Teoria de Conjuntos

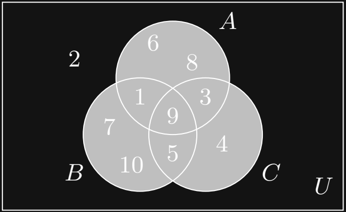
Tópicos de Matemática Discreta

EInf & MACD

— 9/10/11 de novembro de 2020 —

Diagramas de Venn

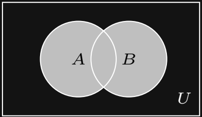
Consideremos os conjuntos $A = \{1,3,6,8,9\}, B = \{1,5,7,9,10\}$ e $C = \{3,4,5,9\}$, no universo $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Usando um diagrama de Venn:



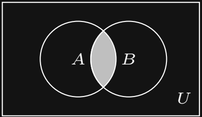
$$A \cap B = \{1,9\}$$
$$A \cap C = \{3,9\}$$
$$B \cap C = \{5,9\}$$
$$A \cap B \cap C = \{9\}$$

Operações com diagramas de Venn

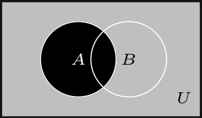
$A \cup B$



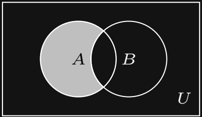
$A \cap B$



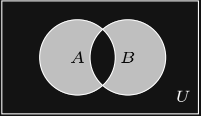
$\overline{A}$



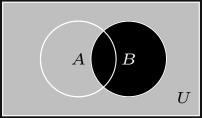
$A \backslash B$



$A \Diamond B$



$\overline{B}$



. $A\backslash B = A \cap \overline{B}$

Prova: Fazemos a prova usando a técnica de dupla inclusão:

$\subseteq$) Seja x um elemento arbitrário de U tal que $x \in A\backslash B$. Temos

$$\begin{aligned}
& x \in A\backslash B \\
\xrightarrow{\textit{Definição de } A\backslash B}\; & x \in A \wedge x \notin B \\
\xrightarrow{\textit{Definição de } \overline{B}}\; & x \in A \wedge x \in \overline{B} \\
\xrightarrow{\textit{Definição de } \cap}\; & x \in A \cap \overline{B}.
\end{aligned}$$

$\supseteq$) Seja x um elemento arbitrário de U tal que $x \in A \cap \overline{B}$. Temos

$$\begin{aligned}
\to\; & x \in A \cap \overline{B} \\
\xrightarrow{\textit{Definição de } \cap}\; & x \in A \wedge x \in \overline{B} \\
\xrightarrow{\textit{Definição de } \overline{B}}\; & x \in A \wedge x \notin B \\
\xrightarrow{\textit{Definição de } A\backslash B}\; & x \in A\backslash B.
\end{aligned}$$

. $A\diamondsuit B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$

Prova: Fazemos a prova usando as propriedades das operações entre conjuntos:

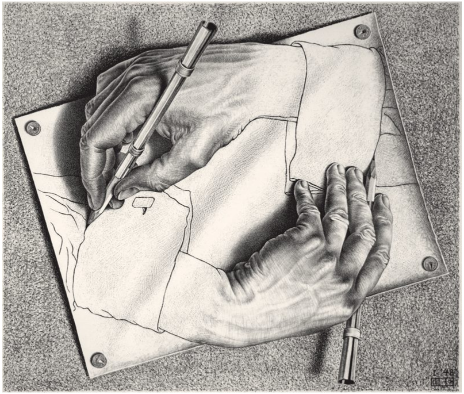
$$
\begin{aligned}
& A\diamondsuit B \\
& \qquad \textit{Definição de } \diamondsuit \\
=& (A\backslash B) \cup (B\backslash A) \\
& \qquad \textit{Propriedade anterior } (X\backslash Y = X \cap \overline{Y}) \\
=& (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \\
& \qquad \textit{Prop. distrib. de } \cup \textit{ em relação a } \cap \\
=& ((A \cap \overline{B}) \cup B) \cap ((A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}) \\
& \qquad \textit{Prop. distrib. de } \cup \textit{ em relação a } \cap \\
=& ((A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B)) \cap ((A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \\
& \qquad X \cup \overline{X} = U \\
=& ((A \cup B) \cap U) \cap (U \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \\
& \qquad U \cap X = X \cap U = X \\
=& (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \\
& \qquad \textit{Leis de Morgan} \\
=& (A \cup B) \cap (\overline{B \cap A}) \\
& \qquad \textit{Comutatividade de } \cap \\
=& (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) \\
& \qquad \textit{Propriedade anterior } (X\backslash Y = X \cap \overline{Y}) \\
=& (A \cup B)\backslash(A \cap B)
\end{aligned}
$$

