Álgebra Linear (LEI)

Matrizes

Método de Gauss-Jordan

abento@[1] ::: eamaral@[1] ::: gsoares@[1]

[1]Departamento de Matemática ::: ECT ::: UTAD

Editor: abento@ ::::: Versão de outubro.2020

Matrizes

Definição

Matriz é uma grelha retangular de m linhas por n colunas.
Numa matriz A, se i identifica a linha i e j, a coluna j, então a posição (i, j) *toma a designação de entrada* (i, j) *da matriz A.*
O número que está nesta entrada denota-se por a_{ij}*. Esta expressão* a_{ij} *identifica a entrada e o número em tal entrada.*
Por conveniência de linguagem, a palavra entrada indentificará, também, o número a_{ij}*.*
Quando dizemos que A é uma matriz, assumimos a identificação $A = [a_{ij}]$*. Com esta identificação queremos dizer que cada entrada* (i, j) *da matriz está denotada por* a_{ij}*.*

Notação

Seja A uma matriz com m linhas e n colunas [matriz de tipo $(m \times n)$].
Seja L uma matriz com uma linha e n colunas (matriz linha).
Seja C uma matriz com m linhas e uma só coluna (matriz coluna).
Formalmente, estas informações traduzem-se por:

$$A = [a_{ij}],\quad i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n; \qquad L = [a_{1j}],\quad j = 1, 2, \ldots, n; \qquad C = [a_{i1}],\quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

A forma expandida para estas informações é:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; \qquad L = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}; \qquad C = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix};$$

$\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ denota o conjunto de todas as matrizes do tipo $(m \times n)$ cujas entradas são números reais.
$\mathbb{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$ denota o conjunto de todas as matrizes linha cujas entradas são números reais.
$\mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$ denota o conjunto de todas as matrizes coluna cujas entradas são números reais.
$\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ denota o conjunto de todas as matrizes quadradas $(n \times n)$ [ou: quadradas, de ordem n] cujas entradas são números reais:

$$\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} : \ a_{ij} \in \mathbb{R},\ \ i = 1, 2, \ldots, n,\ \ j = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

Definição (Diagonal principal — Diagonal secundária)

Seja A, $A = [a_{ij}]$, uma matriz quadrada, de ordem n. As entradas $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ formam a diagonal principal da matriz A. As entradas $a_{n1}, a_{(n-1),2}, ..., a_{1n}$ formam a diagonal secundária da matriz A.

Definição (Matriz triangular — matriz diagonal)

Uma matriz quadrada diz-se triangular se ocorrer um dos casos:
(1) abaixo da diagonal principal há, somente, zeros; (2) acima da diagonal principal há, somente, zeros.
Se ocorrer (1), a matriz nomeia-se por triangular superior.
Se ocorrer (2), a matriz nomeia-se por triangular inferior.
Se ocorrer (1) e, também, (2), a matriz nomeia-se por matriz diagonal.

Exemplos. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

A matriz A é triangular superior; a matriz B é triangular inferior; a matriz C é matriz diagonal.

Nota Se A é uma matriz diagonal e de ordem n, esta informação traduz-se, por vezes, pela fórmula $A = diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

Definição (Matriz identidade)

A matriz diagonal cujas entradas diagonais são iguais ao número 1, diz-se matriz identidade (da ordem respetiva). Denota-se por I; ou por I_n, se for relevante indicar a ordem.

Exemplos.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definição (Adição de duas matrizes)

Adicionar duas matrizes significa que cada entrada de uma das matrizes é adicionada com uma, e uma só, entrada da outra. Consequentemente, duas matrizes são adicionáveis se, e só se, ambas são de um mesmo tipo.
Se A e B, $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, são duas matrizes de igual tipo, a matriz $A + B$ é tal que $A + B = [s_{ij}] := [a_{ij} + b_{ij}]$.

Exemplo.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & a & 1 \\ b & 1 & 5 \\ c & k & 4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ z & 2 & w \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}. \quad \text{Logo:} \quad A+B = \begin{bmatrix} 3 & a & 1 \\ b & 1 & 5 \\ c & k & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ z & 2 & w \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & a+x & 1+y \\ b+z & 3 & 5+w \\ c-2 & k+1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Teorema (Adição de matrizes é comutativa)

Se A e B são duas matrizes tais que $A + B$ existe, então $B + A$ existe e tem-se: $B + A = A + B$.

Definição (Multiplicação de um escalar por uma matriz)

Qualquer escalar pode ser multiplicado por uma matriz; e qualquer matriz pode ser multiplicada por um escalar. Assim, se k é um número e B, $B = [b_{ij}]$, é uma matriz, então $\quad kB = k[b_{ij}] = [kb_{ij}] \quad$ e $\quad Bk = [b_{ij}]k = [b_{ij}k] = [kb_{ij}]$.

Exemplo.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & a & 1 \\ b & 1 & 5 \\ c & d & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{Logo:} \quad kA = k \begin{bmatrix} 3 & a & 1 \\ b & 1 & 5 \\ c & d & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k & ka & k \\ kb & k & 5k \\ kc & kd & 4k \end{bmatrix}.$$

Multiplicar matrizes é, essencialmente, executar a operação **produto escalar** entre vetores: vetores-linha por vetores-coluna.

Por exemplo: $(1, 2, 3) \bullet (a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 1 \cdot a + 2 \cdot b + 3 \cdot c = a + 2b + 3c.$

Definição (Multiplicar uma linha por uma coluna)

Multiplicar a matriz linha $[a_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, pela matriz coluna $[b_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, é multiplicar cada a_i pelo respetivo b_i e adicionar todos os produto obtidos. Assim, o resultado é: $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots a_n b_n$.

Definição (Multiplicar duas matrizes)

Multiplicar uma matriz A por uma matriz B é multiplicar cada linha do primeiro fator por cada coluna do segundo fator. Logo, cada linha do primeiro fator terá que ter tantas entradas quantas as entradas de cada coluna do segundo fator. Portanto, a multiplicação da matriz A pela matriz B, por esta ordem, existe se o número de colunas do primeiro fator for igual ao número de linhas do segundo fator.
A entrada (i, j) da matriz produto (AB) é o resultado de multiplicar a linha i do primeiro fator pela coluna j do segundo fator.
Denote-se por L_i^A a linha i da matriz A; por C_j^B, a coluna j da matriz B; e por $(AB)_{ij}$, a entrada (i, j) da matriz produto (AB).
Assim, $(AB)_{ij} = L_i^A C_j^B$.

