Univ. de Trás-os-Montes e Alto Douro
Escola de Ciências e Tecnologia
Dep. de Matemática

Álgebra Linear (e Geometria Analítica)

para os cursos:
Informática, MIEEC, TIC

2020 – 2021
Primeiro semestre

Caderno de problemas para as aulas teórico-práticas

setembro 2020 — fevereiro 2021

Conteúdo

1 Matrizes

1. Apresente matrizes dos tipos: (2×4); (5×3); (1×4); (3×1); quadradas. Apresente as respetivas transpostas.

2. Apresente matrizes: triangulares superiores; triangulares inferiores; diagonais. Apresente as respetivas transpostas.

3. Apresente matrizes: simétricas; antissimétricas. Apresente as respetivas transpostas.

1.1 Soma de matrizes. Produto de matrizes

4. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 6 \\ -1 & \sqrt{2} & 5 & 1 \\ -5 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Explicite, se possível, as matrizes:

$\boxed{1}$ $3A$; $\boxed{2}$ $A+B$; $\boxed{3}$ AB; $\boxed{4}$ BC; $\boxed{5}$ CB; $\boxed{6}$ AC; $\boxed{7}$ AD;

$\boxed{8}$ AE; $\boxed{9}$ EA; $\boxed{10}$ $C(BE)$; $\boxed{11}$ $(CB)E$.

. . . .

5. Apresente matrizes diagonais. Calcule o quadrado de cada uma delas.

Sendo D uma matriz diagonal e $k \in \mathbb{N}$, deduza uma fórmula para D^k.

. . . .

1.2 Transposta de uma matriz. Transposta da soma. Transposta do produto

6. Considere as matrizes $F = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & -4 & -3 \end{bmatrix}$; $G = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; $M = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Se possível, explicite as matrizes:

$\boxed{1}$ $(GF)^T$; $\boxed{2}$ F^TG^T; $\boxed{3}$ M^TM; $\boxed{4}$ MM^T; $\boxed{5}$ $I_3 - 2MM^T$.

. . . .

7. Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Se possível, explicite as matrizes:

$\boxed{1}$ B^TA; $\boxed{2}$ $(C^TA + D^TA)^T$; $\boxed{3}$ A^TB; $\boxed{4}$ $B^T(C+D)$; $\boxed{5}$ $(D^TB + C^TB)^T$.

. . . .

1.3 Inversa de uma matriz. Inversa do produto. Inversa da transposta

8. Considere as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Verifique que A é a inversa de B; e que C é a inversa de D.

. . . .

9. Considere as matrizes

$$P = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ x & 4 & 1 \end{bmatrix}; \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

[a] Verifique que P é a inversa de Q. [b] Explicite x de modo que U seja a inversa de V.

. . . .

10. Seja $D = diag(1, 2, 3, 4, 5)$.

(a) Explicite a inversa da matriz D.

(b) Para cada $i = 1, 2, ..., n$, seja $\alpha_i \neq 0$. Explicite a inversa da matriz $diag(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$.

(c) Apresente uma condição necessária e suficiente para uma matriz diagonal ser invertível.

. . . .

11. Sejam: $$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & -9 & -1 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ x & -1 & -1 \\ y & z & -1 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Explicite os parâmetros reais x, y, z de tal modo que $P^{-1} = Q$.

(b) Usando a resposta à questão precedente, explicite a inversa da matriz S.

. . . .

12. Considere as matrizes U, V no exercício 9 e as matrizes P, Q no exercício 11.

Usando a condição em (9.b) e as condições em (11.a), construa:

[i] $(PV)^{-1}$; [ii] $(VP^{-1})^T$; [iii] $[UQ + (PV^{-1})^{-1}]^T$; [iv] $P(Q^{-1})^T + (P^{-1}V)^{-1}$.

. . . .

1.4 Matrizes elementares e operações elementares. Eliminação de Gauss

13. Matrizes elementares em $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$: explicite um exemplo de cada matriz elementar; e respetiva inversa.

Matrizes elementares em $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$: explicite um exemplo de cada matriz elementar; e respetiva inversa.

. . . .

14. Considere as matrizes reais: $$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}.$$

(a) Interprete QP, SP e UP como matrizes resultantes da matriz P.

(b) Interprete PQ, PS e PU como matrizes resultantes da matriz P.

. . . .

15. Considere as matrizes reais: $$H = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & h & i \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}.$$

(a) Interprete LH e MH como matrizes resultantes da matriz H.

(b) Interprete HL e HM como matrizes resultantes da matriz H.

. . . .

16. Seja $k \neq 0$. Considere as matrizes elementares:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja A uma matriz arbitrária do tipo (3×5).

Para cada $X \in \{E, F, G, H\}$, interprete o efeito, sobre A, da ação definida pela multiplicação de X por A.

....

17. Seja $A \in \mathbb{M}_{5\times 4}$. Explicite as matrizes elementares que, quando pós-multiplicadas por A, produzem em A as seguintes transformações:

    (a) permuta da primeira com a terceira linhas;

    (b) multiplicação da segunda linha por 6;

    (c) adição, à terceira linha, de $\frac{1}{5}$ da segunda linha.

....

1.5 Característica de uma matriz. Invertibilidade de uma matriz

18. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad D \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}; J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix};$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad M = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & 1 & 2 \\ -\mathbf{i} & 4 & 2\mathbf{i} \\ 1+\mathbf{i} & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

A matriz equivalente por linhas à matriz P e em forma de escada, (f.e.), será denotada por Q_P.

    (a) Para cada $P \in \{A, B, ..., M\}$, transforme P na matriz Q_P; e indique a característica de P.

    (b) Para cada $P \in \{A, B, ..., M\}$, exprima Q_P num produto de matrizes elementares e a matriz P.

    (c) Para cada $P \in \{A, B, ..., M\}$, exprima P num produto de matrizes elementares e a matriz Q_P.

    (d) Das matrizes quadradas, de ordem n, indique aquelas cujas colunas (ou linhas) formam uma base de $\mathbb{R}^n$. $\boxed{\text{se } \mathrm{car}(\mathit{matriz}) = \mathit{ordem\ da\ matriz}}$.

....

19. Retome as matrizes do exercício 18.

    A matriz equivalente por linhas à matriz P e em forma de escada reduzida, (f.e.r.), será denotada por R_P.

    (a) Para cada $P \in \{A, B, ..., M\}$, transforme P na matriz R_P.

    (b) Para cada $P \in \{A, B, ..., M\}$, exprima R_P num produto de matrizes elementares e a matriz P.

    (c) Para cada $P \in \{A, B, ..., M\}$, exprima P num produto de matrizes elementares e a matriz R_P.

....

20. Apresente uma condição necessária, e suficiente, para uma matriz triangular ser invertível.

....

1.6 Inversa de uma matriz: método de Gauss-Jordan

21. Seja $a \neq 0$. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix};$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}; \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} a & -a & 0 \\ 2a & -a & a \\ 3a & -3a & a \end{bmatrix};$$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz equivalente por linhas à matriz X e em forma de escada reduzida, (f.e.r.), será denotada por R_X.

(a) Para cada $X \in \{A, B, ..., Q\}$, construa a matriz R_X.

(b) Para cada $X \in \{A, B, ..., Q\}$, exprima R_X num produto de matrizes elementares e a matriz X.

(c) Para cada $X \in \{A, B, ..., Q\}$ que seja invertível, exprima a inversa de X num produto de matrizes elementares.

(d) Indique as matrizes cujas colunas (ou linhas) formam uma base de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$, ou de $\mathbb{R}^4$.

....

22. Usando o método de Gauss-Jordan, construa a inversa, caso exista, de cada matriz proposta no exercício 21:

....

1.7 Matriz simétrica; antissimétrica; idempotente. Traço de uma matriz.

23. Matriz simétrica; antissimétrica; idempotente. Traço.

(a) Apresente matrizes quadradas de ordem 2 tais que:
$\boxed{1}$ $A^2 = -I_2$. $\boxed{2}$ $B^2 = 0$, com $B \neq 0$. $\boxed{3}$ $AB = 0$, com A, B sem entradas nulas.

....

(b) Sejam $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}$; e α um escalar. Justifique cada uma das seguintes igualdades:

i. $tr\,(A + B) = tr\,(A) + tr\,(B)$;
ii. $tr\,(\alpha A) = \alpha\, tr\,(A)$;
iii. $tr\left(A^T\right) = tr\,(A)$;
iv. $tr\,(AB) = tr\,(BA)$.

....

(c) Mostre que se A é uma matriz de ordem dois cujo traço é nulo, então A^2 é uma matriz escalar.

....

(d) Usando as identidades no exercício 23b, justifique, ou refute, a proposição:
não existem matrizes quadradas A e B tais que $AB - BA = I_n$.

....

(e) Sejam $A, P \in \mathbb{M}_n$, com P invertível. Mostre que $tr\left(P^{-1}AP\right) = tr\,(A)$.
(Sugestão: reveja o exercício 23b)

....

(f) Sejam A, B matrizes quadradas de ordem n. Em cada caso, explicite a condição $\mathscr{C}(A, B)$:

i. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \iff \mathscr{C}(A, B)$.
ii. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \iff \mathscr{C}(A, B)$.
iii. $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2 \iff \mathscr{C}(A, B)$.

. . . .

(g) Sejam A, B matrizes quadradas, de ordem n, e $k \in \mathbb{N}_0$. Mostre que:

i. se $AB = BA$ então $AB^k = B^k A$;

ii. se $AB = BA$ então $(AB)^k = A^k B^k$.

. . . .

(h) Uma matriz quadrada A diz-se idempotente se $A^2 = A$.
Sabendo que a matriz B é idempotente, mostre que a matriz $(I - B)$ é idempotente.

. . . .

(i) Seja $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$. Mostre que:

i. a matriz $A + A^T$ é simétrica; e que $A - A^T$ é antissimétrica;

ii. qualquer matriz quadrada é soma de uma matriz simétrica com uma outra antissimétrica.

. . . .

(j) Seja $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Mostre que as matrizes $A^T A$ e AA^T são simétricas.

. . . .

(k) Sejam $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}$. Considere que A é simétrica.

i. Justifique a proposição: *a matriz $B^T AB$ é simétrica.*

ii. Escolha duas matrizes, de ordem 3, nas condições referidas e sem entradas repetidas. Verifique a proposição precedente.

. . . .

(l) Sejam A, B matrizes quadradas simétricas. Mostre que a matriz AB é simétrica se, e só se, $AB = BA$.

. . . .

(m) Seja $B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Justifique cada uma das proposições:

i. se B tem uma linha [coluna] nula então B não é invertível;

ii. se B tem duas linhas iguais então B não é invertível.

. . . .

(n) Seja $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A^2 + \alpha A + \beta I_n = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \beta \neq 0.$
Mostre que A é invertível; e identifique a sua inversa.

. . . .

(o) Sejam $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Mostre que são verdadeiras, as proposições:

i. se A e AB são invertíveis então B é invertível;

ii. se B e AB são invertíveis então A é invertível.

