Álgebra Linear (Eng.a Informática)

Matrizes
Matrizes elementares e operações elementares
Método de Gauss-Jordan

abento@[1] ::: eamaral@[1] ::: gsoares@[1]

[1] Departamento de Matemática ::: ECT ::: UTAD

Editor: abento@ ::::: Outono.2020

Matrizes

Definição

Matriz é uma grelha retangular de m linhas por n colunas.
Numa matriz A, se i identifica a linha i e j, a coluna j, então a posição (i, j) *toma a designação de entrada* (i, j) *da matriz A.*
O número que está nesta entrada denota-se por a_{ij}*. Esta expressão* a_{ij} *identifica a entrada e o número em tal entrada.*
Por conveniência de linguagem, a palavra entrada indentificará, também, o número a_{ij}*.*
Quando dizemos que A é uma matriz, assumimos a identificação $A = [a_{ij}]$*. Com esta identificação queremos dizer que cada entrada* (i, j) *da matriz está denotada por* a_{ij}*.*

Notação

Seja A uma matriz com m linhas e n colunas (matriz de tipo $(m \times n)$).
Seja L uma matriz com uma linha e n colunas (matriz linha).
Seja C uma matriz com m linhas e uma só coluna (matriz coluna).
Formalmente, estas informações traduzem-se por:

$$A = [a_{ij}],\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n; \qquad L = [a_{1j}],\ j = 1, 2, \ldots, n; \qquad C = [a_{i1}],\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

A forma expandida para estas informações é:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; \qquad L = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}; \qquad C = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix};$$

$\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ denota o conjunto de todas as matrizes do tipo $(m \times n)$ cujas entradas são números reais.
$\mathbb{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$ denota o conjunto de todas as matrizes linha cujas entradas são números reais.
$\mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$ denota o conjunto de todas as matrizes coluna cujas entradas são números reais.
$\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ denota o conjunto de todas as matrizes quadradas $(n \times n)$ [ou: quadradas, de ordem n] cujas entradas são números reais:

$$\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} : \ a_{ij} \in \mathbb{R}, \ \ i = 1, 2, \ldots, n, \ \ j = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

Definição (Diagonal principal — Diagonal secundária)

Seja A, $A = [a_{ij}]$, uma matriz quadrada, de ordem n. As entradas $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ *formam a diagonal principal da matriz A. As entradas* $a_{n1}, a_{(n-1),2}, ..., a_{1n}$ *formam a diagonal secundária da matriz A.*

Definição (Matriz triangular — matriz diagonal)

Uma matriz quadrada diz-se triangular se ocorrer um dos casos:
(1) abaixo da diagonal principal há, somente, zeros; (2) acima da diagonal principal há, somente, zeros.
Se ocorrer (1), a matriz nomeia-se por triangular superior.
Se ocorrer (2), a matriz nomeia-se por triangular inferior.
Se ocorrer (1) e, também, (2), a matriz nomeia-se por matriz diagonal.

Exemplos. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

A matriz A é triangular superior; a matriz B é triangular inferior; a matriz C é matriz diagonal.

Nota Se A é uma matriz diagonal e de ordem n, esta informação traduz-se, por vezes, pela fórmula $A = diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

Definição (Matriz identidade)

A matriz diagonal cujas entradas diagonais são iguais ao número 1*, diz-se matriz identidade (da ordem respetiva). Denota-se por I; ou por I_n, se for relevante indicar a ordem.*

Exemplos.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\quad I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definição (Adição de duas matrizes)

Adicionar duas matrizes significa que cada entrada de uma das matrizes é adicionada com uma, e uma só, entrada da outra. Consequentemente, duas matrizes são adicionáveis se, e só se, ambas são de um mesmo tipo.
Se A e B, $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, são duas matrizes de igual tipo, a matriz $A + B$ é tal que $A + B = [s_{ij}] := [a_{ij} + b_{ij}]$.

Exemplo.
$A = \begin{bmatrix} 3 & a & 1 \\ b & 1 & 5 \\ c & k & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ z & 2 & w \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Logo: $A + B = \begin{bmatrix} 3 & a & 1 \\ b & 1 & 5 \\ c & k & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ z & 2 & w \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & a+x & 1+y \\ b+z & 3 & 5+w \\ c-2 & k+1 & 7 \end{bmatrix}$.

Teorema (Adição de matrizes é comutativa)

Se A e B são duas matrizes tais que $A + B$ existe, então $B + A$ existe e tem-se: $B + A = A + B$.

Definição (Multiplicação de um escalar por uma matriz)

Qualquer escalar pode ser multiplicado por uma matriz; e qualquer matriz pode ser multiplicada por um escalar. Assim, se k é um número e B, $B = [b_{ij}]$, é uma matriz, então $kB = k[b_{ij}] = [kb_{ij}]$ e $Bk = [b_{ij}]k = [b_{ij}k] = [kb_{ij}]$.

