Métodos Numéricos 93.07 - 2020
Ecuaciones no lineales

Los ejercicios marcados con $\star$ son especialmente recomendados.

$\star$ **1.** Se desea aproximar la raíz real r del polinomio $p(x) = x^3 + x - 4$ en $(1, 2)$.

1. Obtener una cota al número de iteraciones necesarias del *método de bisección* para alcanzar una aproximación a r con un error menor que 10^{-3}.
2. Encontrar la aproximación a r con ese método con error menor que 10^{-3} .
3. En el intervalo $(1, 2)$ la distancia entre números consecutivos en punto flotante de doble precisión es 2^{-52}. ¿Cuál es el número mínimo de pasos a realizar del método de bisección para alcanzar la mejor aproximación en doble precisión?

2. Usar el *método de bisección* para aproximar con un error menor que 10^{-2} la raíz de $x\,2^x - 1 = 0$ en el intervalo $(0, 1)$.

$\star$ **3.** Considere el esquema iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$. Si la función g es continua en un intervalo I y la sucesión es convergente a $r \in I$ entonces r satisface $r = g(r)$ que se denomina *punto fijo* de g. Este número real r es cero de $f(x) = x - g(x)$.

1. Si $g(x) = 0.5\,(x + \frac{a}{x})$ con $a > 0$, la sucesión obtenida converge a $\sqrt{a}$ a partir de cualquier valor inicial positivo. Si el valor inicial es mayor que $\sqrt{a}$ entonces la sucesión generada es monótona decreciente. Si el valor inicial es menor que $\sqrt{a}$ entonces la sucesión generada es monótona decreciente a partir del segundo término. Para mostrar estas propiedades de la sucesión haga gráficos de g, la función identidad y los sucesivos términos de la sucesión generada formando el gráfico de *escalera* si el valor inicial es mayor que $\sqrt{a}$. Sea $E_k = |x_k - x_{k-1}|$ para $k = 1, 2, \ldots$ y $a = 2$. Verifique a partir de la tabla de aproximaciones de $\sqrt{a}$ que $E_{k+1} \approx 0.35\,E_k^2$ (la convergencia es *cuadrática*).
2. Si $g(x) = \cos(x)$ verifique que la sucesión generada no es monótona. Haga gráficos de g, la función identidad y los sucesivos términos de la sucesión generada formando el gráfico de la *telaraña* si el valor inicial es positivo. Sea $E_k = |x_k - x_{k-1}|$ para $k = 1, 2, \ldots$. Verifique que $E_{k+1} \approx 0.6736\,E_k$ (en este caso la convergencia es *lineal*).
3. Si $g(x) = \exp(-x)$ verifique que la sucesión generada converge desde cualquier valor inicial pero no es monótona. Haga gráficos de g, la función identidad y los sucesivos términos de la sucesión generada formando el gráfico de la *telaraña* si el valor inicial es positivo. Sea $E_k = |x_k - x_{k-1}|$ para $k = 1, 2, \ldots$. Verifique que $E_{k+1} \approx 0.5671\,E_k$ (la convergencia es *lineal*).

En cada uno de los tres casos presentados indique una función f que tenga por cero el límite de la sucesión considerada.

$\star$ **4.** La ecuación $\exp(\frac{x}{4}) - x = 0$ tiene dos raíces reales.

1. Obtenga dos intervalos de longitud 1 y extremos naturales a los que pertenezcan esas raíces.
2. Verificar que sólo una de ellas puede obtenerse con el *método de punto fijo* en la forma $x_{k+1} = \exp(\frac{x_k}{4})$. Explicar porqué no puede obtenerse la otra raíz de esta manera.
3. Obtenga una aproximación a la raíz que sí puede obtenerse con ese esquema iterativo con un error menor que 10^{-4} e indique la relación entre la elección del valor inicial y la monotonía de la sucesión generada. En la línea de comando de *Octave* pruebe este breve código:

```
x(1)=1;for k=1:10;x(k+1)=exp(x(k)/4);end;x'
```

4. Sea $E_k = |x_k - x_{k-1}|$ para $k = 1, 2, \ldots$. Verifique que $E_{k+1} \approx 0.3574\, E_k$; la sucesión converge en forma *lineal.*