. . . .

(p) Seja $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Mostre que é verdadeira a seguinte proposição:
se B é invertível e simétrica, então a sua inversa é simétrica.

. . . .

2 Sistemas de equações lineares

2.1 Resolução de sistemas de equações lineares

24. Escreva cada sistema na forma $AX = B$, onde A e B são matrizes convenientes e A é invertível.
Em simultâneo, resolva a equação $AX = B$ e calcule a inversa da matriz A.

(a) $\begin{cases} x+y=2 \\ x-2y=1 \end{cases}$; (a1) $\begin{cases} x-4y=0 \\ -2y+x=1 \end{cases}$; (a2) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y+z=1 \\ 2y+x+3z=3 \end{cases}$;

. . . .

(b) $\begin{cases} x+y+2z=2 \\ x+2y+2z=1 \\ x+2y-4z=3 \end{cases}$; (b1) $\begin{cases} 5x+y+z=1 \\ 2x-4y-2z=0 \\ x+3y+z=1 \end{cases}$; (b2) $\begin{cases} 5x+2y+z=0 \\ 2x-8y-2z=0 \\ x+6y+z=1 \end{cases}$;

. . . .

(c) $\begin{cases} 3x+2y+4z=1 \\ 2x-y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$; (c1) $\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ 3y+2x-2z=0 \\ 4x-3y+z=2 \end{cases}$; (c2) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y+z=1 \\ 4x+3y+2z=3 \end{cases}$;

. . . .

(d) $\begin{cases} x+y+2z=2 \\ 2x+2y+2z=5 \\ x+y=3 \end{cases}$; (k) $\begin{cases} x-y=1 \\ -x+2y-z=1 \\ 2z-y-w=1 \\ -z+2w=1 \end{cases}$.

. . . .

2.2 Equações matriciais cujo termo independente é uma matriz com mais do que uma coluna

25. Em cada caso, explicite a incógnita e, usando o método de Gauss-Jordan, resolva a equação $AX = C$:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

(c) Resolva os dois casos precedentes por aplicação do método de Gauss-Jordan, em simultâneo.

2.3 Polinómios definidos por pontos do plano

26. Em cada caso, identifique todos os polinómios $p(x)$, de grau 2, cujo gráfico em Oxy contém os:

(a) pontos $(1,1)$, $(2,-1)$, $(3,2)$.
(b) pontos $(0,3)$, $(3,-1)$.
(c) pontos $(0,3)$, $(3,-1)$, $(-1,3)$, $(1,2)$.
(d) pontos $(0,3)$, $(3,-1)$, $(-1,3)$, $(1,\frac{7}{3})$. Observação: resolva (c) e (d) em simultâneo.

. . . .

27. Em cada caso, identifique todos os polinómios $p(x)$, de grau 3, cujo gráfico em Oxy contém os pontos:

(a) $(1,1)$, $(2,-1)$, $(3,2)$.
(b) $(0,3)$, $(3,-1)$.
(c) $(0,3)$, $(3,-1)$, $(-1,3)$, $(1,2)$.
(d) $(0,3)$, $(3,-1)$, $(-1,3)$, $(1,5)$. Observação: resolva (c) e (d) em simultâneo.

. . . .

2.4 Coordenadas de vetores de $\mathbb{R}^n$ em bases de $\mathbb{R}^n$.

28. Identifique as coordenadas de cada vetor U na base proposta.

(a) $B_1 = \Big((1,2,3,4),\ (0,2,3,4),\ (0,0,3,4),\ (0,0,0,4)\Big)$, $U = (x,\ y,\ z-y,\ x-y+z)$.

(b) $B_2 = \Big((1,0,0,0),\ (1,2,0,0),\ (1,2,3,0),\ (1,2,3,4)\Big)$, $U = (x-y,\ y,\ x-y+z,\ x-w)$.

(c) $B_3 = \Big((1,0,2,3),\ (1,2,0,3),\ (1,2,3,0),\ (1,2,3,1)\Big)$, $U = (a+b-c,\ a-b,\ c,\ -a)$.

(d) $B_4 = \Big((1,0,1,1),\ (0,0,1,0),\ (-1,1,0,0),\ (0,0,-1,-1)\Big)$, $U = (x,\ y+x,\ -z,\ z+w)$.

(e) $B_5 = \Big((1,0,0,1),\ (-1,0,1,-1),\ (0,1,0,0),\ (0,-1,0,-1)\Big)$, $U = (x-z+w,\ y+x,\ y-z,\ z+y+w)$.

.... Sugestão: resolva este exercício e o seguinte, em simultâneo.

29. Retome as bases no exercício precedente. Para cada i, resolva a equação $[B_i]X = I_4$.

....

2.5 Discussão de sistemas

30. Discuta cada sistema, em função dos parâmetros reais α, β, k e λ.

(a) $\begin{cases} 3x+4y+2z=k \\ 2x+3y-z=1 \\ x+y+kz=2 \end{cases}$ (a1) $\begin{cases} x-3z=-3 \\ 2x+ky-z=-2 \\ x+2y+kz=1 \end{cases}$ (a2) $\begin{cases} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=1 \\ x+y+kz=1 \end{cases}$

....

(b) $\begin{cases} x+2y+kz=1 \\ 2x+ky+8z=3 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ (b1) $\begin{cases} x+ky+\lambda z=2k \\ x+2ky+\lambda z=k \\ x+2ky+z=k \end{cases}$ (b2) $\begin{cases} x+y+k\lambda z=1 \\ x+\lambda y+kz=2 \\ \lambda x+kz=2\lambda+1 \end{cases}$

....

(c) $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ x+\lambda z=1 \\ x+y+2z=k \\ 2x-y+(2-\lambda)z=2 \end{cases}$ (c1) $\begin{cases} x+ky+\lambda z-w=k \\ x-\lambda z-2w=k \\ 2x+ky+\lambda z-4w=3k \\ x+2\lambda y+2w=0 \end{cases}$ (c2) $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ x-y+\alpha z=0 \end{cases}$

....

(d) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=0 \\ 2x-2y+\alpha z=0 \\ x+y+z=\beta \end{cases}$ (d1) $\begin{cases} x+y=2 \\ x+(\alpha+3)y+(\beta-2)z=3 \\ 2x+2y+(\beta-2)z=4 \end{cases}$ (d2) $\begin{cases} x-\beta y-\alpha z=-\alpha \\ x+2y+2z=3 \\ x-\beta y+2z=2 \end{cases}$

....

(e) $\begin{cases} x+\beta y+\alpha z=2\beta \\ x+2\beta y+\alpha z=\beta \\ x+2\beta y+4z=\beta+2 \end{cases}$ (e1) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ -x-\alpha y+z=-1 \\ -x-y+(\alpha+1)z=\beta-2 \end{cases}$ (e2) $\begin{cases} \alpha x+y+z=1 \\ x+\alpha y+z=\alpha \\ x+y+\alpha z=\alpha^2 \end{cases}$.

3 Determinantes

3.1 Determinante; expansão de Laplace

31. Escreva três matrizes triangulares e invertíveis, de diferentes ordens, e com o mínimo de entradas repetidas.
Utilizando, unicamente, a expansão de Laplace, calcule o determinante de cada matriz que apresentou.

32. Escreva três matrizes simétricas, de diferentes ordens, e com o mínimo de entradas repetidas.
Utilizando, unicamente, a expansão de Laplace, calcule o determinante de cada matriz que explicitou.

33. Escreva três matrizes antissimétricas, de diferentes ordens, e com o mínimo de entradas repetidas.
Utilizando, unicamente, a expansão de Laplace, calcule o determinante de cada matriz que explicitou.

3.2 Operações elementares e determinantes

34. Considere as matrizes reais: $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$.

(a) Interprete QP, SP e UP como matrizes resultantes da matriz P.
Calcule $\det(P)$, $\det(QP)$, $\det(SP)$, $\det(UP)$.

(b) Interprete PQ, PS e PU como matrizes resultantes da matriz P.
Calcule $\det(PQ)$, $\det(PS)$, $\det(PU)$.

(c) Justifique a proposição: $\forall A, B \in \{P, Q, S, U\}, \quad \det(AB) = \det(A)\det(B)$.

. . . .

35. Considere as matrizes reais: $H = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & h & i \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$.

(a) Interprete LH e MH como matrizes resultantes da matriz H.
Usando a expansão de Laplace, relacione cada um dos $\det(LH)$ e $\det(SP)$ com $\det(H)$.

(b) Interprete HL e HM como matrizes resultantes da matriz H.
Usando a expansão de Laplace, relacione cada um dos $\det(HL)$ e $\det(HM)$ com $\det(H)$.

(c) Justifique a proposição: $\forall A, B \in \{H, M, L\}, \quad \det(AB) = \det(A)\det(B)$.

. . . .

36. Seja B uma qualquer matriz quadrada, de ordem n; e k um número real (ou complexo).
Justifique a proposição: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \det(kB) = k^n \det(B)$.

. . . .

37. Seja A uma matriz quadrada, de ordem n.
Que relação há: (i) entre $\det(A)$ e $\det(2A)$? (ii) entre $\det(A)$ e $\det(-A)$?

. . . .

38. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda+1 & 2 & 2 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & 3 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2-k & 2 & \ddots & 2 \\ 3 & 3 & 3-k & \ddots & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-k \end{bmatrix}$.

Mostre que (i) $\det(A) = \lambda^4$; e que: (ii) $\det(B) = (-k)^{n-1}$.

. . . .

39. Seja $B \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. Considere que L_i denota a linha i de B; e que C_j denota a coluna j de B. Assim, B pode denotar-se por $[C_1 \ ; \ C_2 \ ; \ C_3]$, ou por $[L_1 \ ; \ L_2 \ ; \ L_3]$.

Sejam $\alpha, x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Seja $B_1 = [\ -C_2 \ ; \ C_1 \ ; \ 2C_3\ ]$. Mostre que $\det(B_1) = 2\det(B)$.

(b) Seja $B_2 = [\ 2C_1 + 4C_2 \ ; \ 3C_2 + C_3 \ ; \ 5C_3\ ]$. Mostre que $\det(B_2) = 30\det(B)$.

(c) Seja $B_3 = [\ -3L_1 \ ; \ 2L_2 - 3L_1 \ ; \ L_1 + 2L_2 - L_3\ ]$. Mostre que $\det(B_3) = 6\det(B)$.

(d) Seja $B_4 = [\ C_1 \ ; \ C_2 \ ; \ xC_1 + yC_2 + C_3\ ]$. Mostre que $\det(B_4) = \det(B)$.

(e) Seja $B_5 = [\ C_1 + \alpha C_2 \ ; \ C_1 - \alpha C_2 \ ; \ C_3\ ]$. Mostre que $\det(B_5) = -2\alpha\det(B)$.

. . . .

3.3 Matriz adjunta e matriz inversa

40. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Construa a matriz adjunta de A, $adj(A)$; e verifique a igualdade: $A \cdot adj(A) = \det(A) \cdot I_3$.