Exemplo.
$A = \begin{bmatrix} 3 & a & 1 \\ b & 1 & 5 \\ c & d & 4 \end{bmatrix}$; Logo: $kA = k \begin{bmatrix} 3 & a & 1 \\ b & 1 & 5 \\ c & d & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k & ka & k \\ kb & k & 5k \\ kc & kd & 4k \end{bmatrix}$.

Multiplicar matrizes é, essencialmente, executar a operação **produto escalar** entre vetores: vetores-linha por vetores-coluna.

Por exemplo: $(1,2,3) \bullet (a,b,c) = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = 1\cdot a + 2\cdot b + 3\cdot c = a + 2b + 3c.$

Definição (Multiplicar uma linha por uma coluna)

Multiplicar a matriz linha $[a_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *pela matriz coluna* $[b_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *é multiplicar cada* a_i *pelo respetivo* b_i *e adicionar todos os produto obtidos. Assim, o resultado é:* $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots a_n b_n$.

Definição (Multiplicar duas matrizes)

Multiplicar uma matriz A por uma matriz B passa por multiplicar cada linha do primeiro fator por cada coluna do segundo fator. Logo, cada linha do primeiro fator terá que ter tantas entradas quantas as entradas de cada coluna do segundo fator. Portanto, a multiplicação da matriz A pela matriz B, por esta ordem, existe se o número de colunas do primeiro fator for igual ao número de linhas do segundo fator.
A entrada (i,j) *da matriz produto* (AB) *é o resultado de multiplicar a linha i do primeiro fator pela coluna j do segundo fator.*
Denote-se por L_i^A *a linha i da matriz A; por* C_j^B*, a coluna j da matriz B; e por* $(AB)_{ij}$*, a entrada* (i,j) *da matriz produto* (AB).
Assim, $(AB)_{ij} = L_i^A C_j^B$.

Exemplo $A = \begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix}a & b & c\\x & y & z\end{bmatrix}$. $AB = \begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b & c\\x & y & z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}L_1^A C_1^B & L_1^A C_2^B & L_1^A C_3^B\\ L_2^A C_1^B & L_2^A C_2^B & L_2^A C_3^B\end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\x\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b\\y\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\z\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\x\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b\\y\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\z\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2a+3x & 2b+3y & 2c+3z\\ 4a+5x & 4b+5y & 4c+5z\end{bmatrix}.$$

Exemplo

$$E = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}. \qquad EF = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & ay & az \\ bx & by & bz \\ cx & cy & cz \end{bmatrix}. \qquad FE = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = xa + yb + zc.$$

Teorema (Multiplicação de matrizes não é comutativa)

A mutiplicação de matrizes não é comutativa. Isto é, em geral, mesmo quando existem AB e BA, tem-se: $AB \neq BA$ (ver exemplo precedente).

Pelo já exposto, se $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$ e $B \in \mathbb{M}_{n\times p}$, então a matriz produto (AB) existe e é uma matriz do tipo $(m \times p)$.

Notemos, também, que se A é uma matriz coluna e B é uma matriz linha, então a matriz (AB) existe. No entanto, nem sempre é possível multiplicar B por A. Por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix}.$$

Teorema (A multiplicação de matrizes é associativa)

Se A, B e C são matrizes tais que as matrizes (AB), (BC) existem, então vale a fórmula: $(AB)C = A(BC)$. ∎

Definição (Matriz transposta)

Matriz transposta de uma matriz B é a matriz cuja linha i é a coluna i da matriz B. A transposta da matriz B denota-se por B^T.

Portanto, a entrada (i, j) da matriz B será a entrada (j, i) da matriz B^T. Assim, se $B = [b_{ij}]$, então $B^T = [b_{ji}]$.
E, se B é do tipo $(m \times n)$, então a sua transposta B^T é do tipo $(n \times m)$.

Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} a & 2 \\ b & 3 \\ c & 4 \end{bmatrix}; \qquad C = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}; \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{bmatrix}, \quad D^T = \begin{bmatrix} 2 & x & a \\ 3 & y & b \\ 4 & z & c \end{bmatrix}.$$

Nota. A operação $B \to B^T$ deixa invariantes as entradas do tipo (i, i).

$(A^T)^T = \ldots$

Se A é triangular, então A^T é ...

Se A é triangular superior, então A^T é ...

Se A é diagonal, então A^T é ...

Teorema (Transposta da soma é a soma das transpostas)

Se A e B são matrizes tais que A + B existe, então $(A + B)^T = A^T + B^T$.