5. Usando el esquema iterativo que resulta de tomar la función inversa de la usada en el item anterior aproxime el valor de la otra raíz real con error menor que 10^{-4}. Represente gráficamente la *marcha hacia este punto atractor* verificando que también es en *escalera.* Indique la relación entre la elección del valor inicial y la monotonía de la sucesión generada. Si $E_k = |x_k - x_{k-1}|$ para $k = 1, 2, \ldots$. verifique que $E_{k+1} \approx 0.4644\, E_k$. Como la sucesión de término general x_k es convergente entonces la distancia entre términos consecutivos de ella tiende a cero. Genere una tabla de aproximaciones del punto fijo (en este caso el que pertenece al intervalo (8,9)): en una columna la precisión, como una potencia de 10 de exponente negativo, y en la otra la aproximación en acuerdo con esa precisión. Por ejemplo si $x_0 = 8$ las dos primeras filas de esa tabla son (0.01, 8.61),y (0.001, 8.613). Agregue tres filas mas a esa tabla.

5. Considerar la ecuación $\exp(x) = \sin(x)$.

1. Con un gráfico adecuado verifique que esta ecuación tiene infinitas raíces reales negativas. ¿Qué puede concluirse de la distancia entre raíces consecutivas *muy alejadas* de $x = 0$?.

2. Usando el *método de Newton* obtenga aproximaciones con error menor que 10^{-6} para las tres raíces mas cercanas a $x = 0$.

3. En la línea de comando de *Octave* y usando el *método de Newton* los primeros 11 términos de la sucesión obtenida a partir de -3 se pueden generar de esta manera:

```
x(1)=-3;
for k=1:10
          a=x(k);
          x(k+1)=a-(exp(a)-sin(a))/(exp(a)-cos(a));
end
x'
```

⋆ **6.** La ecuación $\ln(x + 1) - x + 1 = 0$ tiene dos raíces reales.

1. Obtenga un intervalo cerrado J de longitud 1 y extremos naturales al que pertenece la raíz positiva r. Implemente el *método de punto fijo* para aproximar r con error menor que 10^{-6}. Represente gráficamente la denominada *marcha al punto fijo atractor.* En el cuadrado $J \times J$ represente gráficamente la función identidad, la función g con la que se obtiene un término de la sucesión que converge a r a partir del anterior, y la poligonal de vértices $(a,\, x_0)$, $(x_0,\, x_1)$, $(x_1,\, x_1)$, $(x_1,\, x_2)$, $(x_2,\, x_2)$, $\ldots$. Aquí a es el extremo izquierdo de J.

2. Use el *método de Newton* para obtener la aproximación de máxima precisión de su calculadora para la raíz negativa de la ecuación. Considere x_0 = -0.99 y $E_k = |x_k - x_{k-1}|$ para $k = 1, 2, \ldots$. verifique que $E_{k+1} \approx 4\, E_k^2$. Como la sucesión de término general x_k es convergente entonces la distancia entre términos consecutivos de ella tiende a cero. Genere una tabla de aproximaciones de esa raíz negativa: en una columna la precisión, como una potencia de 10 de exponente negativo, y en la otra la aproximación en acuerdo con esa precisión. Con x_0 =-0.99 las tres primeras filas de esa tabla son (0.01, -0.84),(0.001, -0.841) y (0.000000001, -0.841405660).

⋆ **7.** El polinomio $P(x) = x^3 - x - 1$ tiene una sola raíz real.

1. Proponga un esquema iterativo de punto fijo que genere una sucesión convergente al cero real r de P. Obtenga un intervalo cerrado $I = [a,\, a + 1]$, de extremos naturales, al que pertenezca r. Demuestre que la sucesión converge a r independientemente de la elección del valor inicial en I.

2. Obtenga una aproximación de esa raíz real en I usando ese esquema iterativo de punto fijo con un error menor que 10^{-4}. Represente gráficamente la denominada *marcha al punto fijo atractor*. En el cuadrado $I \times I$ represente gráficamente la función identidad, la función g con la que se obtiene un término de la sucesión que converge a r a partir del anterior, y la poligonal de vértices $(a,\, x_0)$, $(x_0,\, x_1)$, $(x_1,\, x_1)$, $(x_1,\, x_2)$, $(x_2,\, x_2)$, ... Se obtiene un gráfico *en escalera* si g es creciente en I y de *telaraña* si g es decreciente en I.

