

# Mecânica e Campo Eletromagnético

30 Nov 2021

Cap. 3 – Potencial eléctrico. Energia potencial. Teorema de Gauss

- Exemplos

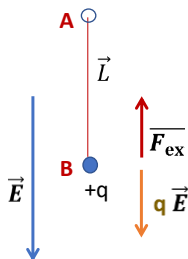
Isabel Malaquias  
[imalaquias@ua.pt](mailto:imalaquias@ua.pt)  
 Gab. 13.3.16

1

1

## Potencial eléctrico

**Potencial eléctrico num ponto** - é o trabalho externo necessário para trazer uma carga unitária, positiva, da posição de potencial zero até esse ponto, com velocidade constante



### DESLOCAMENTO PARALELO AO CAMPO ELÉCTRICO

$$W_{\text{ext}} = \Delta EP = EP_f - EP_i \quad \text{EC é constante}$$

$$\Delta V = \frac{\Delta EP}{q}$$

$$W_{\text{ext}} = q\Delta V = q(V_f - V_i)$$

$$V_i = 0 \quad \text{no infinito}$$

$$V_f = \frac{W_{\text{ext}}}{q}$$

MCE\_IM\_2021-2022

2

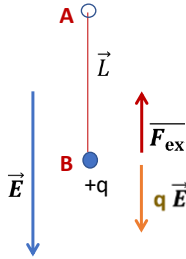
2

## Potencial eléctrico

### DESLOCAMENTO PARALELO AO CAMPO ELÉCTRICO

$$\Delta V = - \int_A^B \frac{\vec{F}_{ext}}{q} d\vec{L} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{L}$$

O deslocamento de A até B é paralelo ao campo eléctrico constante



$$\Delta V = - E \int_A^B d\vec{L}$$

$$\Delta V = - E L$$

A diferença de potencial  
é negativa ( $< 0$ )

A **variação da Energia Potencial**  
correspondente será dada por

$$\Delta EP = EP_B - EP_A = - qEL$$

i. é, quando uma **carga positiva** se desloca no sentido positivo do campo eléctrico a sua **energia potencial diminui**

MCE\_IM\_2021-2022

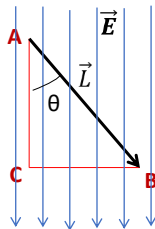
3

3

## Potencial eléctrico

### DESLOCAMENTO NÃO PARALELO AO CAMPO ELÉCTRICO

$$\Delta V_{AB} = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{L}$$



$$\Delta V_{AB} = \Delta V_{CA} + \Delta V_{BC} = - EL + 0$$

$$\Delta V = - E L \cos \theta$$

O percurso  $\overline{CB}$  é perpendicular ao campo eléctrico = zero

O campo eléctrico é conservativo.

**Porquê?**

MCE\_IM\_2021-2022

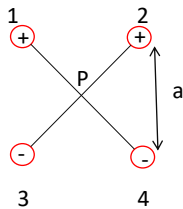
4

4

5. Quatro cargas  $+q, +q, -q, -q$  estão colocadas nos vértices dum quadrado de lado  $a$ .
- a) Determine, para os dois casos de distribuição das cargas, o campo elétrico e o potencial no centro do quadrado.
- b) Escolha uma linha apropriada e verifique que  $\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

**a) Potencial eléctrico no centro do quadrado ?**

O potencial é uma grandeza escalar.



$$V_P = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{L} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

$$V_P = \sum_i V_i = 0$$

MCE\_IM\_2021-2022

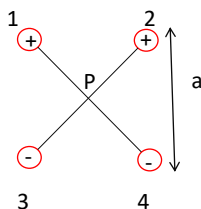
5

5

5. Quatro cargas  $+q, +q, -q, -q$  estão colocadas nos vértices dum quadrado de lado  $a$ .
- a) Determine, para os dois casos de distribuição das cargas, o campo elétrico e o potencial no centro do quadrado.
- b) Escolha uma linha apropriada e verifique que  $\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