(b) Explicite a matriz A^{-1}, se existir.

(c) Calcule $\det(B)$; e, usando cofatores, construa a primeira coluna da matriz B^{-1}.

. . . .

41. Considere as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Construa as matrizes $adj(A)$, $adj(B)$, $adj(C)$.

(b) Justifique que A, B e C são invertíveis. Construa as respetivas inversas.

. . . .

42. Considere: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & -8 \\ 3 & 0 & -3 & 9 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & k \\ 0 & k & -k & k \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Utilizando a expansão de Laplace ao longo da segunda linha, calcule $\det(A)$.

(b) Calcule $\det(A)$, usando um outro processo.

(c) Seja $B \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ tal que $\det(B) = 12$. Calcule o determinante da matriz $\left(AB^{-1}\right)^T$.

(d) Efetuando operações elementares sobre linhas, calcule o determinante da matriz F.

(e) Identifique o conjunto dos valores de k de tal modo que $\det G = 2$.

. . . .

43. Em cada caso, identifique o conjunto dos valores de x para os quais a matriz é invertível:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2-x & 0 \\ 5 & 3+x \end{bmatrix}$; (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & x+1 \\ x-1 & x^2-1 \end{bmatrix}$; (c) $C = \begin{bmatrix} 1 & x & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -7 & x+3 \end{bmatrix}$.

. . . .

44. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$; $G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Utilizando o desenvolvimento de Laplace ao longo da terceira linha, calcule $\det(A)$.

(b) Sabendo que $B = 2A$ e usando, somente, propriedades da função $\det(\cdot)$, calcule $\det(B^{-1})$.

(c) Sabendo que G é invertível, relacione x com y.

(d) Considere $x = 3$ e $y = 2$. $\boxed{\text{i}}$ Construa a matriz G^{-1}. $\boxed{\text{ii}}$ Sejam B e F matrizes quadradas tais que $\left(G^T\right)^{-1} = G^{-1}BF$. Calcule $\det(B)$.

(e) Utilizando o teorema de Laplace, calcule $\det(H)$.

(f) Seja $M \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ tal que $\det(M) = 2$; e D a matriz que se obteve de M por permuta da primeira coluna com a segunda. Calcule o determinante da matriz $MH^{-1}D^T$.

....

45. Sejam $A, P \in \mathbb{M}_n$, com P invertível; e $B = PAP^{-1}$.

Mostre que: $\boxed{\text{i}}$ $\det(B) = \det(A)$; $\boxed{\text{ii}}$ $\det(B - 2I_n) = \det(A - 2I_n)$.

....

46. Justifique cada uma das seguintes proposições:

(a) se A é invertível e $A^2 = A$, então $|A| = 1$;

(b) se A é uma matriz triangular invertível, então todos os elementos da diagonal principal de A são diferentes de zero.

....

47. Uma matriz real S, quadrada de ordem n, diz-se ortogonal se $S^TS = SS^T = I_n$.

(a) Seja $Q \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ uma matriz ortogonal.
Mostre que Q é invertível; e calcule $\det(2Q)$ e $\det\left(\frac{1}{2}Q^{-2}\right)$.

(b) Sabendo que P e Q são matrizes ortogonais de ordem n, mostre que $X = Q - I_n$ é a solução da equação matricial

$$P^T\, X^T Q + P^{-1}Q = P^T.$$

....

48. Em cada caso, identifique os números α que verificam a condição: a matriz $(A - \alpha I)$ é singular.

$\boxed{\text{i}}$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$; $\boxed{\text{ii}}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$; $\boxed{\text{iii}}$ $A = \begin{bmatrix} 11 & -2 & 8 \\ 19 & -3 & 14 \\ -8 & 2 & -5 \end{bmatrix}$.

....

49. Seja X uma matriz de ordem 3 tal que $\det(X) = -5$; e Y a matriz obtida de X por permuta da linha 1 com a linha 2. Calcule: $\boxed{\text{i}}$ $\det(2X)$; $\boxed{\text{ii}}$ $\det(X^{-1})$; $\boxed{\text{iii}}$ $\det(X^\top Y)$.

....

50. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$; e a sua adjunta: $\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} -2 & x & 1 & -4 \\ 0 & -1 & y & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & z & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Justifique, ou refute, a proposição: *a matriz A é invertível.*

(b) Sabendo que $B = -A$ e usando, somente, propriedades da função $\det(\cdot)$, calcule $\det[(AB^{-1})^T]$.

(c) Explicite a inversa da matriz A.

....

51. Seja $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$, arbitrária; e $B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Considere $H = B_1A$, $F = B_2A$, $G = B_3A$.

Justifique, ou refute, cada uma das seguintes proposições:

$\boxed{\text{i}}$ $\det(A) + \det(H) = 0$; $\boxed{\text{ii}}$ $\det(F) - \det(A) \neq 0$; $\boxed{\text{iii}}$ $\frac{1}{6}\det(G) + \det(-A) \neq 0$.

....

52. Sejam A, B, C matrizes $n \times n$, tais que: $\det(A) = 2$; $\det(B) = -2$; $\det(C) = 4$.

(a) Justifique, ou refute, a proposição: $\det(A^{-2}B^T \text{adj}(C)) = -2^{2n-3}$.

(b) Justifique, ou refute, a proposição: se $C^{-1} = A^k$, então $k = 3$.

(c) Seja $G = EA \in M_n$, onde E é a matriz, $n \times n$, resultante da matriz identidade por multiplicação da segunda linha por 3 e da terceira linha por 2.

Justifique, ou refute, a proposição: se n é ímpar, então $\frac{1}{6}\det(G) + \det(-A) = 0$.

....

53. Seja X uma matriz quadrada. Denotemos, por $\text{cof}(X)$, a matriz dos cofatores de X.

Sejam A e B matrizes invertíveis, de ordem n.

Mostre que $\text{cof}(AB) = \text{cof}(A)\text{cof}(B)$.

....

54. Seja A uma matriz quadrada invertível de ordem n, $n \geqslant 2$. Mostre que:

(a) a matriz $\text{adj}\, A$ é invertível;

(b) $(\text{adj}\, A)^{-1} = (\det A)^{-1}A = \text{adj}\left(A^{-1}\right)$;

(c) $\det(\text{adj}\, A) = (\det A)^{n-1}$;

(d) $\text{adj}\,(\text{adj}\, A) = (\det A)^{n-2}A$.

....

55. Mostre que todas as matrizes antissimétricas de ordem ímpar são singulares.

....

3.4 Determinante e resolução de sistemas quadrados (regra de Cramer)

56. Usando a regra de Cramer, resolva os seguintes sistemas:

(a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x - 4y = 0 \\ -2y + x = 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 3 \end{cases}$

....

(d) $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ x + 2y - 4z = 3 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} 5x + y + z = 1 \\ 2x - 4y - 2z = 0 \\ x + 3y + z = 1 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} 5x + 2y + z = 0 \\ 2x - 8y - 2z = 0 \\ x + 6y + z = 1 \end{cases}$

....

(g) $\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ 4x - 3y + z = 2 \end{cases}$ (i) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \\ 4x + 3y + 2z = 3 \end{cases}$.

....

57. Seja $B \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ tal que $\det(B) = 3$; e C_4^B a coluna 4 da matriz B.
Usando a regra de Cramer, resolva o sistema $BX = C_4^B$.

....

58. Seja C_j^Q a coluna j da matriz de ordem 5 e invertível, Q.
Usando a regra de Cramer, resolva o sistema $QX = 3C_1^Q - 5C_3^Q + C_4^Q$.

....

novo Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -\mathbf{i} & 0 \\ \mathbf{i} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix};$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para cada matriz X explicitada, identifique todos os valores de λ tais que a matriz $(X - \lambda I)$ não é invertível.

....

3.5 Globais sobre matrizes, sistemas e determinantes

59. Considere a matriz: $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$

(a) Usando o método de Gauss-Jordan, construa B^{-1}. Exprima B num produto de matrizes elementares e uma matriz triangular. A partir desta igualdade, calcule $\det(B)$.

(b) Usando a resposta à alinea (a), resolva a equação matricial $XB = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -7 & 2 \end{bmatrix}$.

(c) Sem calcular cofatores, explicite a matriz $\operatorname{adj}(B)$.

(d) Seja F a submatriz de B constituída pelas entradas das três primeiras linhas e das três primeiras colunas. Justifique, ou refute, a proposição:
qualquer que seja $G \in \mathbb{M}_{3\times1}(\mathbb{R})$, o sistema $FX = G$ é possível e determinado.

(e) Sejam $C, D \in \mathbb{M}_4$, invertíveis; e $A = -2\,B^2$.
Usando, somente, propriedades da função $\det(\cdot)$, calcule $\det(C^{-1}(AB^{-1})^T D)$.

....

60. Considere a matriz $\operatorname{adj}(F) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$

(a) Seja H a submatriz de F constituída pelas entradas das três primeiras linhas e das três primeiras colunas. Usando, somente, as entradas da matriz $\operatorname{adj}(F)$, justifique, ou refute, a proposição:
qualquer que seja $G \in M_{3\times1}$, o sistema $HX = G$ é possível.

(b) Calcule $\det(\operatorname{adj}(F))$ e $\det(F)$.

(c) Sejam $C, D \in M_4$, invertíveis; e $A = -3F^2$.
Usando, somente, propriedades da função $\det(\cdot)$, calcule $\det(D^{-1}(AF^{-1})^T C)$.

(d) Explicite a matriz F^{-1}. Sem explicitar F, resolva a equação $XF = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

(e) Explicite a matriz F.

....

61. Considere as matrizes:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & -5 & -2 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}; \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

(a) Seja H a submatriz de G obtida pela supressão da linha 1 e da coluna 4.
Usando, somente, propriedades da função determinante, calcule $\det\left[H \cdot (H - 5I)^T \cdot (DB)^{-1}\right]$.

(b) Sem identificar adj$G$, deduza $\det(\text{adj}G)$.

(c) Sem identificar adj$G$, explicite a matriz $(\text{adj}G)^{-1}$

(d) Pelo método de Gauss-Jordan, construa a matriz B^{-1}.

(e) Resolva a equação matricial: $(BD) \cdot \text{adj}(BD) \cdot X \cdot G^{-1} = M$.

....

62. Seja $A \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ tal que $\det(A) = 7$. Considere as matrizes: $B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule $\det\left[B \cdot adj(A)\right]$.

(b) Calcule a inversa da matriz (BC^{-1}).

(c) Exprima a matriz (BC) num produto de matrizes elementares.

(d) Resolva a equação matricial $CX(AB)adj(AB) - B = 0$.

(e) Seja C_4^A a coluna 4 da matriz A. Usando a regra de Cramer, resolva o sistema $AX = C_4^A$.

....