3. Verifique que eligiendo el proceso iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ con $g(z) = \sqrt{1 + 1/z}$ se genera una sucesión que converge a r independientemente de $x_0 \in I$ y que *la marcha al punto fijo* es en *telaraña*. Represente gráficamente esa *marcha* si $x_0 = a$. Si $E_k = |x_k - x_{k-1}|$ para $k = 1, 2, \ldots$ verifique que $E_{k+1} \approx 0.2151\, E_k$. Como la sucesión de término general x_k es convergente entonces la distancia entre términos consecutivos de ella tiende a cero. Genere una tabla de aproximaciones de r: en una columna la precisión, como una potencia de 10 de exponente negativo (desde -1), y la otra la aproximación en acuerdo con esa precisión. Por ejemplo si $x_0 = a$ las tres primeras filas de esa tabla son (0.1, 1.3),(0.01, 1.32) y (0.001, 1.325). Agregue tres filas mas a esa tabla.

4. Obtenga la aproximación de esa raíz real en I con la máxima precisión de su calculadora usando el *método de Newton*. Haga la elección del valor inicial de manera tal que la sucesión generada sea monótona.

5. Verifique, para este ejemplo, la convergencia *cuadrática* de la sucesión generada por el *método de Newton* cuando se aproxima un cero real simple. Para ello genere una tabla con los términos de la sucesión $E_n = |x_n - x_{n-1}|$ para $n : 1, 2, \ldots$, y verifique que $E_{n+1} = O(E_n^2)$, para n *grande*, esto es que E_{n+1} es aproximadamente proporcional a E_n^2 y que se cumple la denominada *duplicación de la precisión* ó del número de decimales de concordancia con el cero real cuando se avanza en el proceso iterativo. Suponga que el término inicial de la sucesión generada con el método sea $x_0 = 3$. Verifique que $E_{n+1} \approx 0.93\ (E_n^2)$, para n *grande*.

6. Usando el *método de Newton* y un valor inicial complejo obtenga una aproximación a la raíz compleja de P de parte imaginaria positiva con la máxima precisión de su calculadora.

Verifique sus respuestas comparando con lo obtenido al invocar el comando `roots` de *Octave* que devuelve todas las raíces de un polinomio a partir del vector de coeficientes.

8. Una placa cuadrada con lados de longitud 1 tiene su centro en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas (x e y). Los lados son paralelos a los ejes coordenados. En la placa se perfora un agujero circular de radio r ($0 \le r \le 0{,}5$) con centro en el eje x a una distancia r del lado izquierdo de la placa. El centroide (centro de gravedad supuesta densidad constante) de la pieza restante tiene una abscisa c dada por

$$c = \frac{\pi\, r^2\, (0{,}5 - r)}{1 - \pi\, r^2}.$$

El valor de r que maximiza c es solución de $\pi\, r^3 - 3\, r + 1 = 0$.

1. Proponga un esquema iterativo de punto fijo que resulte convergente a la raíz de la ecuación. Demuestre que la sucesión generada por este proceso iterativo es convergente a partir de cualquier valor inicial en un intervalo cerrado.

2. Obtenga una aproximación para el valor de r que maximiza c con cuatro decimales correctos usando el esquema propuesto.

9. Realice 4 iteraciones del *método de Newton* para aproximar una raíz real del polinomio $P(x) = 4\,x^3 - 2\,x^2 + 3$ a partir del valor inicial $x_0 = -1$.

El polinomio P tiene una raíz real y dos complejas conjugadas (ya que los coeficientes son reales). El método de Newton sirve para generar sucesiones que converjan a raíces complejas (con parte imaginaria no nula). Eligiendo $x_0 = i$ (la unidad imaginaria) obtenga la aproximación para una de las dos raíces complejas con la máxima precisión posible de *Octave*.

$\star$ **10.** Obtenga una fórmula iterativa, usando el *método de Newton*, para aproximar el cálculo de $x = R^{\frac{1}{3}}$ con $R \geq 0$. Haga un análisis con un gráfico y determine el conjunto de valores iniciales para los cuáles la sucesión generada por este método es convergente.
Observe que x es solución de $x^3 - R = 0$.