Prova. Considere-se $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$. Assim, $A + B = [s_{ij}]$, com $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Logo: $(A + B)^T = [s_{ji}]$ e $s_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$.
Por outro lado: $A^T + B^T = [a_{ji}] + [b_{ji}] = [a_{ji} + b_{ji}] = [s_{ji}]$. Portanto, $(A + B)^T = A^T + B^T$. ■

Transposta do produto de duas matrizes e o produto das transpostas dos fatores

Exploração $G = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$; $H = \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{bmatrix}$. $GH = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1^G C_1^H & L_1^G C_2^H & L_1^G C_3^H \\ L_2^G C_1^H & L_2^G C_2^H & L_2^G C_3^H \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ x \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ y \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ x \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ y \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ z \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+3x & 2b+3y & 2c+3z \\ 4a+5x & 4b+5y & 4c+5z \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a(2)+x(3) & b(2)+y(3) & c(2)+z(3) \\ a(4)+x(5) & b(4)+y(5) & c(4)+z(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} L_1^{H^T} C_1^{G^T} & L_2^{H^T} C_1^{G^T} & L_3^{H^T} C_1^{G^T} \\ L_1^{H^T} C_2^{G^T} & L_2^{H^T} C_2^{G^T} & L_3^{H^T} C_2^{G^T} \end{bmatrix}. \quad \text{Isto é:} \quad GH = \begin{bmatrix} L_1^{H^T} C_1^{G^T} & L_2^{H^T} C_1^{G^T} & L_3^{H^T} C_1^{G^T} \\ L_1^{H^T} C_2^{G^T} & L_2^{H^T} C_2^{G^T} & L_3^{H^T} C_2^{G^T} \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$(GH)^T = \begin{bmatrix} L_1^{H^T} C_1^{G^T} & L_1^{H^T} C_2^{G^T} \\ L_2^{H^T} C_1^{G^T} & L_2^{H^T} C_2^{G^T} \\ L_3^{H^T} C_1^{G^T} & L_3^{H^T} C_2^{G^T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1^{H^T} \\ L_2^{H^T} \\ L_3^{H^T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^{G^T} & C_2^{G^T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & x \\ b & y \\ c & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = H^T G^T.$$

O processo que conduziu a este resultado sugere um modo de provar o seguinte

Teorema (Transposta do produto é o produto das transpostas, por ordem inversa)

Se A e B são matrizes tais que AB existe, então a transposta do produto de A por B é igual ao produto da transposta de B pela transposta de A. Formalmente: $(AB)^T = B^T A^T$. ∎

Definição

Uma matriz diz-se simétrica se coincidir com a sua transposta. Formalmente: B é simétrica sse $B = B^T$.

O leitor deverá concluir que qualquer matriz não quadrada não é uma matriz simétrica.

Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 0 & 5 & b \\ 3 & 5 & -2 & c \\ a & b & c & x \end{bmatrix}.$$

Teorema (Relação entre as entradas de uma matriz simétrica)

Seja B, $B = [b_{ij}]$, uma matriz. Se B é simétrica, então B é uma matriz quadrada e $b_{ij} = b_{ji}$. ■

Exercícios

1. *Numa matriz simétrica arbitrária, quantas entradas livres há ?*
2. *Seja A uma matriz quadrada, arbitrária. Mostre que a matriz $(A + A^T)$ é uma matriz simétrica.*
3. *Seja B uma qualquer matriz. Mostre que a matriz (BB^T) é uma matriz simétrica.*
4. *Sejam A e B matrizes simétricas e de igual ordem. Será que a matriz $A + B$ é uma matriz simétrica? E a matriz (AB) ?*
5. *Sejam A e B matrizes simétricas e de igual ordem. Mostre que $(AB)^T = BA$.*

Definição

Uma matriz diz-se antissimétrica se coincidir com o simétrico algébrico da sua transposta.
Formalmente: B *é antissimétrica sse* $B = -B^T$.

Caro leitor: conclua que qualquer matriz não quadrada não é uma matriz antissimétrica.

Teorema (Relação entre as entradas de uma matriz antissimétrica)

Seja B, $B = [b_{ij}]$, *uma matriz. Se* B *é antissimétrica, então* B *é uma matriz quadrada e* $b_{ij} = -b_{ji}$. ■

Corolário (Entradas diagonais de uma matriz antissimétrica)

Se B, $B = [b_{ij}]$, *é uma matriz antissimétrica, então as entradas diagonais de* B *são zeros.*

Prova. Decorre do teorema precedente. Cada entrada diagonal é da forma b_{ii}. Quando $j = i$, temos:
$b_{ij} = -b_{ji} \Leftrightarrow b_{ii} = -b_{ii} \Leftrightarrow 2b_{ii} = 0 \Leftrightarrow b_{ii} = 0$. ■

Exercícios

1. *Numa matriz antissimétrica, arbitrária, quantas entradas livres há ?*
2. *Seja* A *uma matriz quadrada, arbitrária. Mostre que a matriz* $(A - A^T)$ *é uma matriz antissimétrica.*
3. *Sejam* A *e* B *matrizes antissimétricas e de igual ordem. Será que a matriz* $A + B$ *é uma matriz antissimétrica?*
4. *Sejam* A *e* B *matrizes antissimétricas e de igual ordem. Mostre que* $(AB)^T = BA$.
5. *Seja* A *uma matriz quadrada, arbitrária. Exprima a matriz* $2A$ *na soma de uma matriz simétrica com uma matriz antissimétrica.*

Definição (Matriz invertível)

Uma matriz A diz-se invertível se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I$.
Se A é invertível, a matriz B tal que $AB = BA = I$ diz-se inversa da matriz A; e denota-se por A^{-1}.

