

Cálculo de Programas

Trabalho Prático

MiEI+LCC — 2019/20

Departamento de Informática
Universidade do Minho

Junho de 2020

Grupo nr. 17

a85517	Duarte Manuel Vilar de Oliveira
a84485	Tiago Henrique de Oliveira Magalhães

1 Preâmbulo

A disciplina de **Cálculo de Programas** tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação (conjunto de leis universais e seus corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos dois cursos que têm esta disciplina, restringe-se a aplicação deste método à programação funcional em **Haskell**. Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em **Haskell**. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, validá-los, e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

2 Documentação

Para cumprir de forma integrada os objectivos enunciados acima vamos recorrer a uma técnica de programação dita “**literária**” [2], cujo princípio base é o seguinte:

Um programa e a sua documentação devem coincidir.

Por outras palavras, o código fonte e a documentação de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp1920t.pdf` que está a ler é já um exemplo de **programação literária**: foi gerado a partir do texto fonte `cp1920t.lhs`¹ que encontrará no **material pedagógico** desta disciplina descompactando o ficheiro `cp1920t.zip` e executando

```
$ lhs2TeX cp1920t.lhs > cp1920t.tex
$ pdflatex cp1920t
```

em que **lhs2tex** é um pre-processor que faz “pretty printing” de código Haskell em **L^AT_EX** e que deve desde já instalar executando

```
$ cabal install lhs2tex
```

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp1920t.lhs` é executável e contém o “kit” básico, escrito em **Haskell**, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp1920t.lhs
```

Abra o ficheiro `cp1920t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

¹O suffixo ‘lhs’ quer dizer *literate Haskell*.

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

vai ser seleccionado pelo **GHCI** para ser executado.

3 Como realizar o trabalho

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de três alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na [página da disciplina](#) na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo de trabalho por forma a poderem responder às questões que serão colocadas na *defesa oral* do relatório.

Em que consiste, então, o *relatório* a que se refere o parágrafo anterior? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo **C** com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com **BibTeX**) e o índice remissivo (com **makeindex**),

```
$ bibtex cp1920t.aux
$ makeindex cp1920t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. Dever-se-á ainda instalar o utilitário **QuickCheck**, que ajuda a validar programas em **Haskell** e a biblioteca **Gloss** para geração de gráficos 2D:

```
$ cabal install QuickCheck gloss
```

Para testar uma propriedade **QuickCheck** *prop*, basta invocá-la com o comando:

```
> quickCheck prop
+++ OK, passed 100 tests.
```

Pode mesmo controlar o número de casos de teste e sua complexidade utilizando o comando:

```
> quickCheckWith stdArgs { maxSuccess = 200, maxSize = 10 } prop
+++ OK, passed 200 tests.
```

Qualquer programador tem, na vida real, de ler e analisar (muito!) código escrito por outros. No anexo **B** disponibiliza-se algum código **Haskell** relativo aos problemas que se seguem. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

Problema 1

Pretende-se implementar um sistema de manutenção e utilização de um dicionário. Este terá uma estrutura muito peculiar em memória. Será construída uma árvore em que cada nodo terá apenas uma letra da palavra e cada folha da respectiva árvore terá a respectiva tradução (um ou mais sinónimos). Deverá ser possível:

- *dic_rd* — procurar traduções para uma determinada palavra
- *dic_in* — inserir palavras novas (palavra e tradução)
- *dic_imp* — importar dicionários do formato “lista de pares palavra-tradução”
- *dic_exp* — exportar dicionários para o formato “lista de pares palavra-tradução”.

A implementação deve ser baseada no módulo **Exp.hs** que está incluído no material deste trabalho prático, que deve ser estudado com atenção antes de abordar este problema.

No anexo **B** é dado um dicionário para testes, que corresponde à figura **1**. A implementação proposta deverá garantir as seguintes propriedades:



Figura 1: Representação em memória do dicionário dado para testes.

Propriedade [QuickCheck] 1 Se um dicionário estiver normalizado (ver apêndice B) então não perdemos informação quando o representamos em memória:

$$\text{prop_dic_rep } x = \text{let } d = \text{dic_norm } x \text{ in } (\text{dic_exp} \cdot \text{dic_imp}) d \equiv d$$

Propriedade [QuickCheck] 2 Se um significado s de uma palavra p já existe num dicionário então adicioná-lo em memória não altera nada:

$$\begin{aligned} \text{prop_dic_red } p \ s \ d \\ | \text{ dic_red } p \ s \ d = \text{dic_imp } d \equiv \text{dic_in } p \ s \ (\text{dic_imp } d) \\ | \text{ otherwise} = \text{True} \end{aligned}$$

Propriedade [QuickCheck] 3 A operação dic_rd implementa a procura na correspondente exportação do dicionário:

$$\text{prop_dic_rd } (p, t) = \text{dic_rd } p \ t \equiv \text{lookup } p \ (\text{dic_exp } t)$$

Problema 2

Árvores binárias (elementos do tipo **BTree**) são frequentemente usadas no armazenamento e procura de dados, porque suportam um vasto conjunto de ferramentas para procuras eficientes. Um exemplo de destaque é o caso das **árvores binárias de procura**, *i.e.* árvores que seguem o princípio de *ordenação*: para todos os nós, o filho à esquerda tem um valor menor ou igual que o valor no próprio nó; e de forma análoga, o filho à direita tem um valor maior ou igual que o valor no próprio nó. A Figura 2 apresenta dois exemplos de árvores binárias de procura.²

Note que tais árvores permitem reduzir *significativamente* o espaço de procura, dado que ao procurar um valor podemos sempre *reduzir a procura a um ramo* ao longo de cada nó visitado. Por exemplo, ao procurar o valor 7 na primeira árvore (t_1), sabemos que nos podemos restringir ao ramo da direita do nó com o valor 5 e assim sucessivamente. Como complemento a esta explicação, consulte também os **vídeos das aulas teóricas** (capítulo ‘pesquisa binária’).

Para verificar se uma árvore binária está ordenada, é útil ter em conta a seguinte propriedade: considere uma árvore binária cuja raiz tem o valor a , um filho s_1 à esquerda e um filho s_2 à direita. Assuma

²As imagens foram geradas com recurso à função *dotBt* (disponível neste documento). Recomenda-se o uso desta função para efeitos de teste e ilustração.