**a) Campo eléctrico no centro do quadrado ?**

**Caso 1**

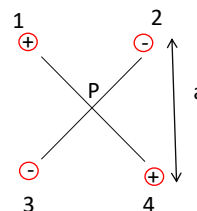


$$\vec{E}_P = \vec{0}$$

$$\vec{E}_P = \sum_i \vec{E}_i$$

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

**Caso 2**



$$\vec{E}_P = \frac{q}{\pi\epsilon_0 a^2} \hat{r}$$

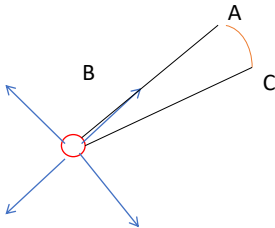
direcção e sentido de 1 para 4

MCE\_IM\_2021-2022

6

6

5. b) Escolha uma linha apropriada e verifique que  $\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$



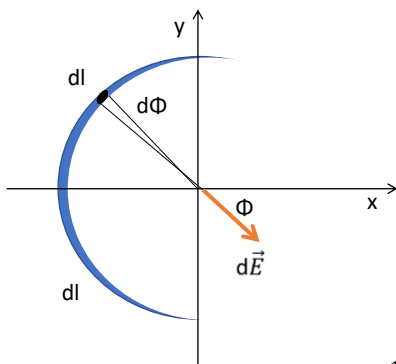
$$W = q V = q \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

MCE\_IM\_2021-2022

7

7

8. Um fio semi-circular de raio  $R$  está uniformemente carregado com uma carga total  $Q$ . Encontre o vetor campo elétrico no centro de curvatura.



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

$$dq = \lambda dl$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl \cos\Phi}{R^2}$$

$$dl = R d\Phi$$

$$E_x = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \frac{\lambda R d\Phi \cos\Phi}{R^2}$$

$$\vec{E}_{T,x} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \hat{i}$$

$$\vec{E}_{T,x} = \frac{Q}{2\pi 2\epsilon_0 R^2} \hat{i}$$

$$Q = \lambda l = \lambda R \pi$$

MCE\_IM\_2021-2022

8

8

## Função potencial

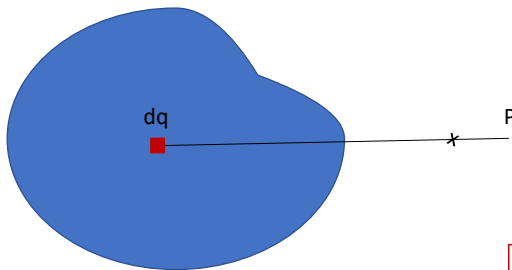
O campo eléctrico será dado por

$$V(x,y,z) = - \int_A^B \vec{E}(x,y,z) d\vec{r}$$

$$E_x = - \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}$$

$$E_y = - \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y}$$

$$E_z = - \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}$$



$$\vec{E} = -\text{grad } V = -\vec{\nabla} V$$

MCE\_IM\_2021-2022

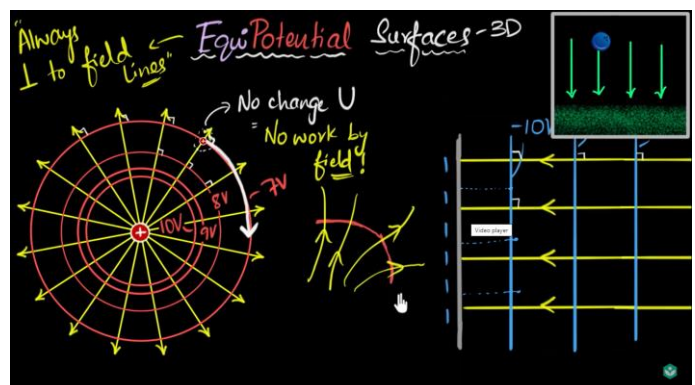
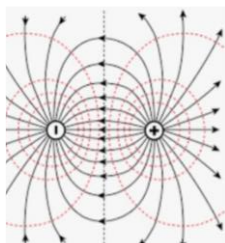
9

9

## SUPERFÍCIES EQUIPOTENCIAIS

O que são e que propriedades têm?

