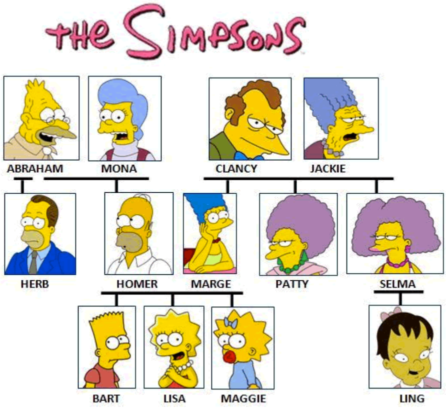
Estruturas de Dados II

Árvores: conceitos, árvores binárias e percurso

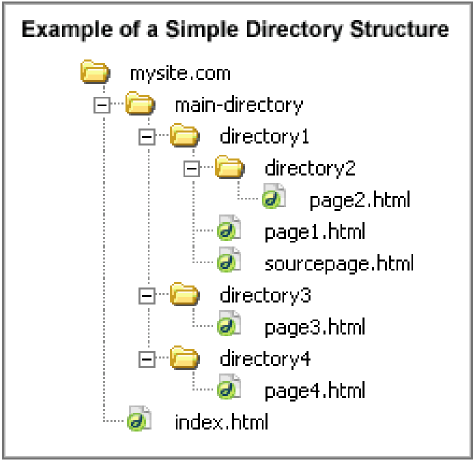
Prof[a]. Juliana de Santi
Prof. Rodrigo Minetto
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Material compilado de: Cormen, IC-UNICAMP e IME-USP

Sumário

Árvores (na computação): **estruturas de dados** não sequênciais que organizam os dados de forma **hierárquica**.



Exemplo: árvore de diretórios



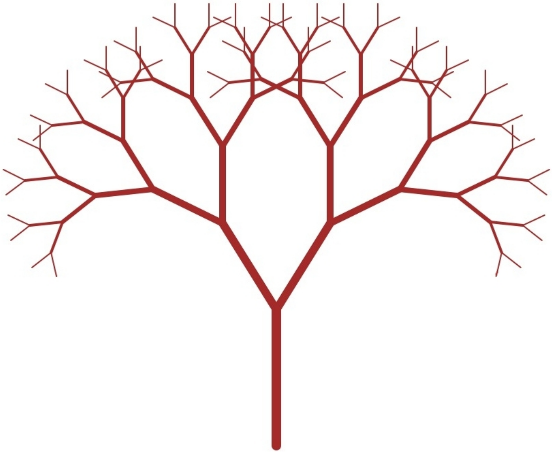
Árvores - Conceitos

Definição: uma árvore é um conjunto **T** finito e não vazio, **n** > 0, de objetos (estruturas elementares) chamados **nós**. Tal que **T** consiste de:

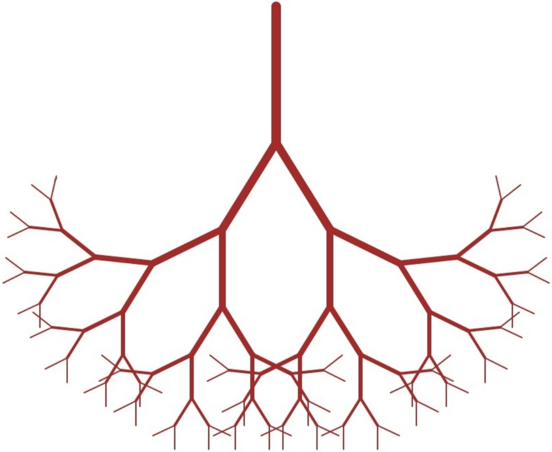
- um nó especial **r**, denominado **raiz** de T.
- $m >= 0$ conjuntos disjuntos de nós, denominados **subárvores** $(T_1, T_2, ..., T_m)$ de T (ou da raiz **r** de T).

Árvores - Conceitos

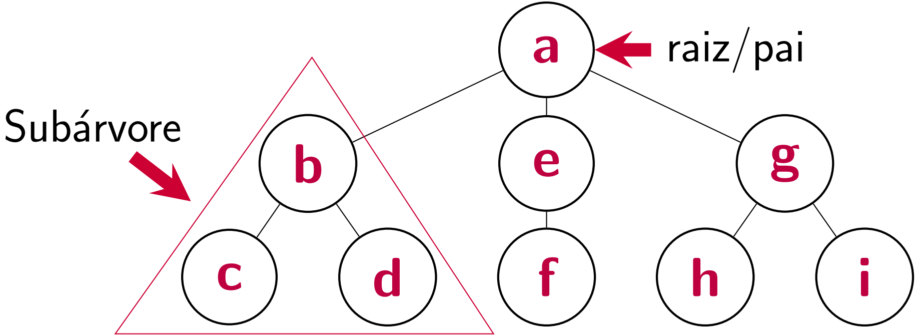
É tradicional desenhar as estruturas de árvores com a raiz para cima e as folhas para baixo.



É tradicional desenhar as estruturas de árvores com a raiz para cima e as folhas para baixo.