Exploremos o exposto na precedente definição.
Consideremos as matrizes $A = [a_{ij}]_{(m \times n)}$ e $B = [b_{ij}]_{(n \times p)}$.
Temos:

$$AB = \begin{bmatrix} L_1^A \\ L_2^A \\ \vdots \\ L_m^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^B & C_2^B & \cdots & C_p^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1^A C_1^B & L_1^A C_p^B & \cdots & L_1^A C_p^B \\ L_2^A C_1^B & L_2^A C_p^B & \cdots & L_2^A C_p^B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_m^A C_1^B & L_m^A C_p^B & \cdots & L_m^A C_p^B \end{bmatrix}_{(m \times p)}.$$

Exemplo $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{bmatrix}$. $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1^A C_1^B & L_1^A C_2^B & L_1^A C_3^B \\ L_2^A C_1^B & L_2^A C_2^B & L_2^A C_3^B \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ x \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ y \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ x \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ y \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ z \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a + 3x & 2b + 3y & 2c + 3z \\ 4a + 5x & 4b + 5y & 4c + 5z \end{bmatrix}.$$

Exemplo

$E = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$; $F = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$. $\boxed{EF = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & ay & az \\ bx & by & bz \\ cx & cy & cz \end{bmatrix}}$. $\boxed{FE = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = xa + yb + zc}$.

Teorema (Multiplicação de matrizes não é comutativa)

A mutiplicação de matrizes não é comutativa. Isto é, em geral, mesmo quando existem AB e BA, tem-se: $AB \neq BA$ (ver exemplo precedente).

Pelo já exposto, se $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$ e $B \in \mathbb{M}_{n\times p}$, então a matriz produto (AB) existe e é uma matriz do tipo $(m \times p)$.

Notemos, também, que se A é uma matriz coluna e B é uma matriz linha, então a matriz (AB) existe. No entanto, nem sempre é possível multiplicar B por A. Por exemplo:

$A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix}$.

Teorema (A multiplicação de matrizes é associativa)

Se A, B e C são matrizes tais que as matrizes (AB), (BC) existem, então vale a fórmula: $(AB)C = A(BC)$. ■

Sejam A e B matrizes dos tipos $(m \times n)$ e $(n \times p)$, respetivamente.
Admitamos que L_i denota a linha i da matriz A; e que C_j denota a coluna j da matriz B. Assim, podemos considerar:

$$A = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_p \end{bmatrix}.$$

1. Já sabemos que a entrada (i, j) da matriz (AB) é o número L_iC_j; isto é: $\boxed{(AB) = \begin{bmatrix} L_iC_j \end{bmatrix}}$.
   Assim, a coluna j da matriz (AB) é o produto da matriz A pela coluna j da matriz B; isto é:
   $coluna_j(AB) = A(coluna_j(B)) = AC_j$.
   Portanto:
   $$\boxed{(AB) = A\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AC_1 & AC_2 & \cdots & AC_p \end{bmatrix}. \qquad (*)}$$

2. Por outro lado, para obtermos a linha i da matriz (AB), devemos fixar a linha L_i da matriz A e percorrer todas as colunas da matriz B. Isto é: $linha_i(AB) = (linha_i(A))B = L_iB$.
   Portanto:
   $$\boxed{(AB) = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} L_1B \\ L_2B \\ \vdots \\ L_mB \end{bmatrix}. \qquad (**)}$$

Definição (Matriz transposta)

Matriz transposta de uma matriz B é a matriz cuja linha i é a coluna i da matriz B. A transposta da matriz B denota-se por B^T.

Portanto, a entrada (i, j) da matriz B será a entrada (j, i) da matriz B^T. Assim, se $B = [b_{ij}]$, então $B^T = [b_{ji}]$.
E: se B é do tipo $(m \times n)$, então a sua transposta B^T é do tipo $(n \times m)$.

Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} a & 2 \\ b & 3 \\ c & 4 \end{bmatrix}; \qquad C = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}; \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{bmatrix}, \quad D^T = \begin{bmatrix} 2 & x & a \\ 3 & y & b \\ 4 & z & c \end{bmatrix}.$$

Nota. A operação unária $(\cdot)^T$ deixa invariantes as entradas (i, i).

$(A^T)^T = \ldots$

Se A é triangular, então A^T é ...

Se A é triangular superior, então A^T é ...

Se A é diagonal, então A^T é ...

Teorema (Transposta da soma é a soma das transpostas)

Se A e B são matrizes tais que $A + B$ existe, então $(A + B)^T = A^T + B^T$.

Prova. Considere-se $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$. Assim, $A + B = [s_{ij}]$, com $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Logo: $(A + B)^T = [s_{ji}]$ e $s_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$.
Por outro lado: $A^T + B^T = [a_{ji}] + [b_{ji}] = [a_{ji} + b_{ji}] = [s_{ji}]$. Portanto, $(A + B)^T = A^T + B^T$. ■

Registemos, desde já, o seguinte: se L é uma matriz $(1 \times m)$ e C é uma matriz $(m \times 1)$, então $\boxed{LC = C^T L^T.}$

Este facto e as relações $(*)$ e $(**)$, explicitadas na página 9, serão consideradas na sequência de igualdades abaixo.

Teorema (Transposta do produto é o produto das transpostas, por ordem inversa)

Se A e B são matrizes tais que AB existe, então a transposta do produto de A por B é igual ao produto da transposta de B pela transposta de A. Formalmente: $(AB)^T = B^T A^T$.

Prova. Sejam A e B matrizes dos tipos $(m \times n)$ e $(n \times p)$, respetivamente.

Admitamos que L_i denota a linha i da matriz A; e que C_j denota a coluna j da matriz B. Assim,

$$(AB)^T = [L_i C_j]^T = \begin{bmatrix} L_1 C_1 & L_1 C_2 & \cdots & L_1 C_p \\ L_2 C_1 & L_2 C_2 & \cdots & L_2 C_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_m C_1 & L_m C_2 & \cdots & L_m C_p \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} L_1 C_1 & L_2 C_1 & \cdots & L_m C_1 \\ L_1 C_2 & L_2 C_2 & \cdots & L_m C_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_1 C_p & L_2 C_p & \cdots & L_m C_p \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1^T L_1^T & C_1^T L_2^T & \cdots & C_1^T L_m^T \\ C_2^T L_1^T & C_2^T L_2^T & \cdots & C_2^T L_m^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_p^T L_1^T & C_p^T L_2^T & \cdots & C_p^T L_m^T \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} C_1^T \\ C_2^T \\ \vdots \\ C_p^T \end{bmatrix} L_1^T \,\middle|\, \begin{bmatrix} C_1^T \\ C_2^T \\ \vdots \\ C_p^T \end{bmatrix} L_2^T \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \begin{bmatrix} C_1^T \\ C_2^T \\ \vdots \\ C_p^T \end{bmatrix} L_m^T \right] \tag{2}$$

$$= \left[B^T L_1^T \,|\, B^T L_2^T \,|\, \cdots \,|\, B^T L_m^T \right] \tag{3}$$

$$= B^T \left[L_1^T \,|\, L_2^T \,|\, \cdots \,|\, L_m^T \right] \tag{4}$$

$$= B^T A^T. \tag{5}$$

■

Definição

Uma matriz diz-se simétrica se coincidir com a sua transposta. Formalmente: B é simétrica sse $B = B^T$.

O leitor deverá concluir que qualquer matriz não quadrada não é uma matriz simétrica.

Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -a \\ 2 & 0 & 5 & b \\ -3 & 5 & -2 & c \\ -a & b & c & x \end{bmatrix}.$$

Teorema (Relação entre as entradas de uma matriz simétrica)

Seja B, $B = [b_{ij}]$*, uma matriz. Se B é simétrica, então B é uma matriz quadrada e* $b_{ij} = b_{ji}$.

Exercícios

1. Numa matriz simétrica arbitrária, quantas entradas livres há ?
2. Seja A uma matriz quadrada, arbitrária. Mostre que a matriz $(A + A^T)$ é uma matriz simétrica.
3. Seja B uma qualquer matriz. Mostre que a matriz (BB^T) é uma matriz simétrica.
4. Sejam A e B matrizes simétricas e de igual ordem. Será que a matriz $A + B$ é uma matriz simétrica? E a matriz (AB) ?
5. Sejam A e B matrizes simétricas e de igual ordem. Mostre que $(AB)^T = BA$.

Definição

Uma matriz diz-se antissimétrica se coincidir com o simétrico algébrico da sua transposta.
Formalmente: B *é antissimétrica sse* $B = -B^T$.

Caro leitor: conclua que qualquer matriz não quadrada não é uma matriz antissimétrica.

Teorema (Relação entre as entradas de uma matriz antissimétrica)

Seja B, $B = [b_{ij}]$, *uma matriz. Se* B *é antissimétrica, então* B *é uma matriz quadrada e* $b_{ij} = -b_{ji}$.

Corolário (Entradas diagonais de uma matriz antissimétrica)

Se B, $B = [b_{ij}]$, *é uma matriz antissimétrica, então as entradas diagonais de* B *são zeros.*

Prova. Decorre do teorema precedente. Cada entrada diagonal é da forma b_{ii}. Quando $j = i$, temos:
$b_{ij} = -b_{ji} \Leftrightarrow b_{ii} = -b_{ii} \Leftrightarrow 2b_{ii} = 0 \Leftrightarrow b_{ii} = 0$. ■

Exercícios

1. Numa matriz antissimétrica, arbitrária, quantas entradas livres há ?
2. Seja A uma matriz quadrada, arbitrária. Mostre que a matriz $(A - A^T)$ é uma matriz antissimétrica.
3. Sejam A e B matrizes antissimétricas e de igual ordem. Será que a matriz $A + B$ é uma matriz antissimétrica?
4. Sejam A e B matrizes antissimétricas e de igual ordem. Mostre que $(AB)^T = BA$.
5. Seja A uma matriz quadrada, arbitrária. Exprima a matriz $2A$ na soma de uma matriz simétrica com uma matriz antissimétrica.

Definição (Matriz invertível)

Uma matriz A diz-se invertível se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I$.
Se A é invertível, a matriz B tal que $AB = BA = I$ *diz-se inversa da matriz A; e denota-se por* A^{-1}.

Contra-exemplo A matriz A cujas linhas são $[1 \quad 2]$ e $[0 \quad 0]$ não é invertível. De facto, se B é tal que AB existe, então a linha 2 desta matriz (AB) é nula (e a matriz identidade não tem linhas nulas).

Exemplo A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ é invertível porque, sendo $B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, temos:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & -\frac{2}{3}+\frac{2}{3} \\ 0+0 & 0+\frac{3}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{e} \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 2-\frac{6}{3} \\ 0+0 & 0+\frac{3}{3} \end{bmatrix} = I_2.$$

Teorema

Se A e B são matrizes quadradas tais que $AB = 0$ *e B é invertível, então A é nula.* *Demonstrar.*

Teorema

Se A e B são matrizes quadradas tais que $AB = I$, *então* $BA = I$.

Prova. Temos: $B = BI = B(AB) = (BA)B$. Logo: $B - (BA)B = 0 \Leftrightarrow [I - (BA)]B = 0$. Daqui e porque B é invertível, resulta $I - BA = 0$; isto é, $BA = I$. ■

Teorema (Unicidade da inversa)

Se a matriz A é invertível, a sua inversa é única.

Prova. Admitamos que A tem duas inversas: a matriz B e a matriz C. Assim, $AB = I$ e $AC = I$. Logo, $AB = AC \Leftrightarrow AB - AC = 0 \Leftrightarrow A(B - C) = 0$. Por isto e porque A é invertível, $(B - C) = 0$, isto é, $B = C$. ■

Teorema (A inversa do produto é o produto das inversas, por ordem inversa)

Se A e B são invertíveis e existe AB, então a inversa da matriz (AB) *é o produto da inversa de B pela inversa de A; isto é:*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Prova. [1]

Neste caso, queremos mostrar que a matriz $(B^{-1}A^{-1})$ é a inversa da matriz (AB).
Temos: $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}(I)B = B^{-1}B = I$ (justifique cada igualdade). Mostrámos, portanto, que a igualdade $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ é verdadeira. Isto é, mostrámos que a inversa da matriz (AB) é a matriz $(B^{-1}A^{-1})$. ■

Teorema (A inversa da transposta é a transposta da inversa)

Se a matriz A é invertível, então a sua transposta também é invertível e tem-se:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Prova. Temos: $AA^{-1} = I \Leftrightarrow (AA^{-1})^T = I^T \Leftrightarrow (AA^{-1})^T = I \Leftrightarrow (A^{-1})^T A^T = I$ (justifique cada equivalência).
A igualdade $(A^{-1})^T A^T = I$ significa que a inversa de A^T é $(A^{-1})^T$, isto é: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. ■

[1] Reflitamos: mostrar que $P^{-1} = Q$ é mostrar que $PQ = I$. De outro modo: a inversa de uma coisa é uma outra sse o produto das duas coisas é o elemento neutro da multiplicação de coisas.

Definição (Traço de uma matriz quadrada)

Seja A, $A = [a_{ij}]$, uma matriz quadrada, $(n \times n)$.
Traço da matriz A — denotado por $tr(A)$ — é a soma das entradas diagonais de A. Assim, $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

Exemplo Se $diag(A) = (2, b, z)$, então $tr(A) = 2 + b + z$.

Teorema

Se A e B são duas quaisquer matrizes de ordem n, então $tr(AB) = tr(BA)$.

Prova. Consideremos que L_i^A denota a linha i da matriz A; e que C_j^B denota a coluna j da matriz B. Assim, as entradas diagonais da matriz (AB) são: $L_1^A C_1^B$, $L_2^A C_2^B$, ..., $L_n^A C_n^B$. Ora, de acordo com a definição de traço, temos:

$$
\begin{aligned}
tr(AB) &= L_1^A C_1^B + L_2^A C_2^B + \cdots + L_n^A C_n^B && (6)\\
&= \left(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}\right) + \left(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2}\right) + \cdots + \left(a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn}\right) && (7)\\
&= \left(a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + \cdots + a_{n1}b_{1n}\right) + \left(a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{n2}b_{2n}\right) + \cdots + \left(a_{1n}b_{n1} + a_{2n}b_{n2} + \cdots + a_{nn}b_{nn}\right) && (8)\\
&= \left(b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1}\right) + \left(b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2}\right) + \cdots + \left(b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn}\right) && (9)\\
&= L_1^B C_1^A + L_2^B C_2^A + \cdots + L_n^B C_n^A \quad = \quad tr(BA). && (10)
\end{aligned}
$$

■

Definição (Matriz idempotente)

Uma matriz A diz-se idempotente se $A^2 = A$.

exercicio Seja $c \neq 0$. Considere $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4}c^{-1} \\ c & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Mostre que a matriz B é idempotente.

