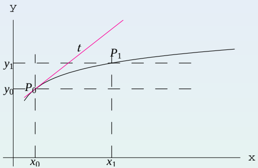
Funções reais de variável real
Derivadas

Luísa Morgado

1º Ciclo Engª Informática

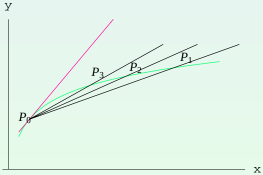
Seja f uma f.r.v.r. e $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$ pontos da curva representativa da função.



O declive da recta secante P_0P_1 é

$$m_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Quando P_1 se move sobre a curva e se aproxima de P_0, as sucessivas secantes P_0P_n aproximam-se cada vez mais da posição da recta t.



A recta t, tangente à curva no ponto P_0 pode então definir-se como sendo a recta que

- passa por P_0,
- tem por declive o limite dos declives das rectas secantes definidas por P_0 e por um ponto $P = (x, y)$ variável, quando P se aproxima de P_0,

ou seja,

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} \\ \text{ou} \quad m &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \end{aligned}$$

e uma equação da recta t é

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Exemplo

Determinemos a equação da recta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 - 1$ *no ponto de abcissa* $x = 1$.

Como $f(1) = 0$, *as coordenadas do ponto são* $(x_0, y_0) = (1, 0)$. *O declive da recta tangente é*

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2. \end{aligned}$$

A equação da recta tangente é

$$y - 0 = 2(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 2.$$

Derivada de uma função num ponto

Seja $y = f(x)$ uma f.r.v.r. definida em $]a, b[$. f diz-se **derivável** em $x_0 \in]a, b[$ se existe

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

a que se chama **derivada de f em x_0** e se representa por $f'(x_0)$.

Fazendo $x = x_0 + h$, obtém-se a fórmula equivalente

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

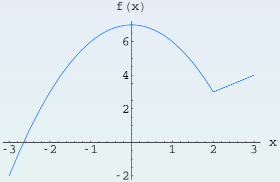
Exemplo

Calculemos, a partir da definição, a derivada de $f(x) = \sqrt{x^2+9}$ *no ponto* $x = 4$.

$$
\begin{aligned}
f'(4) &= \lim_{x\to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x-4} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x^2+9}-5)(\sqrt{x^2+9}+5)}{(x-4)(\sqrt{x^2+9}+5)} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{(x-4)(\sqrt{x^2+9}+5)} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(\sqrt{x^2+9}+5)} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{x+4}{\sqrt{x^2+9}+5} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.
\end{aligned}
$$

Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+7, & x<2 \\ x+1, & x \geq 2 \end{cases}$$



Vejamos se f é derivável no ponto $a=2$. Para tal, procuremos o

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Já vimos que é condição necessária e suficiente para que este limite exista, que existam e sejam iguais os limites laterais

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

A estes limites laterais chamam-se, respectivamente, derivada à esquerda e derivada à direita de f no ponto $a = 2$.
Como $f(2) = 3$, vem

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x+1)-3}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1, \\
\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x\to 2^-} \frac{(-x^2+7)-3}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} -\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4,
\end{aligned}$$

e assim sendo não existe $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ e portanto f não é derivável no ponto $a = 2$.

Diz-se que f é derivável:

- à esquerda de x_0 se existe o limite

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

  a que se chama **derivada lateral esquerda** de f em x_0 e se representa por $f'_e(x_0)$;

- à direita de x_0 se existe o limite

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

  a que se chama **derivada lateral direita** de f em x_0 e se representa por $f'_d(x_0)$;

- derivável em x_0 sse existirem e forem iguais $f'_e(x_0) = f'_d(x_0)$. Neste caso, $f'(x_0) = f'_e(x_0) = f'_d(x_0)$.

Nota: Há casos em que a existência de derivada num ponto depende apenas da existência de uma derivada lateral. É o caso da função $f(x) = \sqrt{x-1}$, cujo domínio é $D_f = [1, +\infty[$ e portanto não faz sentido falar-se da derivada lateral esquerda no ponto $x = 1$. Como

$$f'_d(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = +\infty$$

$f'(1) = f'_d(1)$ e assim a derivada de f em $x = 1$ não é finita.

