Funções reais de variável real
Continuidade e limite

Luísa Morgado

1^{o} Ciclo Eng^{a} Informática

Seja a um número real e ε um real positivo. Chamamos **vizinhança** ε do ponto a, e denota-se por $\mathcal{V}_\varepsilon(a)$, ao conjunto formado por todos os números reais cuja distância ao ponto a é inferior a ε:

$$\mathcal{V}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}.$$

Diz-se que a é um **ponto de acumulação** de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ sse qualquer vizinhança de a tem pelo menos um elemento de X distinto do ponto a, i.e.:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathcal{V}_\varepsilon(a) \cap (X \backslash \{a\}) \neq \emptyset.$$

Um ponto que não seja ponto de acumulação diz-se **ponto isolado**.

Limite de uma função num ponto

Seja f uma f.r.v.r. e a um ponto de acumulação de D_f. Diz-se que o limite de f quando x tende para a é b, e escreve-se $\lim_{x \to a} f(x) = b$, sse $\forall x \in D_f$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Mostremos que a função

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{|x|}{x} + 1\right)$$

não tem limite quando $x \to 0$.
De facto, se tivessemos $\lim_{x \to 0} \psi(x) = b$, sendo b um número real qualquer, então dado um ε arbitrário, por exemplo, $\varepsilon = \frac{1}{2}$, deveria existir um $\delta > 0$ e $x \neq 0$ tal que

$$|x| < \delta \Rightarrow |\psi(x) - b| < \frac{1}{2}.$$

Em particular: $\left|\psi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - b\right| < \frac{1}{2}$ e $\left|\psi\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) - b\right| < \frac{1}{2}$, donde resulta

$$\begin{aligned}\left|\psi\left(\frac{\delta}{2}\right)-\psi\left(-\frac{\delta}{2}\right)\right| &= \left|\left(\psi\left(\frac{\delta}{2}\right)-b\right)+\left(b-\psi\left(-\frac{\delta}{2}\right)\right)\right| \\ &\leq \left|\left(\psi\left(\frac{\delta}{2}\right)-b\right)\right|+\left|\psi\left(-\frac{\delta}{2}\right)-b\right| < \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\end{aligned}$$

o que é absurdo pois $\psi\left(\frac{\delta}{2}\right)=1$ e $\psi\left(-\frac{\delta}{2}\right)=0$ e portanto

$$\left|\psi\left(\frac{\delta}{2}\right)-\psi\left(-\frac{\delta}{2}\right)\right|=1.$$

Nota: Como ilustrado neste exemplo, podemos calcular o limite de uma função num ponto a mesmo que $a \notin D_f$, uma vez qua na definição apenas se exige que $0 < |x-a|$.

Exemplo

Provemos que sendo $g(x) = \frac{x}{3} + 4$*, se tem* $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = 5$.

Dado um $\varepsilon > 0$ *arbitrário, o que pretendemos mostrar é que exite um* $\delta > 0$ *tal que se* $0 < |x - 3| < \varepsilon$ *então* $|g(x) - 5| < \varepsilon$.

Ora

$$\begin{aligned} |g(x) - 5| < \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{x}{3} + 4 - 5\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x}{3} - 1\right| < \varepsilon \\ \left|\frac{x-3}{3}\right| < \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad |x - 3| < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Basta então escolher, p.e., $\delta = 3\varepsilon$ *para obtermos o pretendido.*

Se uma f.r.v.r $f(x)$ tem limite quando $x \to a$, então esse limite é único.

Dem.: Suponhamos que $\lim_{x\to a} f(x) = b_1$ e $\lim_{x\to a} f(x) = b_2$ com $b_1 \neq b_2$. Suponhamos ainda, sem perda de generalidade, que $b_1 < b_2$. Seja ε tal que $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(b_1 - b_2)$.
Assim sendo, os intervalos $]b_1 - \varepsilon, b_1 + \varepsilon[$ e $]b_2 - \varepsilon, b_2 + \varepsilon[$ são disjuntos.
Como $\lim_{x\to a} f(x) = b_1$ então terá que existir um $\delta_1 > 0$ tal que se $x \in]a - \delta_1, a + \delta_1[$ então $f(x) \in]b_1 - \varepsilon, b_1 + \varepsilon[$.
E porque $\lim_{x\to a} f(x) = b_2$ então existirá um $\delta_2 > 0$ tal que se $x \in]a - \delta_2, a + \delta_2[$ então $f(x) \in]b_2 - \varepsilon, b_2 + \varepsilon[$.
Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tem-se

$$x \in]a - \delta, a + \delta[\Rightarrow f(x) \in]b_1 - \varepsilon, b_1 + \varepsilon[\wedge f(x) \in]b_2 - \varepsilon, b_2 + \varepsilon[\,,$$

o que é absurdo uma vez que estes dois intervalos são disjuntos.
Teremos então que ter $b_1 = b_2$.