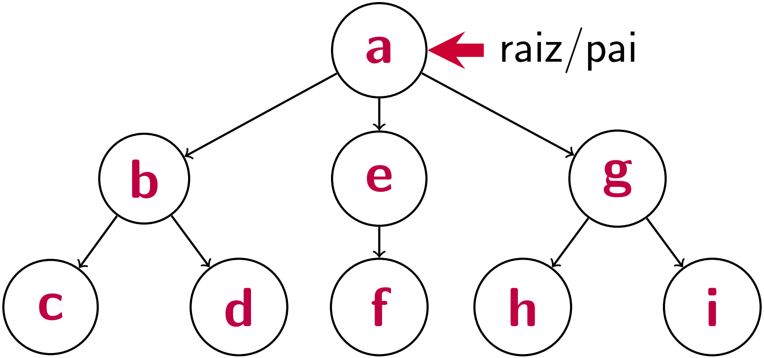
É tradicional desenhar as estruturas de árvores com a raiz para cima e as folhas para baixo.



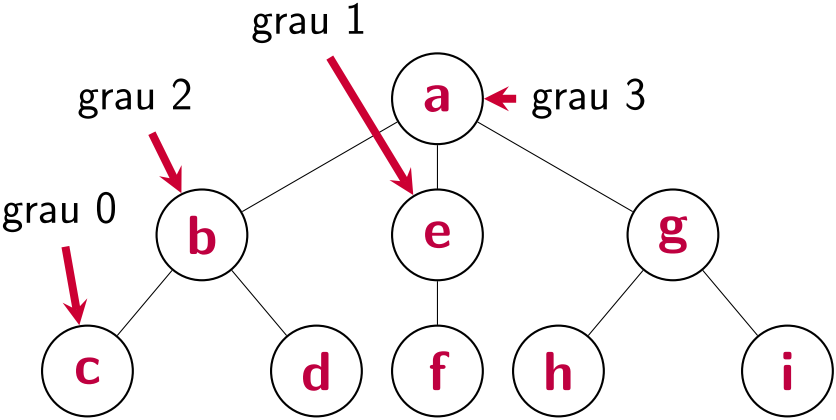
A forma mais natural de definir uma estrutura de árvore é usando a **recursividade**.

Árvores - Conceitos

Apesar de não representarmos explicitamente a **direção dos ponteiros**, eles **apontam sempre do pai/raíz para os filhos/subárvores.**



- **Grau**: número de subárvores de um nó.



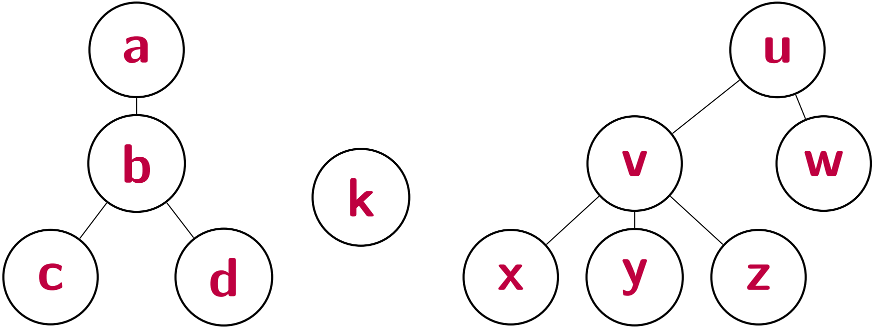
Árvores - Conceitos

- **Grau da árvore**: grau máximo entre todos os nós.

- **Nó folha ou externo**: nó com grau 0 (não tem filhos, sem subárvores).

- **Nó interno:** nó que possui filhos (subárvores).

- **Floresta**: conjunto de árvores disjuntas.

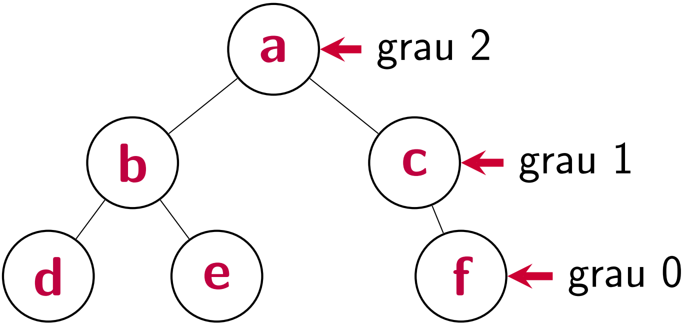


Tipos comuns de árvores:

- Binária.
- Binária de pesquisa.
- AVL.
- Rubro-Negra.
- Splay-Trees.
- B.

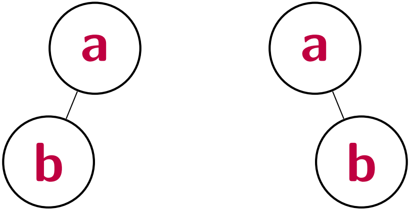
Sumário

- **Árvore binária**: cada nó têm no máximo 2 filhos (ou seja têm grau 0, 1 ou 2).