- superfícies que contêm pontos com potencial igual
- as linhas do campo eléctrico são perpendiculares às superfícies equipotenciais
- o trabalho realizado para deslocar uma carga entre quaisquer pontos de uma superfície equipotencial é nulo



[Equipotential surfaces \(& why they are perpendicular to field\) | Electric potential | Khan Academy - Bing video](#)

MCE\_IM\_2021-2022

10

10

## FLUXO ELÉCTRICO

O fluxo eléctrico  $\Phi_E$  através de uma superfície  $S$  é proporcional ao número de linhas de campo eléctrico que atravessam essa superfície

Com um **campo eléctrico uniforme** tem-se

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

Com um **campo eléctrico não uniforme, ou com uma superfície não plana** tem-se

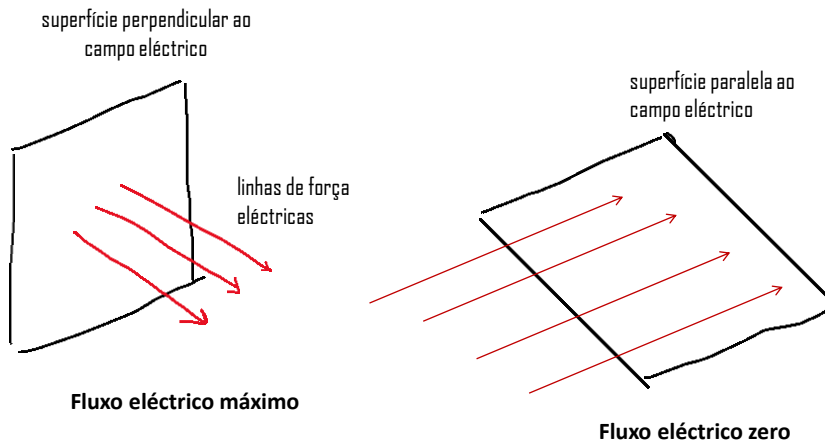
$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$d\vec{S}$  é um vector perpendicular a cada elemento de superfície

MCE\_IM\_2021-2022

11

11



12

## LEI DE GAUSS

O fluxo total  $\Phi_E$  através de **uma superfície fechada** é igual à carga total  $Q$  encerrada pela superfície vezes  $\frac{1}{\epsilon_0}$

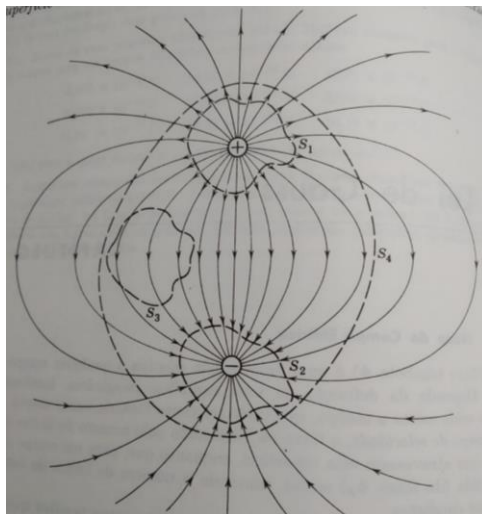
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

A aplicação da lei de Gauss implica que conheçamos primeiramente a superfície em questão.

MCE\_IM\_2021-2022

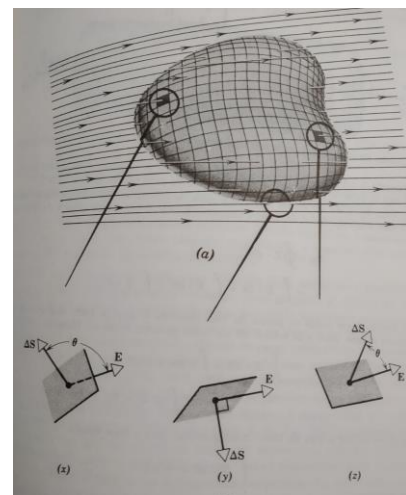
13

13



As superfícies a tracejado representam superfícies idealizadas imersas na região do campo eléctrico.  
In Halliday & Resnick, *Física*, II-1, 1974