Se $f(x) = mx + b$, $m, b \in \mathbb{R}$ então $\lim_{x \to a} f(x) = ma + b$.

Dem.: Temos que mostrar que a seguinte proposição é verdadeira:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |mx + b - (ma + b)| < \varepsilon.$$

Ora

$$\begin{aligned} |mx + b - (ma + b)| < \varepsilon &\Leftrightarrow |mx + b - ma - b)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |m||x - a| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x - a| < \frac{\varepsilon}{|m|}. \end{aligned}$$

Logo, na proposição acima basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$.

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas f.r.v.r. para as quais existe limite no ponto $x = a$. Então:

- $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$;
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$;
- $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, desde que $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$;
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^n = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(2x - \frac{x^2-2}{x^4+1}\right) &= \lim_{x\to 1}(2x) - \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-2}{x^4+1}\right) \\
&= \lim_{x\to 1}(2x) - \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^4+1)} = 2 - \frac{-1}{2} = \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Se f é uma função polinomial, então $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Se f é uma função racional e $a \in D_f$, então $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)},$$

desde que $\lim_{x\to a} f(x) \geq 0$ quando n é par.

$$\lim_{x\to a} (f(x))^{\frac{m}{n}} = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{\frac{m}{n}}, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

desde que $\lim_{x\to a} (f(x))^m \geq 0$ quando n é par.

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo o x num intervalo aberto contendo a, excepto possivelmente em a, e se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b$ então $\lim_{x\to a} g(x) = b$.

Exemplo

Mostremos que $\lim_{x\to 0}\left(x \sin \frac{1}{x}\right) = 0$.
Ora, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *temos:*

$$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \underbrace{-x}_{f(x)} \leq \underbrace{x \sin\frac{1}{x}}_{g(x)} \leq \underbrace{x}_{h(x)}.$$

Como

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) &= 0 \\ \lim_{x\to 0} h(x) &= 0, \end{aligned}$$

então, pelo resultado anterior teremos $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

Diz-se que o limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores superiores a a é b, ou que b é o **limite lateral direito** de $f(x)$ quando x tende para a, e escreve-se $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$, sse

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x \in D_f \quad a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Do mesmo modo, diz-se que o limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores inferiores a a é b, ou que b é o **limite lateral esquerdo** de $f(x)$ quando x tende para a, e escreve-se $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$, sse

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x \in D_f \quad a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Exemplo

A função de Heaviside é a f.r.v.r. definida por

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Os seus limites laterais quando x tende para zero são

$$\lim_{x\to 0^+} H(x) = 1 \quad e \quad \lim_{x\to 0^-} H(x) = 0.$$

É condição necessária e suficiente para que exista $\lim_{x\to a} f(x)$ que existam e sejam iguais os limites laterais $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

Condição

1. necessária: ✍
2. Suficiente: Suponhamos que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = b$, i.e.

$$\begin{aligned} &\forall\varepsilon > 0 \exists\delta_1 > 0 : \forall x \in D_f \quad a < x < a + \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - b| < \varepsilon \\ &\forall\varepsilon > 0 \exists\delta_2 > 0 : \forall x \in D_f \quad a - \delta_2 < x < a \quad \Rightarrow \quad |f(x) - b| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Sendo $\delta = \min_{\delta_1,\delta_2}$ tem-se

$$\begin{aligned} &\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x \in D_f \quad a < x < a + \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - b| < \varepsilon \\ &\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x \in D_f \quad a - \delta < x < a \quad \Rightarrow \quad |f(x) - b| < \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x \in D_f \quad a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon,$$

i.e. $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Exemplo

A função de Heaviside $H(x)$ não tem limite quando x tende para zero pois tal como vimos, os seus limites laterais são diferentes.

