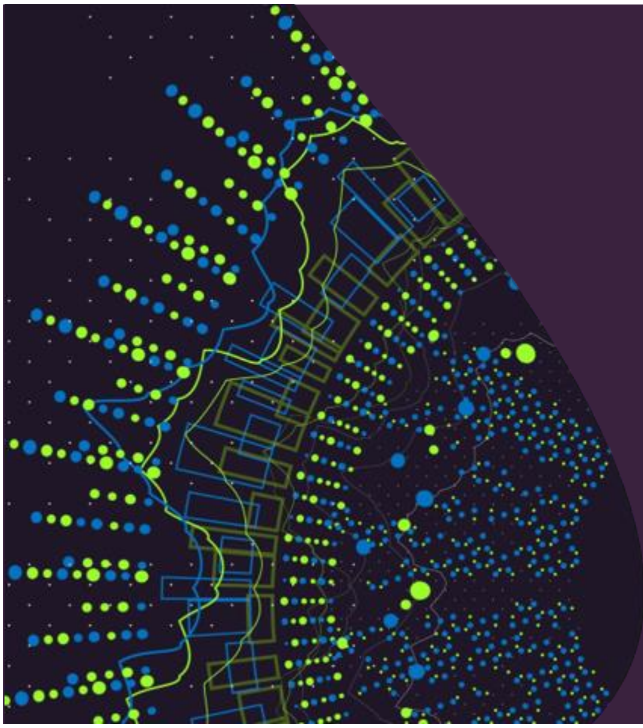


Mecânica e Campo Eletromagnético

16 Nov 2021

Aula - Movimento oscilatório

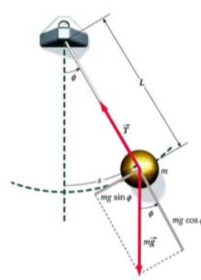
- Movimento harmónico simples
- Movimento amortecido
- Movimento forçado
- Exemplos

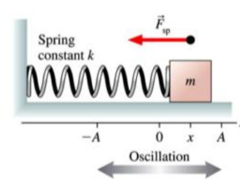
Isabel Malaquias
imalaquias@ua.pt
Gab. 13.3.16

1

1

Movimento Harmónico Simples (MHS)

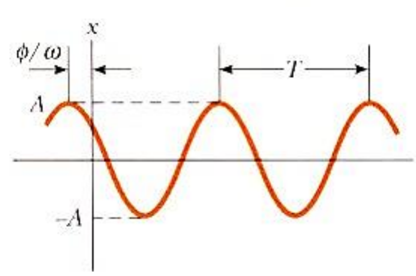




Se a força que atua sobre um corpo:

- é proporcional ao deslocamento em relação à posição de equilíbrio
- aponta sempre para a posição de equilíbrio

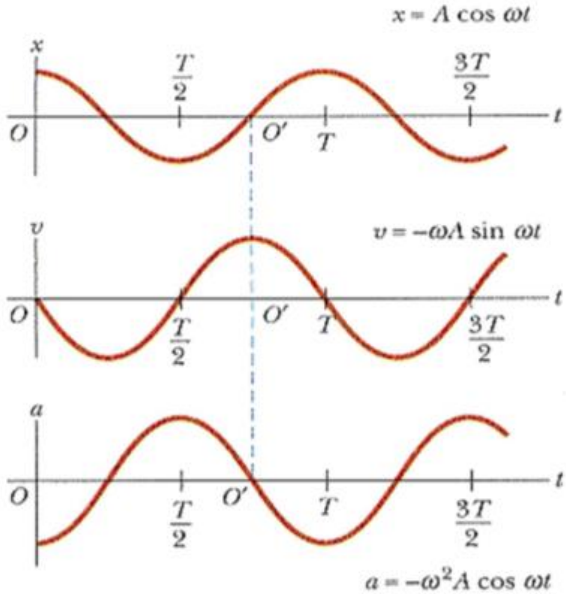
$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$



O corpo tem movimento **periódico**, **harmónico**, **oscilatório** ou **vibratório**

Ex: Bloco preso a uma mola, baloiço (pêndulo), corda a vibrar, moléculas a vibrar num sólido, etc...

