Sucessões Numéricas

Luísa Morgado

1º Ciclo em Engenharia Informática

Sucessões de números reais

Uma sucessão de números reais é uma função $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, em que $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ representa o conjunto de índices e $u(\mathbb{N})$ o conjunto dos termos gerados por aqueles índices. O valor $u(n)$ representa-se por u_n e designa-se por termo de ordem n ou $n-$ésimo termo da sucessão.

Escrevemos ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente $(u_n)_n$, para indicar a sucessão $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Para melhor identificarmos a posição relativa dos seus termos, uma sucessão $(u_n)_n$ pode ainda ser representada por $(u_1, u_2, u_3, \ldots)$.

Exemplo

1. $u_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, *define a sucessão constante* $(1, 1, 1, \ldots)$*;*
2. $u_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$, *define a sucessão* $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$*;*
3. $u_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \textit{se} \quad n \text{ é par} \\ -1 & \textit{se} \quad n \text{ é ímpar} \end{cases}$ *define a sucessão alternada* $(-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$.
4. *A sucessão* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *definida por*

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_{n-1} + u_n \end{cases}$$

é um exemplo de uma ***sucessão definida por recorrência*** *uma vez que cada termo se define à custa dos anteriores. Trata-se da sucessão de Fibonacci.*

Princípio de indução matemática

Muitas propriedades do conjunto dos números naturais demonstram-se usando o chamado princípio de indução matemática que enunciamos a seguir.

A cada número natural $n \in \mathbb{N}$ associemos a proposição $\mathcal{P}(n)$. Se $\mathcal{P}(1)$ é uma proposição verdadeira e se do facto de $\mathcal{P}(k)$ ser verdadeira, para um dado natural $k \in \mathbb{N}$, se puder concluir que $\mathcal{P}(k+1)$ também é verdadeira, então $\mathcal{P}(n)$ é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$.

O estabelecer da verdade para $n = 1$, i.e., a $\mathcal{P}(1)$ verdadeira, chama-se **passo básico**. O estabelecer da verdade da condição

$$\mathcal{P}(k) \text{ verdadeira } \Longrightarrow \mathcal{P}(k+1) \text{ verdadeira}$$

chama-se **passo de indução**. A $\mathcal{P}(k)$ verdadeira chama-se **hipótese de indução** e a $\mathcal{P}(k+1)$ verdadeira chama-se **tese de indução**.

Numa demonstração por indução deve sempre utilizar-se a hipótese de indução.

✍ Mostre que $n^3 - n$ é um múltiplo de 3, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Classificação de sucessões

Uma sucessão $(u_n)_n$ diz-se

1. crescente, se $u_{n+1} - u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, i.e., se $u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \ldots;$
2. estritamente crescente, se $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, i.e., se $u_1 < u_2 < u_3 < \ldots;$
3. decrescente, se $u_{n+1} - u_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, i.e., se $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots;$
4. estritamente decrescente, se $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, i.e., se $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots;$
5. monótona, se satisfaz uma das condições anteriores.
6. limitada se existirem dois números reais a e b tais que $a \leq u_n \leq b, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, i.e., se todos os termos da sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pertencem ao intervalo fechado e limitado $[a, b]$.
   De forma equivalente, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada se existir $L \in \mathbb{R}^+$ tal que $|u_n| \leq L, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplo

1. $u_n = \frac{1}{n}$
   $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, *logo* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sucessão monótona estritamente decrescente.*
   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sucessão limitada pois,* $\quad 0 < \frac{1}{n} \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
2. $u_n = (-1)^n$
   $u_{n+1} - u_n = (-1)^{n+1} - (-1)^n = (-1)^n(-1-1) = -2(-1)^n$.
   Assim, tem-se por exemplo, $u_2 - u_1 = 2 > 0$ *e* $u_3 - u_2 = -2 < 0$, *logo* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *não é monótona.*
   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sucessão limitada pois,* $\quad -1 \leq (-1)^n \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Convergência de sucessões

Dizemos que o número real a é o limite da sucessão $(u_n)_n$ e escreve-se

$$\lim_n u_n = a \quad \text{ou} \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = a$$

quando, para cada número real $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, é possível obter uma ordem $n_0 \in \mathbb{N}$ a partir da qual se tem $|u_n - a| < \epsilon$, i.e.,

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \in \mathbb{N} \ n > n_0 \implies |u_n - a| < \epsilon.$$

Se uma sucessão $(u_n)_n$ possui limite finito a dizemos que essa sucessão é convergente, caso contrário dizemos que é divergente.

Exemplo

1. $\lim_n \frac{1}{n} = 0$;
2. $\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$;
3. $\lim_n \frac{\sin n}{n} = 0$.