11. Para obtener la localización adimensional del máximo de la densidad espectral de la energía para la radiación del cuerpo negro, con el modelo de Planck, hay que resolver la siguiente ecuación no lineal:

$$e^{-x} + \frac{1}{5}\,x - 1 = 0.$$

1. Aproxime el valor de x con seis decimales correctos. Use el *método de punto fijo* y muestre un gráfico de *escalera* con los sucesivos términos de la sucesión generada y la *marcha al punto fijo atractor*.
2. Si elige el esquema iterativo $x_{k+1} = 5\,(1 - e^{-x_k})$ y $E_k = |x_k - x_{k-1}|$ para $k = 1, 2, \ldots$, verifique que $E_{k+1} \approx 0.0349\,E_k$ (la sucesión converge en *forma lineal*).
3. Compare el número de iteraciones necesarias para obtener la aproximación pedida con este método de punto fijo con las que deben realizarse con el *método de Newton* para una misma precisión deseada (elija la precisión de la forma 10^{-k} para k tomando los valores de 3 a 6).

12. Obtenga la localización de los primeros 3 máximos relativos (con $x > 0$) de la función $f(x) = (\frac{\sin x}{x})^2$ (intensidad del patrón de difracción lejana para una ranura) con error menor que 10^{-4} .

Sugerencia: Para localizar los máximos relativos hay que resolver la ecuación no lineal $x = tan(x)$. Con un gráfico adecuado verifique que esta ecuación tiene infinitas raíces positivas. Es conveniente considerar el problema equivalente de la búsqueda de ceros de $g(x) = cos(x) - \frac{sen(x)}{x}$, que es derivable y acotada para todo x real positivo. Verifique que la distancia entre ceros consecutivos de g es asintóticamente π.

13. La ley de los gases ideales establece la relación entre presión, volumen y temperatura de un gas para presiones *moderadas*. La ecuación de estado de Van der Waals para un gas no ideal es la siguiente:

$$(P + \frac{a}{V^2})\,(V - b) = RT$$

donde las constantes a y b están relacionadas con dos parámetros del gas (P_c y T_c):

$$a = \frac{27\,R^2\,T_c^2}{64\,P_c} \qquad b = \frac{R\,T_c}{8\,P_c}$$

Las variables y parámetros de este modelo son: P (presión en atm), V (volumen molar en litros/g-mol) , T (temperatura en ^{o}K), R (constante universal de los gases $R = 0.08206$ atm litros/(g-mol ^{o}K)), T_c (la temperatura crítica) y P_c (la presión crítica).
La presión reducida se define como:

$$P_r = \frac{P}{P_c}$$

y el factor de compresibilidad está dado por:

$$Z = \frac{P\,V}{R\,T}.$$

1. Calcule el volumen molar V y el factor de compresibilidad para el amoníaco ($T_c = 405.5$ ^{o}K y $P_c = 111.3$ atm) si $P = 56$ atm y $T = 450$ ^{o}K usando la ecuación de estado de Van der Waals (considerar un error menor que 10^{-3}).
2. Compare con el resultado obtenido usando la ecuación de estado de los gases ideales.

Repita el cálculo del factor de compresibilidad Z para valores de la presión reducida P_r desde 1 hasta 20 en pasos de 0.5 (considere $T = 450\ ^o$K). Realice un gráfico del factor de compresibilidad Z como función de P_r.

14. Las frecuencias naturales de vibración de una varilla uniforme sujeta por un extremo y libre en el otro (en una forma adimensional) son soluciones de la siguiente ecuación no lineal:

$$1 + \cos z \cosh z = 0.$$

1. Mostrar con un gráfico adecuado que la ecuación tiene infinitas raíces positivas y que la distancia entre raíces consecutivas es asintóticamente π.

2. Es conveniente considerar el problema equivalente de la búsqueda de ceros de $g(x) = \cos(x) + \frac{1}{\cosh(x)}$, que es derivable y acotada para todo x real positivo. Usando el *método de Newton* a partir de $z_0 = 2$ obtenga la menor de las raíces positivas de la ecuación con un error menor que 10^{-3}.

Implemente un breve código *Octave* para obtener las primeras 10 raíces positivas de la ecuación con error menor que 10^{-3} usando el *método de Newton*. Haga una elección adaptativa del valor inicial que requiere este método (considere como valor inicial para la aproximación de la raíz k-esima la aproximación obtenida para la raíz $(k-1)$).

