MPEI 2024/25 - PL 3

Variáveis e distribuições aleatórias

Palavras chave: variável aleatória, função massa de probabilidade, função de distribuição acumulada, distribuição binomial, distribuição de Poisson, distribuição uniforme, distribuição normal.

Responda às seguintes questões em Matlab e sempre que for pedido compare os resultados obtidos com os valores teóricos:

1. Considere a variável aleatória X correspondente à face que fica para cima no lançamento de 1 dado. Usando os valores teóricos:
   (a) Produza um gráfico, em Matlab, que represente a função massa de probabilidade[1] de X;
   (b) Num segundo gráfico da mesma figura, desenhe o gráfico da função de distribuição acumulada (use a função `stairs` do Matlab).

2. Considere uma caixa contendo 90 notas de 5 Euros, 9 notas de 50 e 1 de 100.
   (a) Descreva o espaço de amostragem da experiência aleatória "retirar uma nota da caixa" e as probabilidades dos acontecimentos elementares.
   (b) Considere agora a variável aleatória X como sendo o valor de uma nota retirada à sorte da caixa acima descrita. Descreva o espaço de amostragem e a função massa de probabilidade de X.
   (c) Determine a função de distribuição acumulada de X, $F_X(x)$, e efetue a sua representação gráfica em Matlab.

3. Considere 4 lançamentos de uma moeda equilibrada. Seja X a variável aleatória representativa do número de coroas observados nos 4 lançamentos.
   (a) Estime por simulação a função massa de probabilidade $p_X(x)$ da variável aleatória X.
   (b) Estime o valor esperado, a variância e o desvio padrão de X com base em $p_X(x)$.
   (c) Identifique o tipo da distribuição da variável aleatória X e escreva a expressão teórica da respetiva função de probabilidade.
   (d) Calcule os valores teóricos da função massa de probabilidade de X e compare-os com os valores estimados por simulação obtidos em (a).
   (e) Calcule os valores teóricos de $E[x]$ e de $Var(X)$ e compare-os com os valores obtidos em (b).
   (f) Com base nos valores teóricos da função massa de probabilidade desta distribuição, calcule:
      i. a probabilidade de obter pelo menos 2 coroas;
      ii. a probabilidade de obter até 1 coroa;
      iii. a probabilidade de obter entre 1 e 3 coroas.

[1] A função massa de probabilidade é muitas vezes designada simplesmente por função de probabilidade

4. Sabendo que um processo de fabrico produz 30% de peças defeituosas e considerando a variável aleatória X, representativa do número de peças defeituosas numa amostra de 5 peças tomadas aleatoriamente, obtenha:

   (a) Por simulação:

      i. estimativa para a função massa de probabilidade de X;

      ii. o gráfico representativo da função distribuição acumulada de probabilidades de X;

      iii. estimativa para probabilidade de, no máximo, 2 das peças de uma amostra serem defeituosas.

   (b) Analiticamente:

      i. a função distribuição acumulada de X;

      ii. a probabilidade de, no máximo, 2 das peças de uma amostra serem defeituosas.

5. Suponha que o(s) motor(es) de um avião pode(m) falhar com probabilidade p e que as falhas são independentes entre motores. Suponha ainda que o avião se despenha se mais de metade dos motores falharem. Nestas condições, prefere voar num avião com 2 ou 4 motores? Utilize a distribuição que considerar mais adequada.

   Sugestão: Tem pelo menos 2 alternativas: (1) obter expressões para a probabilidade de cada tipo de avião se despenhar em função de p e usar o quociente entre ambas para responder à questão, (2) efectuar os cálculos para um conjunto de valores concretos[2] de p (ex: `p= logspace(-3,log10(1/2),100)`) e usar um gráfico mostrando simultaneamente as probabilidades de cada tipo de avião se despenhar.

6. A distribuição de Poisson é uma forma limite da distribuição binomial (quando $n \to \infty$, $p \to 0$ e np permanece constante) e portanto pode ser usada para aproximar e simplificar os cálculos envolvidos com a binomial em situações em que as condições anteriores se verifiquem.

   Num processo industrial de fabrico de chips, alguns aparecem defeituosos tornando-os inapropriados para comercialização. É sabido que em média por cada 1000 chips há um defeituoso.

   (a) Usando a distribuição binomial, determine a probabilidade de numa amostra de 8000 chips aparecerem 7 defeituosos.

   (b) Determine a mesma probabilidade usando a aproximação de Poisson e compare o resultado com o da alínea anterior.
   Lei de Poisson: $p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

7. Suponha que o número de mensagens que chega a um servidor de *email* segue uma lei de Poisson com média de 15 (mensagens por segundo). Calcule a probabilidade de num intervalo de 4 segundos:

   (a) o servidor não receber nenhuma mensagem;

   (b) o servidor receber mais de 40 mensagens.

