Análise Matemática I
Funções reais de variável real

Luísa Morgado

1º Ciclo Engª Informática

Uma **função** f, definida num certo conjunto D e com valores num conjunto E, é uma regra que faz corresponder a cada elemento x de D um único elemento $f(x)$ de E.
O conjunto D é chamado **domínio** de f e o conjunto C de E formado por todos os elementos $f(x)$ com $x \in D$, é o **contra-domínio** de f.
Diz-se que f é uma **função real** se todos os valores que assume são números reais, i.e., se $C \subset \mathbb{R}$ (qualquer que seja o conjunto D); diz-se que f é **uma função de variável real** de $D \subset \mathbb{R}$ (qualquer que seja C).
Naturalmente, uma função real de variável real (f.r.v.r) é uma qualquer função cujo domínio e contradomínio sejam subconjuntos do conjunto dos números reais.

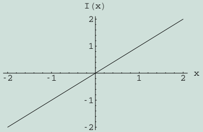
Gráfico de uma função

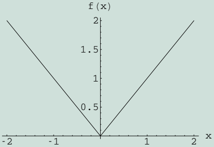
Fixado, no plano, um referencial cartesiano de eixos ortogonais, orientados do modo habitual e com a mesma unidade de medida, define-se o gráfico da função f como sendo o conjunto dos dos pontos do plano correspondentes a pares $(x, f(x))$, com x no domínio de f, i.e.,

$$Graf(f) = \{(x, f(x)) : x \in D\}$$

Exemplo

O gráfico da função identidade, $I(x) = x$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ é a bissectriz dos quadrantes ímpares;
O gráfico da função módulo $f(x) = |x|$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$ é a reunião das bissectrizes do 1º e 2º quadrantes.





Uma função $f : A \to B$ diz-se **injectiva** sse a quaisquer objectos diferentes corresponderem imagens diferentes, i.e.,

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

ou equivalentemente

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Exemplo

1. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 1$ é injectiva, pois $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:*

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2;$$

2. *A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$ não é injectiva pois, por exemplo, $g(1) = g(-1) = 1$ e no entanto $1 \neq -1$.*

Uma função $f : A \to B$ diz-se **sobrejectiva** sse o seu contradomínio coincidir com o conjunto de chegada, i.e.,

$$\forall y \in B, \exists x \in A : \quad y = f(x).$$

Exemplo

A função $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = x^4$ *não é sobrejectiva pois não existe nenhum* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = -1$ *(por exemplo).*
Neste caso, o contradomínio de f *são os reais não negativos,* $D'_f = \mathbb{R}_0^+$*, e o conjunto de chegada é* $\mathbb{R}$*.*

Uma função $f : A \to B$ diz-se **bijectiva** sse for simultaneamente injectiva e sobrejectiva.

$$\forall y \in B, \exists x \in A : \quad y = f(x).$$

Sejam $f : A \to B$ e $g : C \to D$ duas f.r.v.r. Chama-se

- **soma** de f e g, e designa-se por $f + g$, à função definida em $D_f \cap D_g$ pela fórmula
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x);$$
- **diferença** de f e g, e designa-se por $f - g$, à função definida em $D_f \cap D_g$ pela fórmula
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x);$$
- **produto** de f por g, e designa-se por fg, à função definida em $D_f \cap D_g$ pela fórmula
$$(fg)(x) = f(x)g(x);$$
- **quociente** de f por g, e designa-se por $\frac{f}{g}$, à função definida em $D_f \cap D_g \cap \{x \in D_g : g(x) \neq 0\}$ pela fórmula
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)};$$
- **composta** de f com g, e designa-se por $f \circ g$, à função definida em $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$ pela fórmula
$$(f \circ g)(x) = f[g(x)].$$

Exemplo

$$f(x) = \sqrt{x-1}, \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

- $$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} \\ D_g &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge \frac{1}{x} \geq 1\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge x \leq 1\} =]-\infty, 1[\cup]0, 1], \end{aligned}$$

  $$\forall x \in D_{f \circ g} : \quad (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$$

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \wedge \sqrt{x-1} \neq 0\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \wedge x \neq 1\} =]1, +\infty[\end{aligned}$$

$$\forall x \in D_{g \circ f} : \quad (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left(\sqrt{x-1}\right) = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}$$

Tal como este exemplo ilustra, geralmente, $f \circ g \neq g \circ f$.