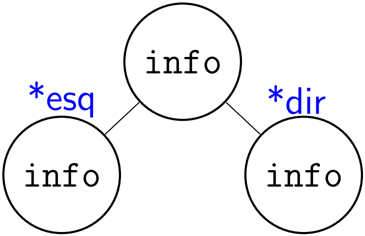
Árvore binária

Filhos são denominados subárvores da **esquerda** ou da **direita** de uma árvore maior, e qualquer uma das subárvores pode ser vazia. Assim, as duas subárvores abaixo são distintas.



Em C, a representação de um **nó da árvore binária** pode ser dada por:

```
typedef struct arvore {
   char info;
   struct arvore *esq;
   struct arvore *dir;
} Arvore;
```



Árvore binária - estrutura

- Listas encadeadas são representadas por um ponteiro para o primeiro nó.

- De forma semelhante, a estrutura da árvore é representada por **um ponteiro para o nó raiz**. Através do ponteiro para o nó raiz da árvore, tem-se acesso aos demais nós.

Árvore binária - TAD

Uma possível interface do tipo abstrato (TAD) para representar uma árvore binária pode ser definido em um arquivo **arvore.h** por:

```
Arvore*  cria_arv_vazia (void);
Arvore*  constroi_arv (char c, Arvore *e, Arvore *d);
int      verifica_arv_vazia (Arvore *a);
void     libera_arv (Arvore *a);
int      pertence_arv (Arvore *a, char c);
void     imprime_arv (Arvore *a);
```

Árvore binária - Criar vazia

Como uma árvore é representada pelo endereço do nó raiz, uma árvore **vazia** é representada pelo valor **NULL**. Assim, a função que cria uma árvore vazia pode ser simplesmente:

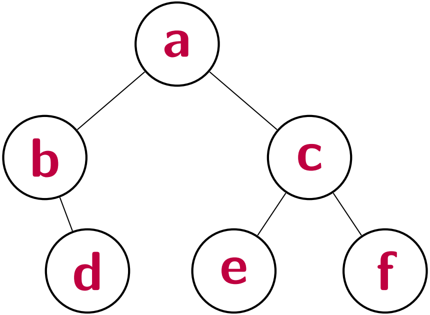
```
Arvore* cria_arv_vazia (void) {
   return NULL;
}
```

Árvore binária - Construir

Para **construir** árvores não-vazias, podemos ter uma função que **cria um nó** dadas a informação e duas subárvores (esquerda e direita). O valor de **retorno** é o **endereço** do nó:

```
Arvore* constroi_arv (char c, Arvore *e, Arvore *d) {
   Arvore *no = (Arvore*)malloc(sizeof(Arvore));
   no->info = c;
   no->esq = e;
   no->dir = d;
   return no;
}
```

Exemplo: considere a seguinte árvore binária:



Árvore binária - Inserir

Podemos criá-la através dos seguinte passos:

```
int main (int argc, char *argv[]) {
 Arvore *a, *a1, *a2, *a3, *a4, *a5;
 a1 = constroi_arv(‘d’,cria_arv_vazia(),cria_arv_vazia());
 a2 = constroi_arv(‘b’,cria_arv_vazia(),a1);
 a3 = constroi_arv(‘e’,cria_arv_vazia(),cria_arv_vazia());
 a4 = constroi_arv(‘f’,cria_arv_vazia(),cria_arv_vazia());
 a5 = constroi_arv(‘c’,a3,a4);
 a  = constroi_arv(‘a’,a2,a5);
 return 0;
}
```

Árvore binária - Inserir

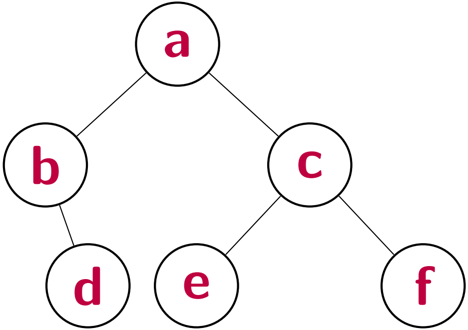
De forma alternativa, a árvore poderia ser criada com uma **única atribuição**:

```
Arvore *a = constroi_arv ('a',
 constroi_arv('b',
  cria_arv_vazia(),
  constroi_arv('d',cria_arv_vazia(),cria_arv_vazia())
 ),
 constroi_arv('c',
  constroi_arv('e',cria_arv_vazia(),cria_arv_vazia()),
  constroi_arv('f',cria_arv_vazia(),cria_arv_vazia())
 )
);
```