15. El código (en *Octave*) que se muestra a continuación implementa la aproximación a la solución de un problema.

1. Indique un problema del cuál dicho procedimiento aproxima su solución. Haga una interpretación gráfica.

2. Usando una calculadora, y redondeando a tres decimales, obtenga la aproximación a la solución del problema con un error menor que 10^{-3}.

```
a=0.6;
N=10;
x(1)=a;
for k=1:N
        x(k+1)=sqrt(exp(-x(k)));
end
x'
```

16. La curva formada por un cable colgante homogéneo se llama *catenaria*. Si el punto mas bajo de la curva es el origen (0 , 0) entonces la ecuación de la catenaria es

$$y = C \cosh(x/C) - C.$$

Para determinar la catenaria que pasa por los puntos (a, b) y $(-a, b)$ hay que determinar el valor de C que es raíz positiva de la ecuación:

$$b = C \cosh(a/C) - C$$

Obtenga la ecuación de la catenaria que pasa por los puntos $(10, 6)$ y $(-10, 6)$. Para ello determine una aproximación de C con error menor que 10^{-4}.

17. *Sobre la tasa interna de retorno :*

Para un flujo de fondos uniformente distribuido en el tiempo $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_n$ se define la *tasa interna de retorno* (TIR) como aquella tasa de interés i para la cual el valor presente de ese flujo de fondos es cero al instante cero. Para eso i debe satisfacer:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{F_k}{(1+i)^k} = 0.$$

Suponiendo que $i \neq -1$ resulta:

$$\sum_{k=0}^{n} F_k(1+i)^{n-k} = 0$$

La determinación de i conduce a obtener la raíz real positiva de un polinomio en $i+1$.

Para que la solución exista uno de los F_k debe ser negativo y otros positivos. Se considera fuera del problema la posibilidad de que los F_k sean todos positivos o bien todos negativos. Se considerará que la TIR podrá tomar valores en el intervalo (-1, 5).

Pruebe que si el flujo de fondos es el vector [-70000, 12000, 15000, 18000, 21000, 26000] entonces la TIR es 0.0866 (8.66 %). Puede verificar la respuesta con una planilla electrónica que tiene al cálculo de la TIR como una función predefinida.

18. Método de la falsa posición ó *Regula Falsi*
Este es otro método para encontrar una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ que se encuentra en el intervalo $[a, b]$. El método es similar a la técnica de bisección en que se generan intervalos $[a_i, b_i]$ a los que pertenece la raíz y también similar al método de la secante en la manera de obtener nuevos intervalos aproximados.
Suponiendo que una raíz de f pertenece al intervalo $[a_i, b_i]$ se obtiene la intersección con el eje x de la recta que une los puntos $(a_i, f(a_i))$ y $(b_i, f(b_i))$, denotando este punto por p_i. Si $f(p_i)\, f(a_i) < 0$, entonces $a_{i+1} = a_i$ y $b_{i+1} = p_i$, de otra manera, $a_{i+1} = p_i$ y $b_{i+1} = b_i$.

1. Interprete geométricamente el procedimiento.
2. Construya un algoritmo que realice la búsqueda de una raíz por el método de la falsa posición.
3. Use el algoritmo para aproximar las raíces de $3\,x^2 - \exp(x) = 0$ y $\exp(-x) + 0.2\,x - 1 = 0$ con tres decimales correctos.

19. Para un tiro oblicuo considerando el amortiguamiento viscoso del aire (fuerza resistente de módulo proporcional a la primera potencia de la velocidad) el alcance L es la raíz positiva de la ecuación

$$A\,L + B\,\ln(1 - C\,L) = 0.$$

Determine el alcance L con error menor que 10^{-3} para los siguientes valores de los coeficientes:
a) $A = 2$, $B = 10$, $C = 0.1$ b) $A = 4$, $B = 10$, $C = 0.1$.
Utilice el *método de Newton* eligiendo el valor inicial que genere una sucesión monótona que aproxime L.

20. Un paracaidista se tira de un avión desde una altura h. Suponiendo que la fuerza resistente es de módulo proporcional a la primera potencia de la velocidad (constante de proporcionalidad β) entonces la distancia x desde el paracaidista en caída al avión en el instante t viene dada por:

$$x(t) = \frac{g}{a^2}\,(a\,t + \exp(-a\,t) - 1),$$

donde g es la aceleración de la gravedad, $\beta = m\,a$ y m es la masa del paracaidista y su equipo. Se supone que su velocidad inicial es cero. Imponiendo la condición $x(T) = h$ se obtiene una ecuación para determinar el tiempo T de caída.

