

目录		III 恒星结构与演化	8
I 星系天文学发展历史及现状	3	1. 恒星的形成与结构	8
1. 星系	3	1.1 原初恒星的形成	8
1.1 恒星	3	1.2 自由下落时标 (free fall time)	8
1.2 物质组成	3	1.3 恒星的结构	9
2. 历史	3	1.4 恒星结构方程的简单应用	9
II 基本测量	4	1.5 赫罗图	10
1. 坐标系	4	1.6 主序恒星	11
1.1 赤道坐标系	4	2. 元素核反应	11
1.2 银道坐标系	4	3. 恒星的演化轨迹	11
1.3 坐标转换	4	3.1 褐矮星 (Brown dwarf)	11
2. 基本概念	4	3.2 低质量恒星演化	11
2.1 视差 (parallax)	4	3.3 中质量恒星演化	12
2.2 自行	5	3.4 大质量恒星演化	12
2.3 视向速度 (Velocity along line-of-sight)	5	3.5 小结	12
2.4 光度与亮度	5	3.6 等年龄线 (Isochrone)	12
2.5 光谱 (Spectrum)	5	3.7 恒星遗迹质量与初始质量关系	12
2.6 视星等 (Apparent Magnitude)	5	3.8 白矮星质量上限 (钱德拉塞卡极限)	13
2.7 滤光片 (Filter)	5	3.9 双星系统	13
2.8 颜色 color	5	3.10 超新星	13
2.9 绝对星等 (absolute magnitude)	5	3.11 恒星初始质量函数 (IMF)	14
2.10 表面亮度 (surface brightness)	6	IV 银河系结构与动力学	14
2.11 等亮度线 (isophotal shape)	6	1. 银河系的结构	14
2.12 星系表面亮度分布 (Surface brightness profile)	6	1.1 银晕	14
2.13 星系光谱 (spectra)	6	1.2 银盘	15
2.14 星系介质 (Interstellar medium, ISM)	6	1.3 银河系中心与核球	15
3. 星系分类	7	1.4 暗物质	15
3.1 哈勃音叉图 (Hubble Tuning Fork)	7	1.5 盘星系	15
3.2 椭圆星系 (Elliptical galaxy)	7	1.6 银河系的旋臂	15
3.3 漩涡星系 (Spiral galaxy)	7	1.7 较差自转 (differential rotation)	15
3.4 棒旋星系 (barred spiral galaxy)	7	1.8 银河系自转	15
4. 影响视星等的因素	7	1.9 银河系的旋转曲线	17
4.1 大气吸收	7	2. 星系动力学	17
5. 巡天测量	7	2.1 基础	17
5.1 星系光度函数 (Luminosity function)	7	2.2 潮汐半径 (tidal radius)	18
5.2 巡天的主要科学发现	8	2.3 动力学摩擦 (Dynamical friction)	19
		2.3.1 两体碰撞的简单示例	19

2.4	潮汐加热	19	1.2	星系团—椭圆星系, 不规则星系之家	29
2.5	卫星星系的运动	20	1.2.1	星系团的 X 射线图像	29
2.6	金斯方程	20	1.3	星系的演化	29
2.6.1	无碰撞玻尔兹曼方程 (Collisionless Boltzmann Equation)	20	1.4	位力定理估计质量	29
2.6.2	金斯方程的简单应用	21	1.4.1	位力定理	29
			1.4.2	温度-速度弥散关系	30
V	本地星系群 (Local Group)	23	1.5	冲压剥离 (ram-pressure stripping, RPS)	30
1.	本地星系群的结构	23	2.	引力透镜效应 (Gravitational lensing)	30
1.1	本地星系群基本性质	23	2.1	强引力透镜效应 (Strong Gravitational lensing)	30
1.2	本地超星系团 Virgo Supercluster	23	2.1.1	放大效应	31
1.3	超星系团 Laniakea	23	2.2	弱引力透镜效应 (Weak Gravitational lensing)	31
1.4	宇宙网络结构	23	2.3	引力透镜效应总结	31
2.	Local group 成员星系	23	3.	星系团 SZ 现象	31
2.1	家长星系	23			
2.2	仙女座星系 M31	24	VII	宇宙学基本框架	33
2.3	三角座星系 M33	24	1.	宇宙学原理	33
3.	银河系卫星星系	24	2.	宇宙学红移 (cosmic redshift)	34
3.1	大麦哲伦云 (LMC)	24	3.	星系的红移	35
3.1.1	精确测量近邻星系/恒星距离	25	4.	Friedmann 方程	35
3.1.2	变星 (variable star)	25	4.1	热力学和状态方程	35
3.2	小麦哲伦云 (SMC)	25	4.2	Friedmann 方程求解	36
3.3	麦哲伦流	25	4.3	减速参数	36
3.4	LMC 与 SMC 的空间运动	25	5.	宇宙的距离概念	36
3.5	统计性质	26	5.1	距离-红移关系	37
3.6	矮星系	26	5.2	宇宙的年龄	37
3.6.1	谱线展宽	26	5.3	视界 (Horizon)	37
3.6.2	矮星系的质量测量	26	5.4	光度距离与红移的关系	38
3.6.3	卫星星系的质量观测性质	27	6.	宇宙膨胀因子随时间的变化	38
4.	银河系三大著名难题	27	7.	宇宙的创生 (普朗克时期)	39
4.1	Missing satellite problem	27	8.	宇宙的暴胀	39
4.1.1	卫星星系的光度函数	27	8.1	平直性问题	39
4.1.2	银河系应该有多少卫星星系	27	8.2	视界问题	40
4.2	Too big to fall problem (大而不倒)	27	8.3	宇宙暴胀理论-Inflation	40
4.3	银河系卫星星系的空间分布	27	9.	宇宙演化史	41
4.3.1	卫星星系的径向分布	27	10.	宇宙早期物理过程—轻元素合成	41
4.3.2	Great Plane of MW satellites	28	11.	宇宙热力史—复合时期	42
			11.1	复合时期温度计算	42
VI	星系群与星系团	28	11.2	CMB 最大的扰动尺度	43
1.	星系群/团的基本观测性质	28			
1.1	星系群—盘星系之家	28			

VIII 结构形成理论	43
1. 流体力学	43
2. 金斯不稳定性	44
2.1 静止宇宙下的扰动方程	44
2.2 膨胀宇宙下的扰动方程	44
2.2.1 没有宇宙膨胀 $\dot{a} = 0$	44
2.2.2 宇宙膨胀时的解	45
3. 球塌缩模型	46
3.1 暗晕密度分布 (Halo density profile)	47
3.2 暗晕的合并和增长	47
3.2.1 暗晕形成历史	47
3.3 暗晕子结构	48
3.3.1 数值模拟	48
3.4 暗晕的质量函数 (Press-Schechter Mass Function)	49
4. 星系形成模型 (Galaxy Formation Model)	49
4.1 丰度匹配模型 (Abundance Matching Method)	49
4.2 半解析模型 (Semi-analytical model)	49
4.2.1 热气体冷却并形成冷气体盘	49
4.2.2 恒星形成率-Kennicutt-Schmidt law	50
4.2.3 超新星反馈	50
4.2.4 星系合并及星暴	50
4.2.5 黑洞的形成及反馈	51
4.2.6 星族合成及其他	51
4.2.7 尘埃的吸收和在发射	51
4.3 流体数值模拟 (Hydro-dynamical simulation)	51

I 星系天文学发展历史及现状

1. 星系

定义 I.1 星系是一个由大量恒星组成的, 稳定的, 自引力束缚系统. 星系是宇宙结构的基本单元.

M_{\odot} : 太阳质量

$$1m = 10^6 \text{um} = 10^9 \text{nm} = 10^{10} \text{\AA}$$

1.1 恒星

星系主要由恒星组成.

银河系中的恒星分布: 分布在银河 (Milky Way) 之上.

1.2 物质组成

恒星, 冷气体, 尘埃, 热气体, 黑洞, 暗物质.

2. 历史

- 1) 星云假说: 需要维持在旋转的平面之上.
- 2) 望远镜与照相技术.
- 3) 哈勃:
 - a. 发现河外星系: 仙女座星系.
 - b. 哈勃定律.
 - c. 星系的哈勃分类.
- 4) 一些典型河外星系.
- 5) 不同望远镜.
- 6) 星表
- 7) 巡天
 - a. SDSS (斯隆数字巡天)

弧度表示: $1^\circ = \frac{\pi}{180}$,

II 基本测量

测量位置, 速度, 亮度等信息.

1. 坐标系

1.1 赤道坐标系

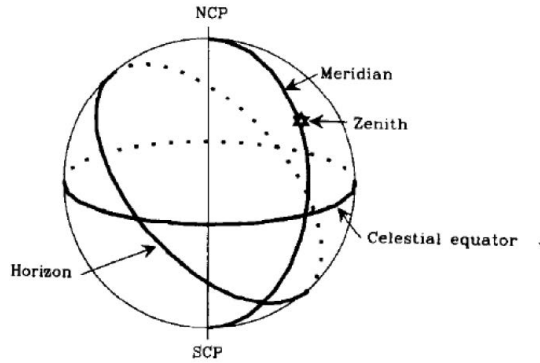


图 2.1 天球, 标出了天极、天赤道、子午圈、天顶和地平

图 1: 天球

- 1) 天球: 以地球为圆心, 半径无限大的假想球面.
- 2) 北天极 & 南天极 (NCP & SCP, North/South Celestial Pole): 地球自转轴与天球的交点.
- 3) 天赤道 (Celestial Equator): 地球赤道面与天球相交平面.
- 4) 对于地面任意观测者, 可以确定一个天顶 (Zenith), 子午圈 (经过 NCP, SCP, Zenith) 和 地平圈 (可观测的交界处). 由于地球由西向东自转, 天球围绕地面观测者自东向西旋转.
- 5) 天顶距 z : 一个天体与天顶的角距离, 天体的地平高度 $\alpha = 90^\circ - z$. 天体穿过子午圈时天顶角距离最小.
- 6) 黄道: 地球围绕太阳转一圈, 太阳在天球上的轨道称为黄道. 黄道面与赤道面夹角为 $23^\circ 27'$, 与天赤道的交点分别为春分点与秋分点. 两次经过春分点的时间间隔称为回归年.
- 7) 赤经: α : 为其与春分点之间的角距离, 赤经的 0 点从春分点开始, 由西向东逐渐增加.
- 8) 赤纬 δ : 从天赤道向北为正, 向南为负, 北天极 $\delta = +90^\circ$, 南天极 $\delta = -90^\circ$.

1.2 银道坐标系

选择银河系的盘在天球上的大圆为银道, 该面与天赤道夹角为 62.87° .

北银极 (NGP) 为 $(\alpha, \delta) = (192.8^\circ, 27.12^\circ)$. 银心方向为 $(\alpha, \delta) = (266.4^\circ, -28.9^\circ)$.

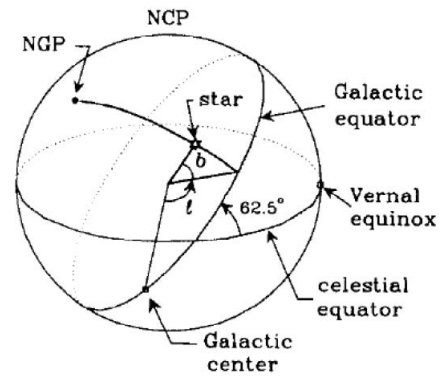


图 2: 银道坐标系

- 1) 银纬 b : 银道面向 NGP 方向的角度.
- 2) 银经 l : 其距离银心方向的夹角.

1.3 坐标转换

可以使用球面夹角公式换算 (具体见 ppt)

2. 基本概念

2.1 视差 (parallax)

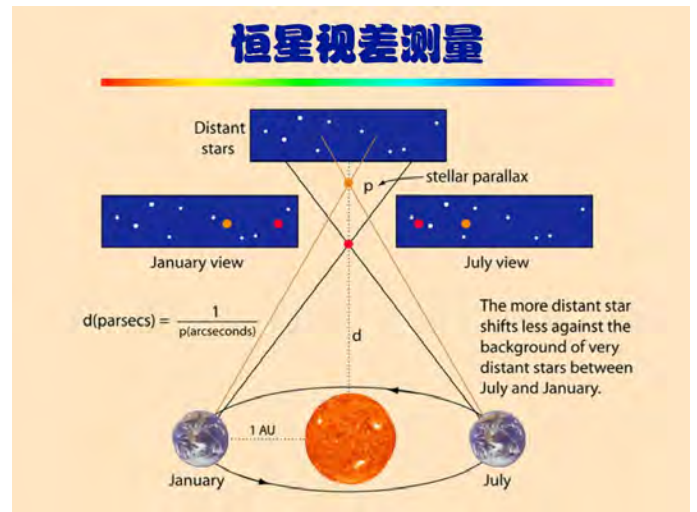


图 3: 视差

由于地球公转导致恒星的位置变化. 定义地球的公转平均半径为 r (一个天文单位, $1\text{AU} = 1.49 \times 10^8\text{km}$), 距离为 d 的恒星, 其视差为 w (为弧度, 且 $\ll 1$),

$$\frac{r}{d} = \tan w \sim w$$

天文距离基本单位为秒差距 (1pc, Parsec), 表示视差为 1 角秒 (arcsec) ($1'' = \frac{\pi}{180} \frac{1}{3600} = 4.84813 \times 10^{-6}$) 的恒星到太阳

的距离.

$$1\text{pc} = \frac{1\text{AU}}{1''} = 206265\text{AU} = 3.086 \times 10^{13}\text{km} = 3.26\text{光年}$$

此法一般称为三角视差, 还有测量亮度而得的测光视差 (不讲了). 大部分恒星三角视差都是毫角秒量级 (mas, 10^{-3}arcsec). GAIA 卫星的视差测量进度为 20uas(微角秒).

常用天文尺度: Kpc, Mpc, Gpc

- 1) 银河系: 恒星盘直径 $\sim 10\text{Kpc}$, 暗晕半径 200Kpc .
- 2) 星系团的经典尺度: $\sim \text{Mpc}$.
- 3) 星系巡天的经典尺度: $\sim \text{Gpc}$.

2.2 自行

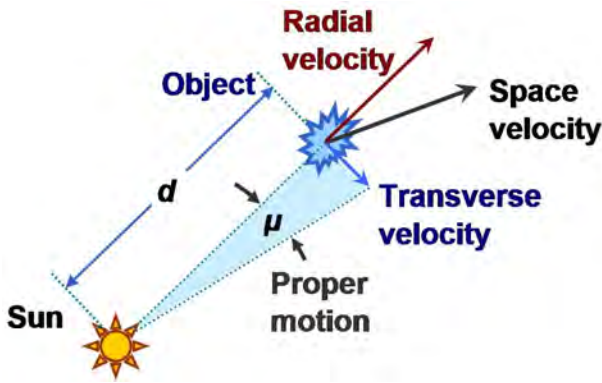


图 4: 自行

由于恒星间有相对运动, 在扣除地球公转后, 恒星在与视线垂直方向上的运动分量产生一个角变化率, 称自行. 自行为矢量, $\vec{\mu}$, 以 mas/yr 为单位, 一般方向用位置角 θ 表示. 自行会改变现有星图排布.

2.3 视向速度 (Velocity along line-of-sight)

其测量通过特征光谱的移动, 基本原理是多普勒效应. 后退的光源称为红移, 前进的光源称为蓝移.

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v \cos \theta}{c} = \frac{v_{los}}{c} = \frac{v_r}{c}$$

$z > 0$ 红移, $z < 0$ 蓝移. 测量多种元素的特征光谱, 与地球实验室的特征光谱做比较, 可以得知红移.

2.4 光度与亮度

光度 (Luminosity, L), 天体在单位时间内辐射总能量为一固有量, 与时间无关. 单位: W or erg/s .

亮度 (Flux, F) 或称流量 (F), 观测者单位时间没接收到的天体所辐射的能量, 非内禀量. 单位: W/m^2 or $\text{erg/s}^1/\text{cm}^2$.

$$L = F \times S$$

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}$$

各向同性: 用平分反比定律从距离 d 和流量 F 估计光度.

恒星光度: $10^{-4}L_{\odot} \sim 10^6L_{\odot}$. 太阳热光度 (总光度, 所有波长辐射累计): $L_{\odot} = 3.86 \times 10^{33}\text{erg/s}$.

能量守恒与参考系相关

2.5 光谱 (Spectrum)

天体在不同波段辐射的能量. 单位: erg/s/nm

光谱特征

- 连续谱
- 吸收线
- 发射线

2.6 视星等 (Apparent Magnitude)

较亮星位 1 等, 较暗星为 6 等. 星等与流量之间的换算

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log_{10} \frac{f_1}{f_2}$$

2.7 滤光片 (Filter)

截取部分的波长, 给出星等时必须注明滤光片波段.

不考虑大气吸收, 天体流经滤光片 A 后的流量为

$$F = \int_0^{\infty} F_{\lambda}(A) f(\lambda) d\lambda$$

$F_{\lambda}(A)$ 为滤光片 A 在不同波长处的通光百分比. UBV 标准滤光片系统. 滤光片中心位置为有效波长 λ_{eff} , 半高全宽 FWHM. VEGA 星等系统定义织女星视星等波段为 0.

2.8 颜色 color

测量不同波段星等差可得颜色 (色指数), 对于 A,B 两不同滤光片

$$m_A - m_B = -2.5 \log \frac{\int_0^{\infty} d\lambda F_{\lambda}(A) f(\lambda)}{\int_0^{\infty} d\lambda F_{\lambda}(B) f(\lambda)}$$

颜色本质是测量天体在两个不同波段处的流量比, 与距离无关. 测量一个短波与一个长波之间的流量比得到色指数, 如 B-V, 提供了恒星的亮度.

