Primitivas de funções reais de variável real

Luísa Morgado

1º Ciclo Engª Informática

Dá-se o nome de **primitivação** ou **integração** ao processo de obter uma função a partir da sua derivada, i.e., dada uma função f, a função F tal que $F'(x) = f(x)$, é uma primitiva de f.
Resumindo, primitivar ou integrar é a operação inversa da operação derivação.

Se uma função tem uma primitiva, então tem uma infinidade delas, pois basta somar uma constante a uma primitiva para se obter outra.

Se F é uma primitiva de f, então as primitivas de f são da forma $F(x) + C$, onde C é uma constante, e são só essas.

Usa-se o símbolo $\int f(x)dx$, e lê-se integral de f em ordem a x, para representar a forma geral das primitivas de f. O símbolo dx indica a variável relativamente à qual se primitiva.

Exemplo

A função $F_1(x) = x^2 - x$ é uma primitiva de $f(x) = 2x - 1$. O mesmo se pode dizer da função $F_2(x) = x^2 - x - 100$. Podemos então escrever

$$\int (2x - 1)dx = x^2 - x + c,$$

onde C é uma constante arbitrária.

Primitivas imediatas

São todas aquelas que se obtêm por uma simples reversão das regras de derivação.
Alguns exemplos:

- $$\int x^n dx = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, & n \neq -1 \\ \ln|x| + C, & n = -1 \end{cases}$$
- $$\int f^n(x) f'(x) dx = \begin{cases} \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C, & n \neq -1 \\ \ln|f(x)| + C, & n = -1 \end{cases}$$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + C$

- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int \cos(f(x)) f'(x) dx = \sin(f(x)) + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \sin(f(x)) f'(x) dx = -\cos(f(x)) + C$
- $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int (-1) \frac{-\sin x}{\cos x} dx =$ $\int (-1) \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\ln(\cos x) + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$
- $\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2} dx = \arctan f(x) + C$
- $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$, onde k é uma constante
- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

Primitivação por partes

Resulta da regra da derivação de um produto:

$$
\begin{aligned}
& (u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\
\Leftrightarrow \quad & u'(x)v(x) = (u(x)v(x))' - u(x)v'(x).
\end{aligned}
$$

As primitivas de funções iguais são iguais, logo

$$\int u'(x)v(x)dx = \int (u(x)v(x))'\,dx - \int u(x)v'(x)dx$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx}$$

A esta última igualdade dá-se o nome de **fórmula de primitivação por partes** e usa-se quando o integral de uv' é mais simples que o integral de $u'v$.

Exemplo

- $$u' = e^x \text{ e } \therefore u = e^x$$
  $$v = x \text{ e } \therefore v' = 1$$
  $$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{v}\underbrace{e^x}_{u'} dx &= e^x x - \int e^x dx \\ &= e^x x - e^x + C \end{aligned}$$

- $$u' = 1 \text{ e } \therefore u = x$$
  $$v = \ln x \text{ e } \therefore v' = \frac{1}{x}$$
  $$\begin{aligned} \int \ln x dx &= \int \underbrace{1}_{u'}\underbrace{\ln x}_{v} dx \\ &= x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\int \underbrace{e^x}_{u'} \underbrace{\cos x}_{v} \, dx &= e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx \\ &= e^x \cos x + \int \underbrace{e^x}_{u'} \underbrace{\sin x}_{v} \, dx \\ &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx + C.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} & \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx + C \\ \Leftrightarrow \quad & 2 \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x + C \\ \Leftrightarrow \quad & \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x + C)\end{aligned}$$

Primitivação por substituição

Resulta da regra de derivação da função composta.
Se $F(x)$ é uma primitiva de f num intervalo I e se $g(t)$ for uma função diferenciável num intervalo J tal que $g(J) \subset I$, então a função composta $\theta(t) = F(g(t))$ é diferenciável em J e

$$\theta'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t).$$

Ou seja, a primitiva de $f(g(t))g'(t)$ será igual (a menos de uma constante aditiva) a $\theta(t)$, i.e. à composta $F \circ g$.
Resumindo, se soubermos primitivar $f(g(t))g'(t)$, então para obter F basta compor $F \circ g$ com a inversa de g, que para tal há que supor invertível.