63. Seja $k \in \mathbb{R}$; e C_j a coluna j da matriz P, invertível. Considere as matrizes

$$F = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad H = \left[C_2 + 2C_3 \ , \ -C_3 + 3C_2 \ , \ -C_1 \ , \ 2C_1 - 5C_4\right].$$

(a) Construa a matriz $\text{adj}(G^T)$.

(b) Usando a expansão de Laplace, calcule $\det(F + G^T)$.

(c) Calcule $\det(H)$.

(d) Calcule $\det\left[(H + P)^T \cdot (2P) \cdot (HP^{-1})\right]$.

(e) Seja $A = [a_{i,j}]$ uma matriz quadrada, de ordem 20.
As entradas $(1, j)$ e $(2, j)$, com $j = 1, 2, ..., 20$, estão definidas por $a_{1,j} = j$ e $a_{2,j} = 2j$.
Justifique, ou refute, a proposição: *a matriz adj*(A) *tem dezassete colunas nulas.*

....

64. Seja $Q \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ tal que $\det(Q) = 7$; e $adj(A) = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ -1 & -3 & -5 & -7 \end{bmatrix}$.

(a) Seja P a primeira coluna da matriz $adj(A)$. Usando a regra de Cramer, resolva o sistema $CX = P$.

(b) Exprima a matriz C num produto de matrizes elementares.

(c) Seja $D = |A|C$. Calcule o inversa da matriz $(D^{-1}A)$.

(d) Retome a matriz D em (c). Resolva a equação matricial $(ACQ)adj(ACQ) + (D^{-1}A)X = I_4$.

(e) Seja $H = \left[-C_2 \ , \ -C_3 \ , \ 2C_1 + C_2 \ , \ 2C_1 - 5C_4\right]$, onde cada C_j é a coluna j da matriz Q.
Calcule $\det\left[2Q \cdot (HQ^{-1})^T \cdot (Q + H)^2\right]$.

....

4 Valores próprios e vetores próprios

4.1 Valores próprios e operações elementares sobre matrizes

65. Mostre que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ têm igual polinómio característico.

66. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Deduza o espetro da matriz A.

(b) Explicite matrizes A_1, A_2 e A_3, obtidas de A por ação de cada uma das operações elementares, respetivamente. Explicite o espetro de cada uma destas três matrizes.

(c) Justifique, ou refute, a proposição:
o espetro (de uma matriz) é invariante num conjunto de matrizes equivalentes-por-linha.

67. Identifique o espetro de cada matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -\mathbf{i} & 0 \\ \mathbf{i} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix};$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

68. Seja X a matriz coluna $[x \;\; y \;\; z]^T$; e $A = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Identifique a solução de cada uma das equações matriciais $AX = 2X$ e $AX = 3X$.
Com base no tipo de solução encontrada, justifique, ou refute, as proposições:
$\boxed{\text{i}}$ *o número 2 pertence ao espetro de A*; $\boxed{\text{ii}}$ *o número 3 pertence ao espetro de A.*

(b) Explicite o polinómio característico de cada matriz.

(c) Explicite o espetro de cada matriz.

4.2 Valores próprios e vetores próprios de matrizes

69. Considere as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

(a) Explicite o espetro de cada matriz.

(b) Explicite os vetores próprios de cada matriz.

70. Considere as matrizes: $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 1+b \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Explicite b de modo que A tenha um valor próprio com multiplicidade algébrica 3.

(b) Seja b o número encontrado na alínea precedente. Explicite os vetores próprios de A.

(c) Explicite α de modo que B admita o valor próprio 0 com multiplicidade algébrica 2.

(d) Seja α o número referido na alínea precedente. Explicite os vetores próprios de B associados ao valor próprio 0.

. . . .

71. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ k+1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k-1 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

(a) Explicite os valores próprios de A; e todos os vetores próprios de A.

(b) Explicite um valor de k para o qual exista um vetor U não nulo tal que $BU = -U$.

(c) Explicite todos os números β para os quais a equação $(C + \beta I)\, X = 0$ tem solução não-trivial.

. . . .

72. Considere as matrizes reais: $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Sem usar o polinómio característico de A, mostre que 8 é valor próprio da matriz A.

(b) Por eliminação de Gauss-Jordan, deduza os vetores próprios de A associados ao val.p. 4.

(c) Deduza o espetro da matriz $A + B$.

(d) Justifique, ou refute, a proposição:
existe uma matriz triangular C tal que o espectro de $A + C$ é $[2; 2; 2; 2]$.

. . . .

73. Um quadrado mágico de ordem n é uma matriz quadrada de ordem n tal que a soma das entradas em cada linha, em cada coluna e nas diagonais é invariante.

(a) Mostre que o vetor $(1,\ 1,\ \cdots,\ 1) \in \mathbb{R}^n$ é vetor próprio de qualquer quadrado mágico de ordem n.

(b) Mostre que um quadrado mágico, de ordem n, cujas entradas são $1, 2, 3, ..., n^2$ tem um valor próprio igual a $\frac{1}{2}n\left(n^2+1\right)$.

. . . .

4.3 Diagonalização de matrizes

74. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Identifique os vetores próprios associados aos valores próprios da matriz A.

(b) Conclua que a matriz A é diagonalizável; e construa uma matriz P tal que a matriz $P^{-1}AP$ é diagonal.

(c) Mostre que a matriz B é diagonalizável.

(d) Construa duas matrizes P e Q que diagonalizam a matriz B.

. . . .

75. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que a matriz A não é diagonalizável.

(b) Justifique, ou refute, a proposição: *a matriz B é diagonalizável.*

(c) Averigúe se a matriz C é diagonalizável.
Em caso afirmativo, construa uma matriz diagonalizante.

(d) Mostre que a matriz F não é diagonalizável em $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$; mas é diagonalizável em $\mathbb{M}_3(\mathbb{C})$.
Neste último caso, construa matrizes P e D, com D diagonal, tais que $P^{-1}FP = D$.

....

76. Sejam a, b, c, d, e, k números reais quaisquer.

Considere: $$F = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}; \qquad G = -2F + 3I_4; \qquad H = \begin{bmatrix} k & a & b & c \\ 0 & k & d & e \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & -3 & k \end{bmatrix}.$$

(a) Exprima $\det(F - \lambda I_4)$ na forma de um produto de binómios de grau 1. Explicite o espetro de F.

(b) Averigúe se F é diagonalizável. Ainda: usando Gauss-Jordan, identifique os vetores próprios de F.

(c) Deduza o espetro da matriz G.

(d) Deduza os vetores próprios da matriz G.

(e) Mostre que a matriz $F + H$ é diagonalizável.

....

77. Seja M uma matriz quadrada tal que: $\det(M - \lambda I_4) = (-2-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda)$;

$$M \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}; \qquad V_M(-2) = \left\{ \begin{bmatrix} 2y \\ y \\ -w \\ w \end{bmatrix} : \ (y,w) \neq (0,0) \right\}; \qquad V_M(3) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 2y \\ -y \end{bmatrix} : \ y \neq 0 \right\}.$$

(a) Explicite o espetro de M.

(b) Justifique que M é diagonalizável.

(c) Construa uma matriz P tal que $P^{-1}MP = diag(4;\ -2;\ 3;\ -2)$.

(d) Usando a matriz P precedente, explicite a matriz M.

(e) Seja $A = 2I_4 - 3M$. Deduza o polinómio característico da matriz A.

....

78. Seja $B \in \mathbb{M}_5(\mathbb{R})$ tal que $sp(B) = [1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5]$. Considere $N = 3B - I_5$.

(a) Justifique a proposição: *a matriz B é diagonalizável.*

(b) Explicite o polinómio característico de B na forma de um produto de binómios de grau 1.

(c) Escolha B, sabendo que é triangular superior e a matriz $(B + B^T)$ não tem entradas nulas.
Usando Gauss-Jordan, explicite os vetores próprios de B; e apresente uma matriz P tal que $P^{-1}BP = diag(5;\ 4;\ 3;\ 2;\ 1)$.

(d) Deduza o espetro da matriz N.

(e) Sendo B tal como em (c), identifique os vetores próprios de N e explicite uma matriz Q tal que $Q^{-1}NQ$ é uma matriz diagonal.

....

79. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 1+b \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Explicite o espetro da matriz A.
(b) Discuta a diagonalização de A em função do parâmetro b.
(c) Em cada caso em que A é diagonalizável, construa uma matriz P que diagonaliza A.
Ainda: explicite a matriz $P^{-1}AP$.
(d) Explicite o espetro da matriz B.
(e) Discuta a diagonalização de B em função do parâmetro a.
(f) Em cada caso em que A é diagonalizável, construa uma matriz Q que diagonaliza B.
Ainda: explicite a matriz $Q^{-1}BQ$.

. . . .

80. Seja $B \in \mathbb{M}_5(\mathbb{R})$ tal que $sp(B) = [1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5]$.

(a) Justifique a proposição: *a matriz B é diagonalizável.*
(b) Identifique o espetro da matriz B^2.
(c) Seja $A = 2B - I_5$. Justifique que $sp(A) = [1\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 7\ ,\ 9]$.
(d) Escolha B, sabendo que é triangular e que $B + B^T$ é tridiagonal e sem zeros tridiagonais.
Explicite os vetores próprios de B.
(e) Reconsidere a matriz B, fixada em (d); e, tal como em (c), seja $A = 2B - I_5$.
Identifique matrizes H e M tais que $HAM = diag(7\ ,\ 5\ ,\ 1\ ,\ 9\ ,\ 3)$.

. . . .

81. Seja $B \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ tal que $sp(B) = [-2\ ,\ -1\ ,\ 1\ ,\ 2]$; e considere $A = 3B + I_4$.

(a) Justifique a proposição: *a matriz B é diagonalizável.*
(b) Escolha B, sabendo que é triangular e tem nove, e só nove, entradas nulas.
Explicite os vetores próprios de B.
(c) Mostre que $sp(A) = [-5\ ,\ -2\ ,\ 4\ ,\ 7]$.
(d) Reconsidere a matriz B fixada na alínea (b). Deduza os vetores próprios de A.
(e) Exprima A num produto de três matrizes, no qual a matriz $diag(7\ ,\ 4\ ,\ -5\ ,\ -2)$ é um dos fatores.

. . . .

82. Seja $A \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ tal que $sp(A) = [-3\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 4]$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$; $P^{-1} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$.

Sabe-se que a matriz P diagonaliza a matriz A.

(a) Deduza o espetro da matriz B.
(b) Justifique, ou refute, a proposição: *a matriz B é diagonalizável.*
(c) Explicite os vetores próprios da matriz A de tal modo que $P^{-1}AP = diag(1, 2, -3, 4)$.
(d) Identifique matrizes M e N tais que $MAN = diag(1\ ,\ 4\ ,\ 9\ ,\ 16)$.
(e) Justifique a proposição: *qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$, a matriz $(A + \alpha I_4)$ é diagonalizável.*

. . . .

4.4 Globais sobre determinantes, valores próprios e vetores próprios

. . . .

83. Resolva cada proposta:

(a) Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ uma qualquer matriz triangular. Apresente os valores próprios de A.