2.9 绝对星等 (absolute magnitude)

一般定义绝对星等为天体处于 10pc 的视星等.

$$\therefore m = C - 2.5 \log f$$

$$f = \frac{L}{D^2}$$

f 为观测流量, D 为天体距离, L 为本征亮度.

$$\therefore m - M = -2.5 \log \frac{f}{F} = 5 \log \frac{d}{10\text{pc}} = 5 \log d - 5$$

$m - M$ 也叫距离模数, 绝对星等也依赖于测量波段.

2.10 表面亮度 (surface brightness)

有时用流量 I 表示, 其与 μ 有

$$\mu = C - 2.5 \log I$$

2.11 等亮度线 (isophotal shape)

表面亮度相等的区域构成的形状, 可用椭圆来拟合.

2.12 星系表面亮度分布 (Surface brightness profile)

亮度分布可用 Sersic Profile 来描述

$$I(R) = I_0 \exp \left[-\beta_n \left(\frac{R}{R_e} \right)^{1/n} \right]$$

I_0 为中心表面亮度, n 为 sersic index. R_e 为特征半径 (半光半径), 其之内包含星系总流量的一半. β_n 为与 n 相关参数, 可近似为 $\beta_n = 2n = 0.324(n > 1)$.

星系总流量可积分表示为

$$L = 2\pi \int_0^\infty I(R) R dR = \frac{2\pi n \Gamma(2n)}{\beta_n^{2n}} I_0 R_e^2$$

Γ 为 gamma function.

2.13 星系光谱 (spectra)

光谱 (Spectrum) 的特征

- 连续谱
- 吸收线
- 发射线

星系中发光物质主要恒星, 因此恒星的光谱是构成星系的基础. 恒星的光谱 (spectra) 分为 O B A F G K M. 恒星辐射接近黑体, 恒星类型与表面大气温度有较好的相关性.

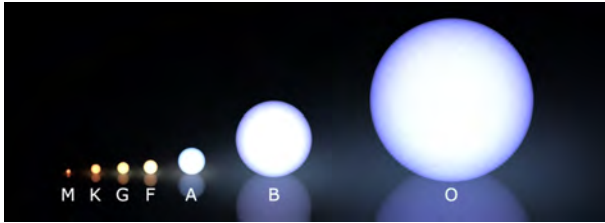


图 5: 恒星光谱

普朗克辐射定律, 在某个波长范围内黑体辐射能量 $L(\lambda) d\lambda$:

$$L(\lambda) d\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} d\lambda$$

其辐射总能量为 $B(T) = \sigma T^4$, σ 为 Stefan-Boltzmann 常数. 不同恒星有不同吸收线.

• 椭圆星系: 基本都是年老恒星, 恒星表面大气产生吸收线 (其发射线向各方向辐射), 总体效果为吸收. 无恒星形成区.

• 漩涡星系/星暴星系 (starburst): 存在大量恒星形成区 (分子云, HII 区), 其被年轻恒星高能光子电离, 我们可以看到发射线 (HII 区背后的分子云导致恒星被完全遮挡).

2.14 星系介质 (Interstellar medium, ISM)

主要是气体 (99%) 和星际尘埃 (1%). 介质总质量与恒星相当.

星际介质主要分为:

1) 中性原子氢气体: 中性氢广泛存在于恒星际空间, 其分布空间范围比恒星分布延展, 其密度在 $[0.1 \sim 10]$ 原子/cm³, 温度在 100-1000K 之间.

探测: 星系把部分辐射来自中性 H, 其辐射是 21cm, 通过红移与蓝移测量速度, 用公式导出速度. 测量中性 H 可得旋转速度与半径的变化.

$$v(r) = \sqrt{\frac{G \cdot (M_{DM}(r) + M_*(r) + M_{gas}(r))}{r}}$$

2) 分子云: 分子云中的主要物质为 H₂ 和 CO 分子, 其主要辐射来自 CO 的转动跃迁 (碰撞激发). 实际观测中 H₂ 分子的质量一般从转换因子得到

$$X = \frac{N_{H_2}}{I_{CO}}$$

3) 电离氢云: 一般处于恒星形成区, 由于其光谱中含有很强的氢线, 也叫电离氢区 (HII). 氢原子被完全电离后发生复合, 产生 H α 光子等, 同时也会产生其他元素的发射线, 如 OIII. 电离氢区的 H α 线强度能用来测量星系的恒星形成率.

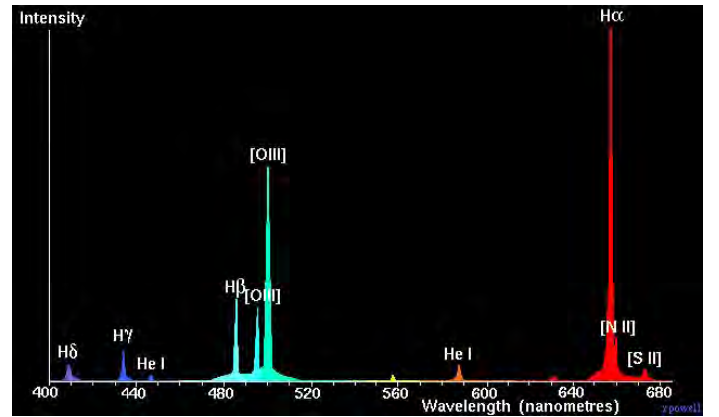


图 6: 非常显著的 H α (656.28nm), OIII(496, 500.7 nm), OII (372.7), NII(654.8), 发射线

4) **星际尘埃 (dust)** 尘埃质量占气体的 1%, 但是对星系性质有非常强的影响.

尘埃消光 (dust extinction) 定义为

$$A(\lambda) = m_0(\lambda) - m_T(\lambda)$$

m_0 为测量值, m_T 为真值.

消光依赖于

- 含量: 数量多, 消光严重.
- 波长: 与组成有关, 短波消光严重, 长波基本不消光.

短波消光更严重, 导致天体颜色变红, 称为红化.

尘埃辐射 (dust emission): 尘埃吸收紫外光子, 在红外, 远红外等波段产生辐射在尘埃处于热平衡时, 吸收的总能量等于辐射的总能量.

3. 星系分类

星系是面源, 有不同形态.

3.1 哈勃音叉图 (Hubble Tuning Fork)

分为椭圆, 漩涡, 不规则星系. 椭圆星系也叫早型, 漩涡星系也叫晚型.

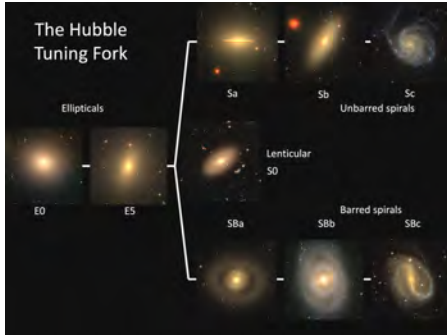


图 7: 哈勃音叉图

3.2 椭圆星系 (Elliptical galaxy)

符号为 E , 按椭率大小分为 E_0, E_1, \dots, E_7 八个次型, $n = 10^{\frac{a-b}{a}}$. 由老年恒星构成, 没有或有少量气体与尘埃.

3.3 漩涡星系 (Spiral galaxy)

按核球大小和悬臂的缠绕程度, 分为 S_a, S_b, S_c 三类型. S_a 核球最大, 悬臂最紧. 有大量气体与年轻恒星.

3.4 棒旋星系 (barred spiral galaxy)

中间有明显棒的漩涡星系, 根据缠绕程度分为 SB_a, SB_b, SB_c .

4. 影响视星等的因素

4.1 大气吸收

由于大气吸收, 滤光片等因素, 实际接受的光子流量为

$$f = \int_0^\infty f_v T_v F_v dv$$

T_v 为大气透射, F_v 为滤光片透射.

大气吸收与视线上吸收体数量有关, 满足

$$T \propto e^{-\alpha}$$

α 称为光学深度, 与视线方向上空气柱密度成正比.

$\frac{\alpha}{\alpha_0}$ 为大气质量, α_0 为天顶空气柱密度. 对于平面平行大气, 有

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \sec z$$

z 是天体的天顶距, 因此大气消光对星等的影响符合

$$m(z) = k \sec z + C$$

k 为常数, $m(z)$ 为恒星在天顶距 z 时的星等. 可通过测量不同处同一天体星等, 可退的天顶大气质量与 0 大气质量的星等.

5. 巡天测量

5.1 星系光度函数 (Luminosity function)

有时也叫质量函数. 指单位体积内某一光度 (或质量) 范围内的星系数密度. 最重要的观测量之一.

一般利用 Schechter(1976) 函数来描述星系的恒星质量 (或者光度 L) 函数.

$$\phi(L) dL = \phi^* \left(\frac{L}{L^*} \right)^\alpha e^{-L/L^*} d \left(\frac{L}{L^*} \right)$$

星系的总密度为

$$Ng = \int_0^\infty \phi(L) dL = \phi^* \Gamma(1 + \alpha)$$

星系光度密度

$$\mathcal{L} = \int_0^\infty \phi(L) L dL = \phi^* L^* \Gamma(2 + \alpha)$$

这里 $\phi(L)$ 为质量 $L, L + dL$ 范围内的数密度.

光度函数的几个特征:

- 1) 超过某个光度星系的数密度:

$$\begin{aligned} n(L) &= \int_L^\infty \phi(L) dL \\ &= \phi^* \int_{L/L^*}^\infty \left(\frac{L}{L^*} \right)^\alpha e^{-L/L^*} d \left(\frac{L}{L^*} \right) \\ &= \phi^* \Gamma \left(\alpha + 1, \frac{L}{L^*} \right) \end{aligned}$$

当 $\frac{L}{L^*}$ 时, 对于 $\alpha < -1$, 星系数密度发散.

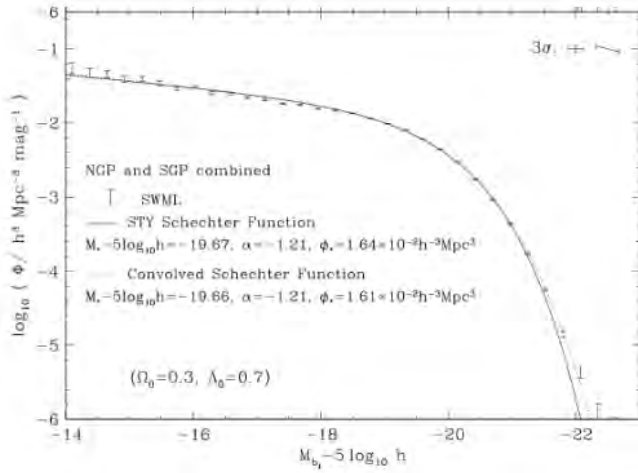


图 8: 星系光度函数

2) 超过某个光度星系的总光度:

$$\begin{aligned}
 T(L) &= \int_L^\infty L \phi(L) dL \\
 &= \phi^* L^* \int_{L/L^*}^\infty \left(\frac{L}{L^*}\right)^{\alpha+1} e^{-L/L^*} d\left(\frac{L}{L^*}\right) \\
 &= \phi^* L^* \Gamma\left(\alpha+2, \frac{L}{L^*}\right)
 \end{aligned}$$

- $\alpha \leq -1$, 星系数密度发散 (无穷大)
- $\alpha \leq -2$, 星系总光度发散.
- 观测表明 $-2 < \alpha < -1$. 因此并没有光度灾难.

总光度对于 $2 + \alpha > 0$ 收敛. 因此暗星系的总数目可以发散 (非常大), 但是星系的总光度可以收敛 (避免了光度灾难).

5.2 巡天的主要科学发现

- 1) 颜色或者恒星形成率分布
- 2) 星系性质的 Scaling relations
- 3) 星系中央黑洞质量-核球质量关系: 黑洞质量大约为核球质量的 0.1%.
- 4) 暗物质-恒星质量关系

III 恒星结构与演化

恒星是星系的基本单元. 要了解星系和宇宙, 必须首先了解恒星的形成与演化. 恒星的结构与演化理论是 20 世纪天体物理最具标志性的重要成果之一!

1. 恒星的形成与结构

1.1 原初恒星的形成

原初恒星形成于分子云, 其塌缩形成原恒星.

假设分子云的密度为 ρ , 温度为 T , 考虑一个半径为 R 的球体, 其由于引力不稳定性导致塌缩的条件为总能量小于 0, 即 $E + K < 0$, E 为该球体的势能, K 为动能.

假设密度均匀, 球体内总质量 $M = \frac{4\pi}{3} \rho R^3$, 且 $\rho = n_H m_H$, n_H 为等效氢原子数密度, m_H 为氢原子质量.

该球体的总势能、总动能分别为

$$\begin{aligned}
 E &= -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \\
 K &= N \frac{3}{2} kT = \frac{M}{m_H} \frac{3}{2} kT
 \end{aligned}$$

代入可得分子云塌缩的临界半径

$$R_J = \sqrt{a_1 \frac{T}{n_H}}$$

这里 $a_1 = 15k/(8\pi G m_H^2) \approx 4.4 \times 10^{40} (1/mK)$, R_J 也叫金斯半径, 对应的金斯质量.

$$M_J = a_2 T^{1.5} n_H^{-0.5}$$

$a_2 = 6.5 \times 10^{34} (kg/(m^{1.5} K^{1.5}))$, 引入太阳质量 $1M_\odot = 2 \times 10^{30} kg$, $M_J \approx 30 \sqrt{\frac{T^3}{n_H}} M_\odot$

- 对于典型分子云温度 $30K$, 密度 $10^3/cm^3$, 可得 $R_J = 1.18pc$, $M_J \approx 170M_\odot$
- 对于典型分子云温度 $30K$, 密度 $10^4/cm^3$, 可得 $R_J = 0.37pc$, $M_J \approx 48M_\odot$
- 中性氢云: $1/cm^3$, $T = 100K$, $M_J \approx 30000M_\odot$
- 暗分子云: $10^6/cm^3$, $T = 10K$, $M_J \approx 1M_\odot$

恒星更容易形成于分子云.

金斯方程的另外一种推导 (向内的引力大于内部压力) 此略.

金斯质量 $M_J = a_2 T^{1.5} n_H^{-0.5}$ 对应于分子云可以自引力塌缩的最小质量. 可以知道, 对于冷气体或者密度高, 其金斯质量越小, 越容易在不稳定情况下发生塌缩.

1.2 自由下落时标 (free fall time)

对于一块半径为 R 的塌缩云, 其塌缩所需时间.

自由下落引力加速度 $a = \frac{GM}{R^2}$, 自由下落距离 $R \approx 0.5at^2$, 初始时 $M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3$, 可得

$$t_{ff} = \sqrt{\frac{3}{2\pi G\rho}} \approx 10^6 \text{yr} \sqrt{\frac{10^4 \text{cm}^{-3}}{n}}$$

可以看到塌缩时标 t_{ff} 与质量无关, 只依赖于气体密度, 密度越大, 自由下落时标越短。

对于 $n = 2 \times 10^3 \text{cm}^{-3}$, $t_{ff} \approx 2.24 \times 10^6 \text{yr}$ 分子云典型塌缩时标为百万年。

从金斯质量 M_J 可以看出, 如果在分子云塌缩过程中, 云收缩而释放的引力能被辐射出去, 从而保持气体云温度不变, 则 $M_J \approx \rho^{-0.5}$, 即塌缩过程中密度变高, 金斯质量变小, 因此气体云可以破碎成更小的分子云。

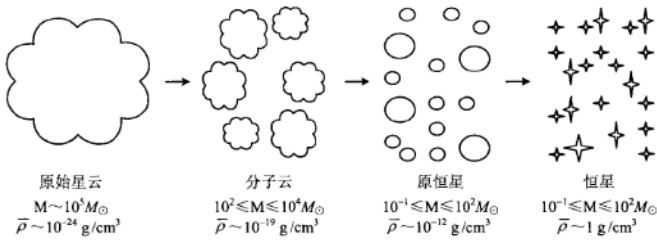


图 9: 原始星云的碎裂, 凝聚过程

1.3 恒星的结构

处于平衡态恒星满足的基本方程。

1) 质量方程球壳 ($r, r + dr$) 内物质 $dm = 4\pi r^2 dr \rho$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

2) 流体静力学平衡: 引力 = 压力

球壳 ($r, r + dr$) 收到的压力 $dPS = dP 4\pi r^2$, 注意这里压力 P 包括气体压和辐射压, 受到的引力 $F = -\frac{Gm(<r)}{r^2} dm = -\frac{Gm}{r^2} 4\pi r^2 dr \rho$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm}{r^2} \rho$$

3) 能量平衡: 球壳向外流出的能量 = 球壳内产生的能量

$dL_r = dm\varepsilon$, 这里 L_r 表示半径 r 处辐射的能量, ε 表示单位质量的产能率。恒星内部产生能量的机制有

- 热核反应释放能量 ε_n
- 由于物质热状态发生改变而释放的能量 ε_g (内能和膨胀做功)
- 通过中微子辐射而损失能量 $-\varepsilon_v$

$$\frac{dL_r}{dm} = \varepsilon_n + \varepsilon_g - \varepsilon_v$$

4) 辐射转移方程

5) 能量从恒星内部传送到外部, 主要有辐射, 对流和热传导三种输运方式, 一般来说辐射和对流占主导, 这里只考虑辐射传能方式。

质量分布方程	$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$
流体静力学平衡方程	$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2} \rho(r)$
光度方程	$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \varepsilon(r)$
温度梯度方程(能流方程)	$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{\kappa(r) \rho(r) L(r)}{16\pi r^2 \sigma T^3(r)}$ (辐射为主)
	$\frac{1}{T(r)} \frac{dT(r)}{dr} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1}{P(r)} \frac{dP(r)}{dr}$ (对流为主)
物态方程	$P = P(\rho, T, XYZ)$

图 10: 恒星结构的基本方程

这 5 个方程要确定 5 个未知量: m, ρ, P, L, T , (它们都是 r 的函数), 该方程组是闭合的, 可以通过数值计算方法求解, 只是产能率, 吸收系数, 元素组成等需要事先给定。

经过严格证明: 平衡的恒星球体内部结构, 由它的化学成分和总质量唯一确定。但恒星内部发生核燃烧后, 化学成分变化, 恒星结构随之变化。求解上述方程非常复杂。

1.4 恒星结构方程的简单应用

1) 太阳中心压强和温度估计

流体静力学平衡方程

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm}{r^2} \rho$$

近似可得

$$\frac{P_c - P_0}{R} = \frac{GM}{R^2} \bar{\rho}$$

代入 $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \bar{\rho}$, 且在恒星表面 $P_0 \approx 0$, 可得

$$P_c \approx \frac{GM^2}{4R^4}$$

代入太阳质量和半径

$$P_c \approx 2.8 \times 10^{15} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 \left(\frac{R_\odot}{R} \right)^4$$

由此可看出, 太阳中心压强 $\approx 10^{15} \text{cgs} \approx 10^{12}$ 大气压。太阳中心温度, 由 $P_c \sim nkT$,

$$T \approx 10^7 \text{u} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \left(\frac{R_\odot}{R} \right) \approx 10^7 \text{K}$$

太阳中心温度 1000 万度。

2) 位力定理

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm}{r^2}\rho$$

两边同时乘以 $4\pi r^3 dr$, 并积分可得

$$\int_0^R 4\pi r^3 dP = -\int_0^M \frac{Gm}{r} dm$$

左边分部积分, 变成

$$\int_0^R 4\pi r^3 dP = (4\pi r^3 P)|_0^R - 3 \int_0^R 4\pi r^2 P dr$$

注意到 $r = R$ 时 $P = 0$ (恒星表面), 得到

$$3 \int_0^R \frac{4\pi r^2 \rho}{\rho} P dr = 3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dm$$

对于单原子理想气体, 对于单位质量气体, 其内能

$$\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{kT}{um_p}$$

利用

$$P = nkT = \frac{\rho}{um_p} kT$$

即

$$\frac{P}{\rho} = \frac{2}{3} \varepsilon$$

$$3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dm = 2 \int_0^M \varepsilon dm = 2U$$

这里 U 为恒星的总内能.