Exercício No conjunto das matrizes de ordem 3, explicite três famílias de matrizes idempotentes.

Método de Gauss-Jordan

Definição (Operação elementar tipo 1 (OET1))

Numa matriz, OET1 é uma permuta entre duas linhas. Formalmente: $\boxed{B \xrightarrow[L_i \leftrightarrow L_j]{} B_1}$.

Exemplos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \begin{bmatrix} a & b & c & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots \end{bmatrix}. \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ x & y & z & \cdots \\ a & b & c & \cdots \end{bmatrix}.$$

Definição (Matriz elementar 1 (matriz elementar associada a uma OET1))

Matriz elementar 1 é uma matriz resultante da matriz I_n por uma OET1. Formalmente: $\boxed{I_n \xrightarrow[L_i \leftrightarrow L_j]{} E}$.

Esta matriz E é designada, também, por matriz elementar associada à OET1 $\left(I_n \xrightarrow[L_i \leftrightarrow L_j]{} (\cdot)\right)$

Exemplos

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Proposição (matriz elementar associada a uma OET1 reversa)

Se $I_n \xrightarrow[L_i \leftrightarrow L_j]{} E$, *então a matriz associada à OET1* $E \xrightarrow[L_j \leftrightarrow L_i]{} I_n$ *é a matriz* E^{-1}.

Proposição (A inversa de uma matriz elementar 1 é a própria)

Se E é uma matriz elementar 1, então $E^{-1} = E$.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{(E_1)} \begin{bmatrix} a & b & c & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_1]{(E_2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \end{bmatrix}.$$

As matrizes E_1 e E_2 são: $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Temos: $E_1 E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; isto é: E_1 e E_2 são inversas, uma da outra.

Proposição (Ação multiplicativa-esquerda de uma matriz elementar 1)

Seja B uma matriz $(n \times p)$.

Se $I_n \xrightarrow[L_i \leftrightarrow L_j]{(E_1)} E_1$ *e* $B \xrightarrow[L_i \leftrightarrow L_j]{} B_1$, *então* $E_1 B = B_1$.

Parafraseando: o efeito de uma OET1 numa matriz B equivale à ação da multiplicação da matriz elementar associada à OET1 pela matriz B.

Exemplo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{(E_1)} \begin{bmatrix} a & b & c & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots \end{bmatrix} = B_1.$$

A matriz elementar associada é: $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Assim: $E_1 B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots \end{bmatrix} = B_1$.

Exemplo

$$H = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{(F_1)} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots \\ x & y & z & \cdots \\ a & b & c & \cdots \end{bmatrix} = H_1.$$

A elementar associada é: $F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Logo: $F_1 H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots \\ x & y & z & \cdots \\ a & b & c & \cdots \end{bmatrix} = H_1$. ■

Definição (Operação elementar tipo 2 (OET2))

Numa matriz, OET2 é a multiplicação de um escalar, diferente de 1 e não nulo, por uma linha. Formalmente: $\boxed{B \xrightarrow[kL_i,\ k\neq 0,1]{} B_1}$.

Exemplos $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \end{bmatrix} \xrightarrow[3L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ 3a & 3b & 3c & \cdots \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \end{bmatrix} \xrightarrow[4L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ 4x & 4y & 4z & \cdots \end{bmatrix}$.

Definição (Matriz elementar 2 (matriz elementar associada a uma OET2))

Matriz elementar 2 é uma matriz resultante da matriz I_n por uma OET2. Formalmente: $\boxed{I_n \xrightarrow[kL_i,\ k\neq 0,1]{} E}$.

Esta matriz E é designada, também, por matriz elementar associada à OET2 $\left(I_n \xrightarrow[kL_i,\ k\neq 0,1]{} (\cdot)\right)$

Exemplos $E_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; $F_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

Proposição (matriz elementar associada a uma OET2 reversa)

Se $I_n \xrightarrow[kL_i,\ k\neq 0,1]{} E$, *então a matriz associada à OET2* $E \xrightarrow[\frac{1}{k}L_i,\ k\neq 0,1]{} I_n$ *é a matriz* E^{-1}.

Notemos: a inversa de uma matriz elementar 2 é, também, uma matriz elementar 2. Ainda: estas duas matrizes pertencem à mesma família de matrizes elementares; isto é, ambas diferem da matriz identidade na mesma entrada.

Exemplos Justifique cada uma das proposições:

(a) Se $E_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; então $E_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. (b) Se $F_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, então $F_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Proposição (Ação multiplicativa-esquerda de uma matriz elementar 2)

Seja B uma matriz $(n \times p)$.

Se $I_n \xrightarrow[kL_j,\ k\neq 0,1]{(E_1)} E_1$ *e* $B \xrightarrow[kL_j,\ k\neq 0,1]{} B_1$, *então* $E_1 B = B_1$.

Isto é: o efeito de uma OET2 numa matriz B equivale à ação da multiplicação da matriz elementar associada à OET2 pela matriz B.

Exemplo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \end{bmatrix} \xrightarrow[4L_2]{(E_1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ 4a & 4b & 4c & \cdots \end{bmatrix} = B_1.$$

A elementar associada é: $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Assim: $E_1 B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ 4a & 4b & 4c & \cdots \end{bmatrix} = B_1$.

Exemplo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \end{bmatrix} \xrightarrow[5L_3]{(F_1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ 5x & 5y & 5z & \cdots \end{bmatrix} = H_1.$$

A elementar associada é: $F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Logo: $F_1 H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ 5x & 5y & 5z & \cdots \end{bmatrix} = H_1$.

Exemplo

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \\ \alpha & \beta & \gamma & \cdots \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}L_4]{(E_1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \\ \frac{1}{3}\alpha & \frac{1}{3}\beta & \frac{1}{3}\gamma & \cdots \end{bmatrix} = G_1.$$

A elementar associada é: $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

Logo: $E_1 G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \\ \alpha & \beta & \gamma & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \\ \frac{1}{3}\alpha & \frac{1}{3}\beta & \frac{1}{3}\gamma & \cdots \end{bmatrix} = G_1$.

■

Definição (Operação elementar tipo 3 (OET3))

Numa matriz, OET3 é a adição de um múltiplo escalar, não nulo, de uma linha a uma outra. Formalmente: $\boxed{B \xrightarrow[L_i+kL_j,\ k\neq 0,\ i\neq j]{} B_1}$.