Figura 2: Duas árvores binárias de procura; a da esquerda vai ser designada por t_1 e a da direita por t_2 .

que os dois filhos estão ordenados; que o elemento *mais à direita* de t_1 é menor ou igual a a ; e que o elemento *mais à esquerda* de t_2 é maior ou igual a a . Então a árvore binária está ordenada. Dada esta informação, implemente as seguintes funções como catamorfismos de árvores binárias.

$\text{maisEsq} :: \text{BTree } a \rightarrow \text{Maybe } a$
 $\text{maisDir} :: \text{BTree } a \rightarrow \text{Maybe } a$

Seguem alguns exemplos dos resultados que se esperam ao aplicar estas funções à árvore da esquerda (t_1) e à árvore da direita (t_2) da Figura 2.

```
*Splay> maisDir t1
Just 16
*Splay> maisEsq t1
Just 1
*Splay> maisDir t2
Just 8
*Splay> maisEsq t2
Just 0
```

Propriedade [QuickCheck] 4 As funções maisEsq e maisDir são determinadas unicamente pela propriedade

$\text{prop_inv} :: \text{BTree } \text{String} \rightarrow \text{Bool}$
 $\text{prop_inv} = \text{maisEsq} \equiv \text{maisDir} \cdot \text{invBTree}$

Propriedade [QuickCheck] 5 O elemento *mais à esquerda* de uma árvore está presente no ramo da esquerda, a não ser que esse ramo esteja vazio:

$\text{propEsq } \text{Empty} = \text{property } \text{Discard}$
 $\text{propEsq } x@(Node(a, (t, s))) = (\text{maisEsq } t) \neq \text{Nothing} \Rightarrow (\text{maisEsq } x) \equiv \text{maisEsq } t$

A próxima tarefa deste problema consiste na implementação de uma função que insere um novo elemento numa árvore binária *preservando* o princípio de ordenação,

$\text{insOrd} :: (\text{Ord } a) \Rightarrow a \rightarrow \text{BTree } a \rightarrow \text{BTree } a$

e de uma função que verifica se uma dada árvore binária está ordenada,

$\text{isOrd} :: (\text{Ord } a) \Rightarrow \text{BTree } a \rightarrow \text{Bool}$

Para ambas as funções deve utilizar o que aprendeu sobre *catamorfismos e recursividade mútua*.

Sugestão: Se tiver problemas em implementar com base em catamorfismos estas duas últimas funções, tente implementar (com base em catamorfismos) as funções auxiliares

$\text{insOrd}' :: (\text{Ord } a) \Rightarrow a \rightarrow \text{BTree } a \rightarrow (\text{BTree } a, \text{BTree } a)$
 $\text{isOrd}' :: (\text{Ord } a) \Rightarrow \text{BTree } a \rightarrow (\text{Bool}, \text{BTree } a)$

tais que $\text{insOrd}' x = (\text{insOrd } x, \text{id})$ para todo o elemento x do tipo a e $\text{isOrd}' = \langle \text{isOrd}, \text{id} \rangle$.



Figura 3: Exemplo de uma rotação à direita. A árvore da esquerda é a árvore original; a árvore da direita representa a rotação à direita correspondente.



Figura 4: Exemplo de uma rotação à direita. A árvore da esquerda é a árvore original; a árvore da direita representa a rotação à direita correspondente.

Propriedade [QuickCheck] 6 Inserir uma sucessão de elementos numa árvore vazia gera uma árvore ordenada.

$prop_ord :: [Int] \rightarrow Bool$
 $prop_ord = isOrd \cdot (foldr insOrd Empty)$

As árvores binárias providenciam uma boa maneira de reduzir o espaço de procura. Mas podemos fazer ainda melhor: podemos aproximar da raiz os elementos da árvore que são mais acedidos, reduzindo assim o espaço de procura na *dimensão vertical*³. Esta operação é geralmente referida como *splaying* e é implementada com base naquilo a que chamamos *rotações à esquerda e à direita de uma árvore*.

Intuitivamente, a rotação à direita de uma árvore move todos os nós "uma casa para a sua direita". Formalmente, esta operação define-se da seguinte maneira:

1. Considere uma árvore binária e designe a sua raiz pela letra r . Se r não tem filhos à esquerda então simplesmente retornamos a árvore dada à entrada. Caso contrário,
2. designe o filho à esquerda pela letra l . A árvore que vamos retornar tem l na raiz, que mantém o filho à esquerda e adota r como o filho à direita. O orfão (*i.e.* o anterior filho à direita de l) passa a ser o filho à esquerda de r .

A rotação à esquerda é definida de forma análoga. As Figuras 3 e 4 apresentam dois exemplos de rotações à direita. Note que em ambos os casos o valor 2 subiu um nível na árvore correspondente. De facto, podemos sempre aplicar uma *sequência* de rotações numa árvore de forma a mover um dado nó para a raiz (dando origem portanto à referida operação de splaying).

Comece então por implementar as funções

³Note que nas árvores de binária de procura a redução é feita na dimensão horizontal.

```

rrot :: BTree a → BTree a
lrot :: BTree a → BTree a

```

de rotação à direita e à esquerda.

Propriedade [QuickCheck] 7 As rotações à esquerda e à direita preservam a ordenação das árvores.

```

prop_ord_pres_esq = forAll orderedBTree (isOrd · lrot)
prop_ord_pres_dir = forAll orderedBTree (isOrd · rrot)

```

De seguida implemente a operação de splaying

```

splay :: [Bool] → (BTree a → BTree a)

```

como um catamorfismo de listas. O argumento `[Bool]` representa um caminho ao longo de uma árvore, em que o valor `True` representa "seguir pelo ramo da esquerda" e o valor `False` representa "seguir pelo ramo da direita". O caminho ao longo de uma árvore serve para *identificar* unicamente um nó dessa árvore.