恒星总势能

$$V = -\int_0^M \frac{Gm}{r} dm$$

因此 $2U + V = 0$, 系统总能量 $E = U + V = V/2$.

可以看到, 在恒星收缩过程中, 减少的势能中有一半能量转化为系统内能, 一半变成了辐射能, 释放到星际空间.

3) 恒星的脉动

假设恒星内部发生扰动, 使得恒星失去流体静力学平衡, 则恒星将收缩或者膨胀, 在压强和引力之间建立新的平衡, 这称为恒星的脉动. 其典型周期为声波穿过恒星的时标.

$$t \approx \frac{R}{V_s}$$

声波速度 V_s 满足

$$V_s^2 = \frac{dP}{d\rho}$$

对于理想气体 $P = nkT$, 可得

$$V_s^2 = \frac{kT}{um_H}$$

由位力定理, 气体总内能

$$U = \frac{3}{2} NkT = \frac{3}{2} \frac{M}{um_H} kT \approx \frac{1}{2} \frac{GM^2}{R}$$

略去相关系数, 可得

$$V_s^2 = \frac{GM}{R}$$

可以得到脉动周期

$$t \approx \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \approx \rho^{-0.5}$$

与自由下落时标接近.

典型时标:

- 太阳, $R = 6.9 \times 10^{10} \text{cm}$, $M = 2 \times 10^{33} \text{g}$, 可得其周期为 25 分.
- 巨星 (造父变星), $R = 10^2 R_\odot$, 周期 20 天.
- 白矮星: $R = 0.1 R_\odot$, $M \approx M_\odot$, 周期 5 秒.

对于造父变星, 其恒星质量和表面温度无太大变化, 但是由于其具有不同的半径 R , 可以看到 R 越大, 亮度 $L \approx R^2 T^4$ 越大, 周期越长, 因此存在周光关系.

4) 开尔文-亥姆霍兹时标

认为恒星 (太阳) 的能量来自其引力收缩释放的引力能, 明显小于地球物种演化年龄, 恒星 (太阳) 的能源肯定不是来自其引力能, 而是来自核反应.

5) 爱因斯坦时标

太阳的总能量

$$E = Mc^2$$

为 $1.8 \times 10^{54} \text{erg}$, 因此太阳以目前光度可维持的时间 $t_E \approx \frac{E}{L_\odot} \approx 1.4 \times 10^{13}$ 年. 从恒星演化理论, 我们知道太阳的寿命为 10^{10} 年. 因此可见太阳中质量转化为能量的效率 $\sim 7\%$.

热核聚变只发生在恒星内部, 其质量为恒星总质量的 $\sim 10\%$.

1.5 赫罗图

赫罗图 (HR Diagram: Hertzsprung-Russell Diagram): 表征恒星演化的途径. X-axis: 恒星表面温度, y-axis: 恒星亮度.

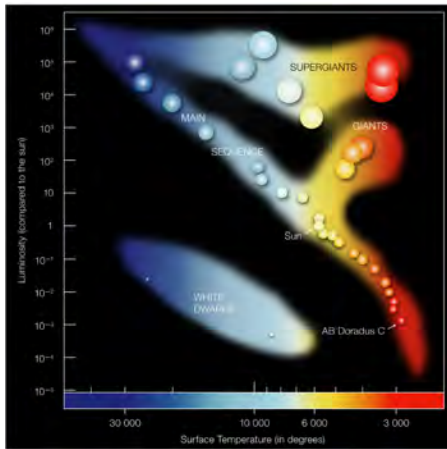


图 11: 赫罗图

1.6 主序恒星

恒星将在主序带渡过它一生的绝大部分时间
主序恒星的特征:

- 1) 恒星辐射近似为黑体谱: 温度为 T , 半径 R 的黑体, 由 Stefan-Boltzmann law 可得其光度 $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$
- 2) 光度-质量关系: 观测发现主序星具有 $L \sim M^{3.5}$, 一个 30 太阳质量的恒星, 亮度为太阳的 10 万倍.
- 3) 半径-质量关系: $R \sim M^{0.8}$ (除了太阳以外, 恒星半径无法直接观测, 一般根据恒星 $L-T$ 关系来得到, T 从恒星光谱可得到)
- 4) 主序恒星寿命: $t \sim \frac{E}{L} \sim \epsilon \frac{M}{L} \sim M^{-2.5}$ (假设恒星总能量来自核反应, 质能方程 $E \sim \epsilon M c^2$), 大质量恒星寿命短.

2. 元素核反应

恒星的内部能源: 克服库伦势垒, 或通过量子隧穿效应, 发生的核聚变. 不同原子核反应需要的温度不同, 主要取决于恒星的总质量.

恒星的初始物质组成主要为氢, 氦. 依赖于恒星质量 (中心温度), 恒星内元素主要通过如下途径发生核反应:

- 1) 质子-质子链氢核聚变反应 (Proton-Proton, PP 链)
- 2) CNO 循环
- 3) 3-alpha 反应
- 4) 其他核反应

3. 恒星的演化轨迹

3.1 褐矮星 (Brown dwarf)

质量小于 $0.08M_{\odot}$ 的天体, 于其自身引力不足以使中心区域达到氢点火的温度, 因此不能靠核反应发光, 只能依靠气体热辐射发光. 这样的天体不能称为恒星, 有时称为失败的恒星. 在银河系中已经发现大量的褐矮星.

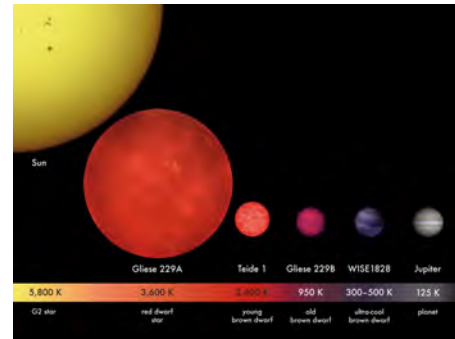


图 12: 褐矮星

褐矮星与行星在形成机制, 物质组成上存在本质区别.

恒星在绝大部分时间处于主序上, 其停留时间取决于中心区域氢燃烧过程. 当氢燃烧完之后, 恒星离开主序, 在赫罗图上演化.

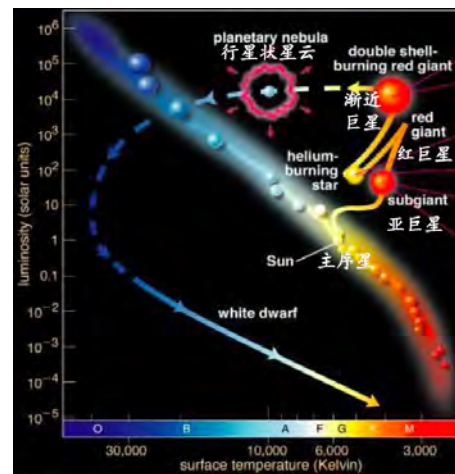


图 13: 恒星的演化

3.2 低质量恒星演化

1) 主序 \rightarrow 亚巨星: 低质量恒星, 当其中中心氢燃烧完之后, 将形成一个氦核和含有氢的外层. 此时中心区域温度不够高, 不足以使氢发生聚变, 因此中心为一个“冷”的核. 在冷氦核的表面氢继续燃烧, 维持恒星辐射的大部分能量. 当氢壳层燃烧生成氦, 导致氦核质量增加开始引力收缩, 释放引力能注入到氦外层, 导致外层膨胀, 恒星半径变大, 温度降低. 在赫罗图上向右上移动, 形成亚巨星.

2) 红巨星: 由于外层气体对光子的阻挡作用, 恒星表面温度下降到一定程度后保持不变, 但是恒星半径继续增加, 亚巨星在赫罗图上几乎垂直向上, 形成红巨星.

3) 氦闪 (未被观测, 仅理论推测): 红巨星之后, 随着中心区域的质量不断增加核引力收缩, 中心氦区温度继续上升, 当温度超过 $10^8 K$ 以后, 氦开始燃烧, 发生 3-alpha 反应, 生成 ^{12}C . 核区温度升高, 中心发生绝热膨胀, 但是由于电子简并压力不减

小, 核反应加速进行, 形成所谓的氦闪. 该过程时间很短, 大概几秒-几分钟.

4) 氦燃烧稳定阶段 (水平分支): 氦闪导致核区温度升高, 密度不变, 核区内电子从简并变为非简并, 此时核区膨胀, 吸热, 光度降低, 恒星在赫罗图上向左下移动, 进入稳定的氦燃烧阶段 (3-alpha 反应). 同时也会生成部分氧.

氦核周围是氢壳层燃烧. 该状态称为水平分支, 其在赫罗图上的具体位置与恒星初始质量, 红巨星阶段的质量损失有关.

5) 渐进巨星分支 (Asymptotic Giant Branch: AGB): 当核心的氢耗尽, 中心变成碳-氧核, 核心再次收缩, 导致外层氢燃烧, 其再之外为氦燃烧. 这是恒星处于双壳层燃烧阶段, 恒星光度增加, 再次到红巨星 (红超巨星).

6) 行星状星云 (Planetary Nebula) 在红超巨星阶段, 外层物质损失非常快, 壳层燃烧物质迅速靠近表面而消失, 大量物质被抛射到恒星际空间, 导致恒星在赫罗图上向左移动, 变成行星状星云. 在星云中心, 则是一颗孤零的白矮星.

白矮星: $M_{\odot}, 0.01R_{\odot}$.

3.3 中质量恒星演化

$2.3M_{\odot} < M < 8M_{\odot}$, 中等质量的恒星演化轨迹与小质量恒星差不多, 但是呈现一些不同的特点

1) 主序 — 红巨星: 演化到红巨星阶段时间非常短, $\sim 3 \times 10^6$ 年, 在赫罗图留下空隙区.

2) 激发脉动: 在外壳层中的氢、氦电离区形成激发脉动, 在赫罗图上左右来回摆动, 中间穿过造父脉动带区域, 形成造父变星.

3) AGB 阶段: 巨大的星风, 并有大量中微子产生

4) 最终演化

- 超新星 $\sim 8M_{\odot}$.
- 行星状星云 + 碳氧白矮星 $2.3 \sim 6M_{\odot}$.

3.4 大质量恒星演化

$> 8M_{\odot}$, 恒星内部温度更高, 导致其演化时标非常快, 并有如下主要特点:

1) 内部发生更多核反应: 生成 C, O, Na, Mg, Si, P, S 等, 最后形成铁核

2) 内部强烈对流和更强物质外流: 重元素从恒星内部输运到恒星表面, 并经由强烈星风抛射到恒星际空间, 甚至恒星形成区之外

3) 最终演化: 铁核非常不稳定, 很容易形成超新星

- 中子星 $8 \sim 30M_{\odot}$.
- 黑洞 $> 30M_{\odot}$.

3.5 小结

不同质量恒星的演化:

- 1) 都会经历光度上升阶段
- 2) 大质量恒星演化快, 并且很快死亡
- 3) 小质量恒星在主序的生存时间大于宇宙年龄

3.6 等年龄线 (Isochrone)

指的具有同样年龄、同样金属丰度、但不同质量的恒星在赫罗图上的分布. 对于球状星团, 其中恒星具有相同的年龄和金属丰度, 因此在 HR 图上的分布可以很好的用 Isochrone 来描述, 并可以得到星团的年龄.

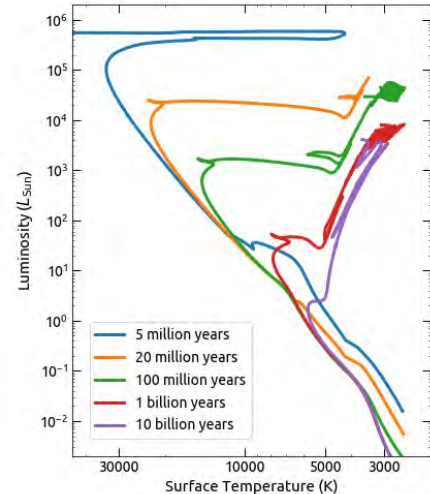


图 14: 等年龄线

- 转折点—确定星族年龄
- 水平分支—确定距离

3.7 恒星遗迹质量与初始质量关系

恒星在演化过程中将通过如下途径损失质量, 但是损失量非常不确定, 强烈依赖于恒星原初化学成分:

- 星风: 大质量恒星在演化过程中通过星风损失部分质量, 剩下白矮星
- 超新星爆炸: 爆炸将恒星外包层物质全部抛向恒星际空间, 留下黑洞或者中子星

对于某个星族, 总的遗迹质量依赖于恒星初始质量分布平均来说, 恒星将 50% 左右的物质返还到恒星际介质中 (冷气体 + 热气体)

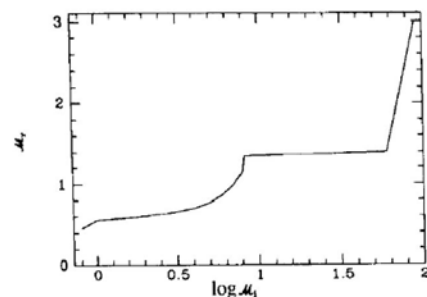


图 15: 恒星遗迹质量与初始质量关系

3.8 白矮星质量上限 (钱德拉塞卡极限)

在中等质量恒星演化后期, 氢氧核燃烧结束, 由于失去核反应提供的热能和辐射压, 核区开始收缩, 核区密度变高, 当密度足够高时, 电子变为简并且处于相对论状态 (其速度接近光速), 此时电子的压强与密度之间存在如下关系:

$$P \sim K(\rho/\mu_e)^{4/3}, \quad K = 1.23 \times 10^{10}$$

利用之前的流体静力学平衡公式

$$\frac{dP}{dR} = G \frac{M}{R^2} \rho$$

- 左边为压强项

$$\sim \frac{P}{R} \sim \frac{K(\rho/\mu_e)^{4/3}}{R} \sim \frac{KM^{4/3}}{R^5}$$

- 右边为引力项

$$\sim G \frac{M}{R^2} \rho \sim \frac{GM^2}{R^5}$$

可以看到随着质量增加, 引力比压强增加更快, 因此存在一个特征质量 M_{ch} , 超过该质量后白矮星不能稳定 (变成中子星或者黑洞).

从上式可得白矮星的质量上限为

$$KM^{4/3} \sim GM^2$$

代入相关系数可得 $M_{ch} \approx 1.4M_{\odot}$.

3.9 双星系统

对于恒星质量分别为 m_1, m_2 的双星系统, 其满足开普勒第三定律

$$G(m_1 + m_2)P^2 = 4\pi^2 a^3$$

P 为旋转周期, a 为相对运动轨道的半轴长.

因此, 只要测量到双星系统的旋转周期, 相对轨道的半长轴, 可以确定系统总质量. 如果假设双星系统的恒星亮度与质量成正比 (对于质量相差不大的主序星系统, 该假设一般成立), 可以通过双星的光度比例分别测量出 m_1, m_2 .

由于双星系统在围绕彼此旋转, 因此系统中恒星的星风会受到来自伴星的引力, 导致星风被伴星吸积, 发生物质交换, 从而影响恒星的演化. 在旋转双星系统中存在一个特殊的区域, 称为洛希等势面.

通过计算可以得到其等势面如图所示, 其中存在系列拉格朗日点, 在该点处, 一个受力粒子可以相对于两恒星保持静止. 通过拉格朗日点的等势面为临界等势面.