. $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

Prova: Fazemos a prova com recurso às propriedades das proposições já estudadas:

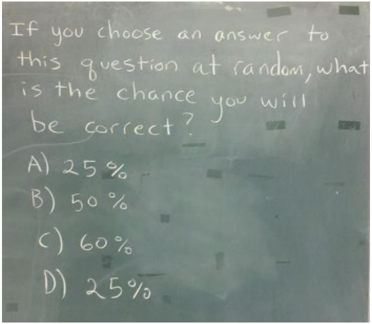
$$
\begin{aligned}
& x\in A\setminus(B\cap C) && \\
\leftrightarrow\; & x\in A\wedge x\notin(B\cap C) && \textit{Definição de } \setminus \\
\leftrightarrow\; & x\in A\wedge\neg(x\in B\cap C) && \textit{Definição de } \notin \\
\leftrightarrow\; & x\in A\wedge\neg(x\in B\wedge x\in C) && \textit{Definição de } \cap \\
\leftrightarrow\; & x\in A\wedge(\neg(x\in B)\vee\neg(x\in C)) && \textit{Leis de Morgan} \\
\leftrightarrow\; & x\in A\wedge(x\notin B\vee x\notin C) && \textit{Definição de } \notin \\
\leftrightarrow\; & (x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in A\wedge x\notin C) && \textit{Distributividade de } \wedge \textit{ relativamente a } \vee \\
\leftrightarrow\; & (x\in A\setminus B)\vee(x\in A\setminus C) && \textit{Definição de } \setminus \\
\leftrightarrow\; & x\in(A\setminus B)\cup(A\setminus C) && \textit{Definição de } \cup
\end{aligned}
$$

O perigo da autorreferência

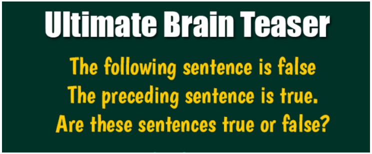


M. C. Escher, "Drawing Hands,"1948, lithograph, 11 1/8 x 13 1/8 in., Private collection, Texas, © 2015 The M. C. Escher Company, The Netherlands.

O perigo da autorreferência



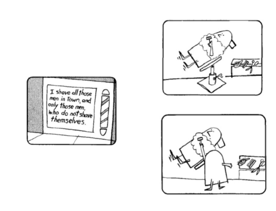
Para mais, *https://www.maa.org/press/periodicals/math-horizons/self-referential-aptitude-test-by-jim-propp*



O perigo da autorreferência

Paradoxo do barbeiro

O barbeiro é um homem da cidade que faz a barba de todos aqueles, e somente dos homens da cidade que não barbeiam a si mesmos. Quem faz a barba do barbeiro?



Paradoxo de Russel

Seja S o conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si próprios. Será que $S \in S$?

$$S = \{A | A \notin A\}$$

$$S \in S \leftrightarrow S \notin S.$$

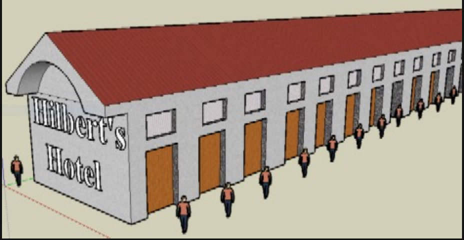
Consideremos os conjuntos $P = \{n \in \mathbb{N}, n \text{ é par }\}$ e $I = \{n \in \mathbb{N}, n \text{ é ímpar }\}$. Considerando a função $f : P \to I$, tal que $f(n) = n - 1$, temos uma bijeção, donde $\#P = \#I$.

Apesar de $P \subsetneqq \mathbb{N}$ e $I \subsetneqq \mathbb{N}$, temos que as funções $f : \mathbb{N} \to P$, tal que $f(n) = 2n$ e $g : \mathbb{N} \to I$, tal que $g(n) = 2n - 1$ são bijeções donde $\#P = \#I = \#\mathbb{N}$.