Uma função diz-se **diferenciável** num ponto se, nesse ponto, tiver derivada finita.

Toda a função diferenciável num ponto é contínua nesse ponto.

Dem.: Suponhamos que f é diferenciável em x_0. Como

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

então

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \\
&= \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\underbrace{f'(x_0)}_{\text{finita}}} \underbrace{\lim_{x \to x_0}(x - x_0)}_{0} = 0,
\end{aligned}$$

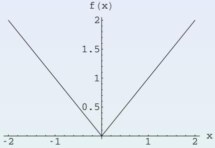
donde

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

ou seja, f é contínua em x_0.

Nota: O recíproco deste resultado não é verdadeiro, pois há funções que são contínuas num ponto e nem sequer admitem derivada nesse ponto. É o caso da função

$$f(x) = |x| = \begin{cases} \text{x}, & x \geq 0 \\ \text{-x}, & x > 0 \end{cases}$$



que em $x = 0$ é contínua pois $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$ e não é derivável uma vez que

$$\begin{aligned} f'_d(0) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \\ f'_e(0) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \left(-\frac{x}{x}\right) = -1 \end{aligned}$$

Consideremos a função $f(x) = x^2$. Podemos calcular a derivada desta função em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}$. Por exemplo

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = 2.$$

Sendo $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrário

$$f'(x_0) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x - 1} = 2x_0$$

Podemos então escrever $f'(x_0) = 2x_0$ ou, simplesmente, $f'(x) = 2x$.
Determinamos assim a função $f'(x)$ que se designa função derivada de f.

Derivada de uma função f é uma nova função

- cujo domínio é o conjunto de todos os pontos nos quais f tem derivada finita;
- que a cada ponto do seu domínio faz corresponder a derivada da função nesse ponto.

Uma função diz-se diferenciável num intervalo $]a, b[$ quando tem derivada finita em todos os pontos desse intervalo; diz-se diferenciável em $[a, b]$ se for diferenciável em $]a, b[$ e diferenciável à direita de a e à esquerda de b.

Derivada da função afim

Sendo $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ tem-se $f'(x) = a, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Dem.: Sendo $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrário

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{ax + b - ax_0 - b}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a. \end{aligned}$$

Derivada da soma, diferença e produto de funções

Sendo f e g funções diferenciáveis em $]a, b[$, as funções $f \pm g$ e fg são diferenciáveis em $]a, b[$ e

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) + g'(x);$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Dem: Provemos que o produto de funções diferenciáveis é uma função diferenciável:

$$\begin{aligned}
(f(x)g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} f(x) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} f(x) \\
&= f'(x)g(x) + g'(x)f(x).
\end{aligned}$$

Derivada do quociente de funções

Sendo f e g funções diferenciáveis em $]a,b[$, se $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$, a função $\frac{f}{g}$ é diferenciável em $]a,b[$ e

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Dem:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{hg(x)g(x+h)} g(x) + \lim_{h\to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} f(x) \\
&= \frac{\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} g(x)}{\lim_{h\to 0}(g(x)g(x+h))} + \frac{\lim_{h\to 0} \frac{g(x)-g(x+h)}{h} f(x)}{\lim_{h\to 0}(g(x)g(x+h))} \\
&= \frac{f'(x)g(x)}{(g(x))^2} + \frac{-g'(x)f(x)}{(g(x))^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.
\end{aligned}$$

Sendo f uma função diferenciável em $]a, b[$, e $n \in \mathbb{N}$ então a função f^n é diferenciável em $]a, b[$ e

$$\left(f^n(x)\right)' = nf'(x)f^{n-1}(x).$$

Sendo g uma função diferenciável em x_0 e f uma função diferenciável em $g(x_0)$, então $(f \circ g)$ é diferenciável em x_0 e

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Sendo f uma função bijectiva e diferenciável em x_0 então a inversa de f, f^{-1}, é diferenciável em $y_0 = f(x_0)$ e

$$\left(f^{-1}(y_0)\right)' = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Exemplo

1. *Sabendo que f é uma f.r.v.r. tal que* $f(4) = 5$ *e* $f'(4) = -2$, *calculemos* $\left(f^{-1}(5)\right)'$.