Propriedade [QuickCheck] 8 A operação de splay preserva a ordenação de uma árvore.

```

prop_ord_pres_splay :: [Bool] → Property
prop_ord_pres_splay path = forAll orderedBTree (isOrd · (splay path))

```

Problema 3

Árvores de decisão binárias são estruturas de dados usadas na área de **machine learning** para codificar processos de decisão. Geralmente, tais árvores são geradas por computadores com base num vasto conjunto de dados e reflectem o que o computador "aprendeu" ao processar esses mesmos dados. Segue-se um exemplo muito simples de uma árvore de decisão binária:



Esta árvore representa o processo de decisão relativo a ser preciso ou não levar um guarda-chuva para uma viagem, dependendo das condições climáticas. Essencialmente, o processo de decisão é efectuado ao "percorrer" a árvore, escolhendo o ramo da esquerda ou da direita de acordo com a resposta à pergunta correspondente. Por exemplo, começando da raiz da árvore, responder `["não", "não"]` leva-nos à decisão "não precisa" e responder `["não", "sim"]` leva-nos à decisão "precisa".

Árvores de decisão binárias podem ser codificadas em **Haskell** usando o seguinte tipo de dados:

```

data Bdt a = Dec a | Query (String, (Bdt a, Bdt a)) deriving Show

```

Note que o tipo de dados `Bdt` é parametrizado por um tipo de dados `a`. Isto é necessário, porque as decisões podem ser de diferentes tipos: por exemplo, respostas do tipo "sim ou não" (como apresentado acima), a escolha de números, ou **classificações**.

De forma a conseguirmos processar árvores de decisão binárias em **Haskell**, deve, antes de tudo, resolver as seguintes alíneas:

1. Definir as funções `inBdt`, `outBdt`, `baseBdt`, `cataBdt`, e `anaBdt`.
2. Apresentar no relatório o diagrama de `anaBdt`.

Para tomar uma decisão com base numa árvore de decisão binária t , o computador precisa apenas da estrutura de t (*i.e.* pode esquecer a informação nos nós da árvore) e de uma lista de respostas “sim ou não” (para que possa percorrer a árvore da forma desejada). Implemente então as seguintes funções na forma de *catamorfismos*:

1. $extLTree : Bdt\ a \rightarrow LTree\ a$ (esquece a informação presente nos nós de uma dada árvore de decisão binária).

Propriedade [QuickCheck] 9 A função $extLTree$ preserva as folhas da árvore de origem.

$$\begin{aligned} prop_pres_tips &:: Bdt\ Int \rightarrow Bool \\ prop_pres_tips &= tipsBdt \equiv tipsLTree \cdot extLTree \end{aligned}$$

2. $navLTree : LTree\ a \rightarrow ([Bool] \rightarrow LTree\ a)$ (navega um elemento de $LTree$ de acordo com uma sequência de respostas “sim ou não”. Esta função deve ser implementada como um catamorfismo de $LTree$. Neste contexto, elementos de $[Bool]$ representam sequências de respostas: o valor $True$ corresponde a “sim” e portanto a “segue pelo ramo da esquerda”; o valor $False$ corresponde a “não” e portanto a “segue pelo ramo da direita”.

Seguem alguns exemplos dos resultados que se esperam ao aplicar $navLTree$ a $(extLTree\ bdtGC)$, em que $bdtGC$ é a árvore de decisão binária acima descrita, e a uma sequência de respostas.

```
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) []
Fork (Leaf "Precisa",Fork (Leaf "Precisa",Leaf "N precisa"))
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) [False]
Fork (Leaf "Precisa",Leaf "N precisa")
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) [False,True]
Leaf "Precisa"
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) [False,True,True]
Leaf "Precisa"
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) [False,True,True,True]
Leaf "Precisa"
```

Propriedade [QuickCheck] 10 Percorrer uma árvore ao longo de um caminho é equivalente a percorrer a árvore inversa ao longo do caminho inverso.

$$\begin{aligned} prop_inv_nav &:: Bdt\ Int \rightarrow [Bool] \rightarrow Bool \\ prop_inv_nav\ t\ l &= \text{let } t' = extLTree\ t \text{ in} \\ &\quad invLTree\ (navLTree\ t'\ l) \equiv navLTree\ (invLTree\ t')\ (fmap\ \neg\ l) \end{aligned}$$

Propriedade [QuickCheck] 11 Quanto mais longo for o caminho menos alternativas de fim irão existir.

$$\begin{aligned} prop_af &:: Bdt\ Int \rightarrow ([Bool],[Bool]) \rightarrow Property \\ prop_af\ t\ (l1,l2) &= \text{let } t' = extLTree\ t \\ &\quad f = \text{length} \cdot tipsLTree \cdot (navLTree\ t') \\ &\quad \text{in } isPrefixOf\ l1\ l2 \Rightarrow (f\ l1 \geq f\ l2) \end{aligned}$$

Problema 4

Mónades são funtores com propriedades adicionais que nos permitem obter efeitos especiais em programação. Por exemplo, a biblioteca **Probability** oferece um mónade para abordar problemas de probabilidades. Nesta biblioteca, o conceito de distribuição estatística é captado pelo tipo

$$\text{newtype } Dist\ a = D\ \{ unD :: [(a, ProbRep)] \} \quad (1)$$

em que $ProbRep$ é um real de 0 a 1, equivalente a uma escala de 0 a 100%.

Cada par (a, p) numa distribuição $d :: \text{Dist } a$ indica que a probabilidade de a é p , devendo ser garantida a propriedade de que todas as probabilidades de d somam 100%. Por exemplo, a seguinte distribuição de classificações por escalões de A a E,



será representada pela distribuição

```
d1 :: Dist Char
d1 = D [('A', 0.02), ('B', 0.12), ('C', 0.29), ('D', 0.35), ('E', 0.22)]
```

que o **GHCI** mostrará assim:

```
'D' 35.0%
'C' 29.0%
'E' 22.0%
'B' 12.0%
'A' 2.0%
```

É possível definir geradores de distribuições, por exemplo distribuições *uniformes*,

```
d2 = uniform (words "Uma frase de cinco palavras")
```

isto é

```
"Uma" 20.0%
"cinco" 20.0%
"de" 20.0%
"frase" 20.0%
"palavras" 20.0%
```

distribuição *normais*, eg.

```
d3 = normal [10..20]
```

etc.⁴ Dist forma um **mónade** cuja unidade é $\text{return } a = D [(a, 1)]$ e cuja composição de Kleisli é (simplificando a notação)

$$(f \bullet g) a = [(y, q * p) \mid (x, p) \leftarrow g \ a, (y, q) \leftarrow f \ x]$$

em que $g : A \rightarrow \text{Dist } B$ e $f : B \rightarrow \text{Dist } C$ são funções **monádicas** que representam *computações probabilísticas*. Este mónade é adequado à resolução de problemas de *probabilidades e estatística* usando programação funcional, de forma elegante e como caso particular da programação monádica. Vamos estudar a aplicação deste mónade ao exercício anterior, tendo em conta o facto de que nem sempre podemos responder com 100% de certeza a perguntas presentes em árvores de decisão.