MCE\_IM\_2021-2022

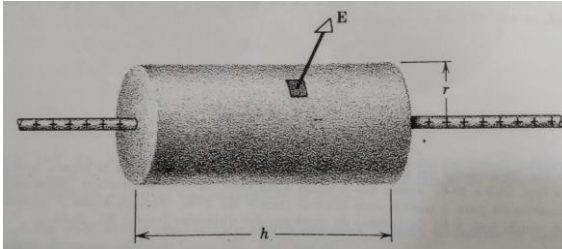


Superfície idealizada imersa num campo eléctrico e visão ampliada de 3 elementos da área da superfície. In Halliday & Resnick, *Física*, II-1, 1974

14

14

## LEI DE GAUSS



Fio infinito carregado, mostrando uma superfície gaussiana cilíndrica. In Halliday & Resnick, *Física*, II-1, 1974

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



$$E \cdot 2\pi r h = \lambda h / \epsilon_0$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

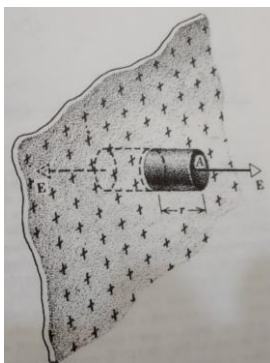
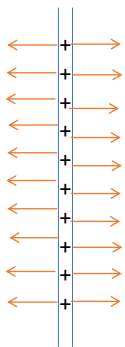
$E$  aponta para fora da linha de cargas, se estas forem positivas

MCE\_IM\_2021-2022

15

15

## LEI DE GAUSS



$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



$$2 \cdot E \cdot A = \sigma A / \epsilon_0$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

O valor de  $E$  é o mesmo para todos os pontos, de ambos os lados do plano da chapa.


MCE\_IM\_2021-2022

16

16

FIO INFINITO CARREGADO UNIFORMEMENTE, com densidade linear de carga,  $\lambda$ 

Q1. Achar uma expressão para o valor de  $E$  a uma distância  $r$  do fio


1º - arranjar uma superfície gaussiana apropriada  cilindro de raio  $r$

A carga abrangida pela superfície gaussiana é igual a  $\lambda h$

$$Q = \lambda h$$

PLANO INFINITO CARREGADO UNIFORMEMENTE, com densidade superficial de carga,  $\sigma$ 

Q1. Achar uma expressão para o valor de  $E$  a uma distância  $r$  do plano

1º - arranjar uma superfície gaussiana apropriada  cilindro de raio  $r$

2º O campo eléctrico é perpendicular ao plano das bases do cilindro

 não há contribuição para o fluxo da superfície lateral

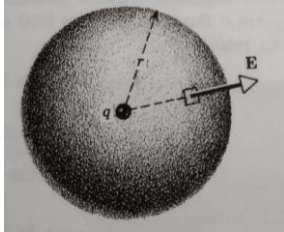
A carga abrangida pela superfície gaussiana é igual a  $\sigma A$

$$Q = \sigma A$$



## LEI DE GAUSS

Superfície gaussiana esférica de raio  $r$ , envolvendo uma CARGA PONTUAL  $Q$



Superfície gaussiana esférica de raio  $r$  envolvendo uma carga puntiforme. In Halliday & Resnick, *Física*, II-1, 1974

A lei de Coulomb pode ser obtida a partir da Lei de Gauss

Escolhamos uma superfície esférica, de raio  $r$ , centrada na carga puntual.

Vantagem desta escolha: - o campo elétrico, por simetria, tem a mesma intensidade e direção normal em todos os pontos da superfície

$$\vec{E} // d\vec{S}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = Q / \epsilon_0$$

MCE\_IM\_2021-2022

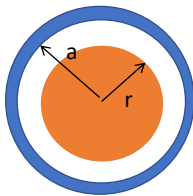
17

17

## LEI DE GAUSS

ESFERA NÃO CONDUTORA CARREGADA UNIFORMEMENTE, com densidade volumica de carga,  $\rho$

Q1. Achar uma expressão para o valor de  $E$  a uma distância  $a$  da esfera carregada



1º - arranjar uma superfície gaussiana apropriada

esfera de raio  $a$

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} // d\vec{S}$$

$$Q = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$E \cdot 4\pi a^2 = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho r^3}{3 \epsilon_0 a^2}$$

MCE\_IM\_2021-2022

18

18