Alerta! *Nesta forma, fica determinado que a linha L_i é a linha alterada pela ação da OET3.*

Exemplos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2-aL_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ 0 & b-2a & c-3a & \cdots \\ x & y & z & \cdots \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3-xL_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ 0 & b-2a & c-3a & \cdots \\ 0 & y-2x & z-3x & \cdots \end{bmatrix}.$$

Estas duas OET3 podem ser executadas numa só etapa porque incidem em linhas diferentes e usam uma linha que fica invariante em cada operação. Assim, é conveniente que as duas etapas sejam reduzidas a uma única, a saber:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2-aL_1,\ L_3-xL_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ 0 & b-2a & c-3a & \cdots \\ 0 & y-2x & z-3x & \cdots \end{bmatrix}.$$

No caderno manuscrito, é conveniente escrever $(L_3 - xL_1)$ por baixo de $(L_2 - aL_1)$.

Definição (Matriz elementar 3 (matriz elementar associada a uma OET3))

Matriz elementar 3 é uma matriz resultante da matriz I_n por uma OET3. Formalmente: $\boxed{I_n \xrightarrow[L_i+kL_j,\ k\neq 0,\ i\neq j]{} E}$.

Esta matriz E é designada, também, por matriz elementar associada à OET3 $\left(I_n \xrightarrow[L_i+kL_j,\ k\neq 0,\ i\neq j]{} (\cdot)\right)$

Exemplos

$$I_2 \xrightarrow[L_2+3L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = E_1. \qquad I_2 \xrightarrow[L_1-4L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2.$$

No conjunto das matrizes (2×2), E_1 e E_2 são representantes das duas famílias de matrizes elementares tipo 3 que existem.

Exemplos $I_3 \xrightarrow[L_2+3L_1]{} \begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = F_1$. $I_3 \xrightarrow[L_3-4L_1]{} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-4&0&1\end{bmatrix} = F_2$. $I_3 \xrightarrow[L_3+5L_2]{} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&5&1\end{bmatrix} = F_3$.

$I_3 \xrightarrow[L_1+4L_2]{} \begin{bmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = F_4$. $I_3 \xrightarrow[L_1-5L_3]{} \begin{bmatrix}1&0&-5\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = F_5$. $I_3 \xrightarrow[L_2+6L_3]{} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&6\\0&0&1\end{bmatrix} = F_6$.

No conjunto das matrizes (3×3), as matrizes F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 e F_6 são representantes das seis famílias de matrizes elementares tipo 3 que existem.

Devemos assinalar que a entrada não diagonal, e não nula, é determinada pelo para (i, j) na indicação da operação $(L_i + kL_j)$.

Exercício No conjunto das matrizes (4×4), explicitar uma representante de cada família de matrizes elementares tipo 3. Note: não é necessário explicitar a OET3 respetiva.

Proposição (matriz elementar associada a uma OET3 reversa)

Se $I_n \xrightarrow[L_i+kL_j,\ k\neq 0,\ i\neq j]{} E$, *então a matriz associada à OET3* $E \xrightarrow[L_i-kL_j,\ k\neq 0,\ i\neq j]{} I_n$ *é a matriz* E^{-1}.

Notemos: a inversa de uma matriz elementar tipo 3 é, também, uma matriz elementar tipo 3. Ainda: estas duas matrizes pertencem à mesma família de matrizes elementares; isto é, ambas diferem da matriz identidade na mesma entrada.

Exemplos Justifique cada uma das proposições:

(a) $E_1 = \begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$; logo: $E_1^{-1} = \begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}$.

(b) $F_1 = \begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, logo: $F_1^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

(c) $F_2 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-4&0&1\end{bmatrix}$, logo: $F_2^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\4&0&1\end{bmatrix}$.

(d) $F_3 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&5&1\end{bmatrix}$, logo: $F_3^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-5&1\end{bmatrix}$.

(e) $F_4 = \begin{bmatrix}1&7&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, logo: $F_4^{-1} = \begin{bmatrix}1&-7&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

(f) $F_5 = \begin{bmatrix}1&0&8\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, logo: $F_5^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&-8\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

Proposição (Ação multiplicativa-esquerda de uma matriz elementar 3)

Seja B uma matriz $(n \times p)$.
Se $I_n \xrightarrow[L_i+kL_j,\ k\neq 0,\ i\neq j]{} E_1$ *e* $B \xrightarrow[L_i+kL_j,\ k\neq 0,\ i\neq j]{} B_1$ *então* $E_1 B = B_1$.

Isto é: o efeito de uma OET3 numa matriz B equivale à ação da multiplicação da matriz elementar associada à OET3 pela matriz B.

Exemplo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2+4L_1]{(E_1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a+4 & b+8 & c+12 & \cdots \end{bmatrix} = B_1.$$

A elementar associada é: $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Assim: $E_1 B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a+4 & b+8 & c+12 & \cdots \end{bmatrix} = B_1$.

Exemplo

Se $H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3+5L_1]{(F_1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x+5 & y+10 & z+15 & \cdots \end{bmatrix} = H_1$, então: $F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Assim: $F_1 H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x+5 & y+10 & z+15 & \cdots \end{bmatrix} = H_1$

Exemplo

Se $G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \\ \alpha & \beta & \gamma & \cdots \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4+L_2]{(E_1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \\ \alpha+a & \beta+b & \gamma+c & \cdots \end{bmatrix} = G_1$, então: $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Portanto: $E_1 G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \\ \alpha & \beta & \gamma & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \\ \alpha+a & \beta+b & \gamma+c & \cdots \end{bmatrix} = G_1$.

Exemplo

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \\ \alpha & \beta & \gamma & \cdots \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 - aL_1]{(E_1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ 0 & b-2a & c-3a & \cdots \\ x & y & z & \cdots \\ \alpha & \beta & \gamma & \cdots \end{bmatrix} \quad \boxed{= E_1 G} \tag{11}$$

$$\xrightarrow[L_3 - xL_1]{(E_2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ 0 & b-2a & c-3a & \cdots \\ 0 & y-2x & z-3x & \cdots \\ \alpha & \beta & \gamma & \cdots \end{bmatrix} \quad \boxed{= E_2 E_1 G} \tag{12}$$

$$\xrightarrow[L_4 - \alpha L_1]{(E_3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ 0 & b-2a & c-3a & \cdots \\ 0 & y-2x & z-3x & \cdots \\ 0 & \beta-2\alpha & \gamma-3\alpha & \cdots \end{bmatrix} = E_3 E_2 E_1 G. \tag{13}$$

em que $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Estas três OET3 podem, e devem ser executadas numa única etapa, a saber:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \\ \alpha & \beta & \gamma & \cdots \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 - aL_1 \quad (E_1) \\ L_3 - xL_1 \quad (E_2) \\ L_4 - \alpha L_1 \quad (E_3)}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ 0 & b-2a & c-3a & \cdots \\ 0 & y-2x & z-3x & \cdots \\ 0 & \beta-2\alpha & \gamma-3\alpha & \cdots \end{bmatrix} = E_3 E_2 E_1 G. \tag{14}$$

Exercício Retome a matriz G precedente; e admita que $\gamma \neq 0$. Usando OET3 adequadas, transforme a matriz G numa outra cujas entradas $(1,3)$, $(2,3)$ e $(3,3)$ são nulas. ■

Definição (Forma de escada (fe) por linhas: caracterização informal)

Dizemos que a matriz A está em forma de escada (fe) por linhas se o canto inferior esquerdo de A for o maior canto de zeros que se pode obter por ação de operações elementares nas linhas da matriz A.