Considere a seguinte situação: a Anita vai trabalhar no dia seguinte e quer saber se precisa de levar guarda-chuva. Na verdade, ela tem autocarro de porta de casa até ao trabalho, e portanto as condições meteorológicas não são muito significativas; a não ser que seja segunda-feira... Às segundas é dia de feira e o autocarro vai sempre lotado! Nesses dias, ela prefere fazer a pé o caminho de casa ao trabalho, o que a obriga a levar guarda-chuva (nos dias de chuva). Abaixo está apresentada a árvore de decisão

⁴Para mais detalhes ver o código fonte de **Probability**, que é uma adaptação da biblioteca **PHP** ("Probabilistic Functional Programming"). Para quem quiser souber mais recomenda-se a leitura do artigo [1].

respectiva a este problema.



Assuma que a Anita não sabe em que dia está, e que a previsão da chuva para a ida é de 80% enquanto que a previsão de chuva para o regresso é de 60%. *A Anita deve levar guarda-chuva?* Para responder a esta questão, iremos tirar partido do que se aprendeu no exercício anterior. De facto, a maior diferença é que agora as respostas ("sim" ou "não") são dadas na forma de uma distribuição sobre o tipo de dados *Bool*. Implemente como um catamorfismo de *LTree* a função

$$bnavLTree :: LTree\ a \rightarrow ((BTree\ Bool) \rightarrow LTree\ a)$$

que percorre uma árvore dado um caminho, *não* do tipo $[Bool]$, mas do tipo $BTree\ Bool$. O tipo $BTree\ Bool$ é necessário na presença de incerteza, porque neste contexto não sabemos sempre qual a próxima pergunta a responder. Teremos portanto que ter resposta para todas as perguntas na árvore de decisão.

Seguem alguns exemplos dos resultados que se esperam ao aplicar *bnavLTree* a (*extLTree* *anita*), em que *anita* é a árvore de decisão acima descrita, e a uma árvore binária de respostas.

```

*ML> bnavLTree (extLTree anita) (Node(True, (Empty,Empty)))
Fork (Leaf "Precisa",Fork (Leaf "Precisa",Leaf "N precisa"))
*ML> bnavLTree (extLTree anita) (Node(True, (Node(True, (Empty,Empty)),Empty)))
Leaf "Precisa"
*ML> bnavLTree (extLTree anita) (Node(False, (Empty,Empty)))
Leaf "N precisa"

```

Por fim, implemente como um catamorfismo de *LTree* a função

$$pbnvLTree :: LTree\ a \rightarrow ((BTree\ (Dist\ Bool)) \rightarrow Dist\ (LTree\ a))$$

que deverá consistir na "monadificação" da função *bnavLTree* via a mónade das probabilidades. Use esta última implementação para responder se a Anita deve levar guarda-chuva ou não dada a situação acima descrita.

Problema 5

Os **mosaicos de Truchet** são padrões que se obtêm gerando aleatoriamente combinações bidimensionais de ladrilhos básicos. Os que se mostram na figura 5 são conhecidos por ladrilhos de Truchet-Smith. A figura 6 mostra um exemplo de mosaico produzido por uma combinação aleatória de 10x10 ladrilhos *a* e *b* (cf. figura 5).

Neste problema pretende-se programar a geração aleatória de mosaicos de Truchet-Smith usando o mónade **Random** e a biblioteca **Gloss** para produção do resultado. Para uniformização das respostas, deverão ser seguidas as seguintes condições:

- Cada ladrilho deverá ter as dimensões 80x80
- O programa deverá gerar mosaicos de quaisquer dimensões, mas deverá ser apresentado como figura no relatório o mosaico de 10x10 ladrilhos.
- Valorizar-se-ão respostas elegantes e com menos linhas de código **Haskell**.

No anexo B é dada uma implementação da operação de permuta aleatória de uma lista que pode ser útil para resolver este exercício.



Figura 5: Os dois ladrilhos de Truchet-Smith.



Figura 6: Um mosaico de Truchet-Smith.

Anexos

A Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2tex

Estudar o texto fonte deste trabalho para obter o efeito:⁵

$$\begin{aligned}
 id &= \langle f, g \rangle \\
 &\equiv \{ \text{universal property} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
 &\equiv \{ \text{identity} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
 &\square
 \end{aligned}$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* L^AT_EX **xymatrix**, por exemplo:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\text{in}} & 1 + \mathbb{N}_0 \\
 \downarrow \langle g \rangle & & \downarrow id + \langle g \rangle \\
 B & \xleftarrow{g} & 1 + B
 \end{array}$$

B Código fornecido

Problema 1

Função de representação de um dicionário:

```
dic_imp :: [(String, [String])] -> Dict
dic_imp = Term " " · map (bmap id singl) · untar · discollect
```

onde

```
type Dict = Exp String String
```

Dicionário para testes:

```
d :: [(String, [String])]
d = [("ABA", ["BRIM"]),
      ("ABALO", ["SHOCK"]),
      ("AMIGO", ["FRIEND"]),
      ("AMOR", ["LOVE"]),
      ("MEDO", ["FEAR"]),
      ("MUDO", ["DUMB", "MUTE"]),
      ("PE", ["FOOT"]),
      ("PEDRA", ["STONE"]),
      ("POBRE", ["POOR"]),
      ("PODRE", ["ROTTEN"])]
```

Normalização de um dicionário (remoção de entradas vazias):

```
dic_norm = collect · filter p · discollect where
  p (a, b) = a > " " ∧ b > " "
```

Teste de redundância de um significado *s* para uma palavra *p*:

```
dic_red p s d = (p, s) ∈ discollect d
```

⁵Exemplos tirados de [3].

