Lógica Proposicional

Tópicos de Matemática Discreta

EInf & MACD

— 19/20/21 de outubro de 2020 —

Questões

- Quantas operações lógicas binárias é possível definir?
- Mostrar que $\neg$ e $\wedge$ são suficientes para definir as restantes operações estudadas $\vee, \dot{\vee}, \rightarrow, \leftrightarrow$.
- Mostrar a operação lógica $\downarrow$, onde $p \downarrow q$ representa *"nem p nem q"* é suficiente para exprimir os operadores $\vee, \wedge$ e $\neg$.

Quantas operações lógicas binárias é possível definir?

$$\begin{array}{rcl} F : \{0,1\}^2 & \longrightarrow & \{0,1\} \\ (0,0) & \longrightarrow & 0 \\ (0,1) & \longrightarrow & 0 \\ (1,0) & \longrightarrow & 0 \\ (1,1) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \neg\vee : \{0,1\}^2 & \longrightarrow & \{0,1\} \\ (0,0) & \longrightarrow & 1 \\ (0,1) & \longrightarrow & 0 \\ (1,0) & \longrightarrow & 0 \\ (1,1) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} c_1 : \{0,1\}^2 & \longrightarrow & \{0,1\} \\ (0,0) & \longrightarrow & 0 \\ (0,1) & \longrightarrow & 1 \\ (1,0) & \longrightarrow & 0 \\ (1,1) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} c_2 : \{0,1\}^2 & \longrightarrow & \{0,1\} \\ (0,0) & \longrightarrow & 1 \\ (0,1) & \longrightarrow & 1 \\ (1,0) & \longrightarrow & 0 \\ (1,1) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \neg\rightarrow : \{0,1\}^2 & \longrightarrow & \{0,1\} \\ (0,0) & \longrightarrow & 0 \\ (0,1) & \longrightarrow & 0 \\ (1,0) & \longrightarrow & 1 \\ (1,1) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} c_3 : \{0,1\}^2 & \longrightarrow & \{0,1\} \\ (0,0) & \longrightarrow & 1 \\ (0,1) & \longrightarrow & 0 \\ (1,0) & \longrightarrow & 1 \\ (1,1) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \dot{\vee}(\neg\leftrightarrow) : \{0,1\}^2 & \longrightarrow & \{0,1\} \\ (0,0) & \longrightarrow & 0 \\ (0,1) & \longrightarrow & 1 \\ (1,0) & \longrightarrow & 1 \\ (1,1) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \neg\wedge : \{0,1\}^2 & \longrightarrow & \{0,1\} \\ (0,0) & \longrightarrow & 1 \\ (0,1) & \longrightarrow & 1 \\ (1,0) & \longrightarrow & 1 \\ (1,1) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \wedge : \{0,1\}^2 & \longrightarrow & \{0,1\} \\ (0,0) & \longrightarrow & 0 \\ (0,1) & \longrightarrow & 0 \\ (1,0) & \longrightarrow & 0 \\ (1,1) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \leftrightarrow (\neg\dot{\vee}) : \{0,1\}^2 & \longrightarrow & \{0,1\} \\ (0,0) & \longrightarrow & 1 \\ (0,1) & \longrightarrow & 0 \\ (1,0) & \longrightarrow & 0 \\ (1,1) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \neg c_3 : \{0,1\}^2 & \longrightarrow & \{0,1\} \\ (0,0) & \longrightarrow & 0 \\ (0,1) & \longrightarrow & 1 \\ (1,0) & \longrightarrow & 0 \\ (1,1) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \rightarrow : \{0,1\}^2 & \longrightarrow & \{0,1\} \\ (0,0) & \longrightarrow & 1 \\ (0,1) & \longrightarrow & 1 \\ (1,0) & \longrightarrow & 0 \\ (1,1) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \neg c_2 : \{0,1\}^2 & \longrightarrow & \{0,1\} \\ (0,0) & \longrightarrow & 0 \\ (0,1) & \longrightarrow & 0 \\ (1,0) & \longrightarrow & 1 \\ (1,1) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \neg c_1 : \{0,1\}^2 & \longrightarrow & \{0,1\} \\ (0,0) & \longrightarrow & 1 \\ (0,1) & \longrightarrow & 0 \\ (1,0) & \longrightarrow & 1 \\ (1,1) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \vee : \{0,1\}^2 & \longrightarrow & \{0,1\} \\ (0,0) & \longrightarrow & 0 \\ (0,1) & \longrightarrow & 1 \\ (1,0) & \longrightarrow & 1 \\ (1,1) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} V(F) : \{0,1\}^2 & \longrightarrow & \{0,1\} \\ (0,0) & \longrightarrow & 1 \\ (0,1) & \longrightarrow & 1 \\ (1,0) & \longrightarrow & 1 \\ (1,1) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Mostrar que $\neg$ e $\wedge$ são suficientes para definir as restantes operações estudadas: $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \dot{\vee}$.

