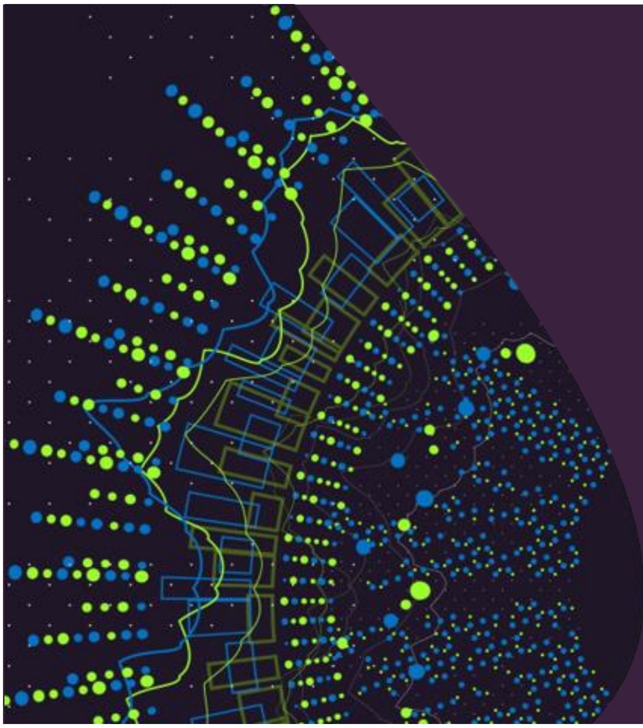


Mecânica e Campo Eletromagnético

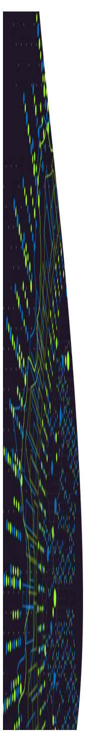
23 Nov 2021

Cap. 2 - Osciladores acoplados
Cap. 3 – Carga eléctrica. Lei de Coulomb.
Campo eléctrico. Diferença de potencial

- Exemplos

Isabel Malaquias
imalaquias@ua.pt
Gab. 13.3.16

1



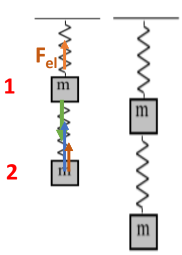
Osciladores acoplados

16 Duas molas iguais de constante K_{mola} estão penduradas e ligadas a corpos de massa *m* como está representado na figura ao lado. Desprezando a massa das molas calcule:

a) as frequências dos modos normais de oscilação do sistema.

b) a relação das amplitudes de oscilação das massas nos dois modos normais de oscilação.

Nota: não é necessário considerar a aceleração da gravidade porque esta não tem influência na oscilação.



1 $F_1 = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1)$ $\quad m_1\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1)$

2 $F_2 = -k_2x_2 - k_2(x_2 - x_1)$ $\quad m_2\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -k_2x_2 - k_2(x_2 - x_1)$

$k_1 = k_2 = k$ $\quad m_1 = m_2 = m$

2

Osciladores acoplados

16 Duas molas iguais de constante K_{mola} estão penduradas e ligadas a corpos de massa *m* como está representado na figura ao lado. Desprezando a massa das molas calcule:

a) as frequências dos modos normais de oscilação do sistema.

1 $$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{k}{m}(x_1 - x_2) \Leftrightarrow \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{k}{m}x_1 + \frac{k}{m}(x_1 - x_2) = 0$$

2 $$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{k}{m}x_2 - \frac{k}{m}(x_2 - x_1) \Leftrightarrow \frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{k}{m}x_2 + \frac{k}{m}(x_2 - x_1) = 0$$

SOLUÇÕES POSSÍVEIS:

$x_1 = A \cos \omega t$

$x_2 = B \cos \omega t$

Derivar 1 e 2 vezes x_1 e x_2 e substituir nas equações diferenciais

1 $- mA\omega^2 \cos \omega t + 2kA \cos \omega t - kB \cos \omega t = 0$

2 $- mB\omega^2 \cos \omega t + 2kB \cos \omega t - kA \cos \omega t = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - mA\omega^2 + 2kA - kB = 0 \\ - mB\omega^2 + 2kB - kA = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A(2k - m\omega^2) - kB = 0 \\ - kA + B(2k - m\omega^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ANÁLISE DAS SOLUÇÕES POSSÍVEIS

A = B = 0 o que significaria que não havia oscilação.