通过 L_1 的等势面具有特别的意义, 它包含的体积为洛希临界体积. 当恒星大气处于洛希体积内, 可以认为其受到另一个恒星的引力

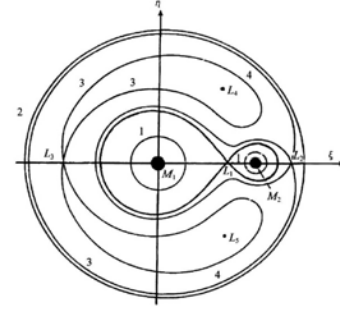


图 16: 等势面

较小, 一旦达到洛希等势面, 恒星大气将发生交换, 从一个恒星到达另一个恒星.

对于红巨星, 其物质充满洛希面以后, 将会流向体积较小的伴星 (如白矮星), 一旦吸积物质后质量超过钱德拉塞卡极限, 白矮星将发生爆炸, 形成超新星.

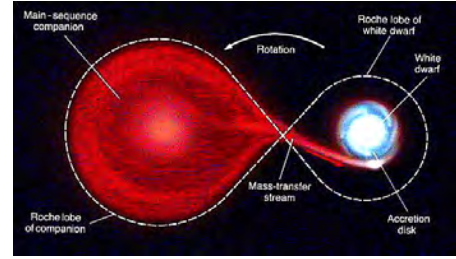


图 17: 洛希等势面

3.10 超新星

超新星是一类独特而有常见的天文现象, 是恒星演化到晚期的最剧烈活动, 其爆发释放的能量可达 $10^{47 \sim 53}$ erg, 亮度甚至超过整个星系.

分类:

1) II 型超新星

光谱中含有明显的氢吸收线, 大质量恒星的产物-中子星, 爆发率取决于星系的瞬时恒星形成率.

爆发过程将重元素抛向恒星际空间.

常见于恒星形成星系.

2) I 型超新星

光谱中没有氢吸收线

Ia: 没有氢氦线, 有硅吸收线, 常见种类型星系. 中等质量恒星的-白矮星, 爆发率非常不确定

Ib: 有强的氢吸收线

Ic: 几乎没有明显的吸收线

Ib, Ic 可能是大质量恒星外包层剥离后塌缩的超新星, 常见的超新星主要是 Type-II and Type-Ia.

3.11 恒星初始质量函数 (IMF)

IMF 描述的是在星系中生成的一批恒星中, 不同质量恒星之间的数目分布

$$dN = N_0 * \xi(M)dM$$

N_0 表示新生成单位太阳质量恒星的总数目, $\xi(M)$ 满足如下归一化条件

$$M_{\odot} = \int M * \xi(M)dM$$

Salpeter 1955 年提出银河系的 IMF 具有一个简单的形式

$$\xi(M) = M^{-\alpha}$$

对所有 M , $\alpha = 2.5$ (需在低质量处截断, 否则质量发散).

后来的观测发现, IMF 可以有其他形式, 并且随着环境和时间演化.

实际上测量银河系的 IMF 也很困难. 有如下 2 个主要原因:

- 1) 演化和光度效应: 大质量恒星演化快, 并且大质量恒星处于恒星形成区, 有严重的尘埃遮挡效应. 小质量恒星 ($< 1M_{\odot}$) 由于光度低, 很难完备测量.
- 2) 环境效应: 恒星盘、核球区等不同区域内 IMF 也不一样

河外星系无法直接测量其单个恒星, 只能利用模型拟合.

IV 银河系结构与动力学

1. 银河系的结构

银河系的恒星分布主要在银盘, 银晕, 与核球.

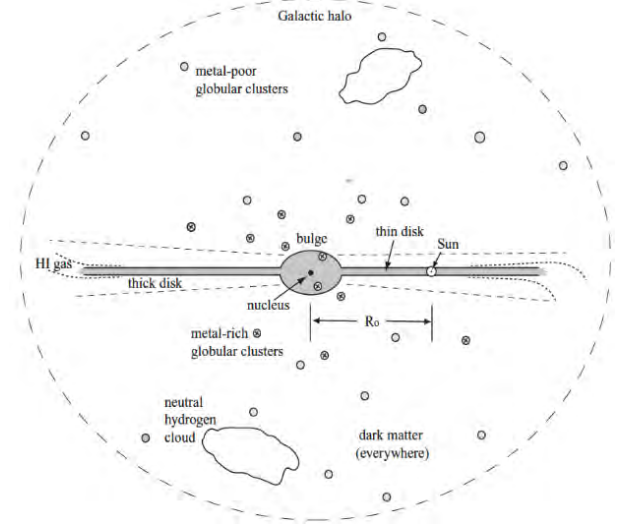


图 18: 银河系的结构

1) 银晕 (Galactic halo)

- 晕星: 单独存在的恒星, 主要是老年, 贫金属恒星 (Pop II). 总质量 $\sim 10^9 M_{\odot}$.
- 球状星团: 几百到上百万颗恒星组成的致密结构
- 高速云: 主要是快速运动 ($> 100 km/s$) 的中性氢团块
- 气体晕: 温热气体 ($10^5-10^6 K$), 质量 $\sim 10^{11} M_{\odot}$ (非常不确定)
- 暗物质晕: 普遍存在于银河系中, 其质量 $\sim 10^{12} M_{\odot}$, 空间分布 $\sim 200 Kpc$

2) 恒星盘 (disk)

银河系的恒星 (主要为 Pop I) 主要分布在一个盘上, 其半径 $\sim 15 Kpc$, 总质量 $(5-10) \times 10^{10} M_{\odot}$. 太阳在距离银心 $\sim 8.5 Kpc$ 的距离处

3) 核球 (Bulge)

核球恒星质量 $\sim 10^{10} M_{\odot}$

1.1 银晕

1) 晕星: 银河系晕中的恒星主要来自银河系的卫星星系以及银河系内早期生成的贫金属星. 卫星星系在进入银河系后被潮汐剥离, 剥离出的恒星形成所谓的星流 (star stream). 星流中的恒星一般具有相同的速度和金属丰度. 银河系中最有名星流是人马座星流 (Sagittarius Stream).

2) 星团:

- 疏散星团
 - 恒星数目: 从几十到几千不等

- 空间尺度: 无规则形状和明显边界, $\sim 1\text{-}10\text{ pc}$
- 成员星: 存在大量年轻恒星、尘埃和气体
- 空间分布: 主要分布在银河系盘上及附近, 银河系有 1000-2000 个疏散星团
- 球状星团
 - 恒星数目: 从几千到几百万
 - 空间尺度: 具有明显的球状和边界, $10\sim 100\text{ pc}$, 恒星密度非常高, 平均距离 0.1 光年
 - 成员星: 成员星具有同样年龄 $>100\text{ 亿}$ 、贫金属
 - 空间分布: 主要在银晕, 目前银河系已经发现 ~ 200 个 (相比之下 M87 有 15,000 个球状星团)

1.2 银盘

1) 薄盘: 大部分恒星分布在薄盘, 占盘恒星总数 90% 以上. 一般假设盘上的恒星分布为轴对称, 其径向和垂直方向分布为指数盘

$$n \sim \frac{n_0}{2Z_0} e^{-\frac{r}{R_s}} e^{-\frac{|z|}{Z_0}}$$

R_s 为特征半径 $\sim 3.5\text{ Kpc}$, Z_0 为特征标高 $\sim 0.2\text{ Kpc}$.

2) 厚盘: 占盘上恒星总数 10%, 其恒星分布类似薄盘, 特征标高 $\sim 1\text{ Kpc}$. 厚盘上的恒星年龄老, 金属丰度低

银河系盘具有旋转, 盘上的恒星围绕银河系中心旋转, (太阳的旋转速度 $\sim 200\text{ km/s}$), 但是也存在一定的本动速度 ($\sim 10\text{-}20\text{ km/s}$) 一般认为厚盘上的恒星来自早期薄盘上形成的恒星, 在径向迁移过程中形成的.

1.3 银河系中心与核球

1) 核球: 银河系中心是一个核球, 其中恒星年龄老, 其密度分布一般认为满足如下形式 (Hernquist Profile)

$$\rho \sim \frac{a}{r \times (r+a)^3}$$

a 为特征半径 $\sim 0.6\text{ Kpc}$

2) 银河系中心: 位于人马座方向 (Sagittarius), 一致认为其中心物体可能是一个黑洞, 命名为 SgrA*. 确定其中心天体的质量 $\sim 400\text{ 万太阳质量}$.

1.4 暗物质

研究表明银河系含有大量暗物质, 其质量和空间分布远远超过其恒星分布. 测量银河系的暗物质分布是目前研究的前沿, 但是对于其质量测量还存在巨大争议, 但是整体质量集中在 $8 \times 10^{11} M_\odot$ 到 $2 \times 10^{12} M_\odot$ 之间, 暗物质的空间分布大约为 $200\text{-}250\text{ kpc}$.

1.5 盘星系

对于盘状星系, 如果沿着垂直盘方向观测, 称为正向 (Face on), 沿着侧面观测, 称为 edge on. 实际上我们并没有选择观测方向的自由, 但是宇宙中的大量星系给我们提供了不同正向星系和侧向星系的样本.

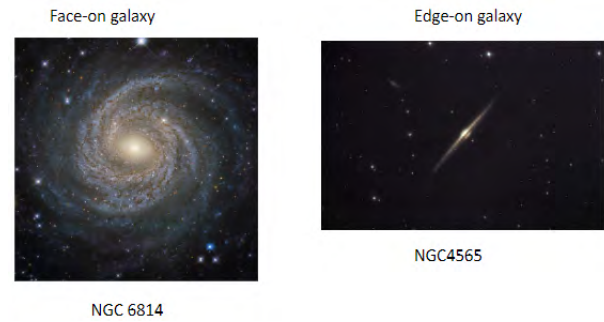


图 19: 盘星系

Face-on Galaxy

- 优势
 - 很容易辨认是否是盘星系
 - 能够分辨出核球和盘, 以及看到明显的旋臂
- 缺点
 - 无法测量其旋转速度
 - 很难搜寻其卫星星系 (被前景恒星遮挡)

Edge-on Galaxy

- 优势: 可以测量其旋转曲线, 寻找卫星星系等
- 缺点: 很难鉴别其是否是盘主导的星系, 特别是在中等倾角的情况下

1.6 银河系的旋臂

银河系是典型的盘星系, 其包含 4 个明显的旋臂: 英仙臂 (Perseus Arm), 人马旋臂 (Sagittarius arm), 矩尺-天鹅臂 (Norma-Cygnus arm), 盾牌-南十字臂 (Scutum-Crux arm). 太阳位于猎户座旋臂 (Orion Spur). 旋臂是恒星、气体密集聚集的区域. 旋臂并不是固定的物质臂, 而是一种密度波.

1.7 较差自转 (differential rotation)

指天体的不同部位存在不同的角速度. 对于刚体 (地球表面可近似为刚体), 其不同纬度的角速度相同. 对于只存在引力的系统, 如星系、恒星, 一般存在较差自转现象.

银河系: 不同位置存在较差自转. 如图所示, 不同半径处的恒星具有较差自转, 内部恒星角速度快, 则经过一个较短时间后将形成旋臂. 随着时间推移, 旋臂将缠绕紧密, 最终缠绕在一起. 但观测则表明盘星系的旋臂并没有缠绕在一起, 于是林家翘等提出了密度波理论, 解释了银河系旋臂问题.

1.8 银河系自转

1927 年奥尔特首先考虑到利用恒星的自行和径向速度来测量银河系的旋转. 他假设恒星盘都围绕银河系做圆周运动, 如下图所示 (这里只考虑盘内运动).

太阳在 S 处, 沿着银经 l 方向, 距离 d 处测量一个恒星 P

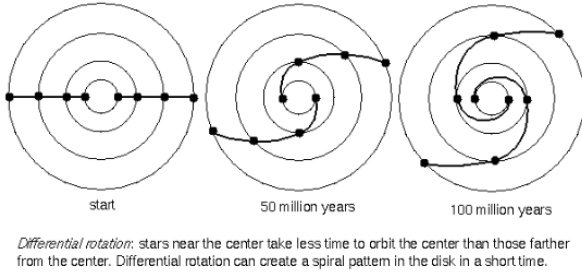


图 20: 银河系较差自转

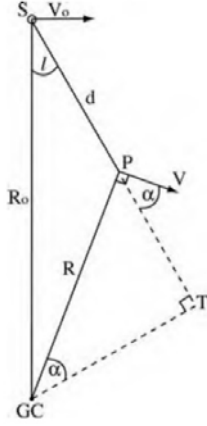


图 21: 恒星的自行和径向速度

的运动, 在太阳处观测者测量的其径向速度与切向速度分别为

$$V_r = V \cos \alpha - V_0 \sin l$$

$$V_t = V \sin \alpha - V_0 \cos l$$

利用三角函数关系 $\frac{\sin l}{R} = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{R_0}$ 可得

$$V_r = \left(\frac{V}{R} - \frac{V_0}{R_0} \right) R_0 \sin l$$

为了将其表达为 (d, l) 的函数, 在观测者太阳处将 $\frac{V}{R}$ 对 R 泰勒展开到二阶

$$\begin{aligned} \frac{V}{R} &\approx \frac{V_0}{R_0} + \left. \frac{dV}{dR} \right|_{R_0} (R - R_0) \\ &= \frac{V_0}{R_0} + \left(\frac{R_0 \frac{dV}{dR} - V_0}{R_0^2} \right) (R - R_0) \\ &= \frac{V_0}{R_0} + \left(\frac{1}{R_0} \frac{dV}{dR} - \frac{V_0}{R_0^2} \right) (R - R_0) \end{aligned}$$

在 d 很小时有 $R_0 - R = d \cos l$ 代入可得

$$V_r \approx -\frac{1}{2} \left(\frac{dV}{dR} - \frac{V_0}{R_0} \right) d \sin 2l$$

定义奥尔特常数 $A = -\frac{1}{2} \left(\frac{dV}{dR} - \frac{V_0}{R_0} \right)$, 可得

$$V_r = Ad \sin 2l$$

对于切向速度, 利用 $R_0 \cos l = R \sin \alpha + d$ 可得

$$\begin{aligned} V_t &= \left(\frac{V}{R} - \frac{V_0}{R_0} \right) R_0 \cos l - V \frac{d}{R} \\ &= -\left(\frac{dV}{dR} - \frac{V_0}{R_0} \right) d \cos^2 l - \frac{V}{R} d \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{dV}{dR} - \frac{V_0}{R_0} \right) d \cos 2l - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dV}{dR} - \frac{V_0}{R_0} \right) + \frac{V}{R} \right) d \\ &\approx -\frac{1}{2} \left(\frac{dV}{dR} - \frac{V_0}{R_0} \right) d \cos 2l - \frac{1}{2} \left(\frac{dV}{dR} + \frac{V_0}{R_0} \right) d \end{aligned}$$

同理定义奥尔特常数 $B = -\frac{1}{2} \left(\frac{dV}{dR} + \frac{V_0}{R_0} \right)$, 可得

$$V_t \approx Ad \cos 2l + Bd$$

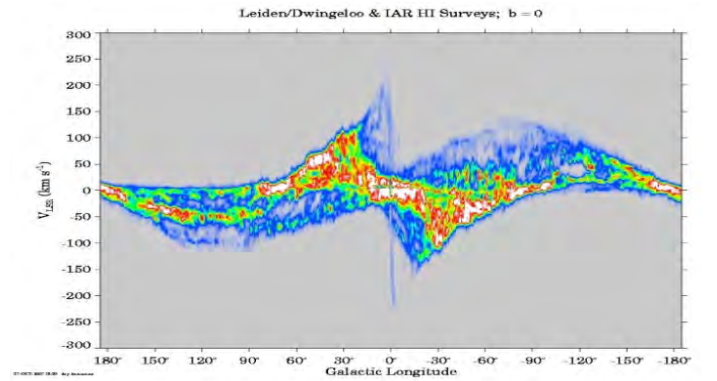


图 22: 利用 21cm 观测到银河系内中性氢的旋转曲线 (相对于太阳)

利用依巴谷卫星测量的恒星自行和视向速度等数据, 得到了银河系一些局部参数.

表 1: 银河系一些局部参数

(km s^{-1})	$(\text{km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1})$	$(\mathcal{M}_\odot \text{ pc}^{-2})$
$v_c(R_0)$	$A \quad B$	$\Sigma_{\text{tot}}(R_0) \quad \Sigma_{\text{gas}}(R_0) \quad \Upsilon_B(R_0)$
220	14.8 -12.4	48 5.5 2.3

利用 $A - B = \frac{V_0}{R_0}$ 与 $R_0 \approx 8 \text{ Kpc}$, 可知 $V_0 \approx 220 \text{ km/s}$. 由此可知, 太阳围绕银河系中心一圈需要 2.2 亿年, 目前已经绕银心运动了 ~ 20 圈.

直接的测量太阳旋转的速度是测量银河系中心 SgrA* 的自行. 利用 VLA 对该源的自行测量数据为

$$(u_l, u_b) = (-6.55, -0.48) \text{ mas/yr}$$

由此得到太阳的旋转速度为 $\sim 240 \text{ km/s}$. 与利用奥尔特常数得到的结果比较接近.

1.9 银河系的旋转曲线

对于漩涡星系, 其质量可以通过测量示踪天体的旋转速度来得到. 由牛顿定律可知, 旋转速度取决于某个半径内的总质量

$$V(r) = \sqrt{\frac{GM(< r)}{r}}$$

$M(< r)$ 是半径 r 以内包含的总质量.

而星系的物质主要由恒星, 气体和暗物质构成

$$M(r) = M_{\text{disk}}(r) + M_{\text{bulge}}(r) + M_{\text{gas}}(r) + M_{\text{dm}}(r)$$

恒星和气体的分布可以通过观测直接得到, 再利用最佳拟合旋转曲线, 并得到暗物质的分布和总质量.