1. Obtenga la ecuación que satisface el tiempo de caída T si $g = 10\frac{m}{s^2}$, $h = 200$ m y $a = 0.2\frac{1}{s}$.
2. Obtenga una aproximación al tiempo T de caída usando un esquema de punto fijo asegurando tres decimales. Realice una interpretación de la forma en que converge la sucesión usando un gráfico conveniente.
3. Según una forma de resolver este problema se tiene la siguiente ecuación en diferencias: $z_{k+1} = 1.8 - \exp(-z_k)$. Suponiendo $z_0 = 1.265$ genere una tabla de la sucesión $\{z_k\}$ y observe que la sucesión $e_n = |z_{n+1} - z_n|$ satisface
$$\frac{e_{k+1}}{e_k} \approx 0.2 \quad \text{(convergencia lineal)}$$

⋆ **21. Forma óptima de una lata.** Para poder construir una lata cilíndrica se recorta de una chapa las dos tapas circulares y la superficie lateral. Se requiere que las tapas se corten de mayor diámetro que el que tendrá definitivamente la lata, así como la superficie lateral debe tener un ancho mayor que el definitivo. Supongamos que se corte el material incluyendo una pestaña de ancho s (ver la figura a continuación).

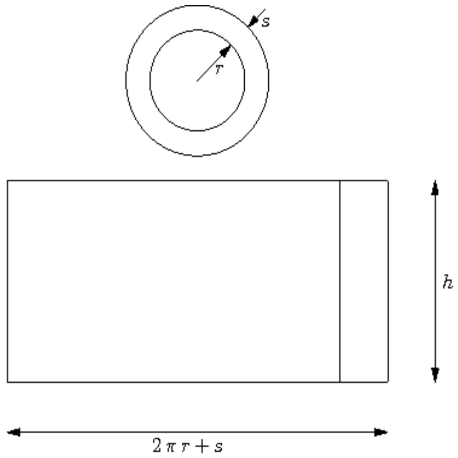

Figura 1: Desarrollo de la lata cilíndrica donde se observa la pestaña (se muestra solo una tapa)

Suponiendo que la lata se construye con chapa del mismo espesor en las tapas y la superficie lateral entonces la cantidad de chapa necesaria es proporcional al área total que viene dada por:

$$A(r, h, s) = 2\,\pi\,(r + s)^2 + (2\,\pi\,r + s)\,h$$

El volumen final de la lata es $V = \pi\,r^2\,h$.

1. Demuestre que si se desea minimizar la cantidad de material para construir la lata, conocido el volumen V_0 final y el ancho s de la solapa, entonces el radio r de las tapas es la solución real positiva de:
$$2\,\pi^2\,r^4 + 2\,\pi^2\,r^3\,s - \pi\,V_0\,r - V_0\,s = 0.$$
2. Si $s = 0$ se obtiene el conocido resultado $\frac{h}{r} = 2$ de los cursos de cálculo. Si $s > 0$ esa relación de forma es mayor que 2. Obtenga la relación $\frac{h}{r}$ si $V_0 = 500\ cm^3$ y $s = 1cm$.

22. Una de las formas de la *ecuación de Colebrook* para obtener el factor de fricción f para flujo turbulento en una cañería es:

$$1 + 2\,\log_{10}\left(\frac{\epsilon}{3.7\,D} + \frac{2.51}{Re\,\sqrt{f}}\right)\sqrt{f} = 0$$

donde f es el factor de fricción (adimensional), ϵ es la rugosidad absoluta (medida en unidades de longitud), D es el diámetro interno de la cañería (en la mismas unidades que ϵ), Re es el número de Reynolds (adimensional) y $\frac{\epsilon}{D}$ es la rugosidad relativa (adimensional).
Determine f con un error menor que 10^{-3} si:

1. $\frac{\epsilon}{D}= 0.0001$, $Re = 3\,10^5$.
2. $\frac{\epsilon}{D}= 0.03$, $Re = 10^4$.
3. $\frac{\epsilon}{D}= 0.01$, $Re = 3\,10^5$.

23. La denominada *tasa de interés efectiva* en un préstamo o compra financiada en cuotas es raíz de un polinomio. El problema de aproximar dicha raíz es equivalente a la solución del siguiente problema de punto fijo:

$$x = g(x) = C\left(1 - \frac{1}{(1+x)^N}\right) \quad , x \geq 0.$$

donde C es una constante positiva y menor que 1 (es la razón entre el valor de la cuota y el monto del préstamo) mientras que N es un número natural (el número de cuotas del préstamo).