Exemplos $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (fe)$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} (fe)$; $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (fe)$.

Contra-exemplos $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; $F = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Definição (Pivôs de uma matriz em (fe))

Se a matriz A está em (fe) por linhas, cada PRIMEIRA entrada não nula de cada linha designa-se por pivô (da matriz A).

Notar que se A está na (fe) por linhas, então o número de pivôs coincide com o número de linhas não nulas.

Definição (Característica de uma matriz em (fe))

Admitamos que a matriz A está na (fe) por linhas.
Característica da matriz A — denotado por $car(A)$ — é o seu número de pivôs (ou: número de linhas não nulas).

Exemplos Consideremos as matrizes A, B e C, acima explicitadas. Temos: $car(A) = 3$; $car(B) = 3$, $car(C) = 2$.

Observação A única matriz que tem característica zero é a matriz nula.

Definição (Matriz resultante de outra por OE-sobre-linhas)

Dizemos que a matriz B resulta da matriz A por operações elementares sobre linhas — formalmente: $A \xrightarrow[\text{linhas}]{OE} B$ — se existe uma sequência de operações elementares que transforma a matriz A na matriz B.

Exemplo Consideremos $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \\ \alpha & \beta & \gamma & \cdots \end{bmatrix}$, $\quad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ 0 & b-2a & c-3a & \cdots \\ 0 & y-2x & z-3x & \cdots \\ 0 & \beta-2\alpha & \gamma-3\alpha & \cdots \end{bmatrix}$.

A matriz P resulta da matriz D por OE-sobre-linhas porque: $D \xrightarrow[L_2-aL_1]{} D_1 \xrightarrow[L_3-xL_1]{} D_2 \xrightarrow[L_4-\alpha L_1]{} D_3 = P$.

Teorema (OE-sobre-linhas são reversíveis)

Se a matriz B resulta da matriz A por OE-sobre-linhas, então a matriz A resulta da matriz B por OE-sobre-linhas. Formalmente:

se $\quad A \xrightarrow[\text{linhas}]{OE} B, \quad$ *então* $\quad B \xrightarrow[\text{linhas}]{OE} A.$ ■

Questão: relativamente ao exemplo precedente, qual é a sequência de OE-sobre-linhas que transforma a matriz P na matriz D ?
Resposta: $P = D_3 \xrightarrow[L_4+\alpha L_1]{} D_2 \xrightarrow[L_3+xL_1]{} D_1 \xrightarrow[L_2+aL_1]{} D.$

Definição (Matrizes equivalentes-por-linhas)

Dizemos que duas matrizes são equivalentes-por-linhas se existe uma sequência de operações elementares que transforma uma na outra. Notação: $\quad A \xleftrightarrow[\text{linhas}]{OE} B.$

Teorema (Matrizes equivalentes-por-linhas e característica)

Matrizes equivalentes-por-linhas têm igual característica. *isto é: OE sobre linhas não alteram a característica* ■

Método (Identificar a característica de uma matriz: método de Gauss)

1. $\boxed{A \xrightarrow[\text{linhas (descendente)}]{OE} A_{(fe)}}$ *(método de Gauss);*
2. $car(A) = car(A_{(fe)}) = \textit{número de pivôs da matriz } A_{(fe)}.$

Exemplos

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 - L_1 \;\; (E_1)]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - \frac{3}{2} L_2 \;\; (E_2)]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_2 E_1 D = D_{(fe)}.$$

Portanto, $car(D) = car(D_{(fe)}) = 2$. ■

Nota: $E_2 E_1 D = D_{(fe)}$; logo: $D = E_1^{-1} E_2^{-1} D_{(fe)}$, com

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

e $E_2^{-1} = \ldots$, $E_1^{-1} = \ldots$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_1 \;\; (E_1)]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = E_{(fe)}.$$

Portanto, $car(E) = car(E_{(fe)}) = 3$. ■

Nota:
$E_1 E = E_{(fe)} \Leftrightarrow E = E_1^{-1} E_{(fe)}$.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1^{-1}.$$

$$F = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_2 \;\; (E_1)]{} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = F_{(fe)}.$$

Portanto, $car(F) = car(F_{(fe)}) = 3$. ■

Nota:
$E_1 F = F_{(fe)} \Leftrightarrow F = E_1^{-1} F_{(fe)}$.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E^{-1}.$$

Característica e invertibilidade

Teorema (Característica de uma matriz e invertibilidade)

Seja A uma matriz quadrada, $(n \times n)$. *Se* $car(A) < ordem(A)$, *então a matriz A não é invertível.*

Prova. Consideremos $A \xrightarrow[Gauss]{OE(linhas)} A_{(fe)}$ e que $A_{(fe)}$ se obteve de A por intermédio de s operações elementares. Assim,

$$A_{(fe)} = E_s(\cdots)E_1 A, \tag{15}$$

em que E_s, ..., E_2, E_1 são as matrizes elementares associadas às s operações elementares.

Admitamos que A é invertível. Seja B a sua inversa. Logo, resulta de (15):

$$A_{(fe)}B = E_s(\cdots)E_2E_1AB \Leftrightarrow A_{(fe)}B = E_s(\cdots)E_2E_1I_n \Leftrightarrow A_{(fe)}B = E_s(\cdots)E_2E_1 \Leftrightarrow A_{(fe)}BE_1^{-1}E_2^{-1}(\cdots)E_s^{-1} = I_n. \tag{16}$$

Pela hipótese, a matriz $A_{(fe)}$ tem uma linha de zeros. Portanto, a matriz $A_{(fe)}BE_1^{-1}E_2^{-1}(\cdots)E_s^{-1}$ tem uma linha de zeros.
Mas, isto e a igualdade $A_{(fe)}BE_1^{-1}E_2^{-1}(\cdots)E_s^{-1} = I_n$, em (16), geram uma contradição.
Portanto, nas condições da hipótese, fica provado que a matriz A não é invertível. ■

Nota. A contradição resultou por termos assumido que, nas condições da hipótese, a matriz A é invertível.

Definição (Matriz em forma de escada reduzida (fer))

Uma matriz A está em forma de escada reduzida (fer) se verificar os três items seguintes:

1. *a matriz A está em forma de escada (fe), por linhas;*
2. *cada pivô é igual ao número 1;*
3. *na coluna de cada pivô há uma única entrada não nula.*

Exemplos $G = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (fer)$; $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (fer)$; $J = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (fer)$.