对银河系, 一般采取下面的模型来描述物质分布

1) 指数盘

$$\rho_d(r, z) = \frac{\Sigma_0}{2z_d} \exp\left(-\frac{|z|}{z_d} - \frac{r}{R_d}\right)$$

盘质量 $M_{\text{disk}} = 2\pi\Sigma_0 R_d^2 = 5 \times 10^{10} M_\odot$, $R_d = 3.6 \text{ kpc}$, $z_d = 0.3 \text{ kpc}$

2) 核球

$$\rho \sim \frac{a}{r(r+a)^3}$$

特征半径 $a \sim 0.6 \text{ Kpc}$, $M_{\text{bulge}} = 9 \times 10^9 M_\odot$

3) 暗物质晕

$$\rho_{\text{dm}} = \frac{\rho_c}{x^r(1+x)^{3-\gamma}}$$

$x = \frac{r}{R_h}$, R_h 为特征半径. 对于 NFW 暗晕密度分布, $\gamma = 1$.

测量旋转曲线的方法只适用于银盘, 且通常只能到 20 Kpc 左右. 旋转曲线可以很好的用几个物质分量来拟合: 中央黑洞、内核球、主核球、盘、暗物质.

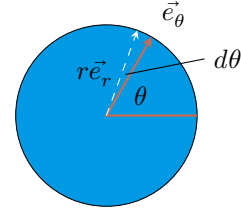
- 从银心到太阳处, 银盘上恒星的引力势占主导.
- 在 $\sim 30 \text{ Kpc}$ 以外, 示踪天体来自银晕, 这些天体并非开普勒运动, 因此无法利用旋转速度来得到暗晕质量.

2. 星系动力学

2.1 基础

恒星在球对称引力势中的运动, 其位矢 $\vec{r} = r\vec{e}_r$, 运动可表示为

$$\ddot{\vec{r}} = F(r)\vec{e}_r$$



在极坐标下对 \vec{r} 求导, 结合 $d\vec{e}_r = d\theta\vec{e}_\theta$, $d\vec{e}_\theta = -d\theta\vec{e}_r$, 有

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

在此求导得

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta = F(r)\vec{e}_r$$

因此有

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = F(r) \quad (\text{IV.1})$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \quad (\text{IV.2})$$

由 (IV.2) 可得 $\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = 0$, 即 $r^2\dot{\theta} = L$ (常数, 角动量). 将 θ 来替代 t 作为自变量, 即有

$$\frac{dy}{dt} = \frac{L}{r^2} \frac{dy}{d\theta}$$

(IV.1) 可变为

$$\frac{L^2}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{L^2}{r^3} = F(r)$$

令 $\mu = \frac{1}{r}$, 可得

$$\frac{d^2\mu}{d\theta^2} + \mu = -\frac{F(\frac{1}{\mu})}{L^2\mu^2} \quad (\text{IV.3})$$

该方程可以数值求解, 在特殊情况下有解析解.

对 (IV.3) 两边同乘 $\frac{d\mu}{d\theta}$ 并对 $d\theta$ 积分, 利用 $F = -\nabla\phi$ 可得

$$\left(\frac{d\mu}{d\theta} \right)^2 + 2\frac{\phi}{L^2} + \mu^2 = \text{Constant}$$

令 $\text{Constant} = 2\frac{E}{L^2}$, 则有

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(r \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \phi(r) \quad (\text{IV.4})$$

显然该常数就是单位质量的总能量.

对于束缚轨道, 一定 $\exists \mu$, 有 $\frac{d\mu}{d\theta} = 0$, 此时 μ 满足

$$2\frac{\phi(\frac{1}{\mu})}{L^2} + \mu^2 = 2\frac{E}{L^2}$$

可解得 μ_1, μ_2 , 因此恒星径向位置将在 μ_1, μ_2 之间振荡.

(IV.4) 可写为

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{2(E - \phi) - \frac{L^2}{r^2}}$$

在近心点与远心点处有 $\frac{dr}{dt} = 0$. 径向周期为

$$T_r = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{2(E - \phi) - \frac{L^2}{r^2}}}$$

同时从近心点到远心点再到近心点, 方向角 θ 的变化量为

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\theta}{dr} dr = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{L}{r^2} \frac{dt}{dr} dr \\ &= 2L \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2(E - \phi) - \frac{L^2}{r^2}}} \end{aligned}$$

在 T_r 时间内, 恒星角向位置的变化率为 $\Delta\theta$, 意味着恒星角速度为 $\omega = \frac{\Delta\theta}{T_r}$, 因此其角向周期 $T_\theta = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\Delta\theta} T_r$. 一般来说, $\frac{2\pi}{\Delta\theta}$ 不可能是有理数, 因此轨道不会是闭合的, 即恒星角位置变化 2π 以后, 恒星的径向位置并未回到原来的值.

在大部分情况下, 在球对称引力势中恒星的典型轨道为玫瑰花节.

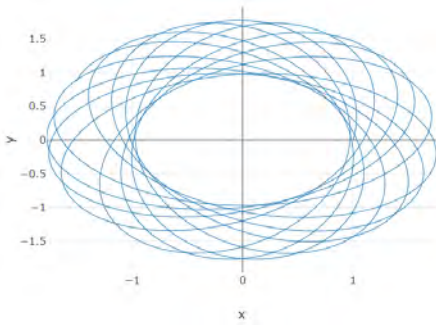


图 23: 恒星的典型轨道

在某些特殊情况下, 轨道是闭合的

1) 均匀球产生的引力势

$$\begin{aligned} x &= X \cos(\Omega t + \epsilon_x) \\ y &= Y \cos(\Omega t + \epsilon_y) \end{aligned}$$

2) 点质量产生的引力势 (开普勒运动)

$$\mu(\theta) = C \cos(\theta - \theta_0) + \frac{GM}{L^2}$$

2.2 潮汐半径 (tidal radius)

观测发现处于银河系晕中的球状星团 (或者处于星系团中的单个星系) 都有非常明显的边界. 这一效应叫潮汐剥离 (tidal stripping).

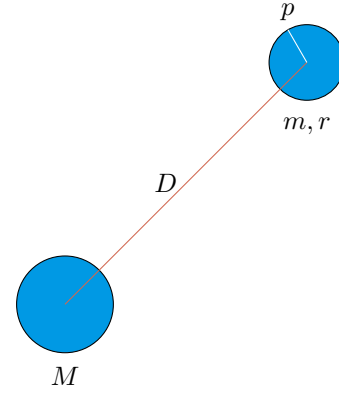


图 24: 潮汐半径

系统 m 在系统 $M(>m)$ 的引力场中运动, m 点中心受到 M 的引力, m 点表面半径 r 处一点 p 受到 M 的引力, 与 p 还受到 m 点的引力分别为

$$F_{mM} = \frac{GM}{D^2}, F_{pM} = \frac{GM}{(D-r)^2}, F_{pm} = \frac{Gm}{r^2}$$

D 为 (M, m) 的质心距离.

如果 p 的加速度大于 m 中心点的加速度, 则 p 与 m 中心的距离将变大, 导致 m 的物质损失, 该现象为潮汐剥离.

由

$$\begin{aligned} \frac{GM}{(D-r)^2} - \frac{Gm}{r^2} &> \frac{GM}{D^2} \\ \frac{GM}{(D-r)^2} - \frac{GM}{D^2} &> \frac{Gm}{r^2} \end{aligned}$$

在 $D \gg r$ 的情况下, 有

$$2GM \frac{r}{D^3} > \frac{Gm}{r^2}$$

得

$$r > \left(\frac{m}{2M} \right)^{\frac{1}{3}} D$$

因此物体 m 在 M 作用下的潮汐半径为

$$r_t = \left(\frac{m}{2M} \right)^{\frac{1}{3}} D$$

该半径之外的物体将被逐渐剥离而损失.

如果换一种表达方式, 假设卫星星系的平均密度为 ρ_s , 主星系密度为 ρ , 半径为 R , 则可以得到一个临界半径 r , 一旦卫星星系离主星系的距离 r 满足

$$r_{lim} < 2^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\rho}{\rho_s} \right)^{\frac{1}{3}} R$$

则卫星星系将被瓦解. Edouard Roche 首先得到了该公式, 这个最小距离也称为洛希极限.

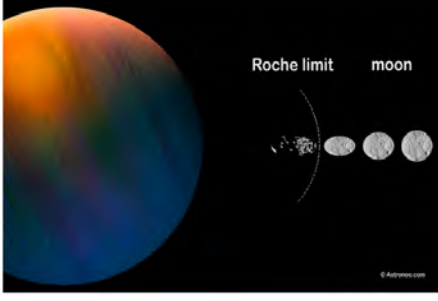


图 25: 洛希极限

2.3 动力学摩擦 (Dynamical friction)

动力学摩擦是一个天体在另一个由背景物质构成的体系中运动时, 由于其受到背景物质的引力, 其运动速度变小 (类似于受到摩擦) 的现象.

考虑一个质点 M 在由背景物质组成的系统中穿越的情况. 由于背景中的每一个物体 (黑点) 和 M 之间存在引力, 因此在与 M 前进方向垂直的方向上, 质点 m 将受到 M 的引力, 导致其向 M 方向运动 (图中由上到下/由下到上运动). 一般来说 M 对 m 的引力较小, M 穿行速度较快, 因此会在 M 的背后 (与前进方向相反) 聚集较多的背景粒子, 导致 M 整体感受到背后聚集物体的引力, 导致其速度 V 变慢. 该现象为动力学摩擦.

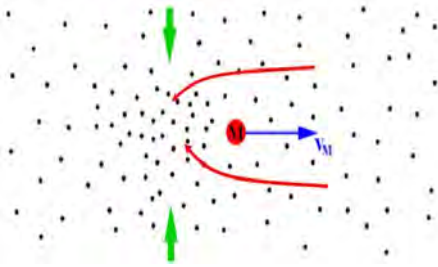


图 26: 动力学摩擦

动力学摩擦普遍存在: 银河系卫星星系在银河系中运动, 星系在星系团中都会受到动力学摩擦. 由于其速度变慢, 最终导致卫星星系向星系中心靠拢.

常用的动力学摩擦时标 (Dynamical friction time scale). 卫星星系 M 将在该时标以后损失所有角动量而到达星系中心 (质量越小, 时标越长).

2.3.1 两体碰撞的简单示例 设想质点 m , 以高速 V 从无穷远 ($t=0$ 时, $x=\infty$) 经过一物体 M (质量 M), 由于 M 的引力, 质点 m 将获得一个与原速度 V 垂直方向的速度 dV_{\perp} , 如果 dV_{\perp} 相比 V 很小, 可以得到其偏转角

$$\alpha \cong \frac{GM}{bV^2}$$

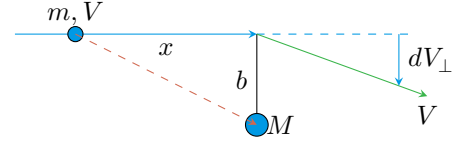


图 27: 两体碰撞示例

如果 dV_{\perp} 很小, 可以近似认为粒子 m 的路线为直线 (蓝色实线 + 蓝色虚线), 可以得到由于 M 的引力导致在垂直方向获得的速度

$$\begin{aligned} dV_{\perp} &= 2 \int F_{\perp} dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{GM}{(x^2 + b^2)} \frac{b}{\sqrt{(x^2 + b^2)}} \frac{dx}{V} \\ &= 2 \frac{GM}{V} \int_0^{\infty} \frac{b}{(x^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} dx \end{aligned}$$

令 $x = b \tan \theta$ 可得

$$dV_{\perp} = \frac{2GM}{bV}$$

偏转角

$$\alpha \approx \frac{dV_{\perp}}{V} = \frac{2GM}{bV^2}$$

如果 m 从无穷远过来并逃逸, 速度 V 值不变, 相当于在平行于 V 方向获得一个减速

$$\Delta V_{\parallel} = V - V \cos \alpha = 2V \sin \frac{\alpha^2}{2} \approx 2V \frac{G^2 M^2}{b^2 V^4}$$

该碰撞的结果是粒子 m 获得一个在垂直运动方向的速度 dV_{\perp} (指向 M), 并沿着运动方向的减速 dV_{\parallel} , 相当于经历了一个动力学摩擦.

2.4 潮汐加热

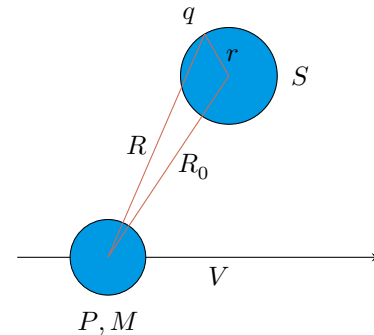


图 28: 潮汐加热

如图一个物体 P (质量 M), 快速经过一个物体 S , 考虑 P 对 S 内质点 q 的动力学影响. q 点位置 $R = R_0 + r$, 其运动为 P, S 的引力势叠加

$$\begin{aligned}\ddot{R} &= -\nabla_R \phi_P - \nabla_r \phi_S \\ \ddot{R}_0 + \ddot{r} &= -\nabla_R \phi_P - \nabla_r \phi_S\end{aligned}$$

即有

$$\ddot{r} = -\nabla_R \phi_P - \nabla_r \phi_S - \ddot{R}_0$$

将 $\nabla_R \phi_P$ 在 R_0 处展开到 2 阶

$$\nabla_R \phi_P = \nabla_{R_0} \phi_P + \left. \frac{\nabla^2 \phi_P}{\partial x \partial y} \right|_{R_0} \cdot \vec{r}$$

而天体 S 中心 R_0 的运动为 $\ddot{R}_0 = -\nabla_{R_0} \phi_P$, 代入有

$$\ddot{r} = - \left. \frac{\nabla^2 \phi_P}{\partial x \partial y} \right|_{R_0} \cdot \vec{r} - \nabla_r \phi_S$$

可以看到右边第一项就是天体 P 在 R_0 处的潮汐场 F_{tid} , 第二项为天体 S 自身的引力势. 这里只考虑天体 P 在冲击近似情况下对 q 的影响.

在天体 P 为点质量, V 较大的冲击近似情况下, 其对天体 S 中 q 点的速度主要发生在 P 最靠近 S 的位置, 即碰撞参数 $b = R_0$ 处, 其改变量与其动能的改变为

$$\begin{aligned}\Delta v &= \int F dt = \int F \frac{b}{V} dx = 2 \frac{GM}{R_0^3} r \frac{R_0}{V} \\ \Delta E &= \frac{1}{2} (v + \Delta v)^2 - \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} (\Delta v)^2 + v \Delta v\end{aligned}$$

将其动能的改变对球体 S 进行积分, 由于对称性, 第二项为 0, 因此

$$\Delta E = \frac{1}{2} \int (\Delta v)^2 \rho(r) d^3 r \cong \frac{4}{3} G^2 M_S \left(\frac{M}{V} \right)^2 \frac{R_S^2}{b^4}$$

可以看到, 能量增加依赖于碰撞参数, b 越小, 冲击近似对天体 S 的能量增加越大.

在冲击过程中我们假设了天体 S 中粒子位置不变, 只是改变其速度, 因此碰撞结束时 S 的动能和总能量都增加了 ΔE , 根据位力定理, 系统必须进行内部调整, 达到新的平衡.

冲击近似后导致系统总能量增加, 引力势能增加, 物体必须膨胀, 粒子平均动能反而减小. 膨胀后系统更容易被潮汐剥离, 瓦解.

2.5 卫星星系的运动

上述动力学过程可以解析来模拟, 由于各种动力学的复杂效应, 一般是利用数值模拟来研究卫星星系在一个主星系中的演化.

卫星星系的演化有几个明显特征:

表 2: 能量变化

	动能	势能	总能量
碰撞前 (平衡状态 位力定理)	K	$-2K$	$-K$
碰撞结束时	$K + \Delta E$		$-K + \Delta E$
碰撞后 (新平衡状态)	$K - 2\Delta E$	$2(-K + \Delta E)$	$-K + \Delta E$

- 1) 轨道为非闭合的玫瑰花结
- 2) 近心点越来越靠近星系中心 (动力学摩擦)
- 3) 卫星星系经历质量损失 (潮汐剥离, 由前面公式, 靠近近心点时潮汐半径小, 剥离最严重)
- 4) 由于潮汐加热, 卫星星系内部粒子速度增加, 密度降低, 卫星星系瓦解

卫星星系因为运动学摩擦与潮汐加热被瓦解了.

2.6 金斯方程

1) 对于盘星系, 一个与观测非常接近的事实恒星主要是围绕盘做圆周运动 (即开普勒运动), 因此可以利用旋转曲线测量盘星系的物质分布.

2) 对于椭圆星系, 在某一给定位置处, 不同的恒星具有不同的运动方向和不同的速率. 从观测上表现出该位置处恒星整体不具有共同的旋转速度, 因此无法像盘星系那样, 可以通过测量某一半径处 (恒星、气体) 的共同旋转速度来测量星系的物质分布.

需要注意对于无碰撞系统 (恒星系统, 无论是盘星系还是椭圆星系), 单颗恒星的运动仍然由牛顿定律描述, 因此从理论上讲, 如果能够精确测量单颗恒星的运动轨迹, 仍然可以利用前述的运动方程 (μ, θ) 来得到星系的物质分布. 但是实际上对几乎除银河系以外的所有星系, 我们无法得到其中单颗恒星的轨道分布. 对于这样的系统, 我们一般利用无碰撞的玻尔兹曼方程来描述其运动.

