Teoria da Informação
Ficha Teórico-Prática nº 1

"Teoria da Informação"

Período de execução: 1 aula teórico-prática

Objectivo: Pretende-se que o aluno adquira sensibilidade para as questões fundamentais de teoria da informação, em particular informação, entropia exacta e aproximada e incerteza.

Trabalho

1. A Maria e a Joana jogam ao "adivinha um número entre 0 e 100". De acordo com a regras definidas a Joana tenta adivinhar o número apenas colocando questões do tipo "é maior que ##?" às quais a Maria apenas pode responder afirmativamente ou negativamente (por exemplo, "é maior que 10?" ou "é maior que 95?").

   a) Indique o número esperado de questões que a Joana tem que realizar.
   b) Substituindo "maior" por "menor" existe alteração do número esperado de questões a realizar?
   c) Imagine que a Joana coloca, não uma, mas duas questões em simultâneo às quais a Maria responde individualmente (por exemplo, "é maior que 10?; é maior que 30?" ou "é maior que 60?; é maior que 90?"). Neste caso qual o número mínimo de pares de questões que a Joana tem que realizar?

2. Numa imagem binária 20x20, 200 pixels são pretos.

   a) Sem efectuar quaisquer cálculos, indique a informação e a entropia de cada pixel.
   b) Considere agora que 240 pixels são pretos. Calcule a informação e a entropia de cada pixel (em bits). Qual a relação entre a informação de cada pixel e a probabilidade da sua ocorrência?
   c) Nessa mesma imagem, verificou que a probabilidade de ocorrência de 2 pixies consecutivos <preto, preto> é de 0.6, <branco, branco> é de 0.2, <preto, branco> é de 0.1 e <branco, preto> é de 0.1. Calcule a entropia de cada pixel. Compare-a com a calculada na alínea anterior e tire conclusões.
   d) Assumindo agora que 2/3 dos pixeis são pretos, verificou que a probabilidade de um pixel preto suceder a outro pixel preto é 0.6, um branco suceder a um branco é de 0.2 e um preto suceder a um branco é de 0.8 e um branco suceder a um preto é de 0.4. Calcule a entropia associada a cada pixel.

3. Considere uma fonte de informação com a seguinte estatística de segunda ordem (P(x,y))

x/y	0	1
0	1/3	1/3
1	0	1/3

a) Determina H(X) e H(Y).
b) Determine H(X|Y) e H(Y|X).
c) Determine H(X,Y)
d) Determine I(X;Y)

4. Demonstre as seguintes propriedades elementares:
a) $H(x) \geq 0$
b) $H(x) \leq \log 2\ (N)$, em que N representa a cardinalidade do alfabeto da fonte de informação.
c) H(x,y) = H(x) + H(y) se e só se x e y forem variáveis independentes.

5. Considere a seguinte fonte de informação que regista as temperaturas ao longo do dia com intervalo de duas horas:

12 14 16 18 20 22 22 20 18 16 14 12

a) Calcule a entropia de fonte.
b) Proponha uma estratégia de modelação da fonte de informação que minimize o valor de entropia.

6. Considere uma fonte de informação composta por um alfabeto de dois símbolos S={1,2}. Assuma que as probabilidades condicionadas de ordem 1 dessa fonte são P(1|1)=0.8, P(2|1)=0.2, P(1|2)=0.6 e P(2|2)=0.4. (note que P(1,2)=P(2,1))
a) Comente a seguinte afirmação: "Um codificador que assuma que os símbolos são independentes terá que usar, em média, pelo menos 0.95 bits por símbolo." Fundamente com cálculos.
b) Considere que procede à modelização da sua fonte de informação usando um modelo de Markov de primeira ordem. Nessas circunstâncias, qual é o melhor desempenho possível do codificador.