   Atendendo ao resultado anterior, com $x_0 = 4$ *e* $y_0 = 5$, *temos*
$$\left(f^{-1}(5)\right)' = \frac{1}{f'(4)} = -\frac{1}{2}.$$

2. *Sendo* $f(x) = \sqrt[n]{x}$, *com* $n \in \mathbb{N}$,
$$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Derivada da função $\sin x$

A função $\sin x$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Dem.: Sendo $f(x) = \sin x$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{x+h-x}{2}\cos\frac{x+h+x}{2}}{h} \\ &= \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{1} \lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos\left(\lim_{h\to 0}\left(x + \frac{h}{2}\right)\right) = \cos x \end{aligned}$$

Sendo u uma função de x diferenciável em $]a, b[$, então pela regra da derivada da função composta tem-se

$$(\sin u)' = u' \cos u.$$

A função $\cos x$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Dem.:

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)' \\ &= (-1)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\sin x\end{aligned}$$

Sendo u uma função de x diferenciável, então pela regra da derivada da função composta tem-se

$$(\cos u)' = -u' \sin u.$$

Derivada da função tan x

A função $\tan x$ é diferenciável no seu domínio e

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x.$$

Dem.: Como $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, pela regra da derivação de um quociente

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

Sendo u uma função de x diferenciável, então pela regra da derivada da função composta tem-se

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}.$$

Derivada da função $\cot x$

A função $\cot x$ é diferenciável no seu domínio e

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x = -cosec^2 x.$$

Sendo u uma função de x diferenciável, então pela regra da derivada da função composta tem-se

$$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}.$$

Derivada da função arcsin x

A função $\arcsin x$ é diferenciável no seu domínio e

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Dem.: $y = \arcsin x$, com $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ é a função inversa da função $x = \sin y$. Pela regra da derivada da função inversa:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{(y^{-1})'} = \frac{1}{x'} = \frac{1}{(\sin y)'} \\ &= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Sendo u uma função de x diferenciável, então pela regra da derivada da função composta tem-se

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Derivada da função arccos x

A função arccos é diferenciável no seu domínio e

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Sendo u uma função de x diferenciável, então pela regra da derivada da função composta tem-se

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Derivada da função arctan x

A função arctan é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Sendo u uma função de x diferenciável, então pela regra da derivada da função composta tem-se

$$(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}.$$

Derivada da função *arcotx*

A função *arcot* é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$(arcotx)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Sendo u uma função de x diferenciável, então pela regra da derivada da função composta tem-se

$$(arcotu)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

Derivada da função e^x

A função e^x é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$(e^x)' = e^x.$$

Dem.:

$$\begin{aligned}(e^x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} \\ &= e^x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{1} = e^x\end{aligned}$$

Sendo u uma função de x diferenciável, então pela regra da derivada da função composta tem-se

$$(e^u)' = u'e^u.$$

Derivada da função a^x, $a > 0$

A função a^x, $a > 0$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Dem.:

$$\begin{aligned}
(a^x)' &= \left(e^{\ln a^x}\right)' = \left(e^{x \ln a}\right)' \\
&= (x \ln a)' \, e^{x \ln a} = \ln a \underbrace{e^{x \ln a}}_{a^x} = a^x \ln a
\end{aligned}$$

Sendo u uma função de x diferenciável, então pela regra da derivada da função composta tem-se

$$(a^u)' = u' a^u \ln a.$$

Derivada da função ln x

A função $\ln x$ é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Dem.: Sendo $y = \ln x$, pela regra da derivada da função inversa

$$y' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

Sendo u uma função de x diferenciável, então pela regra da derivada da função composta tem-se

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

Derivada da função $\log_a x$, $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

A função $\log_a x$, $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$ é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Dem.:

$$(\log_a x)' = (\log_a e \ln x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$$

Sendo u uma função de x diferenciável, então pela regra da derivada da função composta tem-se

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}.$$