- $a \vee b \equiv \neg(\neg a \wedge \neg b)$
- $a \rightarrow b \equiv \neg a \vee b \equiv \neg(a \wedge \neg b)$
- $a \leftrightarrow b \equiv (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a) \equiv \neg(a \wedge \neg b) \wedge \neg(b \wedge \neg a)$
- $a \dot{\vee} b \equiv \neg(a \leftrightarrow b) \equiv \neg\left(\neg(a \wedge \neg b) \wedge \neg(b \wedge \neg a)\right)$

Mostrar a operação lógica $\downarrow$, onde $p \downarrow q$ representa *"nem p nem q"* é suficiente para exprimir os restantes operadores

- $\neg p \equiv p \downarrow p$
- $p \vee q \equiv \neg(p \downarrow q) \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$
- $p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$
- $p \ F \ q \equiv p \wedge \neg p$
- $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- $p \ c_1 \ q \equiv \neg(q \rightarrow p)$
- $p \ c_2 \ q \equiv \neg p$
- $p \ c_3 \ q \equiv \neg q$

TPC: Descobrir qual é o operador $\downarrow$.

O João foi jantar a uma pizzaria. Quando o empregado lhe perguntou o que ele queria comer, ele respondeu:

> *"Quero uma pizza com pepperoni ou com salsicha. Além disso, se a pizza tiver salsicha, então também deve incluir atum. Ah, e se a pizza tiver pepperoni ou atum, então também deve ter queijo ricota."*

(a) Traduza o pedido através de uma expressão do Cálculo Proposicional.

(b) O empregado sabe que o João ou é um mentiroso ou um contador da verdade (ou tudo o que ele diz é falso ou tudo é verdadeiro). Qual deles é?

(c) O que, se houver alguma coisa, pode concluir o empregado sobre os ingredientes que o João deseja na pizza?

Todo o homem é mortal. Sócrates é um homem. Sócrates é mortal.

Variável é um símbolo, usualmente uma letra, que pode tomar o valor de qualquer elemento de um conjunto, não vazio, denominado **universo** ou **domínio** dessa variável.

Quando escrevemos *considere-se, em $\mathbb{R}$, a condição "x é positivo"*, o universo da condição é $\mathbb{R}$ e a variável x. Esta expressão não é uma proposição porque, sem saber o valor de x não podemos afirmar se ele é verdadeira ou falsa. Quando substituimos x por um valor do domínio, passamos a ter uma proposição. Por exemplo, para $x = 3$ a proposição "3 é positivo" é verdadeira.

Um **predicado** (ou uma **condição**) nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (ou $x, y, z, \ldots,$) é uma expressão incluindo estas variáveis que se transforma numa proposição quando se substituem essas variáveis por objetos do domínio considerado. A substituição de uma variável por um objeto também se chama **concretização** da variável.
Usualmente representamos um predicado por uma letra minúscula (normalmente $p, q, r, \ldots$), seguida das variáveis colocadas entre parentêsis.

Exemplos

. Para representar a condição "x é positivo" escrevemos $p(x)$: "x é positivo". A concretização da variável num valor do universo, por exemplo $x = 2$, representa-se por $p(2)$. Como referido, concretizando o valor da(s) variável(veis), obtemos uma proposição que tem, portanto um valor de verdade definido. Neste caso, $p(2) \equiv V$;
. Em $\mathbb{Z}$, considere-se o predicado $p(x, y)$: x divide y. Temos que $p(2, 4) \equiv$ 2 divide 4 $\equiv V$ e $p(3, 7) \equiv$ 3 divide 7 $\equiv F$;
. Em $\mathbb{R}$, a condição $q(x)$: $x^2 \geq 0$ transforma-se numa proposição verdadeira para toda a concretização da variável x com valores do domínio. No mesmo domínio, o predicado $r(x)$: $x^2 = 4$ transforma-se numa proposição verdadeira para dois valores do domínio $(x = 2; x = -2)$ e o predicado $p(x, y)$: $x^2 + y^2 = -1$ transforma-se sempre em proposições falsas para todos os valores do domínio.

Quantificador Universal

O **quantificador universal** representa-se pelo símbolo $\forall$ e é um símbolo que aplicado a um predicado $p(x_1, \dots, x_n)$ nas variáveis $x_1, \dots, x_n)$, transforma o predicado p em U, na proposição $\forall x_1, \dots, x_n \in U, p(x_1, \dots, x_n)$ que é verdadeira se a condição for verdadeira para todas as concretizações das variáveis com valores de U e é falsa caso contrário.
A expressão "$\forall x_1, \dots, x_n \in U$" lê-se "para todo o $x_1, \dots, x_n$ em U" ou "qualquer que sejam $x_1, \dots, x_n$ em U".