7. Considere uma variável estocástica $X \in \{1,2,3\}$ tal que P(X=1)=a/2, P(X=2)=1-a e P(x=3)=a/2, $a \in [0,1]$. Nestas circunstâncias observa-se que (assinale a(s) resposta(s) certa(s)):

a) H(X) é máximo para:

☐ a = 1 ☐ a = 1/3
☐ a = 1/2 ☐ nenhuma das anteriores

b) ☐ H(X) = 1 ☐ $H(X) \leq 2$
☐ $H(X) \geq 0$ ☐ nenhuma das anteriores

c) ☐ H(X,X) = H(X) ☐ H(X,X) =H(X)+H(X)
☐ H(X,X) = H(X)+H(X|X) ☐ nenhuma das anteriores

c) ☐ I(X;X) = 0 ☐ I(X;X) = H(X|X)
☐ I(X;X) = H(X) ☐ nenhuma das anteriores

d) ☐ I(X;X) é máximo quando a = 0
☐ I(X;X) é máximo quando a = 1
☐ I(X;X) é máximo quando a = 0.5
☐ nenhuma das anteriores

8. Considere que Y = log2(2X+2). Assumindo que D() representa a distância KL, assinale as opções corretas:

a)
☐ H(X,Y) ≥ 0 ☐ H(X,Y) ≤ 1
☐ H(Y) ≥ 0 ☐ nenhuma das anteriores

b)
☐ H(X,Y) = H(Y) ☐ H(X,Y) =H(Y)+H(X)
☐ H(X,Y) = H(X)+H(Y|X) ☐ nenhuma das anteriores

c)
☐ I(X;Y) = 0 ☐ I(X;Y) = H(X|Y)
☐ I(X;Y) = H(Y) ☐ nenhuma das anteriores

d)
☐ D(X;Y) = 0 ☐ D(X;Y)+D(Y;X) ≤ 2
☐ D(X;Y)+D(Y;X) = H(Y)+H(X) ☐ nenhuma das anteriores

e)
☐ D(X;Y)+D(Y;X) = 2H(X) ☐ D(X;Y)+D(Y;X) ≥ 0
☐ D(X;Y)+D(Y;X) = 2H(Y) ☐ nenhuma das anteriores

9. Considere uma variável aleatória X que pode tomar os valores 0, 1, 2, ..., n, ... com probabilidade 1/e2, 2/e2, ..., 2n/(n!e2), ... Nestas condições observa-se que (Note que: $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{-n} = \frac{a}{r-1}, \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n} = \frac{r}{1-r^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n} = \frac{r}{1-r}$, $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$):

a) Para aprender o processo que esteve na origem de X pretende-se que a saída Y do algoritmo de aprendizagem verifique:
☐ H(Y)>H(X) ☐ I(X;Y) = 0
☐ I(X;Y) = H(X) ☐ nenhuma das anteriores

b) Um código de Huffman consegue representar os símbolos da sequência com:
☐ menos de 5/3 bits/símb. ☐ nunca menos de 2/3 bits/símb.
☐ Não é possível codificar com Huffman☐ nenhuma das anteriores

10. Considere um esquema de codificação de canal em que o codificador triplica cada bit transmitido, isto é, cada bit *t* o codificador codifica *t1t2t3*. O descodificador para cada sequencia *r1r2r3* descodifica a mensagem s=mediana{*r1r2r3*}. Assuma que a probabilidade de erro de transmissão de cada bit é de 10% e que os acontecimentos são independentes. Determine a probabilidade de erro de cada mensagem.

11[*]. Uma moeda de 1€ é lançada até que ocorra a primeira cara.

a) Sendo X o número requerido de lançamentos, calcule a entropia de X em bits. Assuma a situação genérica em que a moeda possa estar viciada, sendo f a probabilidade de ocorrência de caras.
b) Qual a entropia quando a moeda é totalmente equilibrada?

Utilize os seguintes resultados:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} n r^n = \frac{r}{(1-r)^2}$$

12[**]. A final da NBA consiste numa série de 7 jogos que termina logo que uma das equipas vença 4 jogos. Seja X uma variável aleatória que representa o resultado de uma final entre as equipas A e B; exemplos de possíveis valores de X são: AAAA, BABABB, BBBAAAA, etc. Seja Y o número de jogos realizados, que varia entre 4 e 7. Assumindo que as equipas A e B são equilibradas e que os jogos são independentes, calcule a entropia de X, $H(X)$, a entropia de Y, $H(Y)$, a entropia condicional conhecendo-se Y, $H(X|Y)$, a entropia condicional conhecendo-se X, $H(Y|X)$ e a informação mútua, $I(X, Y)$. Tire conclusões.

13. Demonstre, com recurso ao princípio da máxima entropia, que a entropia de uma dada variável aleatória X é máxima quando os acontecimentos são equiprováveis.

[*] Exercício adaptado de Cover and Thomas, "Elements of Information Theory", p. 42.
[**] Exercício adaptado de Cover and Thomas, "Elements of Information Theory", p. 44.