. . . .

(b) Demonstre a proposição: *a matriz quadrada A é invertível se, e só se,* $0 \notin sp(A)$.

. . . .

(c) Sejam $A, B \in \mathbb{M}_n$.
Mostre que: se A é invertível, então as matrizes AB e BA têm o mesmo polinómio característico.

. . . .

(d) Sejam $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ os valores próprios de uma matriz A.
Sendo α um escalar, descreva os valores próprios da matriz $A + \alpha I$.

. . . .

(e) Seja A uma matriz antissimétrica, de ordem n.
Mostre que: se n for ímpar, então a matriz A tem o valor próprio 0. (Sugestão: use o exercício 55)

. . . .

(f) Mostre que uma matriz quadrada e a sua transposta têm iguais valores próprios.

. . . .

(g) Sejam A e P matrizes quadradas, com P invertível. Mostre que as matrizes $P^{-1}AP$ e A têm iguais valores próprios.

. . . .

(h) Considere o teorema: **para cada matriz quadrada $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, existe uma matriz quadrada invertível $S \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $S^{-1}AS$ é triangular**.

i. Justifique a proposição: *o determinante de uma matriz quadrada é o produto dos seus valores próprios.* (Sugestão: use o exercício 83g)

ii. Mostre que o termo independente do polinómio característico de uma matriz quadrada A é o determinante da matriz A.

. . . .

(i) Seja A uma matriz ortogonal. Justifique cada uma das seguintes proposições:

i. todos os valores próprios de A são diferentes de zero;

ii. se λ é valor próprio de A, então λ^{-1} é valor próprio de A.

. . . .

5 Espaços vetoriais

5.1 Combinação linear de vetores

84. No espaço vetorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)_\mathbb{R}$, considere os vetores: $u = (\alpha, 1+\alpha, 2\alpha)$, $v = (1,1,3)$, $w = (2,1,0)$.
Identifique os valores para α de modo que u seja combinação linear dos vetores v e w.

. . . .

85. No espaço vetorial $\mathbb{R}_2[x]$, considere os seguintes polinómios

$$p_1(x) = 1 + 2x + x^2, \qquad p_2(x) = 1 + x, \qquad p_3(x) = 2 + x + \beta x^2.$$

Identifique β de modo que p_3 seja combinação linear de p_1 e p_2.

. . . .

5.2 Subespaços vetoriais

86. Seja $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.
Mostre que $(A, +, \cdot)_\mathbb{R}$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial canónico $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)_\mathbb{R}$.

. . . .

87. Averigúe quais dos seguintes conjuntos são subespaços do espaço vetorial respetivo:
$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$, $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)_\mathbb{R}$.
$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y \geqslant 0\}$, $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)_\mathbb{R}$.
$C = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0 \vee z = 0\}$, $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)_\mathbb{R}$.
$D = \{(a+b+c, b-c, c, 1) : a,b,c \in \mathbb{R}\}$, $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)_\mathbb{R}$.
$E = \{(2y+z, y, z, 0) : y,z \in \mathbb{R}\}$, $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)_\mathbb{R}$.
$F = \{b + (a-b)x + ax^2 : a,b \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}_2[x]$.
$G = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] : p(0) = 0\}$, $\mathbb{R}_n[x]$.

. . . .

88. Justifique que, para a adição de matrizes reais, os conjuntos abaixo mencionados não são fechados:
(i) matrizes quadradas invertíveis; (ii) matrizes quadradas não-invertíveis; (iii) matrizes quadradas com a diagonal principal não-nula; (iv) matrizes quadradas cujo traço é diferente de zero.

. . . .

5.3 Modos de descrever um subespaço: geradores; compreensão; vetor-genérico

89. Nos espaços vetoriais $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)_\mathbb{R}$ pertinentes, caracterize cada subespaço em compreensão (condição-suporte):
$A = \ll (0,1,1),\ (0,2,-1) \gg$ $B = \ll (2,1,1),\ (4,3,1) \gg$ $C = \ll (0,1,2),\ (0,2,3),\ (0,3,1) \gg$;
$D = \ll (1,0,0),\ (0,2,3),\ (0,3,1) \gg$ $E = \ll (1,2,0,1),\ (1,3,1,1),\ (0,1,1,0) \gg$;
$F = \ll (1,2,0,1),\ (1,3,1,1) \gg$; $G = \ll (1,2,0,1),\ (1,3,1,1),\ (0,1,-1,0) \gg$;
$H = \ll (1,2,0,1),\ (1,3,1,1),\ (0,1,-1,0),\ (1,2,2,1),\ (1,0,0,0) \gg$.

. . . .

90. Considere o espaço vetorial canónico $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)_\mathbb{R}$ e $F = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a \end{bmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\}$.

(a) Mostre que $(F, +, \cdot)_\mathbb{R}$ é um subespaço do espaço $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)_\mathbb{R}$.
(b) Construa um conjunto de geradores para o subespaço $(F, +, \cdot)_\mathbb{R}$.

91. Seja $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial real canónico das matrizes quadradas reais, de ordem dois; e B o subespaço de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ cujos elementos são as matrizes simétricas.

    (i) Identifique um conjunto de geradores para $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$; e (ii) um conjunto de geradores para B.

5.4 Dependência linear e independência linear (por definição)

92. Nos espaços vetoriais $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)_\mathbb{R}$ pertinentes, verifique se os elementos em cada conjunto são linearmente independentes:

    $A = \{\ (2,1),\ (1,2)\ \}$, $B = \{\ (2,1),\ (-6,-3)\ \}$, $C = \{\ (2,1),\ (1,0),\ (0,1)\ \}$,

    $D = \{\ (1,2,3),\ (2,4,5),\ (1,2,4)\ \}$, $E = \{\ (2,1,-3),\ (3,2,-5),\ (1,-1,1)\ \}$,

    $F = \{\ (1,2,3),\ (2,4,5)\ \}$, $G = \{\ (1,0,1,1),\ (0,0,0,0),\ (2,-5,4,3),\ (3,2,1,0)\ \}$,

93. Para cada caso, identifique todos os valores do parâmetro real α de modo que os vetores do conjunto apresentado, e no espaço vetorial real assinalado, sejam linearmente independentes.

    $A = \{\ (-1,2,\alpha),\ (-1,2,0),\ (1,0,-1)\ \}$, $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)_\mathbb{R}$;

    $B = \left\{\ 1+\alpha x,\ \ \alpha + x - (\alpha+1)x^2,\ \ 2+x^2\ \right\}$, $\mathbb{R}_2[x]$;

    $C = \left\{\ (\tfrac{1}{2},0,0),\ (\alpha,1,\alpha),\ (0,\alpha,1)\ \right\}$, $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)_\mathbb{R}$.

5.5 Geradores, bases e dimensão

94. Averigúe se os vetores de cada conjunto geram o espaço vetorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)_\mathbb{R}$:

    $A = \{\ (1,1,0),\ (0,1,1)\ \}$, $B = \{\ (1,1,0),\ (0,1,1),\ (-1,1,1)\ \}$,

    $C = \{\ (-1,1,0),\ (0,-1,2),\ (-1,0,2)\ \}$, $D = \{\ (1,1,0),\ (0,1,1),\ (0,1,0),\ (1,1,1)\ \}$,

95. No espaço vetorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)_\mathbb{R}$, considere os vetores $u = (\alpha,1,0)$, $v = (1,\alpha,1)$, $w = (0,1,\alpha)$.

    Identifique todos os valores de α para os quais o conjunto $\{u,v,w\}$ é uma base de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)_\mathbb{R}$.

96. Averigúe se cada um dos conjuntos abaixo explicitados é (i) um conjunto de geradores ou (ii) uma base do espaço vetorial real assinalado.

    $A = \{\ (3,2,1),\ (3,2,0),\ (3,0,0)\ \}$, $\mathbb{R}^3$.

    $B = \{\ (0,-1,2),\ (-1,0,2),\ (-1,-1,4)\ \}$, $\mathbb{R}^3$.

    $C = \{\ (3,2,1),\ (3,2,0),\ (3,0,0),\ (1,0,0)\ \}$, $\mathbb{R}^3$.

    $D = \{\ (0,1,0,1),\ (1,2,5,-3),\ (3,0,0,0),\ (0,2,0,2),\ (-1,-1,-5,3)\ \}$, $\mathbb{R}^4$.

    $E = \{\ (0,1,0,1),\ (1,0,1,0),\ (3,0,0,0),\ (0,2,0,2),\ (-1,0,0,1)\ \}$, $\mathbb{R}^4$.

    $F = \left\{\ 1,\ \ 1+x,\ \ 1+x^2,\ \ 1+x^3,\ \ 3+x+x^4\ \right\}$, $\mathbb{R}_4[x]$.

97. Construa uma base para o espaço vetorial $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)_\mathbb{R}$; e indique a dimensão deste.

98. Usando matrizes adequadas, identifique a dimensão de cada um dos subespaços:
$A = \ll (1,2,3),\ (0,1,2),\ (1,4,7) \gg, \qquad (\mathbb{R}^3,+,\cdot)_{\mathbb{R}};$
$B = \ll (3,-1,4),\ (2,1,3),\ (1,0,2) \gg, \qquad (\mathbb{R}^3,+,\cdot)_{\mathbb{R}};$
$C = \ll (0,1,2),\ (1,1,3),\ (0,2,4),\ (1,2,5) \gg, \qquad (\mathbb{R}^3,+,\cdot)_{\mathbb{R}};$
$D = \ll (0,1,1,2),\ (-2,1,0,1),\ (3,1,5,2),\ (1,0,3,-1) \gg, \qquad (\mathbb{R}^4,+,\cdot)_{\mathbb{R}};$
$E = \ll (-1,2,-1,0),\ (0,3,1,2),\ (1,1,-2,2),\ (2,1,0,-1) \gg, \qquad (\mathbb{R}^4,+,\cdot)_{\mathbb{R}}.$

....

5.6 Coordenadas de vetores relativas a uma base

99. Usando o método de eliminação de Gauss-Jordan, identifique as coordenadas do vetor u relativas à base B.

(a) $u = (1,0,0), \qquad B = [(1,1,1),(-1,1,0),(1,0,-1)]\,, \qquad (\mathbb{R}^3,+,\cdot)_{\mathbb{R}};$
(b) $u = (1,0,z), \qquad B = [(-1,1,0),(1,1,1),(1,0,-1)]\,, \qquad (\mathbb{R}^3,+,\cdot)_{\mathbb{R}};$
(c) $u = (x,y,z), \qquad B = [(0,1,-1),(1,1,0),(1,0,2)]\,, \qquad (\mathbb{R}^3,+,\cdot)_{\mathbb{R}};$
(d) $u = (2x,\ y-x,\ 3x-y+z), \qquad B = [(0,1,-1),(1,0,2),(1,1,0)]\,, \qquad (\mathbb{R}^3,+,\cdot)_{\mathbb{R}};$
(e) $u = (2x,\ -5z,\ 2y,\ 11w), \qquad B = [(1,1,-1,1),(1,1,0,0),(1,1,2,0),(0,1,2,3)]\,, \qquad (\mathbb{R}^4,+,\cdot)_{\mathbb{R}};$

.... Sugestão: resolva este exercício e o seguinte, em simultâneo.