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \quad \forall x > \frac{1}{\delta} \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon;$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \quad \forall x < -\frac{1}{\delta} \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon;$
- $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \quad \forall 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon};$
- $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \quad \forall 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon};$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \quad \forall x > \frac{1}{\delta} \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon};$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \quad \forall x > \frac{1}{\delta} \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon};$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \quad \forall x < -\frac{1}{\delta} \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon};$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \quad \forall x < -\frac{1}{\delta} \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}.$

Continuidade

Seja f uma f.r.v.r.
Diz-se que f é **contínua** num ponto $a \in D_f$ sse

1. f está definida numa vizinhança do ponto a;
2. existe $\lim_{x \to a} f(x)$;
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

ou equivalentemente

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Exemplo

A função de Heaviside não é contínua em $x = 0$ pois, tal como vimos, não existe limite da função nesse ponto.

Diz-se que f é **contínua à esquerda** de um ponto $a \in D_f$ sse

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

Do mesmo modo, diz-se que f é **contínua à direita** de um ponto $a \in D_f$ sse

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Uma função diz-se contínua no intervalo fechado $[a, b]$ sse f é contínua em todos os pontos do intervalo $]a, b[$ e se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

Se as funções f e g são contínuas em a, então também o são as funções:

$$f+g, \quad f-g, \quad fg \quad \text{e} \quad \frac{f}{g}, \quad \text{desde que} \quad g(a) \neq 0.$$

Dem.: Faremos apenas a demonstração da continuidade de $f+g$.
As restantes provas seguem o mesmo raciocínio e são deixadas para exercício.
Queremos então mostrar que existe limite de $f+g$ quando $x \to a$ e que $\lim\limits_{x \to a}(f+g)(x) = (f+g)(a)$.

Sendo f e g funções contínuas em a, então

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) &= f(a) \\ \lim_{x \to a} g(x) &= g(a) \end{aligned}$$

pelo que

$$\lim_{x \to a}[(f+g)(x)] = \lim_{x \to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a)+g(a) = (f+g)(a).$$

Consequências deste resultado:

- Uma função polinomial é contínua em $\mathbb{R}$;
- Uma função racional é contínua em todo o seu domínio.

Se f é uma função contínua em b e se $\lim_{x\to a} g(x) = b$, então

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(b).$$

Dem.: Pretendemos mostrar que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D_{f\circ g} \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |(f\circ g)(x) - f(b)| < \varepsilon.$$

Como f é contínua em b, existe $\delta_1 > 0$tal que se $|y-b| < \delta_1$ então $|f(y) - f(b)| < \varepsilon$. Em particular, para $y = g(x)$ tem-se

$$|g(x) - b| < \delta_1 \Rightarrow |f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Por outro lado, como $\lim_{x\to a} g(x) = b$ então existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - b| < \delta_1. \tag{2}$$

De (1) e (2) resulta então

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : \quad 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b).$$

Como consequência do resultado anterior temos que:

Se as funções g e f são contínuas em a e $b = g(a)$, respectivamente, então a função $(f \circ g)$ é contínua em a.

Dem.: $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x \to a} g(x)\right) = f(g(a)) = (f \circ g)(a)$.

O resultado que se segue é conhecido como o teorema do valor intermédio.

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e k um real estritamente compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, $f(a) \neq f(b)$. Então existe pelo menos um real $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = k$.

Um caso particularmente importante é dado quando $k = 0$ (teorema de Bolzano).

Exemplo

Mostremos que a função $f(x) = x \ln x - 1$ *tem uma raíz no intervalo* $]1, 2[$.

Ora como f *é uma função contínua no intervalo* $[1, 2]$ *(porquê?) e como*

$$f(1) = -1 < 0 \quad e \quad f(2) = 2 \ln 2 - 1 \simeq 0.39 > 0$$

então pelo teorema do valor intermédio, existe um $c \in]1, 2[$ *tal que* $f(c) = 0$.

Teorema de Weierstrass

Qualquer função contínua num intervalo limitado, fechado e não vazio tem máximo e mínimo nesse intervalo.

Isto significa que sendo f uma função contínua num intervalo $I = [a, b]$, então existe $x_{min}, x_{max} \in I$ tal que para todo o $x \in I$ se tem $f(x_{min}) \leq f(x)$ e $f(x_{max}) \geq f(x)$.
A x_{min} e x_{max} dão-se os nomes de **ponto de mínimo** e **ponto de máximo**, respectivamente, de f em I.
A $m = f(x_{min})$ e $M = f(x_{max})$ dão-se os nomes de **mínimo** e **máximo** (respectivamente) de f em I.

Exemplo

A função $f(x) = xe^x - 1$ tem máximo e mínimo no intervalo $I = [0, 1]$ uma vez que f é contínua no intervalo I (porquê?) que é um intervalo limitado e fechado.