Árvore binária - Inserir

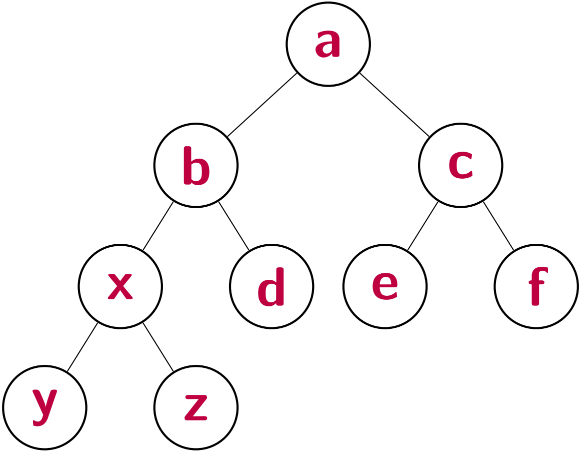
A adição de uma subárvore-esquerda em ‘b’ é feita por:

```
a->esq->esq = constroi_arv (‘x’,
  constroi_arv(‘y’,cria_arv_vazia(),cria_arv_vazia()),
  constroi_arv(‘z’,cria_arv_vazia(),cria_arv_vazia())
);
```



Árvore binária - Inserir

Que produz a seguinte árvore binária:



Árvore binária - Verificar se vazia

O término de uma recursão é dado ao encontrar uma **árvore vazia**, portanto é importante ter uma operação que testa esta condição:

```
int verifica_arv_vazia (Arvore *a) {
   return (a == NULL);
}
```

Árvore binária - Liberar

Uma maneira de liberar a memória alocada pela estrutura da árvore é através de **recursão**:

```
void arv_libera (Arvore* a) {
   if (!verifica_arv_vazia(a)) {
      arv_libera (a->esq);
      arv_libera (a->dir);
      free(a);
   }
}
```

Árvore binária - Liberar

Atenção: um cuidado a ser tomado é liberar as subárvores **antes** de liberar o nó raiz, para que o acesso a elas não seja **perdido** antes de serem removidas.

Sumário

Árvores - Percurso

Um **percurso** corresponde a uma **visita** sistemática **a cada um dos nós** da árvore. Muitas operações em árvores binárias envolvem o percurso de todas as subárvores, com a execução de alguma ação de tratamento de cada nó.

Árvores - Percurso

Por exemplo, se cada nó da árvore possui um campo que armazena o salário, então podemos querer **visitar** cada nó **para fazer um reajuste salarial**. Não podemos esquecer de nenhum nó, nem queremos visitar um nó mais do que uma vez. Nesse caso a ordem da visita não é importante. Mas **em algumas** outras **aplicações, queremos visitar os nós em certa ordem** desejada.

Visitar um nó significa **trabalhar com a informação** do nó (por exemplo: imprimir, modificar, etc). Contudo, **durante um percurso podemos passar várias vezes por alguns dos nós sem visitá-los**.

Árvores - Percurso

O momento da visita ao nó é determinado em função da **ordem de visitação**. É comum percorrer uma árvore em uma das seguintes ordens:

- **Pré-ordem** (R, E, D).
- **In-ordem** (E, R, D).
- **Pós-ordem** (E, D, R).

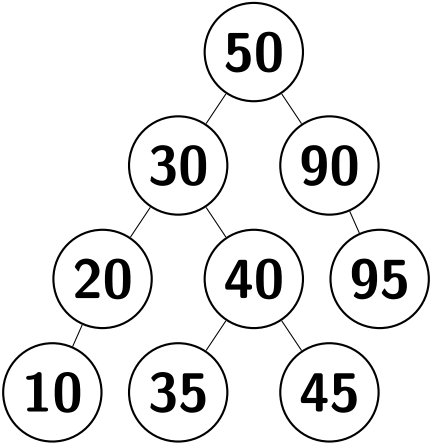
Árvores - Percurso

- Pré-ordem (**R, E, D**):
  - **Visitar** a **raiz**.
  - Percorrer a sua **subárvore esquerda** em pré-ordem.
  - Percorrer a sua **subárvore direita** em pré-ordem.

Introdução - Percurso em árvores

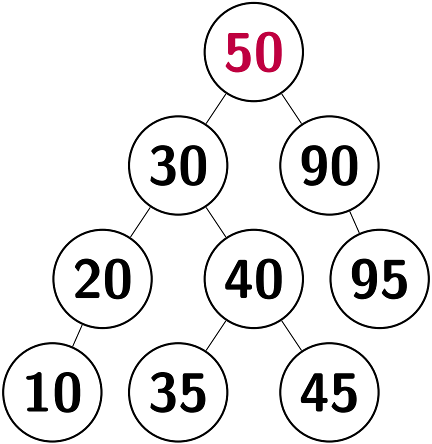
Pré-ordem (R,E,D):

Exemplo:



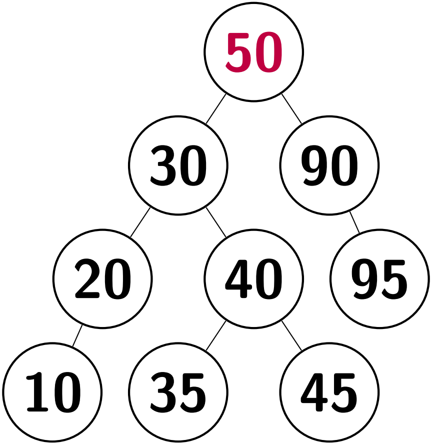
Pré-ordem (R,E,D):

Exemplo:



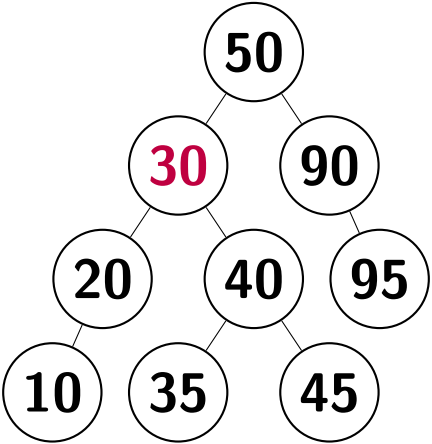
Pré-ordem (R,E,D):

Exemplo: **50**



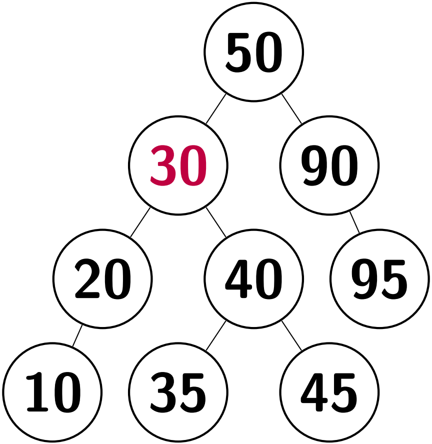
Pré-ordem (R,E,D):

Exemplo: **50**



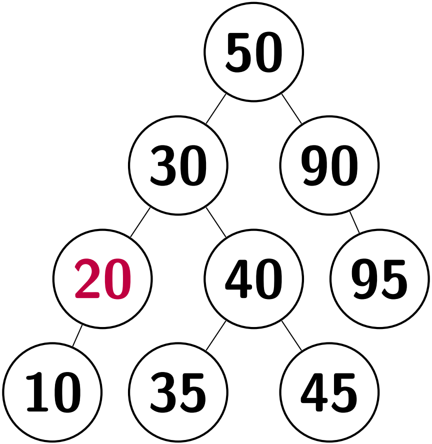
Pré-ordem (R,E,D):

Exemplo: **50,30**



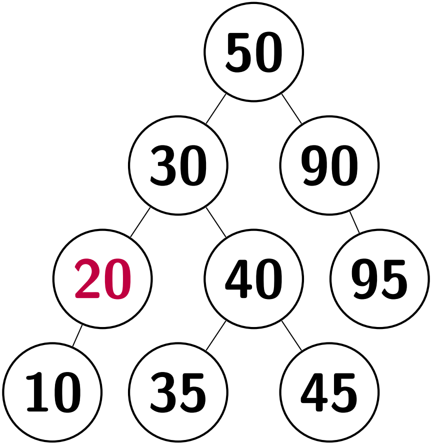
Pré-ordem (R,E,D):

Exemplo: **50,30**



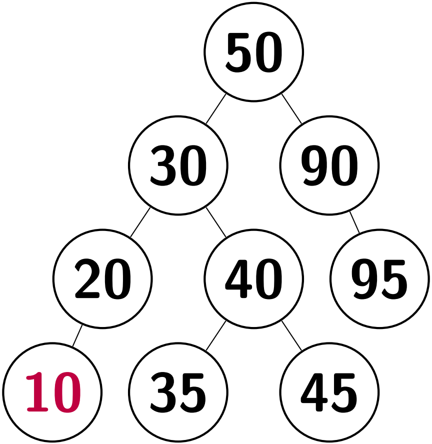
Pré-ordem (R,E,D):

Exemplo: **50,30,20**



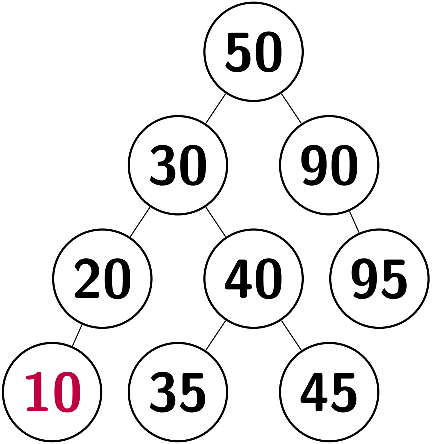
Pré-ordem (R,E,D):

Exemplo: **50,30,20**



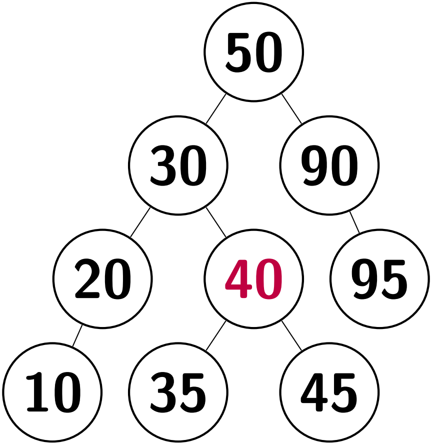
Pré-ordem (R,E,D):