100. Retome o exercício 99. Em cada caso, explicite a matriz $[B]^{-1}$.

....

101. Seja $X \in \mathbb{R}^4$, arbitrário e canónico. Em cada um dos casos, explicite a base B, sabendo que

(a) $[X]_B = (x,\ y+w,\ z-y,\ x-y-z)$.
(b) $[X]_B = (x-y,\ y,\ x-y+z,\ x-w)$.
(c) $[X]_B = (a+b-c,\ a-b,\ c+d,\ -a+d)$.
(d) $[X]_B = (x,\ y+x,\ -z,\ z+w)$.
(e) $[X]_B = (x-z+w,\ y+x,\ y-z,\ y+z+w)$.

....

5.7 Interseção de subespaços (subespaço-interseção)

102. Do espaço vetorial $(\mathbb{R}^4,+,\cdot)_{\mathbb{R}}$, considere os subespaços vetoriais:

$$H = \ll (1,-2,1,3),\ (2,-3,2,6),\ (3,-6,5,9) \gg; \quad F = \ll (1,1,0,0) \gg; \quad G = \ll (0,1,1,0) \gg .$$

Explicite os subespaços $H \cap F$ e $H \cap G$. (note que $\dim(F) = 1 = \dim(G)$).

....

103. Do espaço vetorial $(\mathbb{R}^4,+,\cdot)_{\mathbb{R}}$, considere os subespaços vetoriais:
$H = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y+w=0\}; \qquad M = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : -y+z-w=2x\};$
$N = \{(x+y-z\ ,\ y+w\ ,\ 2x-y+w\ ,\ y+z) :\ x,y,z,w \in \mathbb{R}\}.$

(a) Caracterize $H \cap M$ em compreensão.
(b) Sem usar N em compreensão, explicite cada um dos subespaços $H \cap N$ e $M \cap N$.

....

104. Do espaço $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)_{\mathbb{R}}$, considere os subespaços F e G tais que

$$F = \ll (1,1,1,0),\ (-1,0,1,1),\ (-5,-2,1,3) \gg; \quad G = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 :\ x+y+z=0\ \wedge\ 2x+w=0\}.$$

Caracterize $F \cap G$ por intermédio de um vetor genérico; e indique $\dim(F \cap G)$.

. . . .

105. Do espaço vetorial real canónico $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços:

$$\begin{array}{ll} F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\right\}, & G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2z\right\}, \\ H = \{(x+y+z, 2x+y, x-z) : x,y,z \in \mathbb{R}\} & M = \ll (1,0,0) \gg \end{array}$$

(a) Caracterize $F \cap H$ por intermédio de um vetor genérico; e apresente uma base para este subespaço.

(b) Construa uma base para $F \cap G$ e indique $\dim(F \cap G)$.

(c) Caracterize $F \cap M$ em compreensão; e indique $\dim(F \cap M)$.

. . . .

5.8 Soma de subespaços (subespaço-soma)

106. Do espaço vetorial $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)_{\mathbb{R}}$, considere os subespaços vetoriais:

$$F = \ll (1,1,0,0) \gg; \qquad G = \ll (0,1,1,0) \gg; \qquad H = \ll (1,-2,1,3),\ (2,-3,2,6),\ (3,-6,5,9) \gg.$$

(a) Caracterize o subespaço $F + G$ por intermédio de um vetor genérico.

(b) Caracterize o subespaço $H \cap (F + G)$ por intermédio de um vetor genérico.

. . . .

107. Do espaço $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)_{\mathbb{R}}$, considere os subespaços F e G tais que

$$F = \ll (1,1,1,0),\ (-1,0,1,1),\ (-5,-2,1,3) \gg; \qquad G = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 :\ x+y+z=0\ \wedge\ 2x+w=0\}.$$

Caracterize o subespaço $F + G$ em compreensão; e indique $\dim(F + G)$.

. . . .

108. Do espaço vetorial real canónico $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços:

$$\begin{array}{ll} F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\right\}, & G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2z\right\}, \\ H = \{(x+y+z, 2x+y, x-z) : x,y,z \in \mathbb{R}\} & M = \ll (1,0,0) \gg \end{array}$$

(a) Identifique uma base para $F + H$.

(b) Caracterize $G + M$ em compreensão; e apresente uma base para o referido subespaço.

. . . .

109. Sejam F, G e H subespaços vetoriais de um espaço vetorial de dimensão finita tais que

$$F \cap G = F \cap H, \qquad G \cap H = \{0\}.$$

(a) Mostre que $\dim(G) + \dim(F + H) = \dim(H) + \dim(F + G)$.

(b) Apresente $\dim(G)$ e $\dim(H)$ em função das dimensões dos subespaços $F + G$, $F + H$ e $G + H$.

. . . .

5.9 Subespaços ortogonais, em $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)_{\mathbb{R}}$

110. Explicite uma base ortogonal para cada um dos subespaços:

   (a) $A = \ll (1,1,1),\ (1,0,1) \gg$;
   (b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x + y - z = 0\}$;
   (c) $C = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 :\ x - y + z - w = 0\ \wedge\ 2y - z = 0\ \wedge\ x + y - w = 0\}$;
   (d) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x + y = 0\ \}$;
   (e) $E = \ll (1,0,1,1),\ (1,0,1,0),\ (1,2,2,0) \gg$;
   (f) $F = \ll (1,0,1,1),\ (1,0,1,0),\ (1,0,-1,0),\ (0,1,0,0) \gg$.

. . . .

111. Explicite o subespaço complemento ortogonal de cada subespaço:

   (a) $A = \ll (1,1,1),\ (1,0,1) \gg$;
   (b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x + y - z = 0\}$;
   (c) $C = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 :\ x - y + z - w = 0\ \wedge\ 2y - z = 0\ \wedge\ x + y - w = 0\}$;
   (d) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x + y = 0\ \wedge\ y + z = 0\}$;
   (e) $E = \ll (1,0,1,1),\ (1,0,1,0),\ (1,2,2,0) \gg$;
   (f) $F = \ll (1,0,1,1),\ (1,0,1,0),\ (1,0,-1,0),\ (0,1,0,0) \gg$.

. . . .

112. Identifique uma base para o subespaço complemento ortogonal de cada subespaço:

   (a) $A = \ll (1,1,1),\ (1,0,1) \gg$;
   (b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x + y - z = 0\}$;
   (c) $C = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 :\ x - y + z - w = 0\ \wedge\ 2y - z = 0\ \wedge\ x + y - w = 0\}$;
   (d) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x + y = 0\ \wedge\ y + z = 0\}$;
   (e) $E = \ll (1,0,1,1),\ (1,0,1,0),\ (1,2,2,0) \gg$;
   (f) $F = \ll (1,0,1,1),\ (1,0,1,0),\ (1,0,-1,0),\ (0,1,0,0) \gg$.

. . . .

5.10 Globais sobre subespaços vetoriais

113. Do espaço $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)_{\mathbb{R}}$, considere os subespaços $(F, +, \cdot)_{\mathbb{R}}$, $(G, +, \cdot)_{\mathbb{R}}$ tais que

$$F = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = y + w \ \wedge \ z = y - w\right\}, \qquad G = \ll (1, 2, 3, 0),\ (0, 2, 1, 1),\ (2, 0, 4, -2) \gg .$$

(a) Construa uma base para o subespaço $(F, +, \cdot)_{\mathbb{R}}$.

(b) Em simultâneo, identifique uma base para o subespaço $(G, +, \cdot)_{\mathbb{R}}$ e mostre que G, em compreensão, se descreve por

$$G = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 :\ y = 2x + 2w \ \wedge \ z = 3x + w.\}$$

(c) Identifique a dimensão de cada um dos subespaços: $F \cap G$; e $F + G$.

(d) Determine vetores u e v, sem entradas nulas, de tal modo que $B = \big((1, 2, 3, 0),\ (0, 2, 1, 1),\ u,\ v\big)$ seja uma base do espaço vetorial real canónico $\mathbb{R}^4$.

....

114. Em $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços $F = \ll (2, 0, 2, 1) \gg$, $G = \{(x + y,\ -x + y,\ x + y + z,\ 3y) :\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$, $H = \ll (1, 2, 0, 0),\ (1, 0, 2, 0),\ (3, -2, 8, 0) \gg$.

(a) Caracterize os vetores de $H \cap G$.

(b) Identifique um conjunto de geradores para G.

(c) Identifique uma base para o subespaço $F + H$.

(d) Identifique uma base ortonormada para H.

(e) Descreva, em compreensão, o subespaço $F + G^{\perp}$

....

115. Em $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços F, G, H tais que: $\dim(F) = 2$; $G = \ll (1, 0, 2, 0),\ (1, 0, 0, 2),\ (4, 0, -2, 10) \gg$; $H = \big\{(x - z,\ 3x,\ y + z,\ x - y - 2z) :\ x, y, z \in \mathbb{R}\big\}$.

(a) Caracterize $G \cap H$ em compreensão.

(b) Identifique um conjunto de geradores para H.

(c) Identifique uma base para o subespaço $G + H$.

(d) Justifique, ou refute, a proposição: $\dim(F \cap H) > 0$.

(e) Sabe-se que F e G têm um único vetor em comum. Identifique uma base para F.

....

6 Aplicações lineares

116. Averigúe se cada uma das aplicações é linear:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x + 1, y)$.
(b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \left(x, y^2\right)$.
(c) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (-y, 2y + x)$.
(d) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x + z, y - z)$.
(e) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad (x, y) \mapsto (2y, x, -y, y - x)$.
(f) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x - y, 1, x)$.
(g) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (2x, y - z)$.
(h) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin x$.
(i) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x, 3x - y + z, 0)$.
(j) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad a + bi \mapsto (a, a + b, -b)$.
(l) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (e^x, e^y)$.
(m) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto xy$.
(n) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (|x|, 0)$.
(o) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto (x, 2)$.

....

6.1 Núcleo de uma aplicação linear

117. Considere $\quad f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y, z, w) = (2x - y + z,\ x - z + w)$.

(a) Caracterize o subespaço $\mathrm{Nuc}(f)$ em compreensão.
(b) Explicite uma base para o subespaço $\mathrm{Nuc}(f)$.
(c) Usando o teorema das dimensões, averigúe se f é sobrejetiva.

....

118. Nos espaços vetoriais reais canónicos $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, considere a aplicação linear $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que:

$$g(1, 1, 1) = (1, 0, 0, 0), \qquad g(1, 1, 0) = (0, 1, 1, 0), \qquad g(1, 0, 0) = (k, 1, k, k - 1).$$

Explicite os valores de k para os quais g é um monomorfismo.

....