Uma função diz-se **polinomial** sse for definida em $\mathbb{R}$ por uma expressão do tipo:

$$f(x) = a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \ldots + a_{p-1} x + a_p,$$

com $p \in \mathbb{N}$ e $a_0, a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$.
No caso particular em que $f(x) = a_0$, f diz-se uma função constante.

Uma função diz-se **racional** sse for definida pelo quociente de duas funções polinomiais.

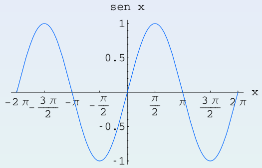
Exemplo

A f.r.v.r $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ *é uma função racional.*

Uma função **algébrica** é uma função que resulta de somas, diferenças, produtos, quocientes ou raízes de funções polinomiais.
Uma função que não é algébrica, diz-se **transcendente**.

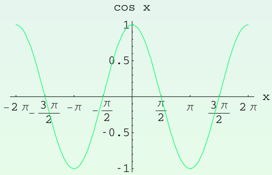
Função Seno:

$$f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$
$$x \mapsto \sin x$$



Função Coseno:

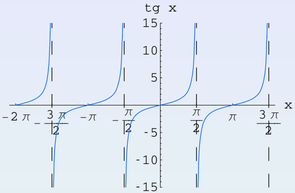
$$f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$
$$x \mapsto \cos x$$



Função Tangente:

$$f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \tan x$$

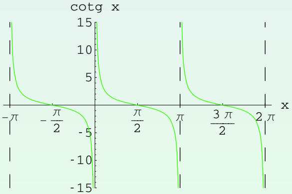
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$



Função Cotangente:

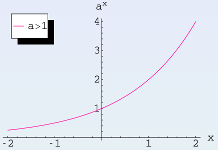
$$f : \mathbb{R} \setminus \{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \cot x$$

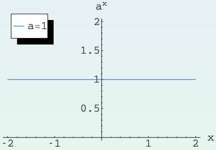
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

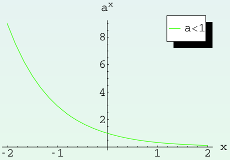


Função exponencial de base a:

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto a^x, \quad a \in \mathbb{R}^+
\end{aligned}
$$







Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se **periódica** sse existe um número real $\alpha \neq 0$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x + \alpha) = f(x).$$

Ao número real α dá-se o nome de período da função.

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se **par** sse

$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

e diz-se **ímpar** sse

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

A função $\sin x$ e $\cos x$ são funções periódicas de período 2π. A função $\sin x$ é impar e a função $\cos x$ é par.

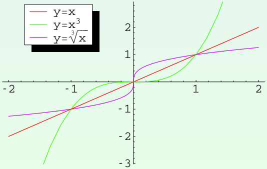
Nota: A paridade ou imparidade de uma função traduz-se no seu gráfico de forma evidente:
as funções pares têm gráficos simétricos em relação ao eixo das ordenadas e as funções ímpares apresentam gráficos simétricos em relação à origem do referencial.

Seja $f : A \to B$ uma função *injectiva*. Define-se a **inversa** de f como sendo a função $g : D'_f \to D_f$ tal que

$$(g \circ f) = (f \circ g) = I, \quad (I \quad \text{é a função identidade})$$

i.e., as igualdades $y = f(x)$ e $x = g(y)$ são equivalentes.
É costume representar-se a inversa de uma função por f^{-1} (Nunca confundir com $\frac{1}{f}$!)

Nota:Para obter o gráfico de f^{-1} basta efectuar sobre o gráfico de f uma simetria em relação à bissectriz dos quadrantes ímpares.



Exemplo

Seja $f(x) = \frac{2}{x-3}$ *uma f.r.v.r.*

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} : x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{3\} \\ D'_f &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

f é uma função injectiva (verifique-o) e como tal admite inversa, neste caso $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
Determinemos a expressão de f^{-1}:
De $y = \frac{2}{x-3}$ *vem*

$$y(x-3) = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2+3y}{y}$$

pelo que

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R} \setminus \{3\} \\ x &\mapsto \frac{2+3x}{x} \end{aligned}$$

Uma f.r.v.r f diz-se **limitada** sse existir um número real $L > 0$ tal que
$$|f(x)| \leq L$$
para qualquer $x \in D_f$.