Do mesmo modo, existem bijeções entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ e entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$, o que nos permite escrever $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{Q}$. os conjuntos finitos ou com o mesmo cardinal de $\#\mathbb{N}$ dizem-se **contáveis ou enumeráveis**.

Prova-se que $\#\mathbb{N} < \#\mathbb{R} = \#\mathbb{C}$ e a aplicação $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ é uma bijeção, mostrando que $\#[-1, 1] = \#\mathbb{R}$.

Georg Cantor criou uma "escala de infinitos", os números transfinitos, estabelecendo uma ordem nos infinitos. Com estes números, $\aleph_0 = \#\mathbb{N}, \aleph_1 = 2^{\aleph_0}, \ldots$, onde $2^{\aleph_0}$ representa o número de subconjuntos de $\mathbb{N}$.
Está por provar se $\#\mathbb{R} = \aleph_1$ (hipótese so contínuo) ou se teremos $\aleph_0 < \#\mathbb{R} < \aleph_1$.



Considere um hotel com infinitos quartos, todos ocupados:

1. Suponha que um novo hóspede chega e gostaria de se instalar no hotel. É possível?

2. Suponha agora que chega um autocarro com um número infinito numerável de passageiros, todos à procura de um quarto. Será possível ?

3. E se chegar um número infinito de autocarros todos eles com um número infinito numerável de passageiros, também todos com vontade de se hospedar no hotel. Ainda será possível?

Cardinal da reunião

Sejam A e B conjuntos finitos. Então $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.

Sejam A e B conjuntos finitos disjuntos. Então $\#(A \cup B) = \#A + \#B$.

Sejam A, B e C conjuntos finitos. Então
$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$.

Um estudo realizado a 100 estudantes sobre os seus gostos de sabores de gelado concluiu que 50 estudantes gostam de baunilha, 43 gostam de chocolate, 28 de morango, 13 de baunilha e chocolate, 11 chocolate e morango, 12 morango e baunilha e 5 gostavam dos três. Quantos estudantes têm as seguintes preferências:

- chocolate mas não baunilha
- chocolate e morango mas não baunilha
- baunilha ou chocolate mas não morango

Conjuntos ordenados

Um conjunto ordenado de n elementos ou um n-uplo é um conjunto em que associamos a cada elemento uma posição. Usamos a notação $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Dois n-uplos são iguais se e só se os elementos correspondentes são iguais, isto é,

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \text{ se e só se } a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \cdots \wedge a_n = b_n.$$

Produto cartesiano

O produto cartesiano de dois conjuntos A e B, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$. Ou seja,

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

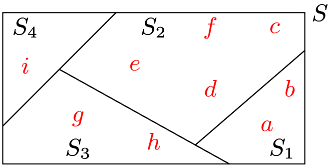
Se $A = \{a, b\}$ e $B = \{x, y, z\}$, então

- $A \times B = \ldots$
- $B \times A = \ldots$
- $A^2 = A \times A = \ldots$

Considere-se o conjunto $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ e os subconjuntos $S_1 = \{a, b\}, S_2 = \{c, d, e, f\}, S_3 = \{g, h\}$ e $S_4 = \{i\}$. Temos que os subconjuntos S_1, S_2, S_3 e S_4:

- são não vazios;
- são disjuntos dois a dois;
- reunidos igualam o conjunto S.

Nesta situação dizemos que S_1, S_2, S_3 e S_4 formam uma partição de S.



Partição

Dado um conjunto S e uma coleção de subconjuntos $P = \{S_i : i \in I\}$, dizemos que P forma uma **partição** de S se:

- cada um dos $S_i, i \in I$ é não vazio;
- os subconjuntos são disjuntos dois a dois, ou seja, $S_i \cap S_j = \emptyset$, se $i \neq j$;
- a reunião de todos os subconjuntos é igual a S, isto é, $S = \cup_{i \in I} S_i$.

Se agruparmos os inteiros de acordo com o resto da sua divisão por 5, obtemos os seguintes conjuntos:

- $\mathbb{Z}_0 = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$
- $\mathbb{Z}_1 = \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$
- $\mathbb{Z}_2 = \{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$
- $\mathbb{Z}_3 = \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\}$
- $\mathbb{Z}_4 = \{\dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots\}$

$P = \{\mathbb{Z}_0, \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4\}$ forma uma partição de $\mathbb{Z}$.