Exemplo: **50,30,20,10**



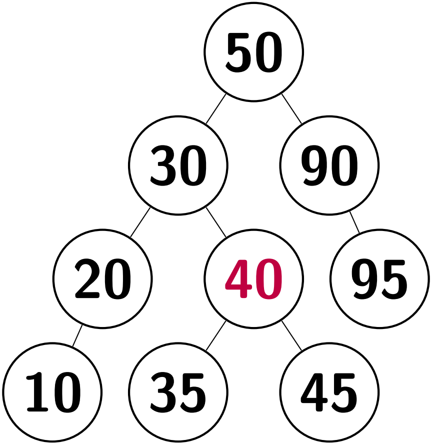
Pré-ordem (R,E,D):

Exemplo: **50,30,20,10**



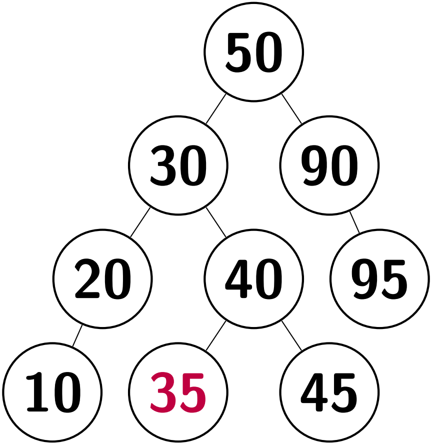
Pré-ordem (R,E,D):

Exemplo: **50,30,20,10,40**



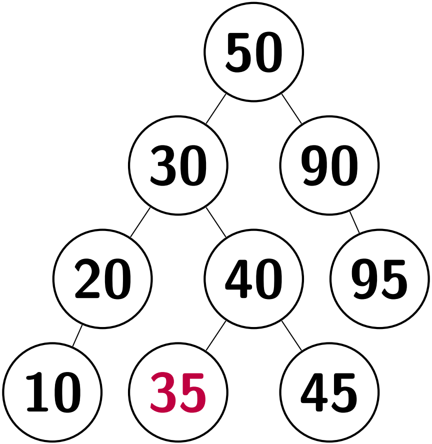
Pré-ordem (R,E,D):

Exemplo: **50,30,20,10,40**



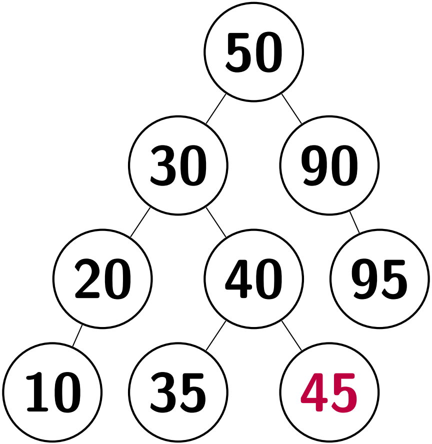
Pré-ordem (R,E,D):

Exemplo: **50,30,20,10,40,35**



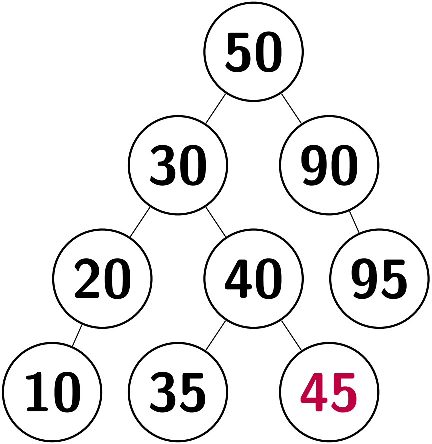
Pré-ordem (R,E,D):

Exemplo: **50,30,20,10,40,35**



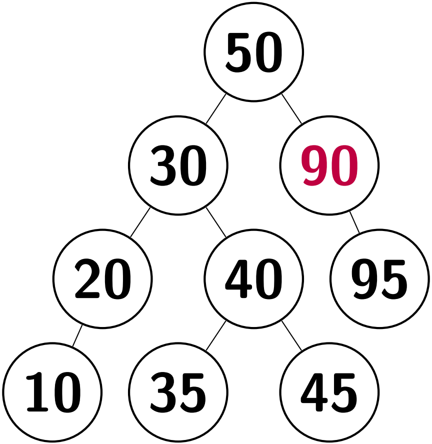
Pré-ordem (R,E,D):

Exemplo: **50,30,20,10,40,35,45**



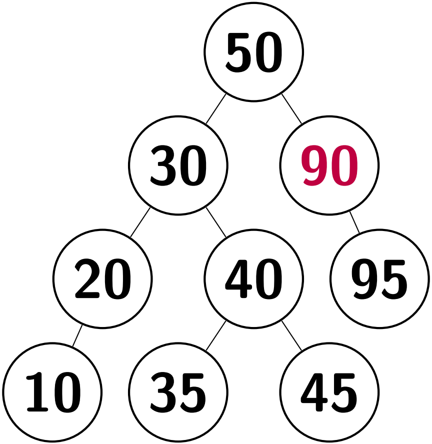
Pré-ordem (R,E,D):