Problema 2

Árvores usadas no texto:

```
emp x = Node (x, (Empty, Empty))
t7 = emp 7
t16 = emp 16
t7_10_16 = Node (10, (t7, t16))
t1_2_nil = Node (2, (emp 1, Empty))
t' = Node (5, (t1_2_nil, t7_10_16))
t0_2_1 = Node (2, (emp 0, emp 3))
t5_6_8 = Node (6, (emp 5, emp 8))
t2 = Node (4, (t0_2_1, t5_6_8))
dotBt :: (Show a) => BTree a -> IO ExitCode
dotBt = dotpict · bmap Just Just · cBTree2Exp · (fmap show)
```

Problema 3

Funções usadas para efeitos de teste:

```
tipsBdt :: Bdt a -> [a]
tipsBdt = cataBdt [singl, ( $\widehat{++}$ ) ·  $\pi_2$ ]
tipsLTree = tips
```

Problema 5

Função de permutação aleatória de uma lista:

```
permuta [] = return []
permuta x = do { (h, t) ← getR x; t' ← permuta t; return (h : t') } where
  getR x = do { i ← getStdRandom (randomR (0, length x - 1)); return (x !! i, retira i x) }
  retira i x = take i x ++ drop (i + 1) x
```

QuickCheck

Código para geração de testes:

```
instance Arbitrary a => Arbitrary (BTree a) where
  arbitrary = sized genbt where
    genbt 0 = return (inBTree $ i_1 ())
    genbt n = oneof [(liftM2 $ curry (inBTree · i_2))
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt (n - 1)) (genbt (n - 1))),
      (liftM2 $ curry (inBTree · i_2))
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt (n - 1)) (genbt 0)),
      (liftM2 $ curry (inBTree · i_2))
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt 0) (genbt (n - 1)))]
instance (Arbitrary v, Arbitrary o) => Arbitrary (Exp v o) where
  arbitrary = (genExp 10) where
    genExp 0 = liftM (inExp · i_1) QuickCheck.arbitrary
    genExp n = oneof [liftM (inExp · i_2 · ( $\lambda a \rightarrow (a, [])$ )) QuickCheck.arbitrary,
      liftM (inExp · i_1) QuickCheck.arbitrary,
      liftM (inExp · i_2 · ( $\lambda (a, (b, c)) \rightarrow (a, [b, c])$ ))
      $ (liftM2 (,) QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,)
        (genExp (n - 1)) (genExp (n - 1)))),
      liftM (inExp · i_2 · ( $\lambda (a, (b, c, d)) \rightarrow (a, [b, c, d])$ ))
      $ (liftM2 (,) QuickCheck.arbitrary (liftM3 (,,)
```

```

    (genExp (n - 1)) (genExp (n - 1)) (genExp (n - 1))))
  ]
orderedBTree :: Gen (BTree Int)
orderedBTree = liftM (foldr insOrd Empty) (QuickCheck.arbitrary :: Gen [Int])
instance (Arbitrary a) => Arbitrary (Bdt a) where
  arbitrary = sized genbt where
    genbt 0 = liftM Dec QuickCheck.arbitrary
    genbt n = oneof [(liftM2 $ curry Query)
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt (n - 1)) (genbt (n - 1))),
      (liftM2 $ curry (Query))
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt (n - 1)) (genbt 0)),
      (liftM2 $ curry (Query))
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt 0) (genbt (n - 1)))]

```

Outras funções auxiliares

Lógicas:

```

infixr 0 =>
  (=>) :: (Testable prop) => (a -> Bool) -> (a -> prop) -> a -> Property
  p => f = λa -> p a => f a
infixr 0 ⇔
  (⇔) :: (a -> Bool) -> (a -> Bool) -> a -> Property
  p ⇔ f = λa -> (p a => property (f a)) .&&. (f a => property (p a))
infixr 4 ≡
  (≡) :: Eq b => (a -> b) -> (a -> b) -> (a -> Bool)
  f ≡ g = λa -> f a ≡ g a
infixr 4 ≤
  (≤) :: Ord b => (a -> b) -> (a -> b) -> (a -> Bool)
  f ≤ g = λa -> f a ≤ g a
infixr 4 ∧
  (∧) :: (a -> Bool) -> (a -> Bool) -> (a -> Bool)
  f ∧ g = λa -> ((f a) ∧ (g a))

```

Compilação e execução dentro do interpretador:⁶

```
run = do { system "ghc cp1920t"; system "./cp1920t" }
```

C Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções aos exercícios propostos, de acordo com o “layout” que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

⁶Pode ser útil em testes envolvendo [Gloss](#). Nesse caso, o teste em causa deve fazer parte de uma função *main*.

Problema 1

Discollect

Para definir esta função utilizamos um catamorfismo que a cada par da lista o decompõe numa lista de pares, isto é seja $(1,[1,2])$ um par este seria decomposto na seguinte lista : $[(1,1),(1,2)]$.

$$\begin{array}{ccc}
 (A \times B^*)^* & \xrightarrow{\text{outList}} & 1 + (A \times B)^* \times (A \times B^*)^* \\
 \downarrow \llbracket [nil, (\widehat{++}) \cdot (k \times id)] \rrbracket & & \downarrow id + id \times \llbracket [nil, (\widehat{++}) \cdot (k \times id)] \rrbracket \\
 (A \times B)^* & \xleftarrow{\llbracket [nil, (\widehat{++}) \cdot (k \times id)] \rrbracket} & 1 + (A \times B)^* \times (A \times B)^*
 \end{array}$$

$discollect :: (Ord\ b, Ord\ a) \Rightarrow [(b, [a])] \rightarrow [(b, a)]$

$discollect = cataList\ g\ \textbf{where}$

$g = [nil, (\widehat{++}) \cdot (k \times id)]$

$k\ (a, b) = foldr\ (\lambda x\ acc \rightarrow (a, x) : acc)\ []\ b$

Dic.Exp / Tar

De modo a conseguirmos exportar um dicionário era necessário utilizar a função *dic_exp* que já se encontrava definida como um composição de funções (*collect . tar*), no entanto foi necessário definir a função *tar*, para isso utilizamos um catamorfismo que a cada letra de uma palavra a adicionava ao seu par(palavra/tradução).