Resolvendo o determinante, deveremos chegar a alguma conclusão

MCE_IM_2021-2022

3

$$\begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2k - m\omega^2)(k - m\omega^2) - k^2 = 0 \Leftrightarrow k^2 - 3km\omega^2 + m^2\omega^4 = 0$$

Usando a fórmula resolvente para equações de 2º grau, obtém-se

$$\boxed{\omega_1^2 = \frac{3k + \sqrt{5}k}{2m}}$$

$$\boxed{\omega_2^2 = \frac{3k - \sqrt{5}k}{2m}}$$

FREQUÊNCIAS DOS MODOS NORMAIS DE VIBRAÇÃO DO SISTEMA
(ω_1 e ω_2)

MCE_IM_2021-2022

4

16. b) a relação das amplitudes de oscilação das massas nos dois modos normais de oscilação.

Tínhamos
$$\begin{cases} A(2k - m\omega^2) - kB = 0 \\ -kA + B(2k - m\omega^2) = 0 \end{cases}$$

Usando, por exemplo, a 1ª equação, tem-se:

$$A(2k - m\,\boxed{\omega^2}) - kB = 0$$

$$\omega_1^{\,2} = \frac{3\,k + \sqrt{5}\,k}{2\,m}$$

$$\omega_2^{\,2} = \frac{3\,k - \sqrt{5}\,k}{2\,m}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{2}{(1-\sqrt{5})} = -1{,}61$$ valor negativo ➡ oposição de fase

$$\frac{A}{B} = \frac{2}{(1+\sqrt{5})} = 0{,}61$$ valor positivo ➡ em fase

Cap. 3 – Carga eléctrica. Lei de Coulomb. Campo eléctrico. Diferença de potencial

Noção de carga eléctrica

Cap. 3 – Carga eléctrica. Lei de Coulomb. Campo eléctrico. Diferença de potencial

Propriedades importantes da carga eléctrica:

CONSERVAÇÃO DA CARGA - não é possível criar ou destruir carga eléctrica, apenas transferi-la. Num sistema isolado, a carga total permanece constante.
É possível criar ouu destruir partículas em colisões com energias muito altas, mas, sempre que se cria ou destrói uma partícula com carga, também se cria ou destrói a sua antipartícula, com carga igual e oposta.

QUANTIFICAÇÃO DA CARGA – qualquer carga eléctrica é sempre um múltiplo inteiro da carga elementar *e*:

e = 1,602.10^{-19} C (coulomb)

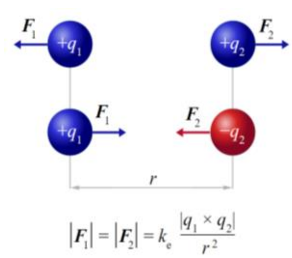
INVARIÂNCIA DA CARGA – o valor da carga é o mesmo quer esteja em repouso quer esteja em movimento

PRINCÍPIO DA SOBREPOSIÇÃO - a acção de um conjunto de cargas é igual à soma da acção individual de cada uma das cargas

Lei de Coulomb

Força electrostática ou de Coulomb entre 2 cargas eléctricas estacionárias q_1 e q_2

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$$

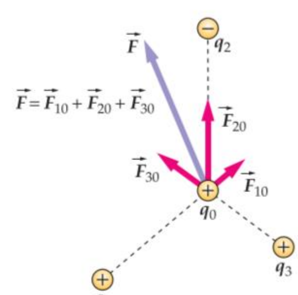


$\boldsymbol{\varepsilon_0}$ = 8,854.10^{-12} farad/metro (F.m^{-1})

é a **PERMITIVIDADE** no vazio

Para n cargas no espaços, a força resultante sobre a carga Q será o resultado de somar todos os valores, i. é,

$$\vec{F} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r^2}\hat{r}$$



Campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$

Uma carga eléctrica Q modifica o espaço à sua volta, produzindo um CAMPO ELÉCTRICO $\vec{E}$ à sua volta.

O campo eléctrico $\vec{E}$ produzido pela carga Q no ponto P define-se como a força que actua na carga de prova, dividida pelo valor da carga de prova

$$\boxed{\frac{\vec{F}}{q_0} = \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\hat{r}}$$

O campo eléctrico em qualquer ponto P **pode ser medido** por meio de uma **carga de prova, q_0** (positiva) colocada nas suas imediações.