Contra-exemplo A matriz A cujas linhas são $[1 \quad 2]$ e $[0 \quad 0]$ não é invertível. De facto, se B é tal que AB existe, então a linha 2 desta matriz (AB) é nula (e a matriz identidade não tem linhas nulas).

Exemplo A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ é invertível porque, sendo $B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, temos:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & -\frac{2}{3}+\frac{2}{3} \\ 0+0 & 0+\frac{3}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{e} \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 2-\frac{6}{3} \\ 0+0 & 0+\frac{3}{3} \end{bmatrix} = I_2.$$

Teorema

Se A e B são matrizes quadradas tais que $AB = 0$ e B é invertível, então A é nula. ■

Teorema

Se A e B são matrizes quadradas tais que $AB = I$, então $BA = I$.

Prova. Temos: $B = BI = B(AB) = (BA)B$. Logo: $B - (BA)B = 0 \Leftrightarrow [I - (BA)]B = 0$. Daqui e porque B é invertível, resulta $I - BA = 0$; isto é, $BA = I$. ■

Teorema (Unicidade da inversa)

Se a matriz A é invertível, a sua inversa é única.

Prova. Admitamos que A tem duas inversas: a matriz B e a matriz C. Assim, $AB = I$ e $AC = I$. Logo,
$AB = AC \Leftrightarrow AB - AC = 0 \Leftrightarrow A(B - C) = 0$. Por isto e porque A é invertível, decorre $(B - C) = 0$, isto é, $B = C$. ■

Teorema (A inversa do produto é o produto das inversas, por ordem inversa)

Se A e B são invertíveis e existe AB, então a inversa da matriz (AB) é o produto da inversa de B pela inversa de A; isto é:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Prova. Mostrar que a matriz P é a inversa da matriz Q é mostrar que $PQ = I$. Neste caso, queremos mostrar que a matriz $(B^{-1}A^{-1})$ é a inversa da matriz (AB).
Temos: $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}(I)B = B^{-1}B = I$ (justifique cada igualdade). Mostrámos, portanto, que a igualdade $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ é verdadeira. Isto é, mostrámos que a inversa da matriz $(B^{-1}A^{-1})$ é a matriz (AB). ■

Teorema (A inversa da transposta é a transposta da inversa)

Se a matriz A é invertível, então a sua transposta também é invertível e tem-se:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Prova. Temos: $AA^{-1} = I \Leftrightarrow (AA^{-1})^T = I^T \Leftrightarrow (AA^{-1})^T = I \Leftrightarrow (A^{-1})^T A^T = I$ (justifique cada igualdade). A igualdade $(A^{-1})^T A^T = I$ significa que a inversa de A^T é $(A^{-1})^T$, isto é: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. ■

Definição (Traço de uma matriz quadrada)

Seja A, $A = [a_{ij}]$, uma matriz quadrada, $(n \times n)$.
Traço da matriz A — denotado por $tr(A)$ — é a soma das entradas diagonais de A. Assim,

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Exemplo. Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{bmatrix}$, $\quad tr(A) = 2 + b + z$.

Exercício

Sendo A e B matrizes, de ordem 3 e arbitrárias, mostre que $tr(AB) = tr(BA)$.

A partir da resolução do exercício precedente, identifique uma estratégia para demonstrar

Teorema

Se A e B são duas quaisquer matrizes de ordem n, então $tr(AB) = tr(BA)$.

Definição (Matriz idempotente)

Uma matriz A diz-se idempotente se $A^2 = A$.

Exercício

Seja c um número real não nulo; e $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4}c^{-1} \\ c & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. *Mostre que as matrizes A e B são idempotentes.*

Matrizes elementares e operações elementares

Definição (Matriz elementar do tipo 1)

É a matriz resultante da matriz identidade por permutação entre duas, e só duas, linhas (ou colunas) entre si.

Exemplos. $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Teorema (Inversa de uma matriz elementar do tipo 1)

Se E é matriz elementar do tipo 1, então $E^{-1} = E$.

Exercício

Verifique que cada uma das matrizes precedentes é inversa de si mesmo.

Teorema (Ação multiplicativa-esquerda de uma matriz elementar do tipo 1)

Se E é uma matriz elementar resultante de I_n por permutação entre as linhas L_i e L_j e a matriz B é tal que EB existe, então esta matriz EB resulta da matriz B por permutação entre as linhas L_i e L_j.

Exemplos.

$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \end{bmatrix}$. Logo: $EB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & \cdots \\ a & b & c & \cdots \end{bmatrix}$.

$F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \end{bmatrix}$. Logo: $F_2 C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots \\ x & y & z & \cdots \\ a & b & c & \cdots \end{bmatrix}$.