119. Sejam $\quad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \quad$ aplicações lineares tais que

$$g(x, y, z) = (y - z,\ x + z,\ x - z,\ y + z); \qquad Nuc(f) = \ll (1, 2, 0, 0),\ (1, 2, 3, 0) \gg .$$

Caracterize os vetores do subespaço $\mathrm{Nuc}(f \circ g)$.

....

120. Sejam $\quad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \quad$ aplicações lineares tais que

$$f(x, y, z) = (x + z,\ -y + z,\ x + y + 2z,\ 2y); \qquad g(x, y, z, w) = (x + y + z,\ z + 2w).$$

Sem usar a expressão designatória de $g \circ f$, caracterize os vetores do subespaço $\mathrm{Nuc}(g \circ f)$.

....

121. (mais sobre este assunto)

122. (mais sobre este assunto)

123. (mais sobre este assunto)

6.2 Imagem de uma aplicação linear

124. Considere $\quad f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad$ tal que $\quad f(x, y, z, w) = (2x - y + z,\ x - z + w)$.

(a) Explicite uma base para o subespaço $\mathrm{Im}(f)$.
(b) Justifique, ou refute, a proposição: *a aplicação f é injetiva.*
(c) Explicite a pré-imagem de cada vetor de $\mathbb{R}^2$.

. . . .

125. Considere $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $g\,(x, y, x) = (x + y,\ \ x - y - z,\ \ z,\ \ 2y)\,.$
Seja $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Caracterize o conjunto $g^{\leftarrow}\big((a, b, c, d)\big)$. Será que g é injetiva?

. . . .

126. Nos espaços vetoriais reais canónicos $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, considere a aplicação linear $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que:

$$g(1, 1, 1) = (1, 0, 0, 0), \qquad g(1, 1, 0) = (0, 1, 1, 0), \qquad g(1, 0, 0) = (k, 1, k, k - 1).$$

Explicite os valores de k para os quais g é um epimorfismo.

. . . .

127. No espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, considere $u,\ v,\ w$ e a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tais que:

$$u = (-1, 1, 1)\,, \qquad v = (1, -1, 1)\,, \qquad w = (1, 1, -1)\,;$$

$$f\,(u) = (1, 0, 1, \lambda)\,, \qquad f\,(v) = (0, 1, -1, 0)\,, \qquad f\,(w) = (1, -1, \lambda, 2)\,.$$

(a) Identifique os valores de λ para os quais f é injetiva.
(b) Considere $\lambda = -1$. Sem usar a expressão designatória de f, explicite o vetor $f\,(1, 1, 0)$.

128. (mais sobre este assunto)

129. (mais sobre este assunto)

130. (mais sobre este assunto)

6.3 Aplicação linear definida pelas imagens de uma base

131. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ a aplicação linear definida por $f(1, -1) = (-2, 0, 0, -1)$, $f(1, 0) = (0, 1, 0, -1)$.
Mostre que a expressão designatória de f está definida por $f(x, y) = (2y,\ \ x + y,\ \ 0,\ \ -x)$.

. . . .

132. Construa a expressão designatória da aplicação linear $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$h(1, 2) = (3, -1, 5); \qquad h(0, 1) = (2, 1, -1).$$

. . . .

133. Em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, considere as bases $B_1 = [\ (-1, 1),\ (0, 1)\ ]$, $B_2 = [\ (1, 1, 1),\ (1, 1, 0),\ (1, 0, 0)\ ]$;
e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por

$$g(-1, 1) = (3, 2, 1), \qquad g(0, 1) = (-1, 1, 2).$$

Construa a expressão designatória de g.

. . . .

134. Sejam $B = (v_1, v_2, v_3)$ uma base do espaço vetorial real canónico $\mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tais que:

$$v_1 = (1, 0, 0)\,, \qquad v_2 = (0, 1, 1)\,, \qquad v_3 = (0, 0, 1)\,;$$

$$f\,(v_1) = (1, 0, 2, 0)\,, \qquad f\,(v_2) = (0, 1, -2, 0)\,, \qquad f\,(v_3) = (1, 1, 0, 0)\,.$$

Construa a expressão designatória de f.

. . . .

135. Seja $k \in \mathbb{R}$. Considere a aplicação linear $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que:

$$\psi(1,1,1) = (1,0,0,0), \qquad \psi(1,1,0) = (0,1,1,0), \qquad \psi(1,0,0) = (k,1,k,k-1).$$

Construa a expressão designatória de ψ.

. . . .

136. No espaço vetorial real canónico $\mathbb{R}^3$, considere os vetores u, v, w e a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tais que:

$$u = (-1,1,1)\,, \qquad v = (1,-1,1)\,, \qquad w = (1,1,-1)\,;$$
$$f\,(u) = (1,0,1,\lambda)\,, \qquad f\,(v) = (0,1,-1,0)\,, \qquad f\,(w) = (1,-1,\lambda,2)\,.$$

Construa a expressão designatória de f.

137. (mais sobre este assunto)

. . . .

6.4 Matriz de uma aplicação linear relativa a duas bases

138. Considere a base $B = [(1,0,0)\,,\ (1,1,0)\,,\ (1,1,1)]$ e a aplicação linear

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad f\,(x,y,z) = (x,\ y-z,\ x)\,.$$

(a) Em simultâneo, construa as coordenadas de $f(x,y,z)$ relativas à base B e a matriz $[B]^{-1}$.

(b) Mostre que $M(f;B,B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

. . . .

139. Construa a matriz da aplicação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto (x,y)$, relativa às bases canónicas.

. . . .

140. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e as bases B_1 e B_2 tais que

$$f\,(x,y) = (x-y,\ y,\ x+y)\,; \qquad B_1 = [\ (1,1),\ (1,-1)\ ]; \qquad B_2 = [\ (-1,1,0),\ (0,1,1),\ (1,1,0)\ ].$$

(a) Em simultâneo, identifique as coordenadas de $f(x,y)$ relativas à base B_2 e a matriz $[B_2]^{-1}$.

(b) Construa a matriz $M(f;B_1,B_2)$.

. . . .

141. Nos espaços vetoriais reais canónicos $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$, considere as bases B_c e $B = [(0,1,0), (0,0,1), (1,0,0)]$, respetivamente. Considere $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z,w) = (x+w,\ -2y+z,\ 0)$.

Construa a matriz $M\,(f;B_c,B)$.

. . . .

142. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $f(x,y,z) = (x+z,\ y-z,\ x+y)$; e considere a base $B_1 = \big[(1,1,0),(0,0,1),(0,1,0)\big]$.

Construa a matriz $M(f;B_1,B_1)$.

. . . .

143. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja expressão designatória é $f(a,b,c) = (a+b-c, -b+c, 2a)$.

Construa a matriz $M(f;B_1,B_2)$, sabendo que:

$$B_1 = \big[(1,1,1),(0,2,0),(0,0,1)\big], \qquad B_2 = \big[(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\big].$$

. . . .

144. Considere as aplicações lineares $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tais que

$$f(x,y,z) = (2x+y,\ 2x+z,\ x+2z); \qquad g(x,y,z) = (x,\ x+y+z,\ z); \qquad h(x,y,z) = (x+z,\ 2y).$$

Relativamente às bases $B_1 = [\ (0,1,0),\ (0,0,1),\ (1,0,0)\ ]$, $B_2 = [\ (0,1),\ (1,0)\ ]$, construa as matrizes das aplicações lineares:

(a) $f-2g$; (b) $5f+g$; (c) $g\circ f$; (d) $f\circ g$; (e) f^2; (f) $h\circ f$; (g) $h\circ g^2$; (h) f^2+2g.

. . . .

6.4.1 Matriz de passagem (matriz de mudança de base)

145. Considere, no espaço vetorial real canónico $\mathbb{R}^4$, o vetor $u = (1,1,1,1)$ e as bases

$$B_1 = [(1,1,0,0),\ (0,1,1,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,0,1)],$$

$$B_2 = [(0,1,0,0),\ (0,1,1,0),\ (0,0,0,1),\ (1,1,0,0)].$$

(a) Seja $X = (x,y,z,w)$ um vetor arbitrário de $\mathbb{R}^4$. Identifique as coordenadas de X relativas à base B_1. Em simultâneo, resolva a equação $[B_1]Y = I_4$.

(b) Explicite as coordenadas de u relativas à base B_1.

(c) Construa a matriz de passagem da base B_2 para a base B_1, denotada por $M(id; B_2, B_1)$.

(d) Seja $X = (x,y,z,w)$ um vetor arbitrário de $\mathbb{R}^4$. Identifique as coordenadas de X relativas à base B_2. Em simultâneo, resolva a equação $[B_2]Y = I_4$.

(e) Explicite as coordenadas de u relativas à base B_2.

(f) Construa a matriz de passagem da base B_1 para a B_2, denotada por $M(id; B_1, B_2)$.

(g) Sejam P e Q as matrizes de passagem construídas acima. Verifique que $PQ = QP = I_4$.

(h) Usando a matriz de passagem adequada, calcule as coordenadas de u relativas à base B_1.

. . . .

6.5 Aplicação linear definida por uma matriz relativa a bases fixadas

146. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que $M(f, B_c, B_c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Construa a expressão designatória de f.

. . . .

147. Seja $\mathscr{C}_3$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$; B_1 a base definida por $B_1 = [(0,1),\ (1,0)]$; e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$M(f; \mathscr{C}_3, B_1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mostre que a expressão designatória de f está definida por $f(x,y,z) = (5x + z,\ x + 2y + 3z)$.

. . . .

148. Seja $B_1 = \big[(0,1,0),\ (0,0,1),\ (1,0,0)\big]$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que $M(f; B_c, B_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
Mostre que a expressão designatória de f está definida por $f(x,y,z) = (x + y,\ \ y + z,\ \ x + 2y)$.

. . . .

149. Sejam $B_1 = \big[(1,1,0),(0,0,1),(0,1,0)\big]$ e $B_2 = \big[(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(1,0,0,0)\big]$ bases tais que a aplicação linear $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ está definida pela matriz $M(g; B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Mostre que a expressão designatória de g está definida por $g(x,y,z) = (y - x,\ \ x + 2z,\ \ 3y - 2x,\ \ -x + z)$.

. . . .

150. (mais sobre este assunto)

6.6 Globais sobre aplicações lineares e matrizes

151. Sejam $\mathscr{C}_3, \mathscr{C}_4$ as bases canónicas dos espaços vetoriais $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, respetivamente; e B_1 a base definida por $B_1 = [(0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)]$. Considere

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tais que $f(x,y,z) = (2y,\ x-z,\ z)$; $\qquad M(g;\mathscr{C}_3,\mathscr{C}_4) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

(a) Usando a matriz $M(g;\mathscr{C}_3,\mathscr{C}_4)$, construa a matriz $M(g \circ f;\mathscr{C}_3,\mathscr{C}_4)$.

(b) Usando a matriz $M(f;\mathscr{C}_3,B_1)$, construa a matriz $M(g \circ f;\mathscr{C}_3,\mathscr{C}_4)$.