Uma f.r.v.r f diz-se **crescente** sse para quaisquer $x_1, x_2 \in D_f$
$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2);$$
No caso da desigualdade ser estrita, a função diz-se **estritamente crescente**;
Uma f.r.v.r f diz-se **decrescente** sse para quaisquer $x_1, x_2 \in D_f$
$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2);$$
No caso da desigualdade ser estrita, a função diz-se **estritamente decrescente**.

Funções circulares inversas

As funções trigonométricas, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ e $\cot x$ não são injectivas no seu domínio. Como tal, aí não admitem inversa. No entanto, podemos fazer uma restrição ao seu domínio, à qual chamaremos **restrição principal**, na qual elas são injectivas. Considerando as restrições principais:

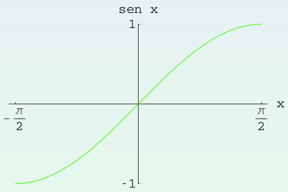
- para a função $\sin x$: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- para a função $\cos x$: $[0, \pi]$;
- para a função $\tan x$: $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$;
- para a função $\cot x$: $]0, \pi[$;

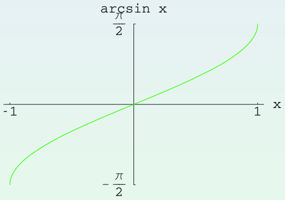
podemos aí definir as respectivas funções inversas.

A função arcsin x

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$
$$x \mapsto \sin x$$

$$f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$x \mapsto \arcsin x$$

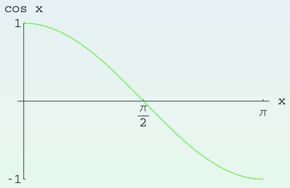


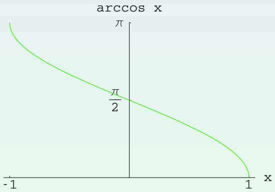


A função arccos x

$$f : [0, \pi] \to [-1, 1]$$
$$x \mapsto \cos x$$

$$f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$$
$$x \mapsto \arccos x$$

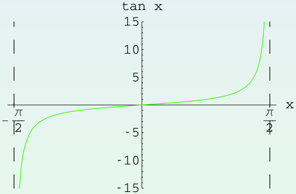


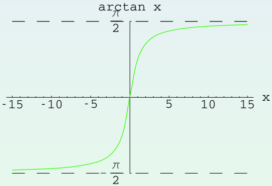


A função arctan x

$$f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \tan x$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$
$$x \mapsto \arctan x$$

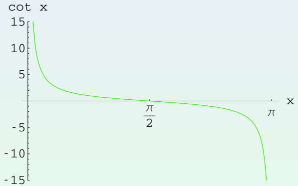


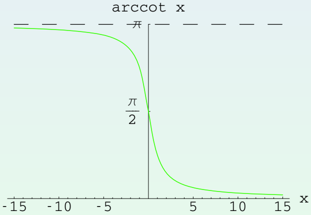


A função *arcotx*

$$f :]0, \pi[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \cot x$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to]0, \pi[$$
$$x \mapsto arcotx$$





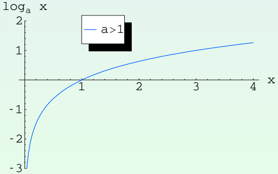
Função logarítmica

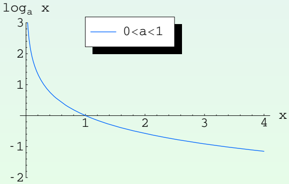
Lembremos que a função exponencial de base a, $f(x) = a^x$, é uma bijecção de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^+$ sse $a \neq 1$.
À inversa da função

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto a^x, \quad a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\} \end{aligned}$$

dá-se o nome de função logarítmica de base a:

$$\begin{aligned} g^{-1} : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_a x, \quad a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}. \end{aligned}$$





Propriedades da função logaritmo

$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}, \quad \forall p \in \mathbb{R}:$

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$;
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$;
- $\log_a(x^p) = p \log_a x$;
- $\log_b x = \log_a x \log_b a$.

Um caso particularmente importante da função exponencial e da função logarítmica é dado quando $a = e$ (número de Nepper).
Neste caso, $\log_e x$ ou $\log x$ ou ainda $\ln x$ é o chamado logaritmo nepperiano.

Outras funções a estudar

- $\sec x = \frac{1}{\cos x}$
- $\csc x = \frac{1}{\sin x}$
- $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\vdots$