Quantificador existencial

O **quantificador existencial** representa-se pelo símbolo $\exists$ e é um símbolo que aplicado a um predicado $p(x_1, \ldots, x_n)$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n)$, transforma o predicado p em U, na proposição $\exists x \in U, p(x_1, \ldots, x_n)$ que é verdadeira se a condição for verdadeira para algum valor de U e é falsa caso contrário.
A expressão "$\exists x_1, \ldots, x_n \in U$" lê-se "existe $x_1, \ldots, x_n$ em U" ou "para algum $x_1, \ldots, x_n$ em U".

Também podemos usar $\exists^1 x_1, \ldots, x_n \in U, p(x_1, \ldots, x_n)$ que se lê "existe um e um só $x_1, \ldots, x_n$ em U".

exemplos

. A proposição $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ é verdadeira;
. A proposição $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$ é verdadeira pois o predicado $p(x) : x^2 = 1$ transforma-se numa proposição verdadeira para $x = 1$ e para $x = -1$, ou seja, $p(1) \equiv p(-1) \equiv V$;
. A proposição $\exists^1 x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$ é falsa porque, como vimos, existe mais de um valor que transforma o predicado $p(x)$ numa proposição verdadeira;
. A proposição $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ é falsa pois existe um valor (0) para o qual o predicado $p(x) : x^2 > 0$ se transforma numa proposição falsa, isto é, $p(0) \equiv 0$;
. A proposição $\exists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 3$ é falsa pois, como sabemos, para qualquer valor $a \in Q$, o predicado $q(x) : x^2 = 3$ transforma-se na proposição falsa $q(a)$, uma vez que as raízes da equação $x^2 = 3$ ($\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$) são irracionais .

A utilização dos conetivos lógicos e do símbolo de negação estende-se, de maneira natural, aos predicados. De facto, se $p(x_1, \ldots, x_n)$ e $q(x_1, \ldots, x_n)$ são predicados, também o são as seguintes expressões:
. $\neg p(x_1, \ldots x_n)$;
. $p(x_1, \ldots, x_n) \vee q(x_1, \ldots, x_n)$, $p(x_1, \ldots, x_n) \wedge q(x_1, \ldots, x_n)$, $p(x_1, \ldots, x_n) \dot{\vee} q(x_1, \ldots, x_n)$;
. $p(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow q(x_1, \ldots, x_n)$, $p(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow q(x_1, \ldots, x_n)$.
Por exemplo, em $\mathbb{Z}$, considerando *p(x): "x é múltiplo de 5"* e *q(x): "x é par"*, temos $p(x) \wedge q(x)$: *"x é múltiplo de 5 e x é par"*.

Podemos agora analisar o silogismo *"Todo o homem é mortal. Sócrates é um homem. Sócrates é mortal."* à luz desta nova ferramenta. Consideremos os seguintes predicados $p(x)$: *"x é homem"* e $q(x)$: *"x é mortal"*. O silogismo pode então ser formalizado na seguinte proposição:

$$[(\forall x, p(x) \rightarrow q(x)) \wedge p(\text{Sócrates})] \rightarrow q(\text{Sócrates}).$$

Nesta nova formulação torna-se mais evidente a relação entre as várias proposições referida anteriormente. Veremos, em breve, a razão de considerarmos este raciocínio verdadeiro.

variáveis livres variáveis mudas

Num predicado $p(x_1, \ldots, x_n)$, dizemos que as variáveis $x_1, \ldots, x_n$ ocorrem **livres em** p. Na proposição, $\forall x_1, \ldots, x_n \in U, p(x_1, \ldots, x_n)$, as variáveis $x_1, \ldots, x_n$ ocorrem **mudas em** p.

Podem acontecer situações em que nem todas as variáveis do predicado estão quantificadas. Por exemplo, considere-se no universo dos números inteiros, o predicado $p(x, y) : x = y + y$. Na expressão (que é ainda uma condição em x) $\exists y \in \mathbb{Z}\ x = y + y$, a variável x ocorre livre e a variável y ocorre muda. Esta proposição afirma algo sobre x: x é par. Daí, ser ainda um condição em x. Já na proposição $\exists x, y \in Z\ x = y + y$, as duas variáveis x e y ocorrem mudas. Esta proposição não exprime nada especificamente sobre x: exprime a existência de um número par no conjunto dos números inteiros.

É possível ter na mesma expressão quantificadores universais e existenciais. A proposição $\forall x \exists y \in Z\ x = y + y$ é uma proposição que exprime *"todo o número inteiro é par"* (que é falsa). Nestes casos, é importante notar que a ordem dos quantificadores implica proposições distintas. O exemplo mais habitual desta relevância é a propriedade de existência de elemento simétrico: $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z}\ x + y = 0$ é uma proposição verdadeira que exprime que todo o número inteiro (x) tem um número simétrico (y), no entanto, a proposição $\exists y \in \mathbb{Z} \forall x \in \mathbb{Z}\ x + y = 0$ que exprime a existência de um número inteiro que é simétrico de todos os números inteiros, é falsa.