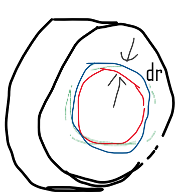
O **campo eléctrico** resultante de um conjunto **n de cargas**, num ponto do espaço, será dado por

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r^2}\,\hat{r}}$$

Para uma **DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA DE CARGA**, tem-se

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\,\hat{r}}$$

3. Um disco de raio **R** tem uma densidade de carga dada por **σ** = 3r. Calcule a carga total do disco.



$\sigma = \frac{dQ}{dS}$

dS é um elemento de superfície

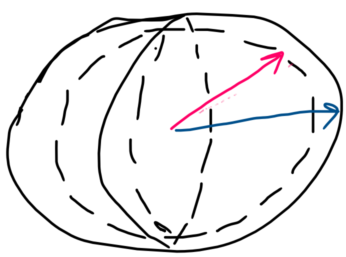
dS = 2πr dr

Q = $\int_0^R \sigma$ 2πr dr

Q = $\int_0^R 3\,r$ 2πr dr

Q = 2π R^3 coulomb (C)

4. Uma coroa esférica de raios $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ ($r_1<r_2$) tem uma densidade de carga que é inversamente proporcional ao raio. Sabendo que a carga total da coroa é **Q**, obtenha uma expressão para a densidade de carga.



$r_1 < r_2$

$$dQ = \rho\, dV = \rho\, 4\,\pi\, r^2 dr$$

$$\rho = \text{constante}.\ \frac{1}{r} \qquad \rho = k\,\frac{1}{r}$$

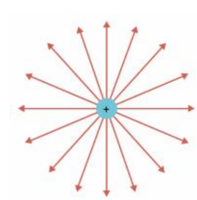
$$Q = \int_{r_1}^{r_2} k\,\frac{1}{r}\,4\,\pi\, r^2 dr \qquad Q = 2\,\pi\, k\,({r_2}^2 - {r_1}^2)$$

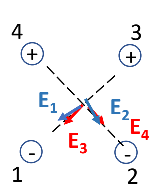
$$k = \frac{Q}{2\,\pi\,({r_2}^2 - {r_1}^2)}$$

$$\boxed{\rho = = \frac{Q}{2\,\pi\,({r_2}^2 - {r_1}^2)} \cdot \frac{1}{r}} \quad \text{(S.I.)}$$

5. Quatro cargas +q,+q, −q,−q estão colocadas nos vértices dum quadrado de lado **a**.

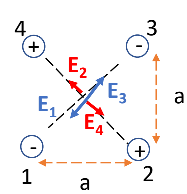
a) Determine, para os dois casos de distribuição das cargas, o campo elétrico e o potencial no centro do quadrado.



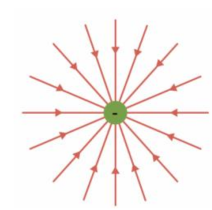


$$\overrightarrow{E_{total}} \neq 0$$

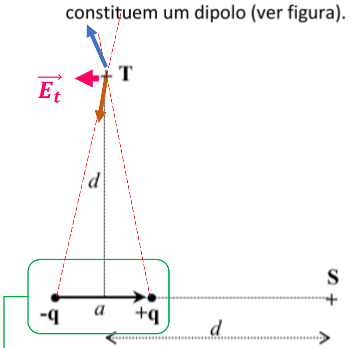
$$\overrightarrow{E_{total}} = -\,\frac{q\sqrt{2}}{\pi\varepsilon_0 a^2}\,\hat{\jmath}$$



$$\overrightarrow{E_{total}} = 0$$



6. Duas cargas iguais e de sinais contrários, com uma distância constante entre si constituem um dipolo (ver figura).



DIPOLO ELÉCTRICO

a) Mostre que o campo elétrico em **S** é paralelo ao vetor $\vec{a}$, e em **T** tem o sentido contrário.

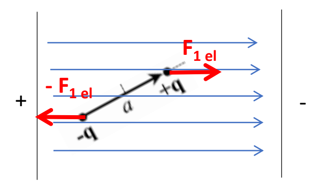
b) Determine o campo elétrico em **T** e em **S**, fazendo aproximações adequadas (***d>>a***). Introduza no resultado o vector momento dipolar elétrico, $\vec{P} = q\,\vec{a}$

c) Mostre que um dipolo colocado num campo elétrico uniforme $\vec{E}$ fica sujeito a um binário cujo momento é dado por $\vec{M} = \vec{P} \times \vec{E}$.

$$\vec{\tau} = MOMENTO\ DE\ FORÇA$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{M} = q\,\vec{a} \times \overset{\vec{E}}{\boxed{\frac{\vec{F}}{q}}}$$



exemplo de BINÁRIO DE FORÇAS que origina rotação