$\omega = 2\pi f$ (rad/s)



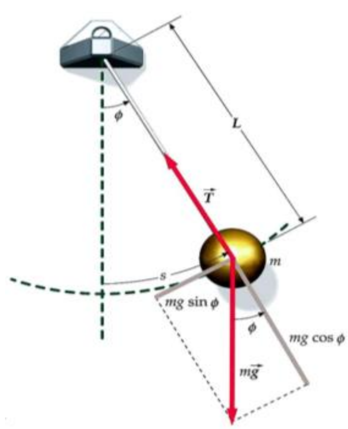
Pêndulo simples

Força restauradora:

$-mg\sin\phi$

aceleração tangencial:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = L\frac{d^2\phi}{dt^2}$$



$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\phi \approx -\frac{g}{L}\phi \quad \text{se} \quad \phi \ll 1$$

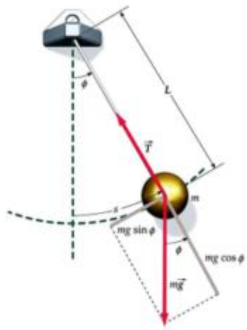
$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\omega^2\phi \quad \text{com} \quad \omega^2 = \frac{g}{L}$$

$$-mg\sin\phi = m\frac{d^2s}{dt^2} = mL\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

solução: $\phi = \phi_0\cos(\omega t + \delta)$

Pêndulo simples

Para pequenas oscilações, tem-se:



eq. movimento:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\omega^2\phi \quad \text{com} \quad \omega^2 = \frac{g}{L}$$

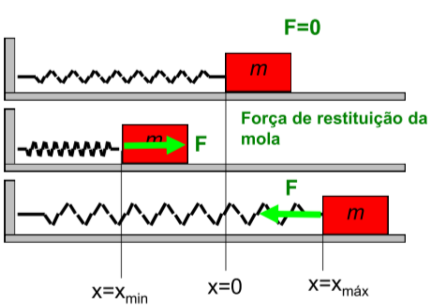
solução:

$$\phi = \phi_0 \cos(\omega t + \delta)$$

período:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Sistema massa-mola



F: Força restauradora

$$F = -kx$$

k: constante da mola

Equação do movimento

$$F = -kx = ma_x \Rightarrow a_x = -\frac{k}{m}x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

definimos $\omega^2 = \frac{k}{m}$ or $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

ω: frequência angular (radianos/s)

Energia no Movimento Harmónico Simples (MHS)

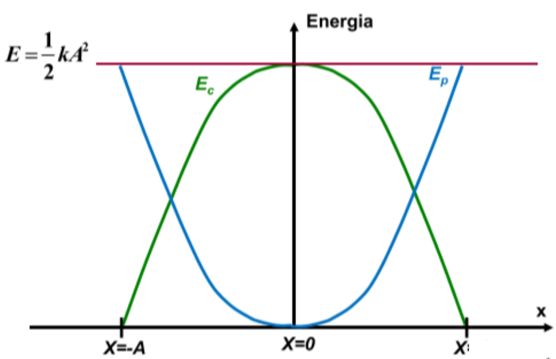
Num M.H.S. a Energia Mecânica é constante: $E = \frac{1}{2}kA^2$

Energia potencial elástica: $E_{Pe} = \frac{1}{2}kx^2$

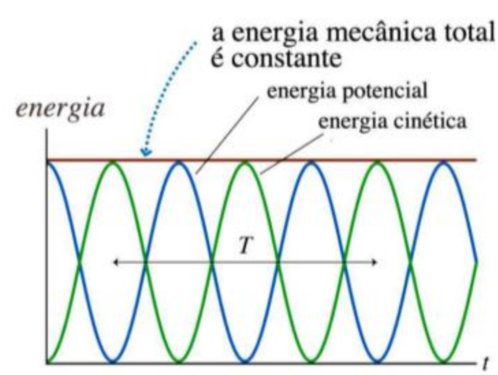
$E_{pe}(0)=0$ (posição de equilíbrio)