2.6.1 无碰撞玻尔兹曼方程 (Collisionless Boltzmann Equation) 设想有一个包含大量恒星的系统在平滑势 $\phi(x, t)$ 作用下运动. 在空间任意给定区域内, 恒星可以具有不同的速度. 在任意时刻 t , 要描述系统的状态, 需要给出在任意位置空间 (x, d^3x) 和速度空间 (v, d^3v) 内恒星的数目 $f(x, v, t) d^3x d^3v$. 只要给出某个初始时刻 t_0 的 $f(x, v, t_0)$, 完美就可以根据牛顿定律给出 f 随时间的变化.

在相空间 $w(x, v)$ 中一个小体积元 d^3w 内恒星数目为 $f(x, v, t) d^3w$, 恒星在相空间中的六点速度为 $\dot{w} = (\dot{x}, \dot{v}) = (v, -\nabla \phi)$. 从该体积元表面进入该体积元的恒星数目为 $\int f \dot{w} ds$, 由连续性方程可知, 该体积元内恒星数目的变化等

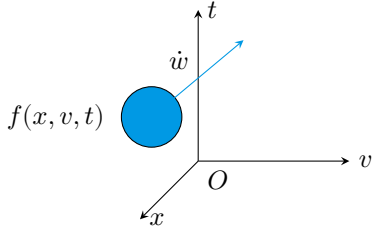


图 29: 恒星在空间的流动

于流出该提及元表面恒星数目, 即

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d^3w + \int f \dot{w} ds = 0$$

由散度定理

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \dot{w}) = 0$$

而

$$\sum_{a=1}^6 \frac{\partial \dot{w}}{\partial w} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \dot{v}_i}{\partial v_i} \right) = \sum_{i=1}^3 -\frac{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x_i}}{\partial v_i} = 0$$

这里利用了

1) 相空间 (x, v) 是独立坐标, 因此

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

2) $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ 只是位置的坐标, 因此

$$\frac{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x_i}}{\partial v_i} = 0$$

因此, 可得

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{a=1}^6 \dot{w} \frac{\partial f}{\partial w_a} = 0$$

即

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left(v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial v_i} \right) = 0$$

表示成向量形式有

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f - \nabla \phi \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad (\text{IV.5})$$

这是著名的刘维尔 (Liouville) 定理的一个特例。

该方程几乎无法精确求解。同时, 由于观测上我们更容易测量恒星的平均运动速度或者速度弥散度, 因此将 (IV.5) 写

成其他形式更为方便。定义恒星密度, 平均速度, 速度弥散度分别为

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \int f d^3v \\ \bar{v}_i &= \frac{1}{\rho} \int f v_i d^3v \\ \sigma_{ij}^2 &= \overline{(v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j)} = \bar{v}_i \bar{v}_j - \bar{v}_i \cdot \bar{v}_j \end{aligned}$$

可从 (IV.5) 得到如下方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \bar{v}_i)}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} &= -\frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho \sigma_{ij}^2)}{\partial x_i} \end{aligned}$$

该式与流体力学中的连续性方程和欧拉方程类似, 欧拉方程右边的第二项类似压强项。该方程最早由 Jeans (1919) 应用到恒星动力学, 因此称为金斯方程。

2.6.2 金斯方程的简单应用

1) **球对称静态系统:** 对于椭圆星系, 其一般满足球对称, 且处于静态平衡态下, 有 $\bar{v}_r = \bar{v}_\theta = 0$ 金斯方程可进一步写成

$$\frac{d(\rho \bar{v}_r^2)}{dr} + \frac{\rho}{r} [2\bar{v}_r^2 - (\bar{v}_\theta^2 + \bar{v}_\phi^2)] = -\rho \frac{d\phi}{dr}$$

如果系统满足 $\bar{v}_\theta^2 = \bar{v}_\phi^2$, 令 $\beta = 1 - \frac{\bar{v}_\theta^2}{\bar{v}_r^2}$, 可得

$$\frac{1}{\rho} \frac{d(\rho \bar{v}_r^2)}{dr} + 2 \frac{\beta \bar{v}_r^2}{r} = -\frac{d\phi}{dr} = -\frac{1}{r} V_c^2(r)$$

因此, 如果我们能够测量到星系的 $\rho(r)$, \bar{v}_r^2 , $\beta(r)$, 我们可以利用上式来得到引力势或者旋转曲线, 从而确定星系的质量分布。

金斯方程在星系动力学的有关测量中有重要应用。如利用银河系晕中恒星的视向速度分布, 结合数值模拟, 可以得到银河系的暗晕质量。

2) **测量银河系暗晕质量:** 直接测量旋转曲线的方法只适用于盘星系, 因此能测量的质量最大空间范围是盘的边缘附近。银河系盘外还有大量暗物质, 其空间尺寸 $\sim 200 \text{Kpc}$ (大约 10 倍盘半径以上), 下面以 Xue et al. (2008) 为例子详细介绍其利用银河系晕中的蓝水平支星测量银河系暗晕的质量

a. **挑选示踪天体:** 对于银河系晕, 最好的示踪天体是具有高亮度的恒星, 这样能够观测到很远的恒星, 同时能够较精确测量其距离。e.g. 蓝水平支星, K 型红巨星, 球状星团, 卫星星系。

蓝水平支星 (Blue horizontal-branch star, BHB star):

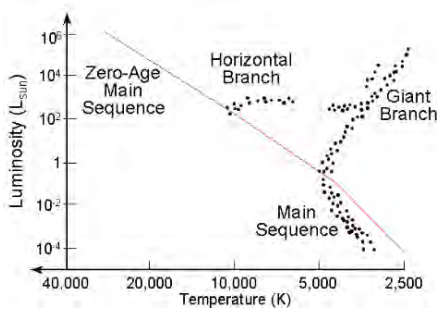


图 30: Typical Globular Cluster H-R Diagram

- 核心氢燃烧, 典型质量 $0.7M_{\odot}$, $3R_{\odot}$, g 波段绝对星等 ~ 0.7
- 颜色偏蓝, 光谱类型 V3-A0
- 颜色-颜色空间占据狭窄区域, 容易从光度巡天中直接选区样本

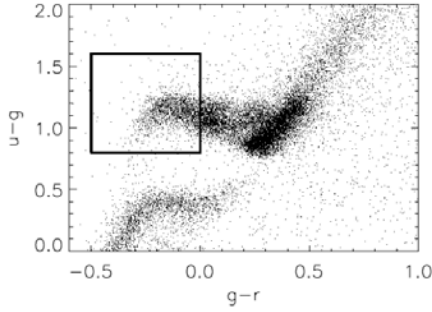


图 31: 颜色-颜色

K-giant star: 属于贫金属, 红巨星, 由于亮度高, 可以在较远距离出被观测到 (~ 100 Kpc) 样本选择更加复杂, 但是一般可以利用其视星等, 颜色和金属丰度来得到其绝对星等, 从而计算出距离。

b. 测量示踪恒星的速度分布:

视向速度可以从光谱中得到 (红移/蓝移), 该数据来自光谱巡天, 如 SDSS/SEGUE, LAMOST 巡天。

切向速度: 自行测量, 如 GAIA。

c. 测量恒星速度弥散度各项异性参数 β :

β 的测量并不容易, 除非同时测量到恒星的自行。在只有视向速度情况下, 一般利用数值模拟给出的 β 随半径的分布。

一旦测量了示踪天体的密度、径向速度弥散度、 β 参数随半径的变化, 可以得到星系的旋转曲线

$$-\frac{r}{\rho} \frac{d(\sigma_r^2 \rho)}{dr} - 2\beta \sigma_r^2 = V_{cir}^2(r)$$

进一步利用银河系的引力势

$$\Phi_{tot}(r) = \Phi_{disk}(r) + \Phi_{bulge}(r) + \Phi_{NFW}(r)$$

分别来自盘, 核球和暗物质晕的引力势。

$$\Phi_{disk}(r) = -\frac{GM_{disk}(1 - e^{-r/b})}{r}$$

$$\Phi_{bulge}(r) = -\frac{GM_{bulge}}{r + c_0}$$

$$\Phi_{NFW}(r) = -\frac{4\pi G \rho_s r_{vir}^3}{c^3 r} \ln \left(1 + \frac{cr}{r_{vir}} \right)$$

代入观测的盘, 核球参数, 利用统计方法 (如最小二乘法) 拟合旋转曲线, 可得到暗晕质量 (其数值一般是延伸到位力半径处)。

如图给出了不同方法测量的银河系暗晕质量。不同方法给出的结果有差异, 大分布结果集中在 $10^{12} M_{\odot}$ 附近。

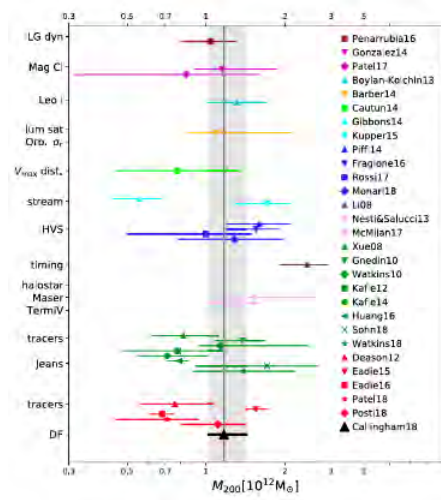


图 32: 暗晕质量

银河系的质量具有非常重要的意义, 它告诉我们:

- 1) 星系主要是暗物质占主导
- 2) 在于其他星系的观测进行比较时, 我们需要限定暗晕质量

V 本地星系群 (Local Group)

1. 本地星系群的结构

银河系及仙女星系所在的本地星系群在天文学研究中具有特殊的地位, 无论是星系形成还是宇宙学研究, Local group 都是非常重要的研究对象.

Local group 包含约 >50 个星系, 其中最大的三个成员星系为仙女星系 (M31), 银河系, 三角座星系 (M33, Triangulum Galaxy). 其他成员星系叫矮星系 (Dwarf galaxy). 成员星系在空间并非均匀分布, 一般都聚集在这 3 个大星系周围.

1.1 本地星系群基本性质

- 1) 半径 ~ 1.5 Mpc
- 2) 总质量 $> 2 * 10^{12} M_{\odot}$ (主要为暗物质)
- 3) 银河系-M31 距离为 800 Kpc, 相对速度 123km/s, 将在 40 亿年后碰撞
- 4) 没有明显的物质中心, 引力势中心处在银河系和仙女星系之间
- 5) 引力束缚系统

1.2 本地超星系团 Virgo Supercluster



图 33: 室女座超星系团

Local group 处在室女座超星系团 (Virgo Spercluster) 的边缘, 其中心为 Virgo Cluster, 它距离我们 16.5 Mpc. Virgo SC 很有可能是引力束缚系统.

Virgo SC 包含约 100 个星系群和星系团

- 1) 总质量 $\sim 10^{15} M_{\odot}$
- 2) 大小 ~ 33 Mpc
- 3) 其中心 Virgo Cluster 的大小为 2Mpc, 在天空的面积超过 1500 平方度 (7500 个满月)

可见宇宙中大约有 1000 万个类似 Virgo SC

1.3 超星系团 Laniakea

夏威夷大学的 Brent Tully 等发现 Virgo SC 处在更大的所谓 Laniakea 超星系团中 (拉尼亚凯亚). Laniakea 来自夏威夷语, 表示**无尽的天堂**. 这个名称是向波利尼西亚人致敬, 彰显其利用天文知识在太平洋航行

Laniakea 主要性质:

- 1) 3 个超星系团: 室女座超星系团, 半人马座超星系团 (其中包含 巨引力源), 孔雀-印第安超星系团, 长蛇座超星系团 (Hydra SC)
- 2) 包含约 100,000 星系
- 3) 大小 ~ 160 Mpc, 远超过宇宙中已经位力化的平衡态的系统 (星系团, 5Mpc)
- 4) 其中总质量 $\sim 10^{17} M_{\odot}$
- 5) 本身不处于引力束缚

1.4 宇宙网络结构

在大尺度上宇宙基本均匀、各向同性. 在 $10 \sim 100$ Mpc 的尺度上, 宇宙呈现网络状分布 (Cosmic Web). 根据物质分布类型, 网络结构一般分为四种类型: 节点 (Node), 墙, (Wall or sheet), 纤维结构 (Filament), 空洞 (Void).

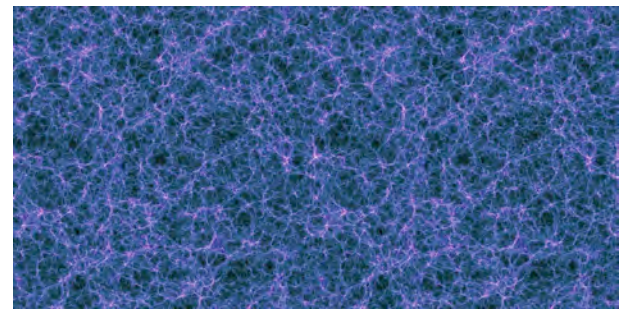


图 34: 宇宙物质分布的切片

2. Local group 成员星系

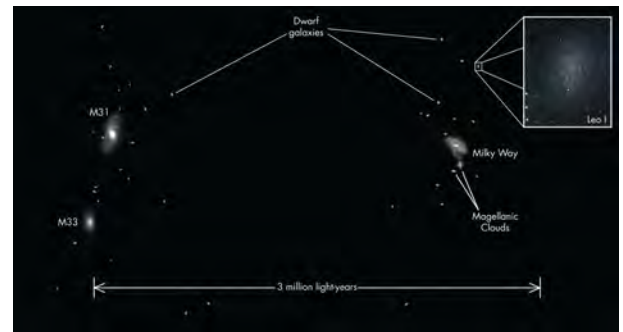


图 35: Local group 成员星系

寻找本地星系群的“家庭成员”天文学家的持之以恒的目标.

2.1 家长星系

三大主要成员: 仙女星系 (M31), 银河系 (MW), 三角座星系 (M33).

2.2 仙女座星系 M31

1) M31, 典型的漩涡星系, 天空占据 3 平方度, 肉眼可见. 本星系群中的“老大”, 比银河系亮 $\sim 50\%$ ($M_v = -21.5$, $M_W = -20.9$), 尺寸大 2 倍. 中心核球更大

2) 比银河系旋转更快, $\sim 260 \text{ km/s}$, 总质量 $\sim 2 \times 10^{12} M_\odot$, 恒星质量 $\sim 10^{11} M_\odot$, 中性氢 $\sim 5 \times 10^9 M_\odot$

3) 含有 ~ 400 球状星团, 比银河系多一倍

4) 目前发现有超过 30 个卫星星系, 最大的为 M110, M32

5) M31 中心存在一个所谓的双核, 其中一个核区中心可能是一个大质量黑洞 (300 万太阳质量), 周围存在一些年轻的恒星

6) 另一个核, 可能是围绕黑洞旋转的恒星, 由于轨道椭率大, 聚集在远心点



图 37: M33



图 36: M31 的多波段图像, 存在明显的恒星形成, 大量气体和 X-ray 源.

最新的观测 (Van der Marel+2012) 表明仙女星系相对银河系的速度为

- $V_r = -109 \text{ km/s}$ (接近银河系)
- $V_t = 17 \text{ km/s}$ (切向速度)

可以从数值模拟中找到距离, 速度与 Local Group 接近的 pair, 得到 LG 的暗物质质量 $\sim 3 \times 10^{12} M_\odot$

2.3 三角座星系 M33

Triangulum galaxy (M33) 三角座星系. 距离地球 273 万光年, $M_v = -19.5$ ($m = 5.7$), 是肉眼微弱能见的最远星系.

1) 本地星系群的第三大成员, 漩涡星系, 距离 M31 为 203 kpc

2) 恒星质量 $4 \times 10^9 M_\odot$, 气体质量 $3 \times 10^9 M_\odot$ (主要是 HI), 暗物质质量 $\sim 10^{11} M_\odot$

3) M33 中心为一个致密星团 (Nuclear star cluster), 比球状星团大, 光度 $\sim 2.5 \times 10^6 L_\odot$, 中心无黑洞迹象 (MW, M31 中心都存在大质量黑洞)

4) 可能是 M31 的卫星星系 (束缚), 历史上曾经与 M31 有轨道交会/相互作用, M31-M33 中间存在气体桥.

3. 银河系卫星星系

目前并不清楚银河系的边界有多大, 普遍认为在 200 ~ 300 Kpc 之间. 卫星星系指距离银河系中心在此尺度范围内的

矮星系. 目前观测上大约发现了银河系中有 ~ 60 个卫星星系. 根据理论估计, 银河系应该有 200 个以上的卫星星系.

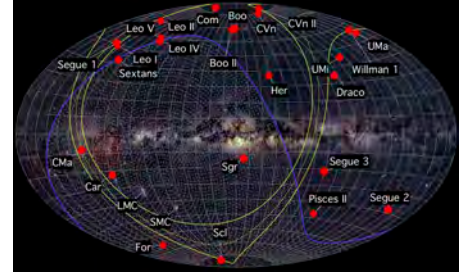


图 38: 卫星星系在天球上的分布

银河系中最著名的卫星星系是 LMC (Large Magellanic Cloud, 大麦哲伦云), SMC (Small Magellanic Cloud, 小麦哲伦云). 它们分布在南半球 (在北纬 20 度以下地区可见), 因其在天空中肉眼看上去像一团模糊的云雾状. 葡萄牙航海家麦哲伦环球航行到南半球后对其做了精确描述, 因此用其名字命名.



图 39: LMC 与 SMC

3.1 大麦哲伦云 (LMC)

是银河系最大的卫星星系. 著名的超新星 1987a 来自该星系.