Contra-exemplos $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Notemos:
a matriz K não está na (fer) porque não está na (fe);
a matriz M não está na (fer) porque, embora esteja na (fe), um dos pivôs não é 1;
a matriz N não está na (fer) porque uma coluna que tem um pivô tem uma outra entrada não nula.
Transformemos cada uma destas matrizes na respetiva (fer).

$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

OET3 $\downarrow$ $\boxed{L_2 - L_1}$ (E_1)

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_1 K = K_{(fer)}$.

$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

OET2 $\downarrow$ $\boxed{\frac{1}{2} L_1}$ (E_1)

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1 M = M_{(fer)}$.

$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

OET3 $\downarrow$ $\boxed{L_1 - 2L_2}$ (E_1)

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_1 N = N_{(fer)}$.

Método (de Gauss-Jordan)

O método de eliminação de Gauss-Jordan é o conjunto de operações elementares sobre linhas que transformam uma matriz A numa outra que lhe é equivalente-por-linhas e que tem a forma de escada reduzida.

Este método admite o seguinte esquema: $\underbrace{B \xrightarrow[\text{linhas (descendente)}]{OE}}_{Gauss} B_{(fe)} \underbrace{\xrightarrow[\text{linhas (ascendente)}]{OE}}_{Jordan} B_{(fer)}$.

Podemos, ainda, usar o esquema: $\boxed{B \xrightarrow[\text{linhas (Gauss}-\text{Jordan)}]{OE} B_{(fer)}}$

Teorema (Inversa de uma matriz pelo método de Gauss-Jordan)

Se a matriz B é invertível, então: $\left[B \mid I_n\right] \xrightarrow[\text{linhas (Gauss-Jordan)}]{OE} \left[I_n \mid B^{-1}\right].$

Exemplo Construir a inversa da matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Início da Resposta: $[P|I_2] \xrightarrow[Gauss-Jordan]{} \left[I_2|P^{-1}\right]$.
2. Execução do método.

$$[P|I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1-L_2]{(E_1)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[I_2|P^{-1}\right]. \tag{17}$$

3. Portanto, $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. ■

Exemplo Construir a inversa da matriz $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Início da resposta: $[Q|I_2] \xrightarrow[Gauss-Jordan]{} \left[I_2|Q^{-1}\right]$.
2. Execução do método.

$$[Q|I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2+L_1]{(E_1)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}L_2]{(E_2)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right] \tag{18}$$

$$\xrightarrow[L_1-L_2]{(E_3)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right] \tag{19}$$

3. Portanto, $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$. ■

Exemplo Construir a inversa da matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

1. Início da resposta: $[B|I_3] \xrightarrow[Gauss-Jordan]{OE} [I_3|B^{-1}]$

2. Execução do método.

$$[B|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{20}$$

$$\xrightarrow[L_3-L_1\ (E_1)]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{21}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}L_3\ (E_2)]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right] \tag{22}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1-L_3\ (E_3) \\ L_2-2L_3\ (E_4)}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 4/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right] \tag{23}$$

$$\xrightarrow[L_1-L_2\ (E_5)]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right] = \left[B_{(fer)}|B^{-1}\right] = \left[I_3|B^{-1}\right]. \tag{24}$$

3. Portanto, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1 & 1/3 \\ 2/3 & 1 & -2/3 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$. ■

Observação. Pelo exposto, podemos considerar a relação $E_5E_4E_3E_2E_1B = I_3$. Desta, resulta: $B = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}$.

Exemplo Construir a inversa da matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$.

1 Início da resposta: $[B|I_4] \xrightarrow[Gauss-Jordan]{OE} [I_4|B^{-1}]$

2 Execução do método.

$$[B|I_4] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{25}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3 - L_1 \;(E_1) \\ L_4 - 2L_1 \;(E_2)}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -6 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{26}$$

$$\xrightarrow[L_4 - L_2 \;(E_3)]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{27}$$

$$\xrightarrow[L_4 - L_3 \;(E_4)]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] = \left[B_{(fe)}|(\cdot)\right]. \tag{28}$$

3 Conclusão: $car(B) = car\left(B_{(fe)}\right) = 3 < ordem(B)$. Portanto, a matriz B não é invertível. ■

Observação. Pelo exposto, podemos considerar a relação $E_4E_3E_2E_1B = B_{(fe)}$. Desta, resulta: $B = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}B_{(fe)}$.

As matrizes B, $B_{(fe)}$, $B_{(fer)}$ e matrizes elementares

Proposição

Seja B uma matriz $(m \times n)$, $m \geqslant 2$. Existem matrizes elementares $E_1, E_2, ..., E_p$ tais que $E_p(\cdots)E_2E_1B = B_{(fe)}$.

Prova. Aplicando o método de Gauss à matriz B, temos:

$$B = B_0 \xrightarrow[OE]{E_1} B_1 \xrightarrow[OE]{E_2} B_2 \xrightarrow[OE]{E_3} \cdots \xrightarrow[OE]{E_p} B_p = B_{(fe)}, \tag{29}$$

em cada cada E_i é a matriz associada à respetiva OE. Pelo que estudámos, para cada $j \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$, o par de matrizes (E_j, B_j) é tal que $E_jB_{(j-1)} = B_j$. Por conseguinte:

$$\begin{aligned}
B_{(fe)} = B_p &= E_pB_{(p-1)} && (30)\\
&= E_pE_{(p-1)}B_{(p-2)} && (31)\\
&= E_pE_{(p-1)}E_{(p-2)}B_{(p-3)} && (32)\\
&= E_pE_{(p-1)}E_{(p-2)}E_{(p-3)}B_{(p-4)} && (33)\\
&\cdots && (34)\\
&= E_pE_{(p-1)}E_{(p-2)}E_{(p-3)}(\cdots)E_4B_3 && (35)\\
&= E_pE_{(p-1)}E_{(p-2)}E_{(p-3)}(\cdots)E_4E_3B_2 && (36)\\
&= E_pE_{(p-1)}E_{(p-2)}E_{(p-3)}(\cdots)E_4E_3E_2B_1 && (37)\\
&= E_pE_{(p-1)}E_{(p-2)}E_{(p-3)}(\cdots)5E_4E_3E_2E_1B_0 && (38)\\
&= E_pE_{(p-1)}E_{(p-2)}E_{(p-3)}(\cdots)E_4E_3E_2E_1B = E_p(\cdots)E_3E_2E_1B. && (39)
\end{aligned}$$

■

Proposição

Seja B uma matriz $(m \times n)$, $m \geqslant 2$. Existem matrizes elementares $E_1, E_2, ..., E_p$ tais que $B = E_1^{-1} E_2^{-1} (\cdots) E_p^{-1} B_{(fe)}$.