Energia cinética: $E_c = E - E_{pe} = \frac{1}{2}k\left(A^2 - x^2\right)$

Energia no MHS em função de x

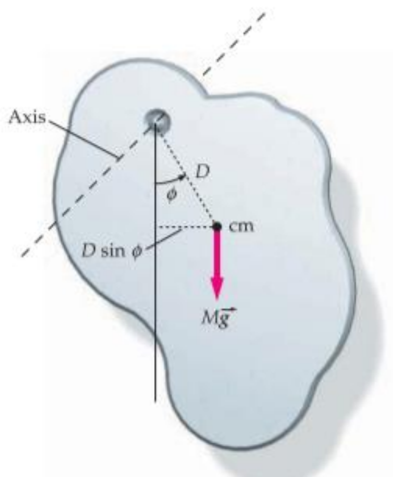


Energia no MHS em função de t



$$E = \tfrac{1}{2}mv_x^{\ 2} + \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}mv_{\max}^{\ 2} = \text{constante}$$

Pêndulo físico ou Pêndulo composto



$$\tau = -Mg\ D\ sen\Phi \approx -MgD\Phi$$

Para pequenos ângulos
$\boldsymbol{sen\Phi \approx \Phi}$

$$\tau = I\ \alpha = -MgD\ \Phi$$

com $\alpha = \frac{d^2\Phi}{dt^2}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}}$$

NB - O período do pêndulo físico depende da distribuição de massa, mas não da massa total, M. O momento de inércia I é proporcional a M, pelo que <u>a razão I/M é independente de M</u>

Oscilador amortecido

Na realidade, na ausência de forças externas, a <u>amplitude</u> de um oscilador diminui no tempo, devido a forças dissipativas (atrito, viscosidade, etc.).

Se *A* diminui, a Energia Mecânica diminui também:

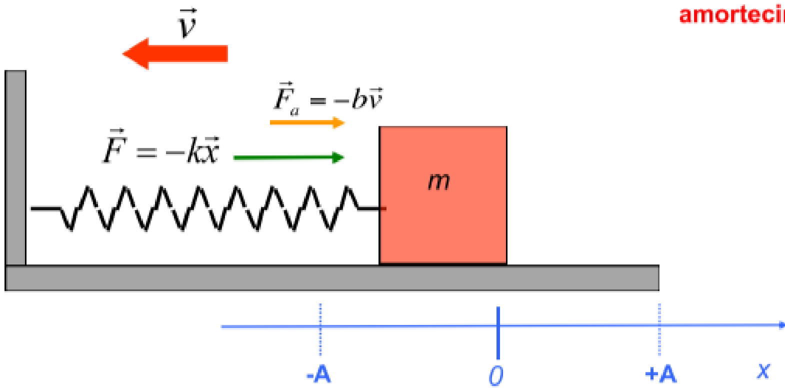
$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

Diz-se que o movimento é **amortecido**

Exemplo de força dissipativa: $\vec{F}_a = -b\vec{v}$

Força devida à viscosidade de um fluido

Coeficiente de amortecimento



$$\sum F = -kx - bv = -kx - b\frac{dx}{dt} = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

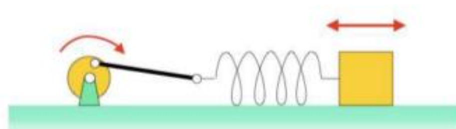
com

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \gamma = \frac{b}{2m}}$$

8 Um pêndulo 1 m de comprimento é largado com um ângulo de 15,0 °. Após 1000 s, a sua amplitude foi reduzida para 5,5 °. Qual é o coeficiente de amortecimento?

13 Um pêndulo simples tem um período de 2 s e uma amplitude de 2 °. Depois de 10 oscilações completas, a sua amplitude foi reduzida para 1,5 °. Calcular o coeficiente de amortecimento. Discuta a influência da viscosidade do ar no período do pêndulo.