1) 尺度: 占天区 8×7 平方度 (200 满月视面积), 半径 2.3 Kpc, 为银河系 $\sim \frac{1}{5}$

2) 形态: 不规则星系, 具有很弱的旋臂. 可能历史上是一个漩涡星系, 潮汐作用导致其旋臂消失. 倾角 45°

3) 恒星质量: $2.8 \times 10^9 M_\odot$. 暗物质质量 $\sim 10^{10} M_\odot$, 是一个暗物质占主要的星系



图 40: 大麦哲伦云

4) 中性氢: LMC 含有大量的恒星形成原料 (中性氢和分子氢), 质量 $\sim 109M_{\odot}$ 。

5) 分子团块: 几百个, 平均 H_2 质量 $\sim 106M_{\odot}$ 。新的恒星将在这些分子团块中诞生。

银河系核球主序宽 (恒星年龄范围跨度大) LMC 主序窄, 存在大量颜色 V-I ~ 0 的恒星, 具有年轻的恒星, 且金属丰度低。

大麦哲伦云是一个恒星形成星系, 被认为是“研究恒星形成的最好实验室”, 它包含约 60 个球状星团, 700 个疏散星团, 400 个行星状星云, 以及上千大质量恒星及恒星形成区。

LMC 球状星团, 有些非常古老, 跟银河系球状星团一样, 年龄超过 130 亿年, 有些非常年轻, 大约 ~ 350 万年。

在 LMC 中几乎没有年龄在 130 亿 ~ 4 亿年之间的球状星团, 意味着其恒星形成历史非常独特。相关研究表明 (Bekki+ 2004 等) 表明 LMC 和 SMC 的轨道在 4 亿年前有一次交汇, 其强潮汐力导致了 LMC 随后的恒星形成 (包括棒的形成)。

LMC 中存在大量变星。哈佛大学天文台的 Henrietta Leavitt 最早于 1900 年左右统计了 LMC 中的 50 颗造父变星, 发现其存在周期-亮度关系。

3.1.1 精确测量近邻星系/恒星距离 对于近邻星系, 其距离测量除了三角视差, 还可以利用两类天体用于测量距离

- 球状星团: 可以利用星团的颜色-星等图 (CMD), 将其主序星与太阳附近主序星 (颜色、绝对星等已知) 比较, 移动星团 CMD 的纵轴使其与附近主序星重合, 从而给出距离。

- 变星: 存在一类特殊的恒星, 其光度呈现周期性变化。这种变化是由于恒星脉动引起 (不稳定性)。在 HR 图上, 处于不稳定带内的恒星为变星。

变星一般存在周期-光度关系, 其振动周期与恒星密度有关

$$T \sim \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \sim \rho^{-0.5}$$

同类型变星恒星表面温度接近, 但光度 $L \sim T^4 R^2$, R 越大, 亮度越高, 周期越长。

3.1.2 变星 (variable star) 分为两大类:

造父变星 (Cepheid variable) 和天琴座 RR 型变星, 分别以仙王座 δ 星 (造父一) 和天琴座 RR 星为代表。

- 造父变星分为:

经典造父变星, 是星族 I (年轻, 富金属) 恒星的变星, 质量 $4 \sim 20M_{\odot}$, 周期 1.5-50 天, 光度 $\sim 105L_{\odot}$ 。

II 型造父变星, 是星族 II (年老, 贫金属) 恒星, 质量 $\sim 0.5M_{\odot}$, 光度比同周期经典变星低 1.5 等

- 天琴座 RR 变星, 位于水平分支, 是核心区氢燃烧的小质量恒星 ($0.5M_{\odot}$), 光度较恒定 $\sim 50L_{\odot}$, 周期小于 1 天

3.2 小麦哲伦云 (SMC)

银河系第二大卫星星系

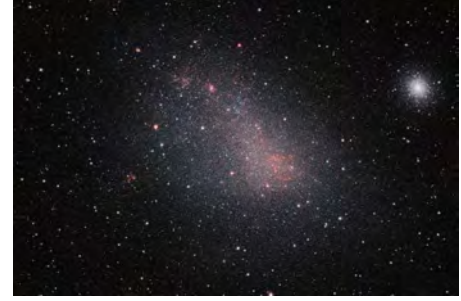


图 41: 小麦哲伦云

1) 尺度 $\sim 1\text{Kpc}$, 天区面积 14 平方度 (70 个满月), 距离银河系中心 $\sim 61\text{Kpc}$

2) 恒星质量 $\sim 108M_{\odot}$, 视星等 $m_V=2.7$, 但表面亮度低, 肉眼勉强可见。

3) 含有大量年轻星团, 恒星金属丰度比 LMC 低, 但是不像 LMC 存在年龄间隙。

4) 富含中性氢, 也是恒星形成星系, 含有大量年轻星团。HI 旋转曲线速度 $\sim 60\text{km/s}$ 。

3.3 麦哲伦流

观测表明大麦云和小麦云之间同时在银河系中运动, 但是它们之间存在明显的相互作用。利用 CO 和 HI 观测, 发现 LMC 和 SMC 之间存在一个气体桥, 且延伸到整个天空 (跨度 100 度, 60 万光年)。其中中性氢含量约 $\sim 2 \times 10^8 M_{\odot}$ 。

麦哲伦流中含有分子氢和中性氢, 密度非常低。特别是对于 HI, 无法直接探测到其发射 (ρ^2), 一般通过背后的 QSO (类星体) 的吸收 (ρ) 来测量其含量和速度。通过分析麦哲伦流中气体的金属丰度, 发现它跟 LMC 中的气体性质接近。

起源: 一般认为是银河系和 LMC 的潮汐力, 将 SMC 中的中性气体拉出, 形成了 Magellanic Stream。

3.4 LMC 与 SMC 的空间运动

视向速度测量相对容易, 可以利用红移。测量大/小麦哲伦云的自行非常困难。相比恒星或者其他星系, 它们并不是点源, 在天空非常延展, 没有一个明确的中心。同时除了整体自行以为, 它们内部的

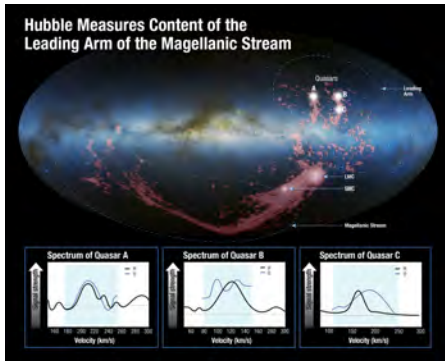


图 42: 麦哲伦流

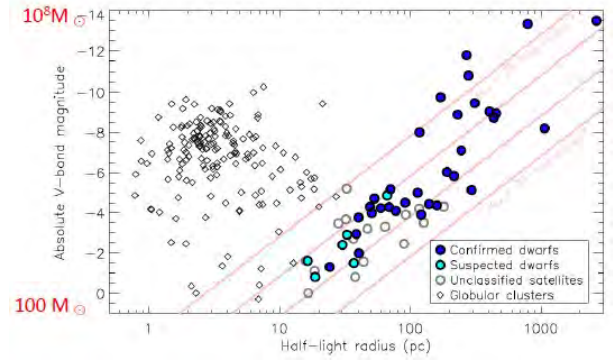


图 44: 光度-半光半径关系

恒星也有自己的自行, 因此很难利用其中恒星来测量自行. 一般利用其整体恒星相对背景星系, 如 QSO 的移动, 来测量其运动. 测量耗时几年.

- LMC: 整体速度 320km/s, 径向速度 64km/s(离开银河系), 切向速度 314km/s
- SMC: 整体速度 217km/s, 径向速度-11km/s(接近银河系), 切向速度 217km/s

由于 LMC 的速度接近逃逸速度, 普遍认为 LMC/SMC 并未真正被银河系束缚, 它们可能最近刚好穿越我们银河系.

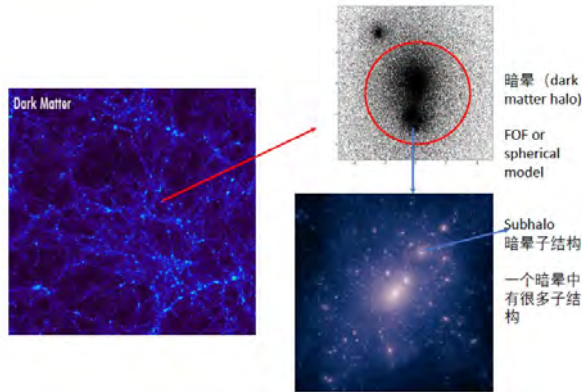


图 43: 物质分布与成团性

4) 含有暗物质: 如果是纯恒星构成, 质量/光度 $\sim 1-3M_{\odot}/L_{\odot}$. 大部分矮星系 $M/L > 5$. 但具体的暗物质含量不清楚, 需要高精度光谱观测其恒星速度弥散度.

5) 恒星形成历史复杂: 测量矮星系的恒星形成历史非常困难, 需要分辨大量 ($>200-300$ 颗) 在主序 Turnoff 附近的恒星. 目前基本上只有哈勃望远镜能够达到要求, 而且也只适用于较亮的矮星系 ($M_V < -3$).

通过拟合其中恒星的颜色-星等图, 发现存在不同年龄的星族 (3, 7, 15 Gyrs, 实际宇宙年龄 ~ 14 Gyrs)

大部分矮星系在 ($z > 6$) 之前形成了其大部分恒星. 少数矮星系有一些年轻星族, 可能因为其最近受到潮汐作用有关.

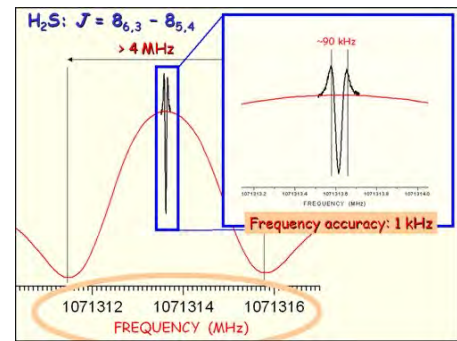


图 45: 谱线展宽

3.5 统计性质

矮星系的光度甚至低于球状星团, 但是其空间分布显著大于球状星团, 处在很好的 mass-size relation 之上, 可以用来区分球状星团和极矮星系.

3.6 矮星系

性质

- 1) 表明亮度极低: 比 LMC 还低 100 倍以上, 非常难以探测
- 2) 恒星年龄偏老: 很少有 2Gyr 内的年轻恒星基本都存在天琴座 RR 变星, 表明其存在年龄 >10 Gyrs 的星族
- 3) 金属丰度低: 大部分的金属丰度只有太阳的 1%

3.6.1 谱线展宽 由于光源具有一定的速度, 多普勒效应会导致单一频率的谱线偏离本征谱线. 如果速度具有一定的范围, 则导致谱线展宽. 其中心波长对应于整体运动速度导致的多普勒移动波长.

谱线的展宽对应于速度的分布范围.

3.6.2 矮星系的质量测量 发光物质直接利用光度可大致得到, 一般最多存在 $\sim 2-3$ 倍的误差 (来自于恒星质量/光度, M/L , 比对年龄和金属丰度的依赖). 总物质的含量测量非常困难. 一般是测量其中心区域的恒星视向速度弥散度 σ , 再

进一步利用位力定理来得到质量

$$M \cong \frac{R\sigma^2}{G}$$

R 为矮星系的半光半径, 一般表示为 $r_{1/2}$. 但位力定理的应用是基于动力学平衡的, 实际上不少矮星系处于潮汐瓦解过程中, 动力学平衡假设不一定有效.

3.6.3 卫星星系的质量观测性质

- 大部分矮星系的速度弥散度 $\sim 6\text{km/s}$
- 总质量 $\sim 10^5 - 10^8 M_\odot$, 与光度有相关
- 质光比 $\gg 2$, 意味着主要物质为暗物质, 且恒星形成效率随光度降低而降低

这些观测对星系形成物理模型和暗物质性质提出了严重挑战.

4. 银河系三大著名难题

4.1 Missing satellite problem

上世纪 90 年代以前数值模拟精度很低, 无法与观测进行有意义的比较. 1999 年左右, 科学家完成了高精度的单个星系模拟, 发现了成百上千个“卫星星系”(其实是暗晕的子结构, 并非发光物质). 模拟的子结构 (超过某个速度) ~ 1000 , 观测只有 10 几个. 因此有些卫星星系不见了 (missing satellite). 这就是著名的 Missing satellite problem.

4.1.1 卫星星系的光度函数 根据银河系卫星星系的绝对光度, 可以画出其光度函数. 一般越暗的卫星星系数目越多.

4.1.2 银河系应该有多少卫星星系 对于一个巡天, 存在巡天面积和深度. 因此, 对其观测需要修正以得到完备结果.

- 1) 巡天面积的修正. 如果某个巡天只覆盖 $1/5$ 的天空, 假设分布在全天均匀, 则需要将观测数目 $\times 5$
- 2) 对于给定星等 M_v , 其只能在某一范围 R 内被探测到. 因此为了得到其在整个银河系的位力半径 R_{vir} 内的数目, 需要修正其数目为

$$N(< R_{\text{vir}}) = N(\text{observed}) \left(\frac{R_{\text{vir}}}{R} \right)^3$$

4.2 Too big to fall problem (大而不倒)

观测的数据需要跟理论对比, 目前最好的理论为冷暗物质理论. 下图为一个典型的银河系数值模拟, 中心为银河系盘. 外围是暗物质构成的暗晕, 其中包含很多暗物质组成的结构, 简称子结构 (subhalo). 对于银河系, 其暗晕质量 $\sim 10^{12} M_\odot$, 其中子结构可达 ~ 1000 个以上, 最大子结构的质量 $\sim 10^{11} M_\odot$.

一般来说, 我们认为最亮的卫星星系总是形成在最大的暗晕子结构内因此, 可以用如下方法将观测和理论对应起来

- 观测的卫星星系按光度排序, 选出最亮的 N 个卫星星系
- 模拟的子结构按质量或者旋转速度排序, 选出最大的 N 个子结构



图 46: 银河系数值模拟

但观测的卫星星系的旋转速度比理论预言的小. 说明观测的 (亮) 卫星星系不能形成于大质量子结构.

4.3 银河系卫星星系的空间分布

下图给出银河系卫星星系相对于银河系盘的分布 (图中平面为银盘). 银河系卫星星系空间分布并非球对称, 呈现两个明显特征:

- 1) 大部分聚集在盘的垂直方向上
- 2) 靠近银河系中心, 密度越高

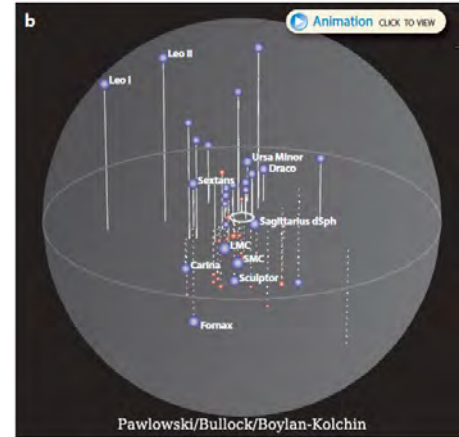


图 47: 银河系卫星星系的空间分布

4.3.1 卫星星系的径向分布 径向分布可以表示为

$$\rho(r) = \frac{dN(r, r+dr)}{4\pi r^2 dr}$$

dN 为某个球壳内的卫星星系数目.

有 $\sim 50\%$ 的卫星星系分布在距离中心 120Kpc 以内. 越靠近中心, 卫星星系密度越高. 来自于两个效应:

- 1) 卫星星系形成时间早, 很早就掉入银河系内
- 2) 动力学摩擦导致其掉向银河系中心

4.3.2 Great Plane of MW satellites 如果从与银河系盘平行的方向看过去 (edge-on), 卫星星系呈现如下图分布. 大部分卫星星系分布在与盘垂直的平面上, 分布很狭窄.

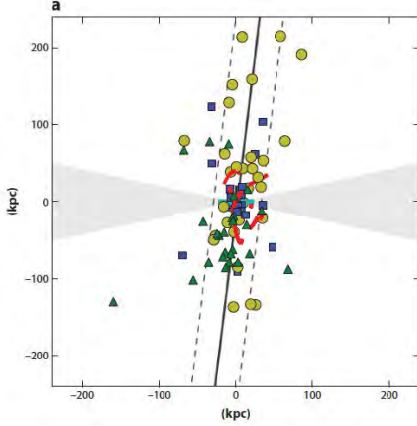


图 48: 银河系盘平行的方向卫星星系分布

定义卫星星系分布盘的厚度为

$$\Delta = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{N}}$$

d_i 为第 i 个卫星星系离该盘的垂直距离, R 为卫星星系盘的最大直径, N 为卫星星系的个数. Kroupa 于 2005 年发现卫星星系盘的厚度 ~ 0.15 , 明显大于数值模拟中卫星星系分布的厚度. 这是银河系经典的三大问题之一: satellite plane(卫星星系平面问题).

随后的研究发现对于仙女星系, Centaurus A, 其卫星星系分布也存在共面的情况. 利用自行数据, Pawlowski 等还发现这些卫星星系不仅共面, 而且还在该平面内运动. 理论预言中绝大多数卫星星系不存在共面现象. 意味着银河系、仙女星系中卫星星系平面有着其特殊的物理起源.

VI 星系群与星系团

星系群/团是目前宇宙中常见的自引力束缚结构, 是星系、黑洞、气体、暗物质演化和极端天文现象的重要场所, 无论是对于星系形成, 还是宇宙学研究, 星系群/团都具有重要的地位, 一直是天文的重要研究对象.

1. 星系群/团的基本观测性质

- 星系群 (Galaxy group) 和星系团 (Galaxy cluster) 是星系密度较高的区域. 观测发现宇宙中有大约 50% 的星系都处于星系群/团中, 其典型尺度 ~ 1 Mpc, 星系密度为宇宙星系平均密度的 10~100 倍

- 星系群/团是宇宙中的典型结构, 已经脱离了宇宙膨胀, 而处于自身引力势主导的演化阶段.