$$\begin{array}{ccc}
 Exp\ String\ String & \xrightarrow{\text{outList}} & String + String \times (Exp\ String\ String)^* \\
 \downarrow \llbracket [f, k] \rrbracket & & \downarrow id + id \times \text{map}\ \llbracket [f, k] \rrbracket \\
 (String \times String)^* & \xleftarrow{\llbracket [f, k] \rrbracket} & String + String \times ((String \times String)^*)^*
 \end{array}$$

$dic_exp :: Dict \rightarrow [(String, [String])]$

$dic_exp = collect \cdot tar$

$tar :: Dict \rightarrow [(String, String)]$

$tar = cataExp\ g\ \textbf{where}$

$g = [f, k]$

$f = singl \cdot (,) \ \text{" "}$

$k\ (a, lst) = concatMap\ (\text{map}\ ((\widehat{++})\ a \times id))\ lst$

Dic_Rd

Neste exercício usamos um hilomorfismo, em que o anamorfismo vai percorrer a árvore e construir uma árvore com a palavra procurada e as respetivas traduções, enquanto que o catamorfismo irá devolver as traduções.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{String}^* & \xleftarrow{\text{traducoes}} & \text{String} + \text{String} \times ((\text{String})^*)^* \\
 \uparrow \llbracket \text{traducoes} \rrbracket & & \uparrow \text{id} + \text{id} \times \text{map } \llbracket \text{traducoes} \rrbracket \\
 \text{Exp String String} & \xleftarrow{\text{inExp}} & \text{String} + \text{String} \times (\text{Exp String String})^* \\
 \uparrow \llbracket \text{procura} \rrbracket & & \uparrow \text{id} + \text{id} \times \text{map } \llbracket \text{procura} \rrbracket \\
 \text{String} \times (\text{Exp String String}) & \xrightarrow{\text{procura}} & \text{String} + \text{String} \times (\text{String} \times (\text{Exp String String})^*)
 \end{array}$$

```

dic_rd :: String → (Exp String String) → Maybe [String]
dic_rd p t = hyloExp traducoes procura $ (p, t) where
  procura (p, Var o) = i1 o
  procura (p, Term o l) | length p ≡ 0 = i2 (o, k (p, []))
    | length o ≡ 0 = i2 (o, k (p, l))
    | singl (head p) ≡ o = i2 (o, k (tail p, l))
    | otherwise = i2 (o, [])
  k (a, b) = foldr (λx acc → (a, x) : acc) [] b
  traducoes = [Just · singl, h]
  h = Cp.cond ((≡) ([]) · nub · concat · catMaybes · π2) Nothing (Just · nub · concat · catMaybes · π2)

```

```

dic_in :: String → String → Dict → Dict
dic_in p t d = ⊥

```

Problema 2

Para todos os seguintes diagramas é de notar que $X = \text{BTree } A$.

maisDir e maisEsq

Para as funções "maisDir" e "maisEsq" procedeu-se de forma similar: empregou-se um catamorfismo ligeiramente distinto entre si a ambas as funções. Este, iterando sobre as sub-árvores da Binary Tree principal, procedia ao calculo do elemento mais à esquerda, no caso da função "maisEsq", ou mais à direita, no caso da "maisDir".

$$\begin{array}{ccc}
 \text{BTree } A & \xleftarrow{\text{inBTree}} & 1 + A + X^2 \\
 \text{maisDir} = \llbracket g \rrbracket \downarrow & & \downarrow \text{id} + \text{id} \times \text{maisDir}^2 \\
 \text{Maybe } a & \xleftarrow{g} & 1 + A \times M^2
 \end{array}$$

$\text{maisDir} = \text{cataBTree } g$
where $g = [\text{Nothing}, w]$
 $w(a, (-, \text{Nothing})) = \text{Just } a$
 $w(a, (-, \text{Just } b)) = \text{Just } b$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{BTree } A & \xleftarrow{\text{inBTree}} & 1 + A + X^2 \\
 \text{maisEsq} = \llbracket g \rrbracket \downarrow & & \downarrow \text{id} + \text{id} \times \text{maisEsq}^2 \\
 \text{Maybe } a & \xleftarrow{g} & 1 + A \times M^2
 \end{array}$$

$\text{maisEsq} = \text{cataBTree } g$
where $g = [\text{Nothing}, w]$
 $w(a, (\text{Nothing}, -)) = \text{Just } a$
 $w(a, (\text{Just } b, -)) = \text{Just } b$

insOrd e isOrd

Para ambas as funções seguimos o conselho dado no enunciado. Simplificamos o problema, dividindo-o, e definimos em insOrd' e isOrd' os catamorfismos que iteram sobre a árvore binária principal. Para o caso da insOrd retira-se do catamorfismo a árvore original modificada com o novo elemento adicionado, enquanto que na isOrd retira-se o Bool que indica se a árvore está, ou não, convenientemente ordenada.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{BTree } A & \xleftarrow{\text{inBTree}} & 1 + A + X^2 \\
 \text{insOrd}' = \llbracket g \rrbracket \downarrow & & \downarrow \text{id} + \text{id} \times \text{insOrd}'^2 \\
 X \times X & \xleftarrow{g} & 1 + A \times (X \times X)^2
 \end{array}$$

$\text{insOrd } a \ x = \pi_1 \$ \text{insOrd}' a \ x$
 $\text{insOrd}' x = \text{cataBTree } g$
where $g = [(\text{Node } (x, (\text{Empty}, \text{Empty})), \text{Empty}), w]$
 $w(a, ((\text{subesq}, \text{subesqog}), (\text{subdir}, \text{subdirog})))$
 $\quad | x < a = ((\text{Node } (a, (\text{subesq}, \text{subdirog}))), (\text{Node } (a, (\text{subesqog}, \text{subdirog}))))$
 $\quad | x > a = ((\text{Node } (a, (\text{subesqog}, \text{subdir}))), (\text{Node } (a, (\text{subesqog}, \text{subdirog}))))$

$| \text{otherwise} = ((\text{Node } (a, (\text{subesqog}, \text{subdirog}))), (\text{Node } (a, (\text{subesqog}, \text{subdirog}))))$
 $\text{isOrd} = \pi_1 \cdot \text{isOrd}'$

$$\begin{array}{ccc} \text{BTree } A & \xleftarrow{\text{inBTree}} & 1 + A + X^2 \\ \downarrow \text{isOrd}' = \langle g \rangle & & \downarrow \text{id} + \text{id} \times \text{isOrd}'^2 \\ (\text{Bool} \times X) & \xleftarrow{g} & 1 + A \times (\text{Bool} \times X)^2 \end{array}$$