Exemplo: **50,30,20,10,40,35,45**



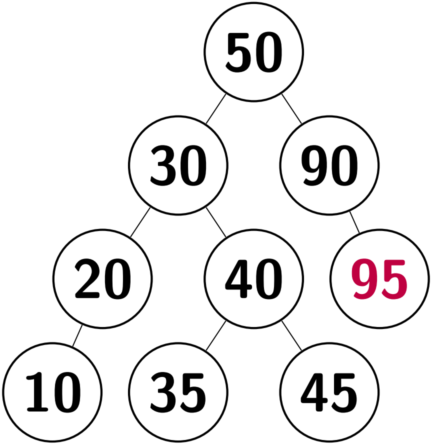
Pré-ordem (R,E,D):

Exemplo: **50,30,20,10,40,35,45,90**



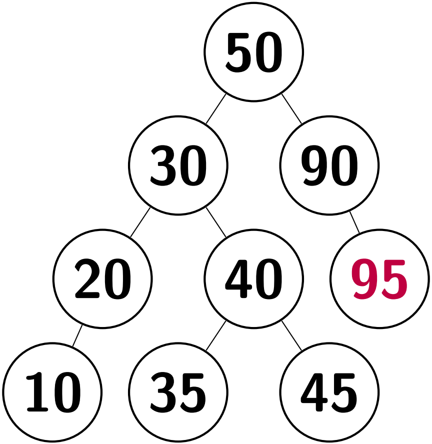
Pré-ordem (R,E,D):

Exemplo: **50,30,20,10,40,35,45,90**



Pré-ordem (R,E,D):

Exemplo: **50,30,20,10,40,35,45,90,95.**



O percurso em pré-ordem segue os nós até chegar aos mais **“profundos”**, em **“ramos”** de subárvores da esquerda para a direita. É conhecida pelo nome de percurso em **produndidade**.

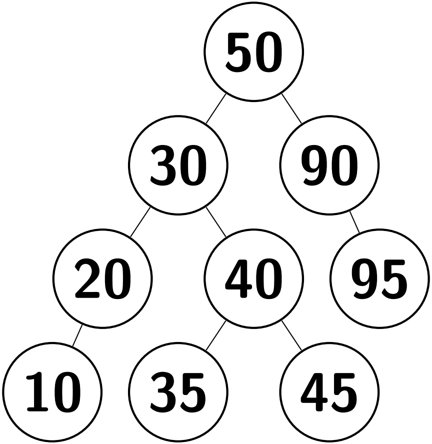
Árvores - Percurso

Percurso in-ordem: também conhecido como **ordem simétrica**.

- Percurso In-ordem (**E, R, D**):
  - Percorrer a sua **subárvore esquerda** em in-ordem.
  - **Visitar** a **raiz**.
  - Percorrer a sua **subárvore direita** em in-ordem.

In-ordem (E, R, D)

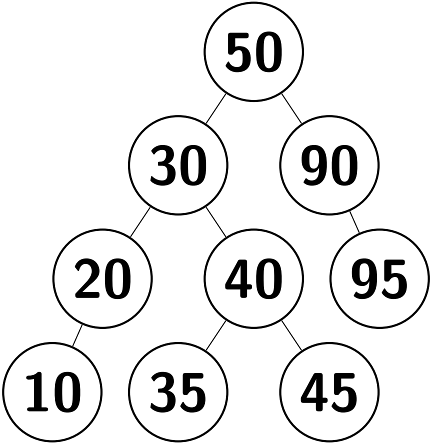
Exemplo: **10,20,30,35,40,45,50,90,95.**



- Percurso pós-ordem (**E, D, R**):
  - Percorrer a sua **subárvore esquerda** em pós-ordem.
  - Percorrer a sua **subárvore direita** em pós-ordem.
  - **Visitar** a **raiz**.

Pós-ordem (E, D, R)

Exemplo: **10,20,35,45,40,30,95,90,50.**



Sumário

Árvores - Altura

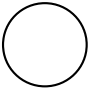
Uma propriedade fundamental de todas as árvores é que só existe um caminho da raiz para qualquer nó. Com isso, podemos definir a **altura** de uma árvore como sendo o **comprimento do caminho mais longo da raiz até uma das folhas**.

Árvores - Altura

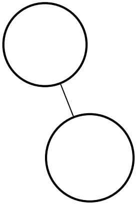
Assim, a altura de uma árvore com um único nó (a raiz) é zero e, por consequência, dizemos que a altura de uma árvore vazia é negativa e vale -1.