Oscilador Forçado



“mola” ligada a um “motor”

Oscilador Forçado

- Para manter um sistema a oscilar na presença de forças dissipativas, temos de fornecer energia, aplicando uma força externa. Ao fim de algum tempo, o movimento terá a frequência da força externa.
- Nessa altura, a energia fornecida (numa oscilação) será igual à dissipada, a amplitude mantém-se constante, e o seu valor depende da frequência externa.

Este movimento designa-se

Oscilação Forçada

Equações do movimento

Força externa:

$$\underbrace{F_{ext} = F_0 \cos \omega t}$$

frequência angular da força externa (ω)

2ª Lei de Newton:

$$\sum F = F_0 \cos \omega t - b\frac{dx}{dt} - kx = ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

amortec. ($-b\frac{dx}{dt}$); força elástica ($-kx$)

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos \omega t}$$

com

$$\boxed{\gamma = \frac{b}{2m}}$$

Solução geral

$$\boxed{\text{solução:} \quad x(t) = x_t(t) + x_p(t)}$$

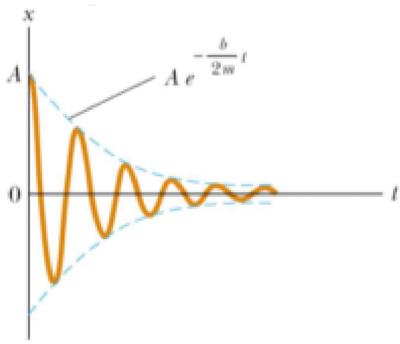
solução transiente:

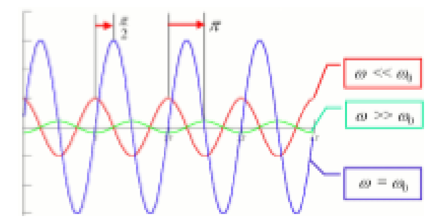
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

+

solução permanente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$





17

Solução permanente

$$\boxed{x_p(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$$

com $A = \dfrac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$ amplitude

$\delta = \arctan\dfrac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ desfasamento entre a posição x e a força

$$0 \le \delta \le \pi$$

19

Oscilador Forçado

Força externa: $F_{ext}(t) = F_0 \cos(\omega t)$

Posição: $x_p(t) = A\cos(\omega t - \delta)$

Mesma frequência!

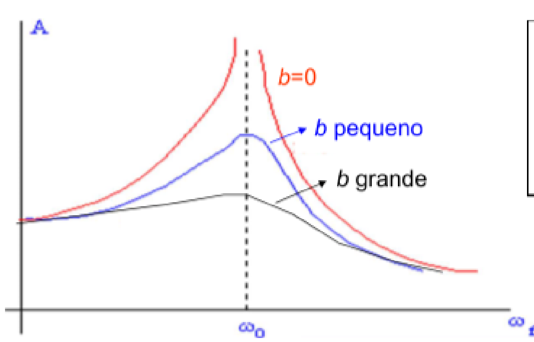
$$\text{Amplitude: } A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ressonância no oscilador forçado

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \Rightarrow$$

A é máximo quando $\omega \approx \omega_0$ $\Rightarrow$ **ressonância**



Na ausência de amortecimento

$A \longrightarrow \infty$

quando $\omega \longrightarrow \omega_0$

Sobre a energia

Considerando a solução permanente:

na ressonância:

- energia dissipada máxima
- trabalho realizado pelo motor máximo
- energia mecânica do oscilador máxima

nota: num período
energia dissipada pelo atrito = trabalho realizado pelo motor

22

The Tacoma
Narrows Bridge Collapse

1940

https://youtu.be/7saC-DnQ9Rc?t=36

A Ponte do Estreito de Tacoma caiu em 1940, devido a torques vibracionais induzidos pelo vento, fazendo a ponte oscilar com $\omega \approx$ frequência de ressonância!

23