Exercício

Mostre que qualquer matriz elementar do tipo 1 não é matriz idempotente.

Definição (Matriz elementar do tipo 2)

É uma matriz diferente da matriz identidade em uma, e uma só, entrada diagonal. Esta é k, com $k \neq 0$.

Exemplos. Sendo $k \neq 0$ e $k \neq 1$,

$$E_1 = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}; \quad F_1 = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}.$$

Exercício

Explicite, a menos do valor da constante k, todas as matrizes elementares do tipo 2 e de ordem 4.

Teorema (Inversa de uma matriz elementar do tipo 2)

Se E é uma matriz matriz elementar do tipo 2 cuja entrada (i, i) é k, então E^{-1} é uma matriz elementar do tipo 2 que tem entrada (i, i) igual ao inverso do número k, isto é: $(\frac{1}{k})$.

Exercício

Explicite a inversa de cada uma das matrizes elementares acima. Verifique que, de facto, cada matriz explicitada é inversa daquela.

Teorema (Ação multiplicativa-esquerda de uma matriz elementar do tipo 2)

Se E é uma matriz elementar do tipo 2 cuja entrada (i, i) é k e B é tal que EB existe, então a matriz EB resulta da matriz B por multiplicação de k pela linha L_i.

Exemplo.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \end{bmatrix}. \quad \text{Logo:} \quad EB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & \cdots \\ kx & ky & kz & \cdots \end{bmatrix}.$$

Definição (Matriz elementar do tipo 3)

É uma matriz diferente da matriz identidade em uma, e uma só, entrada não diagonal.

Exemplos. Sendo $k \neq 0$,

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}; \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício

Explicite, a menos do valor da constante k, todas as matrizes elementares do tipo 3 e de ordem 3. Também: as de ordem 4.

Teorema (Inversa de uma matriz elementar do tipo 3)

Se E é uma matriz matriz elementar do tipo 3 cuja entrada (i, j), $i \neq j$, é k, então E^{-1} é uma matriz elementar do tipo 3 que tem entrada (i, j) igual ao simétrico do número k, isto é: $(-k)$.

Exercício

Explicite a inversa de cada uma das matrizes elementares acima. Verifique que, de facto, cada matriz explicitada é inversa daquela.

Teorema (Ação multiplicativa-esquerda de uma matriz elementar do tipo 3)

Se E é uma matriz elementar do tipo 3 cuja entrada (i, j), $i \neq j$, é k e B é tal que EB existe, então a matriz EB resulta da matriz B por adição de kL_j à linha L_i.

Exemplo.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \end{bmatrix}. \quad \text{Logo:} \quad EB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & \cdots \\ ka + x & kb + y & kc + z & \cdots \end{bmatrix}.$$

Definição (Operação elementar do tipo 1 (OET1))

Na matriz A, uma operação elementar do tipo 1 é uma permuta entre duas linhas (ou, colunas). Notação: $A \xrightarrow[L_i \leftrightarrow L_j]{OET1} A_1$.

Seja I_n *a matriz tal que n é o número de linhas de A. Considere-se a OET1:* $I_n \xrightarrow[L_i \leftrightarrow L_j]{OET1} E$.

Esta matriz E é tal que $EA = A_1$. *Por este facto, esta matriz E será designada por matriz elementar associada à OET1* $L_i \leftrightarrow L_j$.

Pelo exposto, podemos considerar o esquema: $\boxed{A \xrightarrow[L_i \leftrightarrow L_j]{OET1} A_1 = EA, \quad \text{em que } E = ?}$.

Exemplo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{OET1} \begin{bmatrix} a & b & c & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots \end{bmatrix} = EA$, em que $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Exemplo $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{OET1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ x & y & z & \cdots \\ a & b & c & \cdots \end{bmatrix} = FB$, em que $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Exemplo $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \\ \alpha & \beta & \gamma & \cdots \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_4]{OET1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ \alpha & \beta & \gamma & \cdots \\ x & y & z & \cdots \\ a & b & c & \cdots \end{bmatrix} = GC$, em que $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Nota. No caderno, proceda como tem sido apresentado em aula: apresente UMA ÚNICA matriz por linha de texto.

Definição (Operação elementar do tipo 2 (OET2))

Na matriz A, uma operação elementar do tipo 2 consiste em multiplicar k, $k \neq 0$, por uma única linha (ou, coluna) de A.

Notação: $A \xrightarrow[L_i \leftarrow kL_i]{OET1} A_1$.

Seja I_n a matriz tal que n é o número de linhas de A. Considere-se a OET2: $I_n \xrightarrow[L_i \leftarrow kL_i]{OET2} E$.

Esta matriz E é tal que $EA = A_1$. Por este facto, esta matriz E será designada por matriz elementar associada à OET2 $L_i \leftarrow kL_i$.

Pelo exposto, podemos considerar o esquema que se segue: $\boxed{A \xrightarrow[L_i \leftarrow kL_i]{OET2} A_1 = EA, \quad \text{em que } E = ?}$.