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f[g(t)]g'(t)dt}$$

Exemplo

Calculemos $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$.
Fazendo a substituição $x = g(t) = t^4$, $g'(t) = 4t^3$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx &= \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}dx = \int \frac{(t^4)^{\frac{1}{2}}}{(t^4)^{\frac{3}{4}}+1}4t^3dt \\
&= \int \frac{4t^5}{t^3+1}dt = \int \left(4t^2 - \frac{4t^2}{t^3+1}\right)dt \\
&= \int 4t^2dt - \frac{4}{3}\int \frac{3t^2}{t^3+1}dt = \\
&= \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\ln(t^3+1) + C \quad \textit{e como} \quad t = x^{\frac{1}{4}} \\
&= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}\ln\left(x^{\frac{3}{4}}+1\right) + C
\end{aligned}$$

Função racional: fracção de duas funções polinomiais $\frac{N(x)}{D(x)}$

- **Grau do polinómio do numerador é superior ou igual ao grau do polinómio do denominador**:

Sendo $N(x)$ um polinómio arbitrário e $D(x)$ um polinómio de grau superior ou igual a 1, existem sempre polinómios $C(x)$ e $R(x)$, univocamente determinados, verificando as condições

1. $N(x) = D(x)C(x) + R(x),\ x \in \mathbb{R}$;
2. o grau do polinómio R é inferior ao do polinómio D.

Exemplo

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} = x + \frac{2x + 2}{x^2 + 2x}$$

donde

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} dx = \int \left(x + \frac{2x + 2}{x^2 + 2x} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \ln|2x + 2| + C$$

- **Grau do polinómio do numerador é inferior ao grau do polinómio do denominador (fracções próprias)**:

  (I) O denominador é um polinómio de grau 1: A primitivação é imediata.

Exemplo

$$\int \frac{2}{x-2}dx = 2\int \frac{1}{x-2}dx = 2\ln|x-2| + C$$

(II) O denominador é um polinómio de grau > 1:

Toda a função racional própria pode ser decomposta na soma de fracções simples (i.e. fracções da forma $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$ ou $\frac{Bx+C}{\left((x-p)^2+q^2\right)^k}$, com $A, B, C, \alpha, p, q \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$).

1. Cada raíz real α de $D(x)$, de multiplicidade k dá origem à soma das k fracções simples

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)^k}, \quad \frac{A_2}{(x-\alpha)^{k-1}}, \ldots, \frac{A_k}{x-\alpha}$$

2. Cada par de raízes complexas $p \pm qi$ de $D(x)$, de multiplicidade k dá origem à soma das k fracções simples

$$\frac{B_1x+C_1}{\left((x-p)^2+q^2\right)^k}, \quad \frac{B_2x+C_2}{\left((x-p)^2+q^2\right)^{k-1}}, \ldots, \frac{B_kx+C_k}{(x-p)^2+q^2}$$

Exemplo

$$\frac{4x^2+x+1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Determinemos as constantes A, B e C, pelo ***método dos coeficientes indeterminados****.*
Desembaraçando os denominadores obtém-se

$$\begin{aligned} 4x^2+x+1 &= A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1) \\ &= (A+B+C)x^2 + (B-C)x - A. \end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$A+B+C=4 \wedge B-C=1 \wedge -A=1 \Leftrightarrow A=-1, \quad B=3 \quad e \quad C=2$$

$$\frac{4x^2+x+1}{x^3-x} = -\frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+1},$$

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2+x+1}{x^3-x}dx &= \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+1}\right) dx \\ &= -\ln|x| + 3\ln|x-1| + 2\ln|x+1| + C = \ln\left[\left|\frac{(x-1)^3}{x}\right|(x+1)^2\right] \end{aligned}$$

Exemplo

$$\frac{2x^3+5x^2+6x+2}{x(x-1)^3} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)^3} + \frac{B}{x}.$$

Pelo método dos coeficientes indeterminados, obtém-se (verifique) $A_1 = 0$, $A_2 = -1$, $A_3 = -1$ *e* $B = 2$.
Então

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^3+5x^2+6x+2}{x(x-1)^3}dx &= \int \left(-\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{2}{x}\right) \\
&= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2} + 2\ln|x| + C \\
&= \frac{2x+1}{(x+1)^2} + \ln x^2 + C
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\frac{x+2}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Pelo método dos coeficientes indeterminados, obtém-se $A=1$, $B=-1$ *e* $C=-1$.
Logo

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+2}{x^3-1}dx &= \int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \ln|x-1| - \int \frac{1}{2}\frac{2x+1+1}{x^2+x+1}dx + D \\
&= \ln|x-1| - \int \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}dx + D \\
&= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx + E.
\end{aligned}$$

Resta-nos calcular

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+x+1}dx &= \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}dx = \frac{4}{3}\int \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2}dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + F
\end{aligned}$$