$\text{isOrd}' = \text{cataBTree } g$

where $g = [(\text{True}, \text{Empty}), c]$

$c(a, ((\text{False}, b2), (c1, c2))) = (\text{False}, \text{Node } (a, (b2, c2)))$

$c(a, ((b1, b2), (\text{False}, c2))) = (\text{False}, \text{Node } (a, (b2, c2)))$

$c(a, ((\text{True}, b2), (\text{True}, c2))) = \text{case } (\text{maisDir } b2, \text{maisEsq } c2) \text{ of}$

$(\text{Nothing}, \text{Nothing}) \rightarrow (\text{True}, \text{Node } (a, (b2, c2)))$

$(\text{Just } x, \text{Nothing}) \rightarrow (x \leq a, \text{Node } (a, (b2, c2)))$

$(\text{Nothing}, \text{Just } x) \rightarrow (x \geq a, \text{Node } (a, (b2, c2)))$

$(\text{Just } x, \text{Just } y) \rightarrow (x \leq a \wedge y \geq a, \text{Node } (a, (b2, c2)))$

lrot e rrot

Ambas as funções foram escritas seguindo as instruções do enunciado. Read-and-code.

$\text{rrot } a @ (\text{Node } (rz, (\text{Empty}, tr))) = a$

$\text{rrot } a @ (\text{Node } (rz, (\text{Node } (l, (ll, lr)), tr))) = \text{Node } (l, (ll, \text{Node } (rz, (lr, tr))))$

$\text{lrot } a @ (\text{Node } (rz, (tl, \text{Empty}))) = a$

$\text{lrot } a @ (\text{Node } (rz, (tl, \text{Node } (r, (rl, rr)))) = \text{Node } (r, (\text{Node } (rz, (tl, rl)), rr))$

Splay

Uso do flip é para converter a tipagem de $[\text{Bool}] \rightarrow (\text{BTree } a \rightarrow \text{BTree } a)$ para $\text{BTree } a \rightarrow [\text{Bool}] \rightarrow \text{BTree}$. O diagrama seguinte é representativo do catamorfismo usado na função splay.

$$\begin{array}{ccc} \text{BTree } A & \xleftarrow{\text{inBTree}} & 1 + A \times X^2 \\ \downarrow \langle g \rangle & & \downarrow \text{id} + \text{id} \times \langle g \rangle^2 \\ X^{\text{Bool}*} & \xleftarrow{g} & 1 + A \times (X^{\text{Bool}*})^2 \end{array}$$

$\text{splay } l \ t = (\text{flip } \text{cataBTree } t \ g) \ l$

where $g = [\lambda x \rightarrow \text{Empty}, \text{curry } k]$

$k((\text{raiz}, (t1, t2)), l) = \text{if length } l \equiv 0$

then $\text{Node } (\text{raiz}, ((t1 \ l), (t2 \ l)))$

else if $\text{head } l$ **then** $\text{rrot } \$ \text{Node } (\text{raiz}, ((t1 \ (\text{tail } l)), (t2 \ [])))$

else $\text{lrot } \$ \text{Node } (\text{raiz}, ((t1 \ []), (t2 \ (\text{tail } l))))$

Problema 3

Definições Base

```

inBdt = [Dec, Query]
outBdt (Dec a) = i1 a
outBdt (Query (s, (q1, q2))) = i2 (s, (q1, q2))
baseBdt f g h = f + (g × (h × h))
recBdt f = baseBdt id id f
cataBdt g = g · (recBdt (cataBdt g)) · outBdt
anaBdt g = inBdt · (recBdt (anaBdt g)) · g
-- bdt testes
bdtGC :: Bdt [Char]
bdtGC = Query ("Chuva na ida?", (Dec "Precisa",
  Query ("Chuva no regresso",
    (Dec "Precisa", Dec "N precisa"))))

```

Diagrama AnaBdt

$$\begin{array}{ccc}
 Bdt\ A & \xleftarrow{inBdt} & A + String \times (Bdt\ A)^2 \\
 \uparrow \llbracket g \rrbracket & & \uparrow id + id \times \llbracket g \rrbracket^2 \\
 C & \xrightarrow{g} & A + String \times C^2
 \end{array}$$

ExtLTree

Neste exercicio usamos um catamorfismo que irá transformar um Bdt a numa LTree

$$\begin{array}{ccc}
 Bdt\ A & \xrightarrow{outBdt} & A + String \times Bdt\ A^2 \\
 \downarrow \llbracket [Leaf, Fork \cdot \pi_2] \rrbracket & & \downarrow id + id \times \text{map } \llbracket [Leaf, Fork \cdot \pi_2] \rrbracket \\
 LTree\ A & \xleftarrow{[Leaf, Fork \cdot \pi_2]} & A + String \times (Ltree\ A)^2
 \end{array}$$

```

extLTree :: Bdt a → LTree a
extLTree = cataBdt g where
  g = [Leaf, Fork · π2]

```

navLTree

Neste exercício usamos um catamorfismo que irá percorrer uma lista de boolean, de forma a ter a lista no catamorfismo usamos o curry, assim, este catamorfismo irá retornar uma função.

$$\begin{array}{ccc}
 LTree\ A & \xrightarrow{outBdt} & A + (LTree\ A)^2 \\
 \downarrow \llbracket [g1, g2] \rrbracket & & \downarrow id + \llbracket [g1, g2] \rrbracket \\
 LTree\ A^{Bool^*} & \xleftarrow{[g1, g2]} & A + (LTree\ A^{Bool^*})^2
 \end{array}$$

```

navLTree :: LTree a → ([Bool] → LTree a)
navLTree lt lstB = (cataLTree g lt) lstB where

```

```

g = [curry g1, curry g2]
g1 = Leaf · π1
g2 ((l, r), lst) | length lst ≡ 0 = Fork (l lst, r lst)
  | head lst ≡ True = l $ tail $ lst
  | otherwise = r $ tail $ lst