$\boxed{\text{Exemplo}}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftarrow kL_1]{OET2} \begin{bmatrix} k & 2k & 3k & \cdots \\ a & b & c & \cdots \end{bmatrix} = EA$, em que $E = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{Exemplo}}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow kL_2]{OET2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ ka & kb & kc & \cdots \\ x & y & z & \cdots \end{bmatrix} = FB$, em que $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{Exemplo}}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \\ \alpha & \beta & \gamma & \cdots \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow kL_3]{OET2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ kx & ky & kz & \cdots \\ \alpha & \beta & \gamma & \cdots \end{bmatrix} = GC$, em que $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{Exemplo}}$ $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \\ \alpha & \beta & \gamma & \cdots \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow kL_3]{L_2 \leftarrow 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ 3a & 3b & 3c & \cdots \\ kx & ky & kz & \cdots \\ \alpha & \beta & \gamma & \cdots \end{bmatrix} = H_2 H_1 D$,

em que $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Nota. No caderno, proceda como tem sido apresentado em aula: apresente UMA ÚNICA matriz por linha de texto.

Definição (Operação elementar do tipo 3 (OET3))

Na matriz A, uma operação elementar do tipo 3 consiste em adicionar um múltiplo escalar de uma linha L_j (uma coluna C_j) a uma outra linha L_i (uma outra coluna C_i) de A.

Notação: $A \xrightarrow[L_i \leftarrow L_i + kL_j]{OET3} A_1$.

Seja I_n a matriz tal que n é o número de linhas de A. Considere-se a OET3: $I_n \xrightarrow[L_i \leftarrow L_i + kL_j]{OET3} E$.

Esta matriz E é tal que $EA = A_1$. Por tal facto, esta matriz E designa-se por matriz elementar associada à OET3 $L_i \leftarrow L_i + kL_j$.

Pelo exposto, podemos considerar o esquema que se segue: $\boxed{A \xrightarrow[L_i \leftarrow L_i + kL_j]{OET3} A_1 = EA, \quad \text{em que } E = ?}$.

Exemplo $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \\ \alpha & \beta & \gamma & \cdots \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - xL_1]{OET3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ 0 & y-2x & z-3x & \cdots \\ \alpha & \beta & \gamma & \cdots \end{bmatrix} = GC,$

em que $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exemplo $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \\ \alpha & \beta & \gamma & \cdots \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - xL_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \alpha L_1}]{OET3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ 0 & b-2a & c-3a & \cdots \\ 0 & y-2x & z-3x & \cdots \\ 0 & \beta-2\alpha & \gamma-3\alpha & \cdots \end{bmatrix} = H_3H_2H_1D,$

em que $H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Nota. No caderno, proceda como tem sido apresentado em aula: apresente UMA ÚNICA matriz por linha de texto.

Método de Gauss-Jordan

Definição (Forma de escada (f.e.) por linhas: caracterização informal)

Dizemos que a matriz A está em forma de escada (f.e.) por linhas se o canto inferior esquerdo de A for o maior canto de zeros que se pode construir por ação de operações elementares sobre linhas.

Exemplos $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (f.e.); \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} (f.e.); \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (f.e.).$

Contra-exemplos $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Definição (Pivôs de uma matriz em (f.e.))

Se a matriz A está na (f.e.) por linhas, cada PRIMEIRA entrada não nula de cada linha designa-se por pivô (da matriz A).

Notar que se A está na (f.e.) por linhas, então o número de pivôs coincide com o número de linhas não nulas.

Definição (Característica de uma matriz em (f.e.))

Admitamos que a matriz A está na (f.e.) por linhas.
Característica da matriz A — denotado por $car(A)$ — é o seu número de pivôs (ou: número de linhas não nulas).

Exemplos Consideremos as matrizes A, B e C, acima explicitadas. Temos: $car(A) = 3$; $car(B) = 3$, $car(C) = 2$.

Observação A única matriz que tem característica zero é a matriz nula.

Definição (Matriz resultante de outra por OE-sobre-linhas)

Dizemos que a matriz B resulta da matriz A por operações elementares sobre linhas — formalmente: $A \xrightarrow[linhas]{OE} B$ — se existe uma sequência de operações elementares que transforma a matriz A na matriz B.

Exemplo Consideremos $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ a & b & c & \cdots \\ x & y & z & \cdots \\ \alpha & \beta & \gamma & \cdots \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ 0 & b-2a & c-3a & \cdots \\ 0 & y-2x & z-3x & \cdots \\ 0 & \beta-2\alpha & \gamma-3\alpha & \cdots \end{bmatrix}$.

A matriz P resulta da matriz D por OE-sobre-linhas porque: $D \xrightarrow[L_2-aL_1]{OET3} D_1 \xrightarrow[L_3-xL_1]{OET3} D_2 \xrightarrow[L_4-\alpha L_1]{OET3} D_3 = P$.