8. Assumindo que o número de erros tipográficos numa página de um livro tem uma distribuição de Poisson com $\lambda = 0.02$, calcule a probabilidade de que exista no máximo 1 erro num livro de 100 páginas. Considere que o número de erros em cada página é independente do número de erros nas outras páginas.

9. Considerando a variável aleatória X, representativa das classificações dos alunos de um determinado curso, contínua [3] e com distribuição normal [4] (média 14 e desvio padrão 2), obtenha através de simulação uma estimativa para as probabilidades de:

   (a) um aluno do curso ter uma classificação entre 12 e 16;

   (b) os alunos terem classificações entre 10 e 18;

   (c) um aluno passar (ter classificação maior ou igual a 10);

   Verifique a correção dos resultados anteriores usando a função Matlab `normcdf()`.

[2]Correr `help logspace` no Matlab para perceber os argumentos do `logspace` usados no exemplo.
[3]Equivale a considerar que as classificações são números reais.
[4]Utilize a função Matlab `randn()`.

3.1 Exercícios suplementares

Considere uma empresa fabricante de brinquedos que produz um determinado brinquedo. O brinquedo é composto por dois componentes (1 e 2) que são produzidos separadamente e posteriormente montados. No final, os brinquedos são embalados para comercialização em caixas com n brinquedos cada.
O processo de fabrico tem probabilidade de defeito para o Componente 1 de $p_1 = 0,002$ e de $p_2 = 0,005$ para o Componente 2. Um brinquedo tem defeito se pelo menos um de seus componentes estiver com defeito. O processo de montagem produz brinquedos com defeito (mesmo quando nenhum dos 2 componentes está com defeito) com probabilidade $p_a = 0,01$.

1. Considere o evento "A - uma caixa de brinquedos tem pelo menos 1 brinquedo com defeito".
   (a) Estime por simulação a probabilidade do evento A quando $n = 8$ brinquedos.
   (b) Estime por simulação o número médio de brinquedos defeituosos apenas devido ao processo de montagem quando ocorre o evento A e $n = 8$ brinquedos.
2. Considere o evento "B - uma caixa de brinquedos não tem brinquedos com defeito".
   (a) Estime por simulação a probabilidade do evento B quando $n = 8$ brinquedos. Verifique a consistência deste resultado com o obtido na questão 1(a).
   (b) Determine o valor teórico da probabilidade do evento B e compare-o com o valor estimado por simulação na questão 2(a). O que conclui?
   (c) Faça as simulações necessárias para desenhar um gráfico $plot$ da probabilidade do evento B em função da capacidade da caixa n. Considere todos os valores de n de 2 a 20. Descreva e justifique os resultados obtidos.
   (d) Analisando o gráfico traçado na questão anterior, 2(c), qual deve ser a capacidade máxima da caixa se a empresa quiser garantir que a probabilidade de cada caixa não ter brinquedos com defeito seja de pelo menos $0,9$?
3. Considere a variável aleatória X que representa o número de brinquedos defeituosos numa caixa.
   (a) Estime por simulação a função massa de probabilidade $p_X(x)$ de X quando $n = 8$ brinquedos e desenhe-a num gráfico $stem$. Descreva os resultados obtidos e verifique a sua consistência com o resultado obtido na questão 2(a).
   (b) Com base em $p_X(x)$, calcule a probabilidade de $X >= 2$. O que conclui?
   (c) Com base em $p_X(x)$, estime o valor esperado, a variância e o desvio padrão de X.
   (d) Repita as questões 3(a), 3(b) e 3(c), mas agora considerando $n = 16$ brinquedos. Compare todos os resultados com os obtidos anteriormente (com $n = 8$ brinquedos) e justifique as diferenças.
4. Suponha agora que a empresa pretende comercializar os brinquedos em caixas de $n = 20$ brinquedos garantindo que a probabilidade de uma caixa comercializada não ter brinquedos com defeito seja de pelo menos $0,9$.

   Para atingir este objetivo, o processo de montagem foi melhorado reduzindo p_a para $0,001$ e foi implementado um processo de garantia de qualidade da seguinte forma: uma amostra de m brinquedos (com $1 \leq m < 20$) é selecionada de cada caixa para teste; a caixa não é comercializada se pelo menos um dos brinquedos selecionados estiver com defeito, ou é comercializada caso contrário.
   (a) Estime por simulação a probabilidade de uma caixa ser comercializada quando o processo de garantia de qualidade é implementado com $m = 1$ (verifique a utilidade da função Matlab $randperm$ na implementação da simulação). O que conclui?
   (b) Estime por simulação o menor valor de m necessário para atingir o objetivo desejado.