```

Problema 4

bnavLtree

Neste exercício o raciocínio foi identico ao último exercício do problema anterior só que desta vez o catamorfismo irá consumir uma BTree Bool.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{LTree } A & \xrightarrow{\text{outBdt}} & A + (\text{LTree } A)^2 \\
 \downarrow \llbracket [g1, g2] \rrbracket & & \downarrow \text{id} + \llbracket [g1, g2] \rrbracket \\
 \text{LTree } A^{\text{BTree Bool}} & \xleftarrow{\llbracket [g1, g2] \rrbracket} & A + (\text{LTree } A^{\text{BTree Bool}})^2
 \end{array}$$

```

bnavLTree lt bt = (cataLTree g lt) bt
  where g = [curry g1, curry g2]
        g1 (a, _) = Leaf a
        g2 ((l, r), Empty) = Fork (l Empty, r Empty)
        g2 ((l, r), Node (rz, (Empty, Empty))) | rz ≡ True = l $ Empty
          | rz ≡ False = r $ Empty
        g2 ((l, r), Node (rz, (t1, Empty))) | rz ≡ True = l $ t1
          | rz ≡ False = r $ t1
        g2 ((l, r), Node (rz, (Empty, t2))) | rz ≡ True = l $ t2
          | rz ≡ False = r $ t2

```

```

pbnaveLTree lt bt = cataLTree g lt bt
  where g = ⊥
  -- bdt testes
anita :: Bdt [Char]
anita = Query ("2a-feira?", (Query ("Chuva na ida?",
  (Dec "Precisa", Query ("Chuva no regresso",
    (Dec "Precisa", Dec "N precisa"))), Dec "N precisa"))

```

Problema 5

GeraMosaicos e geraLista

Ambas as funções são feitas para resolver dois problemas. Um para gerar mosaicos, que neste caso já é feito de forma aleatória graças à função `Random` e outra gera as coordenadas corretas que serão atribuídas a cada a cada mosaico para assim estarem corretamente dispostas.

```
truchet1 = Pictures [put (0,80) (Arc (-90) 0 40), put (80,0) (Arc 90 180 40)]
truchet2 = Pictures [put (0,0) (Arc 0 90 40), put (80,80) (Arc 180 (-90) 40)]
geraMosaicos :: Int → IO [Picture]
geraMosaicos x = replicateM x (fmap f $ randomRIO (0 :: Integer, 1 :: Integer))
  where f a = if a == 0 then truchet1 else truchet2
geraLista :: (Int, Int) → [(Int, Int)]
geraLista (x, y) = map f $ [(a, b) | a <- [0..x-1], b <- [0..y-1]]
  where (se1, se2) = (x * (-40), y * (-40))
        f (i, j) = (se1 + (i * 80), se2 + (j * 80))
```

geraTruchet e monadCompo

Esta fase da resolução remete-se a resolver 2 problemas. Primeiro, ligar cada mosaico às coordenadas correspondentes e finalmente, inferir os tipos monádicos corretos para poder gerar a imagem. A imagem é gerada graças à função `monadCompo`.

```
geraTruchet :: (Int, Int) → IO [Picture]
geraTruchet (a, b) = fmap pictures $ M.join $ fmap (permuta · map \p → \put → liftM2 zip posicoes mosaicos) $ liftM2 zip posicoes mosaicos
  where mosaicos = geraMosaicos (a * b)
        posicoes = return $ map (toFloat × toFloat) $ geraLista (a, b)
monadCompo :: (Int, Int) → IO ()
monadCompo = geraTruchet >=> display janela white
  -- janela para visualizar:
janela = InWindow
  "Truchet "    -- window title
  (800, 800)    -- window size
  (100, 100)    -- window position
  -- defs auxiliares -----
put = Translate
--
```

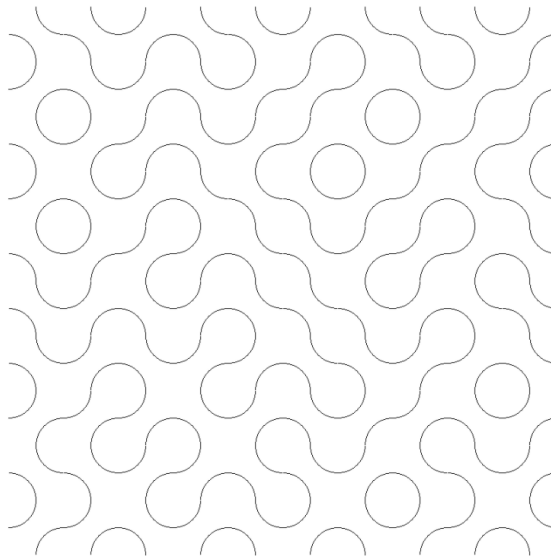


Figura 7: Um dos mosaicos gerados

Índice

L^AT_EX, [1](#)

bibtex, [2](#)

 lhs2TeX, [1](#)

 makeindex, [2](#)

Combinador “pointfree”

cata, [11](#)

either, [12](#)

Cálculo de Programas, [1](#), [2](#)

 Material Pedagógico, [1](#)

 BTree.hs, [3](#)

Functor, [4](#), [6–9](#), [12](#), [13](#)

Função

π_1 , [11](#)

π_2 , [11](#), [12](#)

length, [7](#), [12](#)

map, [11](#)

uncurry, [12](#), [14](#)

Haskell, [1](#), [2](#), [6](#), [9](#)

 “Literate Haskell”, [1](#)

 Biblioteca

 PFP, [8](#)

 Probability, [7](#), [8](#)

 Gloss, [2](#), [9](#), [13](#)

 interpretador

 GHCi, [2](#), [8](#)

 Monad

 Random, [9](#)

 QuickCheck, [2](#)

Mosaico de Truchet, [9](#)

Números naturais (\mathbb{N}), [11](#)

Programação literária, [1](#)

U.Minho

 Departamento de Informática, [1](#)

Referências

- [1] M. Erwig and S. Kollmansberger. Functional pearls: Probabilistic functional programming in Haskell. *J. Funct. Program.*, 16:21–34, January 2006.
- [2] D.E. Knuth. *Literate Programming*. CSLI Lecture Notes Number 27. Stanford University Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, USA, 1992.
- [3] J.N. Oliveira. *Program Design by Calculation*, 2018. Draft of textbook in preparation. viii+297 pages. Informatics Department, University of Minho.