Teorema (OE-sobre-linhas são reversíveis)

Se a matriz B resulta da matriz A por OE-sobre-linhas, então a matriz A resulta da matriz B por OE-sobre-linhas. Formalmente: se $A \xrightarrow[linhas]{OE} B$, então $B \xrightarrow[linhas]{OE} A$. ∎

Questão: relativamente ao exemplo precedente, qual é a sequência de OE-sobre-linhas que transforma a matriz P na matriz D ?

Resposta: $P = D_3 \xrightarrow[L_4+\alpha L_1]{OET3} D_2 \xrightarrow[L_3+xL_1]{OET3} D_1 \xrightarrow[L_2+aL_1]{OET3} D$.

Definição (Matrizes equivalentes-por-linhas)

Dizemos que duas matrizes são equivalentes-por-linhas se existe uma sequência de operações elementares que transforma uma na outra. Notação: $A \xleftrightarrow[linhas]{OE} B$.

Teorema (Matrizes equivalentes-por-linhas e característica)

Matrizes equivalentes-por-linhas têm igual característica. *isto é: OE sobre linhas não alteram a característica* ∎

Método (Identificar a característica de uma matriz)

(1) $\boxed{A \xrightarrow[\text{linhas (descendente)}]{OE} Q_A \text{ (f.e.)}}$ *(método de eliminação de Gauss);*

(2) $car(A) = car(Q_A) =$ *número de pivôs da matriz* Q_A.

Exemplos

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

OET3 $\downarrow \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad (E_1)$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

OET3 $\downarrow \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2 \quad (E_2)$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_2E_1D = Q_D.$

Portanto, $car(D) = car(Q_D) = 2$. ■

Nota: $E_2E_1D = Q_D$; logo: $D = E_1^{-1}E_2^{-1}Q_D$, com

$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

e $E_2^{-1} = \ldots$, $E_1^{-1} = \ldots$

$E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

OET1 $\downarrow \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \quad (E_1)$

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = E_1E = Q_E.$

Portanto, $car(E) = car(Q_E) = 3$. ■

Nota: $E_1E = Q_E \Leftrightarrow E = E_1^{-1}Q_E$.

$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1^{-1}.$

$F = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

OET1 $\downarrow \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \quad (E_1)$

$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_1F = Q_F.$

Portanto, $car(F) = car(Q_F) = 3$. ■

Nota: $E_1F = Q_F \Leftrightarrow F = E_1^{-1}Q_F$.

$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E^{-1}.$

Teorema (Característica de uma matriz e invertibilidade)

Seja A uma matriz quadrada, $(n \times n)$*. Se* $car(A) < ordem(A)$*, então a matriz A não é invertível.*

Prova. Consideremos $A \xrightarrow[Gauss]{OE(linhas)} Q_A$ e que Q_A se obteve de A por intermédio de s operações elementares. Assim,

$$Q_A = E_s(\cdots)E_1 A, \tag{1}$$

em que E_s, ..., E_2, E_1 são as matrizes elementares associadas às s operações elementares.

Admitamos que A é invertível. Seja B a sua inversa. Logo, resulta de (1):

$$Q_A B = E_s(\cdots)E_2 E_1 AB \Leftrightarrow Q_A B = E_s(\cdots)E_2 E_1 I_n \Leftrightarrow Q_A B = E_s(\cdots)E_2 E_1 \Leftrightarrow Q_A B E_1^{-1} E_2^{-1}(\cdots)E_s^{-1} = I_n. \tag{2}$$

Pela hipótese, a matriz Q_A tem uma linha de zeros. Portanto, a matriz $Q_A B E_1^{-1} E_2^{-1}(\cdots)E_s^{-1}$ tem uma linha de zeros.
Mas, isto e a igualdade $Q_A B E_1^{-1} E_2^{-1}(\cdots)E_s^{-1} = I_n$, em (2), geram uma contradição.
Portanto, nas condições da hipótese, fica provado que a matriz A não é invertível. ■
Nota. A contradição resultou por termos assumido que, nas condições da hipótese, a matriz A é invertível.

Definição (Matriz em forma de escada reduzida (f.e.r.))

Uma matriz A está em forma de escada reduzida (f.e.r.) se verificar os três items seguintes:

1. *a matriz A está em forma de escada (f.e.), por linhas;*
2. *cada pivô é igual ao número* 1*;*
3. *na coluna de cada pivô há uma única entrada não nula.*

Exemplos

$$G=\begin{bmatrix}1&3&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}(f.e.r.);\quad H=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&4&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}(f.e.r.);\quad J=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}(f.e.r.).$$

Contra-exemplos

$$K=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix};\quad M=\begin{bmatrix}2&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix};\quad N=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Notemos:
a matriz K não está na (f.e.r.) porque não está na (f.e.);
a matriz M não está na (f.e.r.) porque, embora esteja na (f.e.), um dos pivôs não é 1;
a matriz N não está na (f.e.r.) porque uma coluna que tem um pivô tem uma outra entrada não nula.