   $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ *e* $u_n = \sin n$ *é uma sucessão limitada, uma vez que* $-1 \leq \sin n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$; *assim, temos* $\lim_n \frac{1}{n} \sin n = 0$, *por ser o limite do produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada.*

Dada uma sucessão $(u_n)_n$ de números reais, uma subsucessão de $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é a restrição da função u a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1, n_2, \ldots\}$ de $\mathbb{N}$. Escreve-se $u' = (u_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ ou $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ para indicar a subsucessão $u' = u_{|_{\mathbb{N}'}}$.

Propriedades:

1. Toda a subsucessão de uma sucessão limitada é limitada.
2. É condição necessária e suficiente para que uma sucessão monótona seja limitada que ela possua uma subsucessão limitada.
   Nota: a sucessão $u_n = \left[1 + (-1)^{n+1}\right] \frac{n}{2}$ possui uma subsucessão limitada: $u_{2n} = 0, \forall n \in \mathbb{N}$; no entanto, $(u_n)_n$ não é limitada (uma vez que não é monótona);
3. Se $\lim_n u_n = a$, então toda a subsucessão de $(u_n)_n$ converge para a;
4. Se $\lim_n u_n = a$, então $\lim_n u_{n+k} = a$, para todo o $k \in \mathbb{N}$.

Note que:

- Atendendo à propriedade 3., para mostrar que uma sucessão não converge basta obter duas subsucessões que convirjam para limites distintos.
  Por exemplo, dada a sucessão $u_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$, considerem-se as subsucessões
  $$u_{2n} = 0 \quad \text{e} \quad u_{2n-1} = 1.$$
  Tem-se
  $$\lim_n u_{2n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_n u_{2n-1} = 1,$$
  pelo que $(u_n)_n$ não converge, i.e., não tem limite.
- Se as subsucessões dos termos de ordem par e de ordem ímpar de uma dada sucessão $(u_n)_n$ convergirem para a, então prova-se que $\lim_n u_n = a$.
- A propriedade 4. equivale a afirmar que o limite de uma sucessão não se altera se a ela acrescentarmos ou retirarmos um número finito de termos.

Toda a sucessão convergente é limitada.

Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.

Note que:
Uma sucessão monótona crescente e convergente é limitada inferiormente pelo 1º termo e superiormente pelo seu limite. Analogamente, uma sucessão monótona decrescente e convergente é limitada inferiormente pelo limite e superiormente pelo 1º termo.

Exemplo

$u_n = 1 - \frac{1}{n}$

$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{n+1} - 1 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0, \; \forall n \in \mathbb{N}$, *logo* $(u_n)_n$ *é monótona crescente;*

$\lim\limits_n u_n = \lim\limits_n \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1;$

$$0 \leq u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se uma sucessão monótona $(u_n)_n$ possui uma subsucessão convergente, então $(u_n)_n$ é convergente.

Exemplo

Consideremos a sucessão $u_n = a^n$, *com* $a \in \mathbb{R}$. $(u_n)_n$ *define a sucessão* $\left(a, a^2, a^3, a^4, \ldots\right)$.

1. *Se* $a = 0$ *ou* $a = 1$, *obtém-se uma sucessão constante. Em ambos os casos a sucessão é monótona e limitada e, como tal, convergente.*
2. *Se* $0 < a < 1$, *então, multiplicando ambos os termos da desigualdade* $a < 1$ *por* a^n, *obtém-se*

$$a^{n+1} < a^n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

e a sucessão é decrescente. Como a sucessão é limitada, a proposição anterior garante que a sucessão é convergente. Tem-se efetivamente

$$\lim_n a^n = 0.$$

3. *Se* $-1 < a < 0$, *analogamente se prova que* $\lim_n a^n = 0$ *(apesar de, neste caso,* $(u_n)_n$ *não ser monótona).*
4. *Se* $a > 1$ *ou* $a \leq -1$, *então* $u_n = a^n$ *diverge.*

$$\lim_n a^n = \begin{cases} 0 & se \quad |a| < 1 \\ 1 & se \quad a = 1 \\ +\infty & se \quad a > 1 \\ \text{não existe} & se \quad a \leq -1 \end{cases}.$$

Seja $(u_n)_n$ uma sucessão de números reais positivos. Se existir $\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n}$ (ou $\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$), então existe $\lim_n \sqrt[n]{u_n}$ (ou $\lim_n \sqrt[n]{u_n} = +\infty$) e tem-se

$$\lim_n \sqrt[n]{u_n} = \lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

✍ Calcule $\lim \sqrt[n]{\frac{2+n}{n!}}$.