Exemplos:

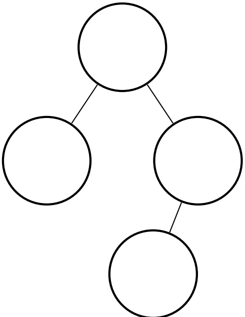
Altura $= 0$



Altura $= 1$

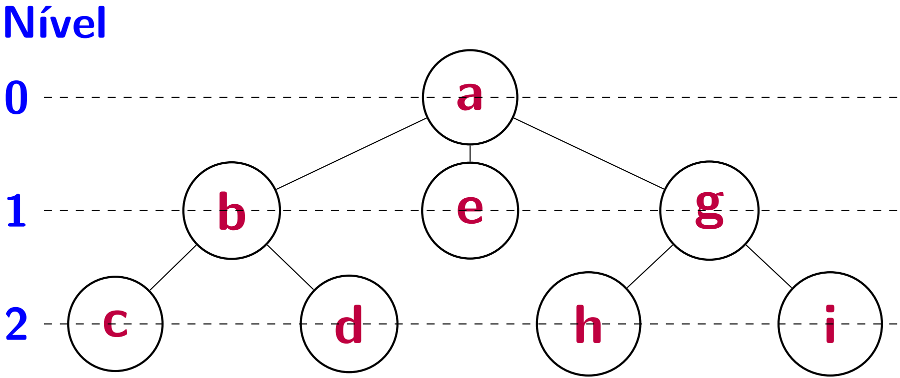


Altura $= 2$

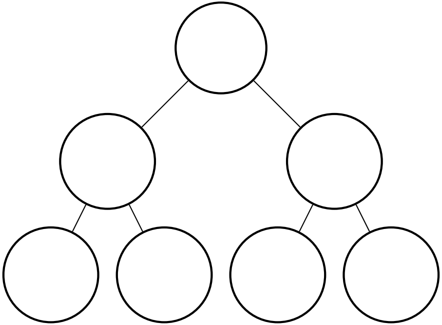


Árvores - Altura

Podemos numerar os **níveis** em que os nós aparecem na árvore. A raiz está no nível 0, filhos do nó raiz no nível 1, . . .

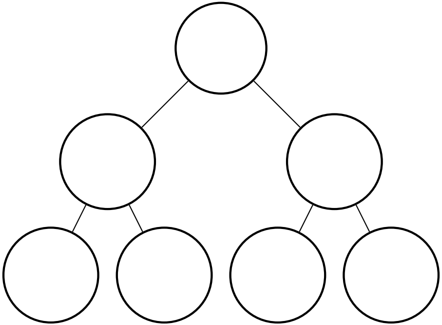


Uma árvore binária é dita **cheia (ou completa)** se todos os seus nós internos têm duas subárvores associadas e todos os nós folhas estão no último nível. Exemplo:



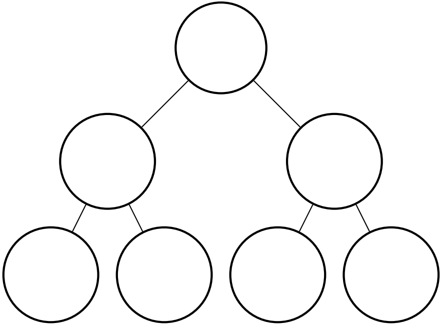
Árvores - Altura

Note que nesse tipo de árvore temos **um** nó no nível **0**, **dois** nós no nível **1**, **quatro** nós no nível **2**, **oito** nós no nível **3**, e assim por diante. Isto é, no nível n, temos 2^n nós.



Árvores - Altura

É possível mostrar que uma árvore cheia de altura h tem um número de nós dado por $2^{h+1} - 1$.



Árvores - Altura

É possível mostrar que uma árvore cheia de altura h tem um número de nós dado por $2^{h+1} - 1$.

- Nível 0: $2^0 = 1$ nó
- Nível 1: $2^1 = 2$ nós
- Nível 2: $2^2 = 4$ nós
- ...
- Nível h: 2^h nós

Total de nós: $\sum_{i=0}^{h} 2^i$

Árvores - Altura

É possível mostrar que uma árvore cheia de altura h tem um número de nós dado por $2^{h+1} - 1$.

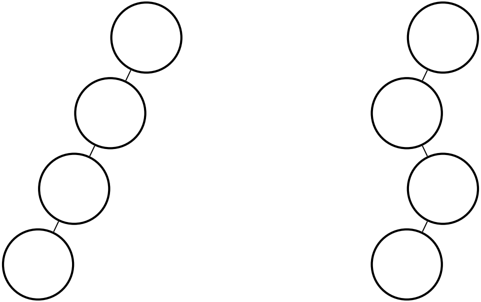
Por definição (A.5 Cormen):

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \tag{1}$$

Logo:

$$\sum_{i=0}^{h} 2^i = \frac{2^{h+1} - 1}{2 - 1} = 2^{h+1} - 1 \tag{2}$$

Uma árvore é dita **degenerada** se todos os seus nós internos têm uma única subárvore associada. Em uma árvore degenerada, temos um único nó em cada nível. Assim, uma árvore degenerada de altura h tem $h + 1$ nós.



Árvores - Altura

A altura de uma árvore é uma medida importante na avaliação da eficiência com que visitamos os nós da árvore. Uma árvore binária com n nós tem uma altura mínima proporcional a $\log n$ (caso da árvore cheia) e uma altura máxima proporcional a n (caso da árvore degenerada). **A altura indica o esforço computacional** *necessário para alcançar qualquer nó da árvore.*

Sumário

Duas árvores são **espelho-similares** se elas são vazias ou se elas não são vazias e suas subárvores esquerda de cada uma são **espelho-similares** as subárvores direita da outra.