Relação binária

Dados os conjuntos S e T, uma relação binária de S em T é todo o subconjunto de $S \times T$.

Exemplos

Seja $S = \{1, 2\}$ e $T = \{2, 3\}$. Temos

$$S \times T = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}.$$

O subconjunto $\{(2, 2)\}$ é uma relação que pode ser definida por $\rho =$ "primeira componente igual à segunda"e escrevemos $(2, 2) \in \rho$ ou $2\rho 2$. Também podemos escrever

$$\rho = \{(x, y) \in S \times T : x = y\}.$$

O subconjunto $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ é uma relação que pode ser definida por $\tau =$ "primeira componente diferente da segunda". Escrevemos

$$\tau = \{(x, y) \in S \times T : x \neq y\}.$$

Notação: Para escrever que $(x, y) \in \rho$ escrevemos $x\rho y$.

Exemplos (...)

Seja $S = \{1, 2\}$ e $T = \{2, 3, 4\}$ considere-se a relação definida em $S \times T$ pela condição

$$x \rho y \text{ se e só se } x + y \text{ é ímpar.}$$

Descreva, por extenso, a relação ρ.

Relação n-ária

Dados os conjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_n$ uma relação n-ária em $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ é todo o subconjunto de $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$.

Propriedades das relações binárias

Seja ρ uma relação binária definida no conjunto S, $\rho \in \mathcal{P}(S \times S)$, ou ainda $\rho \subseteq S \times S$. A relação ρ diz-se

- reflexiva, sempre que $\forall x \in S,\ (x,x) \in \rho$
- simétrica, sempre que $\forall x, y \in S,\ (x,y) \in \rho \rightarrow (y,x) \in \rho$
- transitiva, sempre que $\forall x, y, z \in S,\ ((x,y) \in \rho \wedge (y,z) \in \rho) \rightarrow (x,z) \in \rho$
- anti-simétrica, sempre que $\forall x, y \in S,\ ((x,y) \in \rho \wedge (y,x) \in \rho) \rightarrow x = y$
- tricotómica, sempre que $\forall x, y \in S,\ (x,y) \in \rho \ \dot{\vee}\ (y,x) \in \rho \ \dot{\vee}\ x = y$

Exemplos

Verifique cada uma das propriedades anteriores nas seguintes relações:

- $S = \mathbb{N}$ e $(x,y) \in \rho$ se e só se "$x + y$ é par"
- $S = \mathbb{N}$ e $x \rho y$ se e só se "x divide y"
- $S = \{$ x: x é estudante de TMD$\}$ e $x \rho y$ se e só se"x e y sentam-se na mesma fila"
- $S = \{1,2,3\}$ e $\rho = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$
- $S = \{$ x : x é habitante de Vila Real $\}$ e $x \rho y$ se e só se "x for mais velho do que y"

Relação de ordem parcial

Uma relação binária definida num conjunto S que seja reflexiva, anti-simétrica e transitiva diz-se uma **relação de ordem parcial em S**.

Exemplos

- A relação "$x \leq y$" definida em $\mathbb{N}$
- A relação "$A \subseteq B$" definida em $\mathcal{P}(S)$
- A relação "x divide y" em $\mathbb{N}$ (e em $\mathbb{Z}$?)

Conjunto parcialmente ordenado

Sendo ρ uma relação de ordem parcial definida num conjunto S, o par (S, ρ) diz-se um conjunto parcialmente ordenado. Normalmente usamos a notação $(S, \preceq)$ para designar um conjunto parcialmente ordenado.

Terminologia

Seja $(S, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado.

- Se $x \preceq y$ e $x \neq y$ escrevemos $x \prec y$. Neste caso, x diz-se um **antecessor** de y e y diz-se um **sucessor** de x
- Se $x \prec y$ e não existe z tal que $x \prec z$ e $z \prec y$, então x diz-se um **antecessor imediato** de y

Exemplo

No conjunto $\{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$ considere-se a relação "x divide y"

- Quais são os elementos dessa relação?
- Quais são os antecessores de 6? E os antecessores imediatos?