....

152. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ a aplicação linear tal que $f(x,y,z) = (x+z,\ -y+z,\ x+y+2z,\ 2y)$.

Considere as bases dos espaços vetoriais $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$:

$$B_1 = \big(\ (1,0,2),\ (2,0,3),\ (1,1,0)\ \big), \qquad B_2 = \big(\ (2,0,2,1),\ (2,0,3,1),\ (1,1,0,2),\ (0,1,1,1)\ \big)$$

(a) Construa uma base para o subespaço $\mathrm{Im} f$.

(b) Justifique, ou refute, a proposição: *f é injetiva.*

(c) Explicite as coordenadas de $f(x,y,z)$ na base B_2. Em simultâneo, resolva a equação $[B_2]Y = I_4$.

(d) Construa a matriz de f relativa às bases B_1 e B_2.

(e) Seja $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que $g(x,y,z,w) = (x+y+z,\ z+2w)$.
Sem usar a expressão designatória de $g \circ f$, caracterize os vetores do subespaço $\mathrm{Nuc}(g \circ f)$.

....

153. Nos espaços $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^2$, considere $v_1 = (1,2,3,4)$, $v_2 = (0,2,3,4)$, $v_3 = (0,0,3,4)$, $v_4 = (0,0,0,4)$; as bases $B_1 = (\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\ )$, $B_2 = (\ (1,1),\ (2,3)\ )$; e $f,g,h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ aplicações lineares tais que:

$$f(v_1) = (1,3), \qquad f(v_2) = (0,4), \qquad f(v_3) = (2,-1), \qquad f(v_4) = (0,5);$$

$$g(x,y,z,w) = (x+y+z,\ 2x+2y+2z); \qquad M(h;B_1,B_2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule $g^{\leftarrow}(1,2)$.

(b) Construa uma base para o subespaço $\mathrm{Nuc}(g)$.

(c) Usando a resposta à alínea precedente, justifique, ou refute, a proposição: *g é sobrejetiva.*

(d) Construa a expressão designatória da aplicação linear f.

(e) Construa a expressão designatória da aplicação linear h.

....

154. Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $g(x,y,z) = (y-z,\ x+z,\ x-z,\ y+z)$.

Considere as bases $B_1 = [\,(1,2,0),\ (1,0,2),\ (0,1,2)\,]$, $B_2 = [\,(1,1,2,0),\ (1,1,0,2),\ (1,0,1,2),\ (0,1,1,2)\,]$.

(a) Construa uma base para o subespaço $\mathrm{Im}(g)$.

(b) Justifique, ou refute, a proposição: *g não é injetiva.*

(c) Explicite as coordenadas de $g(x,y,z)$ relativas à base B_2. Em simultâneo, resolva a equação $[B_2]Y = I_4$.

(d) Construa a matriz de g relativa às bases B_1 e B_2.

(e) Seja $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear tal que $\mathrm{Nuc}(f) = \ll (1,2,0,0),\ (1,2,3,0) \gg$.
Caracterize os vetores do subespaço $\mathrm{Nuc}(f \circ g)$.

....

155. Nos espaços $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^5$, considere as bases

$$E_0 = [(1,2,0),\ (1,3,0),\ (1,1,4)], \quad E_1 = [(2,0,0,0,0),\ (2,2,0,0,0),\ (2,2,-2,0,0),\ (2,2,2,2,0),\ (2,2,2,2,2)].$$

Seja $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ tal que $h(x,y,z) = (x+y-z,\ 2y-z,\ 3x+4z, -y+3z,\ x+z)$.

(a) Explicite uma base para o subespaço $\mathrm{Im}(h)$.

(b) Justifique, ou refute, a proposição: *h é injetiva.*

(c) Explicite as coordenadas de $h(x,y,z)$ na base E_1. Em simultâneo, resolva a equação $[E_1]Y = I_5$.

(d) Construa a matriz $M(h; E_0, E_1)$.

(e) Caracterize todos os vetores de $\mathbb{R}^5$ que não estão no subespaço $\mathrm{Im}(h)$.

....

156. Nos espaços $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^4$, considere as bases

$$B_0 = [(1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1)], \quad B_1 = [(1,2),\ (2,-3)], \quad B_2 = [(1,1,1,1),\ (1,1,1,0),\ (1,1,0,0),\ (1,0,0,0)].$$

Sejam $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tais que $M(g; B_0, B_1) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $M(f; B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Explicite a inversa da matriz $[B_2]$.

(b) Explicite a matriz de mudança da base B_c para a base B_2.

(c) Seja $X \in \mathbb{R}^4$, arbitrário. Usando a resposta à alínea (b), explicite as coordenadas de X na base B_2.

(d) Explicite a inversa da matriz $[B_0]$.

(e) Construa a expressão designatória da aplicação linear $f \circ g$.

....

157. Nos espaços $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$: $B_1 = \left(v_1, v_2, v_3, v_4\right) = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}\right)$, $B_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ são bases. Sejam $f, g, h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ aplicações lineares tais que:

$$f(v_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ f(v_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ f(v_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ f(v_4) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad M(g; B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}; \qquad h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x+z \\ -x+y \\ x-y+z \end{bmatrix}.$$

(a) Explicite uma base para o subespaço $\mathrm{Im}(f)$.

(b) Justifique, ou refute, a proposição: *f é injetiva.*

(c) Seja X um vetor arbitrário de $\mathbb{R}^4$. Resolva, em simultâneo, as equações: $[B_2][h(X)]_{B_2} = [h(X)]_{B_c}$, $[B_2]Y = I_3$.

(d) Construa a matriz $M(h; B_1, B_2)$.

(e) Construa a expressão designatória de g.

....

158. Sejam $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ aplicações lineares definidas pelas matrizes

$M(f; B_2, B_1) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, $\qquad M(g; B_1, B_2) = [M(f; B_2, B_1)]^T$,

onde B_1 e B_2 são as bases $B_1 = [(2,3,4),\ (0,3,4),\ (0,0,4)]$, $B_2 = [(2,3,4,0),\ (0,3,4,0),\ (0,0,4,0),\ (2,3,4,5)]$.

(a) Justifique, ou refute, a proposição: *a aplicação linear f é injetiva.*

(b) Construa a matriz $M\big(f \circ g; B_1, B_1\big)$

(c) Seja $X \in \mathbb{R}^4$, arbitrário. Resolva, em simultâneo, as equações: $[B_2][X]_{B_2} = [X]_{B_c}$ e $[B_2]Y = I_4$.

(d) Explicite a matriz $M(id; B_c, B_2)$.

(e) Construa a expressão designatória de f.

....

159. Sejam $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ e $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ aplicações lineares definidas pelas matrizes
$M(f;B_2,B_1)=\left[\begin{smallmatrix}2&3&-1&0\\4&7&0&3\\0&5&4&6\end{smallmatrix}\right]$, $M(g;B_1,B_2)=[M(f;B_2,B_1)]^T$,
onde B_1 e B_2 são as bases $B_1=[(2,3,4),\ (0,3,4),\ (0,0,4)]$, $B_2=[(2,3,4,0),\ (0,3,4,0),\ (0,0,4,0),\ (2,3,4,5)]$.

(a) Justifique, ou refute, a proposição: *a aplicação linear g é sobrejetiva.*
(b) Construa a matriz $M\big(g\circ f;B_2,B_2\big)$
(c) Seja $X\in\mathbb{R}^3$, arbitrário. Resolva, em simultâneo, as equações: $[B_1][X]_{B_1}=[X]_{B_c}$ e $[B_1]Y=I_3$.
(d) Explicite a matriz $M(id;B_c,B_1)$.
(e) Construa a expressão designatória de f.

....

160. Seja $m:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ tal que $m(x,y,z)=(z,\ x+z,\ y,\ x-y)$.
Considere as bases $B_1=\big[(1,0,1),\ (0,1,1),\ (1,1,0)\big]$, $B_2=\big[(1,2,0,0),\ (0,1,2,0),\ (0,0,1,2),\ (1,2,2,5)\big]$.

(a) Construa uma base para o subespaço $\operatorname{Im}(m)$.
(b) Justifique, ou refute, a proposição: m não é injetiva.
(c) Resolva, em simultâneo, as duas equações: $[B_2][m(X)]_{B_2}=[m(X)]_{B_c}$ e $[B_2]Y=I_4$.
(d) Construa a matriz $M(m;B_1,B_2)$.
(e) Seja (a,b,c,d) um vetor de $\mathbb{R}^4$. Explicite o conjunto $m^{\leftarrow}(a,b,c,d)$ e as respetivas condições de existência.

....

161. Seja $p:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ a aplicação linear tal que $p(x,y,z)=(2x-y,\ y+z,\ x-2z,\ y+z)$.
Seja $G=\big\{(2x,\ -y,\ z)\in\mathbb{R}^3:\ x+y-z=2\big\}$. Considere a aplicação linear f tal que

$f(2,0,0,0)=(1,0,2)$; $f(2,1,0,0)=(1,2,0)$; $f(0,1,1,-1)=(0,1,2)$; $f(0,0,-2,1)=(1,1,1)$.

(a) Justifique, ou refute, a proposição: *f é sobrejetiva.*
(b) Construa a expressão designatória da aplicação linear $p\circ f$.
(c) Sem usar a expressão designatória de f, explicite $\dim(Nuc(f))$.
(d) Justifique, ou refute, a proposição: G é uma subespaço do espaço vetorial $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)_{\mathbb{R}}$.
(e) Explicite o conjunto $p(G)$.

....

162. Considere: $w_1=(1,2,3,4)$, $w_2=(0,2,3,4)$, $w_3=(0,0,3,4)$, $w_4=(0,0,0,4)$, $w_5=(-1,-2,0,4)$;
$u_1=(1,2,3,4,5)$, $u_2=(0,2,3,4,5)$, $u_3=(0,0,3,4,5)$, $u_4=(0,0,0,4,5)$, $u_5=(0,0,0,0,\frac{1}{4})$;
a as aplicações lineares $f:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^4$, $g:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^5$.
Sejam: $K_1=(w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4)$, $K_2=(w_1,\ w_4,\ w_3,\ w_2)$, $K_3=(w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4,\ w_5)$;
$H_1=(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5)$, $H_2=(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4)$.

(a) Averigúe se f é injetiva.
(b) Explicite a matriz de passagem da base K_2 para a base K_1.
(c) Sendo $M(f;H_1,K_1)=[K_3]$, construa a expressão designatória de f.
(d) Considere $M(f;H_1,K_1)=[K_3]$ e $M(g;K_2,H_1)=[H_2]$.
Explicite a matriz $M(f\circ g;K_2,K_1)$.
(e) Sendo $M(g;K_2,H_1)=[K_3]^T$, explicite a matriz $\Big[g(w_2),\ \ g(w_1),\ \ g(w_4),\ \ g(w_3)\Big]$.

....

163. (mais sobre este assunto)