Prova. Pela proposição precedente, existem matrizes elementares $E_1, E_2, ..., E_p$ tais que $E_p(\cdots)E_2 E_1 B = B_{(fe)}$.
Cada matriz elementar E_j é invertível; e $\Big(E_p(\cdots)E_2 E_1\Big)^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} (\cdots) E_p^{-1}$ [justifique!]. Portanto, temos:

$$E_p(\cdots)E_2 E_1 B = B_{(fe)} \iff \Big(E_p(\cdots)E_2 E_1\Big)^{-1} E_p(\cdots)E_2 E_1 B = \Big(E_p(\cdots)E_2 E_1\Big)^{-1} B_{(fe)} \tag{40}$$

$$\iff I_m B = \Big(E_p(\cdots)E_2 E_1\Big)^{-1} B_{(fe)} \tag{41}$$

$$\iff B = E_1^{-1} E_2^{-1} (\cdots) E_p^{-1} B_{(fe)}. \tag{42}$$

■

Exemplo Seja $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Exprimir a matriz $B_{(fe)}$ num produto de matrizes elementares e a matriz B. Temos:

$$B \xrightarrow[\substack{L_3 - L_1 \ (E_1) \\ L_4 - 2L_1 \ (E_2)}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 - L_2 \ (E_3)]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 - L_3 \ (E_4)]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B_{(fe)}.$$

Portanto, $\boxed{E_4 E_3 E_2 E_1 B = B_{(fe)}}$, em que:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

2. Exprimir a matriz B num produto de matrizes elementares e a matriz $B_{(fe)}$. Do trabalho precedente, resulta:

$$E_4 E_3 E_2 E_1 B = B_{(fe)} \Leftrightarrow (E_4 E_3 E_2 E_1)^{-1} E_4 E_3 E_2 E_1 B = (E_4 E_3 E_2 E_1)^{-1} B_{(fe)} \Leftrightarrow I_4 B = (E_4 E_3 E_2 E_1)^{-1} B_{(fe)} \tag{43}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{B = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} E_4^{-1} B_{(fe)}}, \tag{44}$$

em que:

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \blacksquare \tag{45}$$

Proposição

Seja B uma matriz $(m \times n)$, $m \geqslant 2$. Existem matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_s$ tais que $E_s(\cdots)E_2E_1B = B_{(fer)}$.

Prova. (procedimento idêntico ao exposto na página 36). ∎

Exemplo Seja $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$. Exprimir a matriz $B_{(fer)}$ num produto de matrizes elementares e a matriz B. Temos:

$$B \xrightarrow[\substack{L_3 - L_1 \ (E_1) \\ L_4 - 2L_1 \ (E_2)}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 - L_2 \ (E_3)]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 - L_3 \ (E_4)]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (*) \tag{46}$$

$$(*) \xrightarrow[\substack{L_1 - \frac{1}{3}L_3 \ (E_5) \\ L_2 - \frac{2}{3}L_3 \ (E_6)}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 16/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_1 - L_2 \ (E_7) \\ \frac{1}{3}L_3 \ (E_8)}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 14/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B_{(fer)}. \tag{47}$$

Portanto, $\boxed{E_8E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1B = B_{(fer)}}$, em que:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{48}$$

$$E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_7 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \blacksquare \tag{49}$$

Proposição

Seja B uma matriz $(m \times n)$, $m \geqslant 2$*. Existem matrizes elementares* $E_1, E_2, ..., E_s$ *tais que* $B = E_1^{-1} E_2^{-1} (\cdots) E_s^{-1} B_{(fer)}$.

Prova. (procedimento idêntico ao exposto na página 37). ■

Exemplo Seja $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$. Exprimir a matriz B num produto de matrizes elementares e a matriz $B_{(fer)}$.

Do trabalho desenvolvido na página 39, temos:

$$E_8 E_7 E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 B = B_{(fer)} \iff (E_8 E_7 E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1)^{-1} E_8 E_7 E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 B = (E_8 E_7 E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1)^{-1} B_{(fer)} \qquad (50)$$

$$\iff I_4 B = (E_8 E_7 E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1)^{-1} B_{(fer)} \qquad (51)$$

$$\iff B = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} E_4^{-1} E_5^{-1} E_6^{-1} E_7^{-1} E_8^{-1} B_{(fer)}, \qquad (52)$$

em que:

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (53)$$

$$E_5^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_6^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_7^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_8^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \blacksquare \qquad (54)$$

$\mathbb{R}^2$ denota o conjunto dos duplos (pares) ordenados de números reais; $\mathbb{R}^3$, o conjunto dos triplos ordenados de números reais; $\mathbb{R}^4$, o conjunto dos quadruplos ordenados de números reais; $\mathbb{R}^5$, o conjunto dos quintuplos ordenados de números reais; (...)

Definição

O conjunto dos n-uplos ordenados de números reais denota-se por $\mathbb{R}^n$. Assim, $\boxed{\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \ x_i \in \mathbb{R}\}}$.

Teorema (Colunas de uma matriz ($n \times n$) *versus* base para $\mathbb{R}^n$)

Seja $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. As colunas da matriz B constituem uma base do espaço $\mathbb{R}^n$ se, e só se, $car(B) = n$. ■

Contra-exemplo $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $car(F) = 1 < ordem(F)$. Portanto, a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ não é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Exemplos

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $car(A) = 2 =$ ordem da matriz A. Portanto, a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.
2. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; $car(B) = 3 =$ ordem da matriz B. Portanto, a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.
3. $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; $car(C) = 4 = ordem(C)$. Portanto, a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de $\mathbb{R}^4$.
4. $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3+3L_2]{OET3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = D_{(fe)}$; $\quad car\left(D_{(fe)}\right) = car(D) = 4 = ordem(D)$.

   Portanto, a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de $\mathbb{R}^4$.

Definição

A sequência das colunas da matriz I_n constitui a base canónica do espaço $\mathbb{R}^n$. Denota-se por $B_c\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Exemplos

1. $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_c\left(\mathbb{R}^2\right) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$

2. $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_c\left(\mathbb{R}^3\right) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$

3. $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_c\left(\mathbb{R}^4\right) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$

4. $I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_c\left(\mathbb{R}^5\right) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$

5. $I_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_c\left(\mathbb{R}^6\right) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$

Alerta! A sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ contém as colunas da matriz I_3 mas não é a base canónica do espaço $\mathbb{R}^3$.

1. **Álgebra Linear**; Isabel Cabral & Cecília Perdigão & Carlos Saiago; Escolara Editora, Lisboa; ISBN: 978-972-592-2309-2.
2. **Introdução à Álgebra Linear**; Santana, A. P. & Queiró, J. F.; Coleção: Trajetos Ciências, Publicações Gradiva, Lisboa; ISBN: 978-989-616-372-3.
3. **Álgebra Linear e Geometria Analítica**; Emília Giraldes & Vitor Hugo Fernandes & Maria Helena Santos; Editora McGraw-Hill de Portugal, Lisboa; ISBN: 972-9241-73-2.
4. **Elementary Linear Algebra**; Howard Anton & Chris Rorres; Wiley; ISBN: 978-1-118-43441-3.
5. **Matrix Analysis**; Roger A. Horn & Charles R. Johnson; Cambridge University Press; ISBN: 0-521-38632-2.