Séries de Funções

Luísa Morgado

1º Ciclo em Engenharia Informática

Série de taylor

Recordemos a fórmula de Taylor de ordem n de uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no ponto x_0, com resto de Lagrange (exige-se que f admite derivadas contínuas até à ordem $n+1$ no intervalo aberto I de extremos x_0 e x):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\,(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n + R_n(x),$$

onde $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}$, sendo c é um número entre x_0 e x.

A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ é dita a série de Taylor de f em torno do ponto x_0. No caso particular de $x_0 = 0$, designamos esta série por série de Mac-Laurin.

Uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se analítica em $x_0 \in I$ se existe uma série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ tal que $f(x)$ seja a soma dessa série para todo o x numa vizinhança de x_0, ou seja, para todo o x tal que $|x - x_0| < \epsilon$, com $\epsilon > 0$.
Se f é analítica em $x_0 \in I$ então f é soma da sua série de Taylor numa vizinhança de x_0, i.e., $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, para todo o $x \in]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$.

Seja f uma função indefinidamente diferenciável numa vizinhança de x_0. Então, f é analítica em x_0 se e só se o resto de Lagrange de f de ordem n é convergente para zero, ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \iff \lim_n R_n(x) = 0.$$

Exemplo

Seja $f(x) = e^x$.
Temos $f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *logo* $f^{(n)}(0) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Como para cada $x \in \mathbb{R}$ *fixo, se tem*

$$\lim_n R_n(x) = \lim_n \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} = 0,$$

conclui-se que

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo

Seja $f(x) = \sin x$*;*
Temos

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -\sin x & f''(0) &= 0 \\
f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \\
f^{(iv)}(x) &= \sin x & f^{(iv)}(0) &= 0 \\
&\dots & &\dots \\
f^{(2n)}(x) &= (-1)^n \sin x & f^{(2n)}(0) &= 0 \\
f^{(2n-1)}(x) &= (-1)^{n+1} \cos x & f^{(2n-1)}(0) &= (-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

Como para cada $x \in \mathbb{R}$ *fixo, tem-se* $\lim_n R_n(x) = 0$*, conclui-se que*

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo

- $f(x) = \cos x$;

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- $f(x) = \frac{1}{1-x}$;

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

Séries de potências

Uma série de potências centrada num ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

sendo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão numérica.

Para cada $\bar{x} \in \mathbb{R}$ podemos considerar a série numérica $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(\bar{x} - x_0)^n$, que se obtém substituindo no termo geral a variável x pelo número $\bar{x}$. Coloca-se então a questão de determinar para que valores de $\bar{x}$ a série converge.

No termo correspondente a $n = 0$ convencionamos que $(x - x_0)^0 = 1$, mesmo quando $x = x_0$. Assim, uma série de potências de $x - x_0$ é sempre convergente para $x = x_0$ (de facto, quando $x = x_0$, obtemos a série numérica $a_0 + 0 + 0 + \ldots = a_0$). Interessa agora determinar os pontos diferentes de x_0 para os quais a série também converge.

Dada a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$, apenas uma das seguintes situações se verifica:

- a série converge apenas para $x = x_0$;
- a série converge (absolutamente) para todo o $x \in \mathbb{R}$;
- existe um número real positivo $R > 0$ tal que a série converge (absolutamente) para todo o x pertencente ao intervalo $]x_0 - R, x_0 + R[$ e diverge para todo o x em $]-\infty, x_0 - R[\ \cup\ ]x_0 + R, +\infty[$. Neste caso, a série pode ou não convergir nos pontos fronteira do intervalo, $x = x_0 - R$ e $x = x_0 + R$, sendo que nestes pontos a série tem que ser estudada separadamente.

Nota: Convenciona-se que $R = 0$ no primeiro caso e $R = +\infty$ no segundo caso.

O intervalo de convergência de uma série de potências é o intervalo formado por todos os valores de x para os quais a série converge. Ao número R da proposição anterior designamos por raio de convergência da série.

Nota: Para estudar a convergência de uma série de potências, podemos aplicar o critério da raiz ou o critério de D'Alembert à série dos módulos.

Exemplo

Determine o raio e o intervalo de convergência da seguinte série de potências:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n; \quad (a_n = 1 \;\; e \;\; x_0 = 0)$$

Esta série tem raio $R = 1$ e o intervalo de convergência é $]-1, 1[$. De facto, para cada $x \in \mathbb{R}$, tem-se uma série geométrica de razão x, que converge se $|x| < 1$.

Exemplo

Determine o raio e o intervalo de convergência da seguinte série de potências:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n2^n}; \quad (a_n = \frac{1}{n2^n} \ e \ x_0 = 0);$$

Se $x = 0$, *a série é obviamente convergente.*
Se $x \neq 0$, *temos*

$$\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n |x| \frac{n}{2(n+1)} = \frac{|x|}{2}.$$

Pelo critério de D'Alembert, a série é convergente se $\frac{|x|}{2} < 1$, *ou seja,* $x \in]-2, 2[$. *Assim,* $R = 2$.
Nos pontos fronteira $x = -2$ *e* $x = 2$ *é necessário analisar separadamente. Para* $x = 2$ *temos a série numérica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n},$$

que é a série harmónica, logo divergente. Por outro lado, se $x = -2$, *verifica-se, pelo critério de Leibniz que a série é convergente. Logo o intervalo de convergência da série inicial é* $[-2, 2[$.

Exemplo

Determine o raio e o intervalo de convergência da seguinte série de potências:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{5^n}(x-3)^n; \quad \left(a_n = \frac{\ln n}{5^n} \ e \ x_0 = 3\right);$$

Se $x = 3$*, a série é obviamente convergente.*
Se $x \neq 3$*, temos*

$$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n |x-3| \frac{\ln(n+1)}{5 \ln n} = \frac{|x-3|}{5}.$$

Pelo critério de D'Alembert, a série é convergente se $\frac{|x-3|}{5} < 1$*, ou seja,* $x \in]-2, 8[$*. Assim,* $R = 5$*. Nos pontos fronteira* $x = -2$ *e* $x = 8$ *é necessário analisar separadamente. Para* $x = 8$ *temos a série numérica*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{5^n} 5^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln n,$$

que é uma série divergente pois $\lim_n \ln n = +\infty$*. Por outro lado, se* $x = -2$*, temos a série numérica*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{5^n}(-5)^n = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln n,$$

pelo que também é divergente. Logo o intervalo de convergência da série inicial é $]-2, 8[$.