1. Verifique que $g(0) = 0$, $g(x) \to C$ tanto para $x \to +\infty$ como para $N \to \infty$.
2. Obtenga g' y g''. Verifique que $g'(x) > 0$ y estrictamente decreciente para $x > 0$. Represente gráficamente g en forma aproximada para $x \geq 0$ si $g'(0) = C\,N > 1$.
3. Verifique que g tiene un punto fijo positivo si $C\,N > 1$. Ese punto fijo es la tasa de interés efectiva.
4. Verifique que g satisface las hipótesis del teorema del método de punto fijo en cualquier intervalo cerrado incluido en $(M, +\infty)$, donde
$$(M+1)^{N+1} = C\,N.$$
5. Verifique que cualquier valor inicial $x_0 > 0$ da lugar a la formación de una sucesión que converge al punto fijo positivo de g si $C\,N > 1$.
6. Calcule la tasa de interés efectiva mensual de un préstamo de 5000$ que se paga en 10 cuotas mensuales de 550$. Rta: 0.018 (1.8 %).

Nota: Si a es el monto de la cuota y D el monto del préstamo entonces $C = \frac{a}{D}$. La condición $C\,N > 1$ corresponde justamente a $N\,a > D$ lo que resulta intuitivo que ocurra cuando se cobra alguna tasa de interés por el préstamo. La tasa de interés es nula si $N\,a = D$.

Apéndice: Rutina en Octave para resolver ecuaciones no lineales.

Octave dispone de la rutina `fsolve` para aproximar la solución de ecuaciones no lineales y sistemas de ecuaciones no lineales. A continuación se muestran dos ejemplos.

Ejemplo 1

Se desea aproximar el cero real de $f(x) = x - \exp(-x)$ en $[0,\, 1]$.
Todos los métodos para búsqueda de raíces requieren evaluaciones de la función f. Para hacer uso de la rutina `fsolve` hay que definir la función f tal que el problema sea aproximar la solución de la ecuación $f(x) = 0$. Puede hacerse con un archivo .m o bien definiendo la función en línea de comando de *Octave*, por ejemplo en la forma denominada *anónima*:

```
f = @(x) x - exp(-x);
```

La invocación de la rutina `fsolve` se puede realizar de la siguiente manera:

```
format long
[r,a,b]=fsolve(f,0.5)
r =  0.567143290372035
a =  -5.91580118225465e-011
b =  1
```

El primer argumento de entrada de `fsolve` es el nombre de la función (en este caso `f`) y el segundo es un valor inicial o una aproximación a la raíz. En el caso que `f` tenga mas de una raíz el procedimiento convergerá a una raíz u otra dependiendo de la elección de este valor inicial. Es recomendable que este valor inicial sea una buena aproximación a la raíz.
Por defecto (pero puede modificarse) el procedimiento obtiene la solución con un error relativo de 10^{-8}. Con esta forma de invocación el primer valor de la salida es la aproximación a la raíz de la ecuación, el segundo es la evaluación de `f` en esa aproximación y el tercero es un código (puede consultarse en la ayuda de `fsolve`). En este caso que devuelve 1 se indica que el procedimiento fue exitoso en obtener la aproximación buscada.

Ejemplo 2

Para aproximar la solución de un sistema de ecuaciones no lineales como el siguiente:

$$\begin{aligned} -2\,x^2 + 3\,x\,y + 4\,\sin(y) - 6 &= 0 \\ 3\,x^2 - 2\,x\,y^2 + 3\,\cos(x) + 4 &= 0 \end{aligned}$$

hay que definir la función `F` en línea de comando de la siguiente manera:

```
F=@(x)[-2*x(1)^2+3*x(1)*x(2)+4*sin(x(2))-6  3*x(1)^2-2*x(1)*x(2)^2+3*cos(x(1))+4];
```

Aquí el argumento `x` de `F` es un vector de dos componentes. Una invocación de `F` resulta en:

```
F([1,2])
ans =

  1.637189707302727  0.620906917604419
```

Finalmente

```
format % para que presente el resultado con 5 decimales
[X,a,b]=fsolve(F,[1;2])
X =

   0.57983
   2.54621

a =

  -2.8991e-008  4.9167e-007

b =  1
```

A partir de la aproximación inicial (1,2) se obtuvo la aproximación (0.57983, 2.54621) para el cero de `F`).