Transformemos cada uma destas matrizes na respetiva (f.e.r.).

$$K=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$
OET3 $\downarrow \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad (E_1)$
$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=E_1K=R_K.$$
(f.e.r.)

$$M=\begin{bmatrix}2&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$
OET2 $\downarrow \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \quad (E_1)$
$$\begin{bmatrix}1&0&1/2&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=E_1M=R_M.$$
(f.e.r.)

$$N=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$
OET3 $\downarrow \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \quad (E_1)$
$$\begin{bmatrix}1&0&-2&-3\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=E_1N=R_N.$$
(f.e.r.)

Método (de Gauss-Jordan)

O método de eliminação de Gauss-Jordan é o conjunto de ações resultantes de operações elementares sobre linhas que transformam uma matriz A numa outra que lhe é equivalente-por-linhas e que tem a forma de escada reduzida.

Este método admite o seguinte esquema: $$\underbrace{A \xrightarrow[\text{linhas (descendente)}]{OE}}_{Gauss} Q_A\ (f.e.) \underbrace{\xrightarrow[\text{linhas (ascendente)}]{OE}}_{Jordan} R_A\ (f.e.r.).$$

Podemos, ainda, usar o esquema mais sintético: $$\boxed{A \xrightarrow[\text{linhas (Gauss}-\text{Jordan)}]{OE} R_A\ (f.e.r.)}$$

Teorema (Inversa de uma matriz pelo método de Gauss-Jordan)

Admitamos que a matriz A é invertível; e consideremos a matriz do tipo $(n \times 2n)$ *definida por* $[A \mid I_n]$.
Aplicando o método de Gauss-Jordan a esta matriz $[A \mid I_n]$, *obtemos a matriz* $[I_n \mid A^{-1}]$.
Em esquema: $$[A \mid I_n] \xrightarrow[\text{linhas (Gauss}-\text{Jordan)}]{OE} [I_n \mid A^{-1}].$$

Exemplos

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $P^{-1} = ?$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
OET3 $\downarrow$ $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ (E_1)
$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{(f.e.r.)}$$
Portanto, $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. ■

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; $Q^{-1} = ?$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
OET3 $\downarrow$ $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ (E_1)
$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$
OET2 $\downarrow$ $L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2$ (E_2)
$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right]$$
OET3 $\downarrow$ $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ (E_3)
$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right].$$
Portanto, $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$. ■

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad A^{-1} = ?$$

$$[A|I_3] \xrightarrow[Gauss-Jordan]{OE} [I_3|A^{-1}]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$OET3 \downarrow L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \quad (E_1)$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$OET2 \downarrow L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_3 \quad (E_2)$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right]$$

$OET3 \downarrow L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \quad (E_3)$
$OET3 \downarrow L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \quad (E_4)$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 4/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right]$$

$OET3 \downarrow L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \quad (E_5)$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right]$$

Portanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1 & 1/3 \\ 2/3 & 1 & -2/3 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$. ■

Notar que a forma de escada reduzida da matriz A é a matriz identidade I_3 (se assim não fosse, a matriz A não seria invertível).

Podemos escrever, portanto: $E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 A = I_3$.

De imediato, temos uma decomposição da matriz A^{-1} em matrizes elementares:
$A^{-1} = E_5 E_4 E_3 E_2 E_1$.

E, também, uma decomposição da matriz A em matrizes elementares:
$A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} E_4^{-1} E_5^{-1}$.

Agora, explicitemos as matrizes elementares já nomeadas:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}; \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad E_5 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$E_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad E_5^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

Recordemos: $\mathbb{R}^2$ é o conjunto dos duplos (pares) ordenados de números reais; $\mathbb{R}^3$ é o conjunto dos triplos ordenados de números reais; $\mathbb{R}^4$ é o conjunto dos quadruplos ordenados de números reais; $\mathbb{R}^5$ é o conjunto dos quintuplos ordenados de números reais; (...) O conjunto dos n-uplos ordenados de números reais denota-se por $\mathbb{R}^n$. Assim, $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \ x_i \in \mathbb{R}\}$.

Teorema (Colunas de uma matriz ($n \times n$) *versus* base para $\mathbb{R}^n$)

Seja $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. As colunas da matriz B constituem uma base para o espaço $\mathbb{R}^n$ se, e só se, $car(B) = n$. ■

Exemplos

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $car(A) = 2 =$ ordem da matriz A. Portanto, a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base para $\mathbb{R}^2$.

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; $car(B) = 3 =$ ordem da matriz B. Portanto, a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ é uma base para $\mathbb{R}^3$.

$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; $car(C) = 4 = ordem(C)$. Portanto, a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$ é uma base para $\mathbb{R}^4$.

$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2]{OET3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = Q_D$; $car(Q_D) = car(D) = 4 = ordem(D)$. Portanto, a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$ é uma base para $\mathbb{R}^4$.

Contra-exemplo

$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $car(F) = 1 < ordem(F)$. Portanto, a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ não é uma base para $\mathbb{R}^2$.