- 星系团是宇宙中年轻的结构. 其成员星系的典型速度 500km/s, 穿越整个星系团 (直径 3Mpc) 的时间 ~ 8 Gyrs. 因此大部分成员星系都还没有完成一个轨道周期, 无法与其他星系交换速度, 达到完全动力学平衡.

- 并没有严格的区分星系群/星系团的定义. 一般来说
星系群的成员星系 < 50 , 暗物质质量 $[10^{12}, 10^{14}] M_{\odot}$.

星系团质量 $> 10^{14} M_{\odot}$, 最大超过 $10^{15} M_{\odot}$, 是目前宇宙中能形成的最大的引力束缚结构

1.1 星系群—盘星系之家

星系群中一般只有 ~ 10 -30 个星系, 一般包含几个与银河系或特征亮度 (L^*) 接近的星系 ($\sim 10^{10} L_{\odot}$). 其中成员星系以漩涡/盘星系居多成员星系平均速度弥散度 ~ 150 -300km/s, 空间尺度从 50~500 Kpc.

星系群可以分为:

- 1) Poor group (松散星系群): 含有少于 5 个 L^* 的成员星系, 分布在较大空间范围内 (银河系所在的近邻星系群就说 Poor cluster)

- 2) Compact group (紧密星系群): 成员星 \sim 几个, 分布紧密. Paul Hickson 创建了一个 Compact Group 的星表, 简称 Hickson Compact Groups. 一般认为 Compact group 处于动力学演化之中, 星系之间有很强的相互作用.

- 3) Fossil group (化石星系群): 典型特征

成员星只有几个, 中间为一个大质量椭圆星系. 中心椭圆星系与最亮的卫星星系之间的星等差 $\Delta M > 2$ (质量差 ~ 10 倍)

具有延展的高温气体, 温度 ~ 1000 万度, 在 X-ray 波段可以看到热气体分布在椭圆星系周围

含有大量暗物质

Fossil group 是星系群演化到后阶段的结果, 大部分成员星系已经与中央星系并和, 形成了中心大质量椭圆星系. 因此是古老的星系群结构 (Fossil group).

动力学摩擦效应: 质量越大的卫星星系, 其收到的动力学摩擦越强, 更快落入星系群中心, 与中央星系并和, 形成椭圆星系.

因此经过较长时间演化以后, 大质量卫星星系都已经消失, 形成大的星等差 (Gap).

1.2 星系团—椭圆星系, 不规则星系之家

星系团是宇宙中的“大个子”. 其中包含星系超过 100 个, 最多几千个. 典型半径 $\sim 1-3$ Mpc, 星系的典型运动速度 800-1200km/s. 近邻宇宙附近有名的星系团: Virgo Cluster(室女星系团), Fornax Cluster(天炉座星系团), Coma(后发座星系团). 它们的成员星系都超过 1000.

星系团中心一般都有一个大质量椭圆星系. 如 M87 (Virgo cluster 中心星系), 其包含 15000 个球状星团 (银河系 ~ 200 个), 总恒星质量 $\sim 10^{12} M_{\odot}$. 几乎所有的椭圆星系中心都有一个超大质量黑洞, 如 M87 的黑洞质量 $\sim 6 \times 10^9 M_{\odot}$, 同时在射电波段可以看到很强的物质喷流 (外流速度 > 1000 km/s, 空间尺度上百万光年). 星系团中央星系非常延展, 其恒星分布接近 50~100 Kpc, 恒星密度在外围较低, 接近星系间恒星 (intra-cluster light, ICL) 的背景密度, 因此中心星系的质量测量存在不确定性.

1.2.1 星系团的 X 射线图像 星系团中都含有大量的热气体, 在 X 射线波段发出辐射.

1.3 星系的演化

星系团中星系密度高, 因此星系的演化明显与孤立星系不一样. 观测表明对于星系团, 存在一些明显的环境效应.

1) 星系形态-密度关系 (Morphology-density relation)

- 在星系团中心, 星系密度高, 椭圆星系比例高, 其比例随着半径增加而减小
- 在星系外围, 漩涡星系和不规则星系比例增加.

一般认为, 在星系团中心, 星系之间发生频繁的碰撞、并和, 形成了椭圆星系. 同时, 被瓦解星系的恒星分布在较大空间范围, 导致中央星系的恒星分布延展.

后来的研究利用 SDSS 发现, 该 morphology-density 效应普遍存在于任何区域.

2) Butcher-Oemler effect: 在研究远距离 (中等红移, $z \sim 0.3$) 的星系团时, Butcher & Oemler (1978) 发现星系团中蓝星系的比例比目前宇宙 ($z \sim 0$) 中星系团的蓝星系比例高

目前观测发现, 这是一个普遍规律. 在早期宇宙, 几乎在所有环境中, 蓝星系的比例都高.

3) 光度函数-星系团质量关系: 通过测量不同质量星系团中, 不同类型星系的数目分布发现

- 高亮度处, 椭圆星系占大部分
- 低亮度处, 矮椭圆/不规则星系的数目占主导

该效应随着星系团质量而变化, 对于星系群, 其亮星系主要是漩涡星系和 S0

1.4 位力定理估计质量

一般来说, 星系群/团整体相对观测者有一定的运动速度, 同时, 成员星系还相对于星系群/团运动, 因此实际测量到的成员星速度是两者叠加.

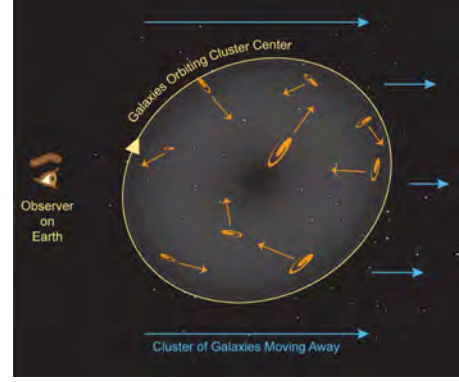


图 49: 成员星速度

通过测量单个成员星系的光谱, 可以得到其红移 z_i , 对于 N 个成员星系, 可以得到星系群/团的平均红移

$$\bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i$$

进一步得到成员星系 i 相对系统整体运动速度 (沿着视线方向) $V_i = c(z_i - \bar{z})$, c 为光速.

系统成员星系的平均速度 (或速度弥散度)

$$\sigma^2 = \langle V^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_i^2$$

1.4.1 位力定理 成员星系的平均动能

$$E = \frac{3}{2} \sigma^2 \cong \frac{GM}{R}$$

M 为星系群/团总质量, R 为系统典型尺寸.

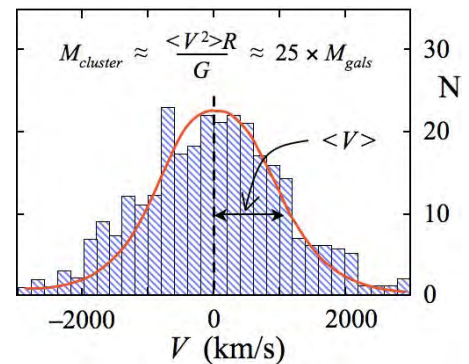


图 50: 成员星系的平均动能

- 典型星系群, 速度弥散 $\sigma \sim 300\text{km/s}$, 半径 300Kpc , 则 $M \sim 10^{13}M_{\odot}$
- 典型星系团, $\sigma \sim 1000\text{km/s}$, 半径 1000Kpc , 则 $M \sim 4 \times 10^{14}M_{\odot}$

1.4.2 温度-速度弥散关系 对于处于维里化的星系团, 假设气体原子的平均速度与星系的速度弥散度相当. 对于气体粒子, 其能量

$$\epsilon = \frac{3}{2}\kappa_B T$$

κ_B 为玻尔兹曼常数 $= 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$. 如果气体完全电离, 且主要成分为氢, 其动能

$$K = \frac{3}{2}m_p\sigma^2$$

这里为 $\frac{3}{2}$, 因为 σ 是沿着视线方向的速度, 为 1 维, 在均匀各向同性假设下, 3D 速度 $v^2 = 3\sigma^2$, m_p 为质子质量 $= 1.67 \times 10^{-27}\text{kg}$. 由 $\epsilon = K$, 可得

$$T = \frac{\frac{m_p\sigma^2}{2}}{\kappa_B} = 5 \times 10^6 \left(\frac{\sigma}{300\text{km/s}} \right)^2$$

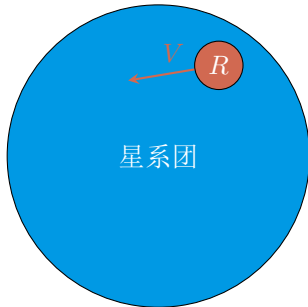
- $\sigma=300\text{km/s}$, $T=500$ 万度
- $\sigma=1000\text{km/s}$, $T=4500$ 万度.

在这样的高温下, 气体完全电离, 主要辐射集中在 x-ray 波段 ($\sim 0.01\text{-}10 \text{ nm}$ or $0.1\text{keV} \sim 100 \text{ keV}$)

韧致辐射: 自由电子在库仑力作用下产生加速度, 辐射高能光子. 星系团的速度弥散与气体温度存在很好的相关关系. 基本符合维里定理.

1.5 冲压剥离 (ram-pressure stripping, RPS)

当星系在星系团中运动时, 由于星系团内存在大量气体 (星系际介质, Intracluster medium, ICM), 因此星系将感受到一个冲击压力 (ram pressure), 就像骑车或者迎风打雨伞感受到阻力一样.



对于一个半径为 R 的星系, 以速度 V 在星系团中运动, 其单位时间内与该星系碰撞的气体质量为 $\pi R^2 \rho_{ICM} V$, 由于星系对 ICM 的阻挡, 其感受的动量 $\sim \pi R^2 \rho_{ICM} V^2$, 即单位面积受到的压强为 $\rho_{ICM} V^2$.

对于一个无限薄盘, 如果其物质密度主要由恒星主导, 恒星面密度为 Σ^* , 则其在距离盘面垂直距离 z 处的引力指向盘面, 为 $2\pi G \Sigma^*$. 则盘中气体单位面积的引力为 $2\pi G \Sigma^* \Sigma_{ISM}$, 发生冲击压剥离的条件为 $\rho_{ICM} V^2 > 2\pi G \Sigma^* \Sigma_{ISM}$, 即

$$\rho_{ICM} > \frac{2\pi G \Sigma^* \Sigma_{ISM}}{V^2}$$

对于一个类似银河系的星系, 其恒星质量 $\sim 5 \times 10^{10} M_{\odot}$, 气体质量 $5 \times 10^9 M_{\odot}$, 分布在一个半径 10kpc 的盘面, 如果运动速度 1000km/s , 则发生冲击压剥离的条件为 $\rho_{ICM} > 4 \times 10^{-27} \text{ g/cm}^3$, 刚好接近星系团中 ICM 的平均密度.

- 在星系团中心, ICM 的密度更高, 因此更容易发生 RPS
- 星系外围, 气体和恒星密度低, 也容易发生 RPS

2. 引力透镜效应 (Gravitational lensing)

引力透镜是一种较常见的现象, 它指光线穿过一个引力场附近时会发生弯曲的现象. 引力透镜已经成为测量天体物质分布, 宇宙学参数的标准手段 (相比其他测量, 如位力定理, 需要假设其处于平衡态, 且需要光谱测量). 透镜现象只依赖于总物质分布, 是最“干净”的方法.

按照透镜信号强弱, GL 分为:

- 强引力透镜
- 弱引力透镜

2.1 强引力透镜效应 (Strong Gravitational lensing)

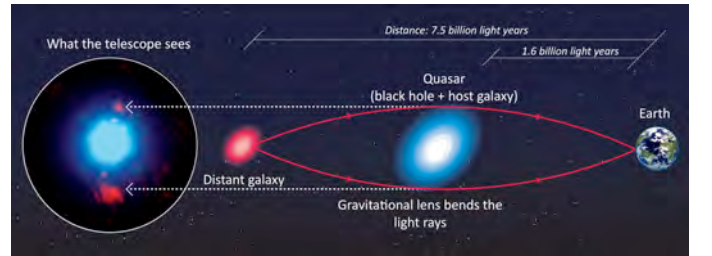


图 51: 强引力透镜效应

基本原理: 背景星系 (Source) 的光被前景 (Lens) 弯曲, 导致像的位置偏离真实位置, 并且可以成多个像.

根据下图, 有如下等式

$$d_s \theta = d_s \beta + d_{LS} \alpha$$

在透镜 L 为点质量的情况下, 其偏折角 α 可以从牛顿力学得到:

$$\alpha = \frac{2GM}{bc^2}$$

实际上, 广义相对论给出

$$\alpha = \frac{4GM}{bc^2}$$

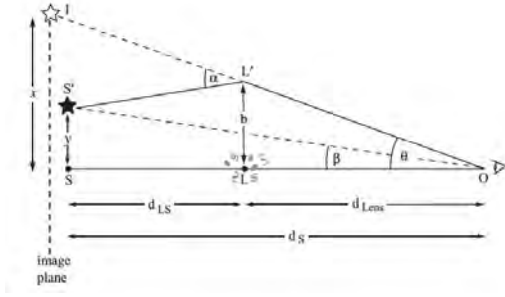


图 52: 强引力透镜

由上式可得 ($b = d_{lens}\theta$)

$$\theta - \beta = \frac{1}{\theta} \frac{4GM}{c^2} \frac{d_{LS}}{d_s d_{lens}} = \frac{1}{\theta} \theta_E^2$$

可求解得到

$$\theta_{\pm} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{2}$$

$\theta = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{d_{LS}}{d_s d_{lens}}}$ 为爱因斯坦半径, 其大小与源, 透镜和观测者之间的距离和源的质量决定.

- 当 $\beta = 0$ 时, 即当源, 透镜和观测者成一条直线时, $\theta = \theta_E$, 此时, 像为一个圆环, 其半径为爱因斯坦半径.
- 当 $\beta > 0$, 有两个解, 分别在透镜的两侧, 位于爱因斯坦半径内外.

2.1.1 放大效应 对于上述点质量透镜情况, 它不但引起 2 个像, 同时还放大/减小源的表面积. 透镜引起源中心从 $y(\beta) \rightarrow x(\theta)$, 同时径向尺度也发生变化. 由于源的表明亮度与距离无关, 因此像的面积相对于源的面积变化引起总亮度变化.

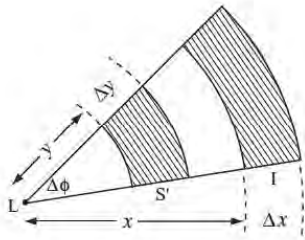


图 53: 放大效应

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}_{\pm}(\text{image})}{\mathcal{A}(\text{source})} &= \left| \frac{\theta}{\beta} \frac{d\theta}{d\beta} \right| \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}} + \frac{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{\beta} \pm 2 \right) \end{aligned}$$

可以看出,

- 对于远离透镜的像 θ_+ , 其放大率始终 > 1 , 即该像始终变亮.
- 对于靠近透镜的像 θ_- , 当 $\beta \leq 0.35\theta_E$ 时, 放大率 > 1 , β 偏大时放大率 < 1 , 像变弱.

两个像的总亮度为 $\mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_- > 1$, 因此总亮度始终放大.

当 $\beta = \theta_E$ 时, 放大 $\sim 40\%$, $\beta = 0.7\theta_E$, 放大 1 倍.

2.2 弱引力透镜效应 (Weak Gravitational lensing)

对于绝大多数情况, 透镜体不是点质量, 同时源处于距离透镜中心较远的位置时, 并不产生多个像, 源的位置基本不变, 但是源的形状有轻微改变. 此为弱引力透镜效应.

假如源为一个圆形, 则像的形状不但变大, 同时具有一定的椭圆率如下图所示.

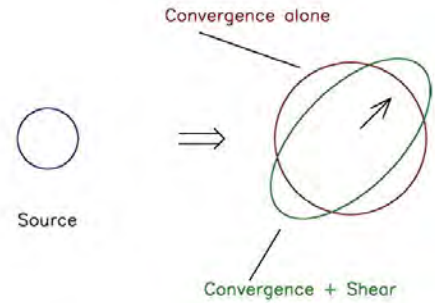


图 54: 弱引力透镜效应

弱引力透镜的比强引力透镜更加普遍, 且能测量到星系团外围的物质分布 (强透镜只能测量中心到像之间的物质分布), 因此弱引力透镜在宇宙学中有非常重要的应用.

2.3 引力透镜效应总结

- 强引力透镜
源靠近透镜中心时产生
产生多个像
不同的像亮度不一样, 总体变亮
- 弱引力透镜
源偏离透镜中心
像的形状发生改变, 变得更加椭圆

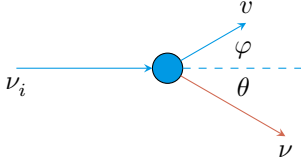
两者都可以用来测量透镜体的物质分布同时, 由于放大效应, 可以较容易观测到很远的源.

3. 星系团 SZ 现象

SZ 效应指宇宙微波背景辐射的光子在穿过星系团时, 由于星系团内的高能电子与光子发生逆康普顿散射, 由于电子具有较高能量, 散射后光子获得能量.

首先考虑康普顿散射, 即光子与静止电子发生散射. 入射光子频率 ν_i , 散射光子频率 ν , 散射后电子速度 v .

散射过程满足以下方程:



1) 能量守恒

$$h\nu_i + m_e c^2 = h\nu + m_e c^2 \gamma$$

$$\text{洛伦兹因子 } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

2) 动量守恒

$$\begin{aligned} \frac{h\nu_i}{c} &= \frac{h\nu}{c} \cos \theta + m_e v \gamma \cos \varphi \quad (\text{水平方向}) \\ \frac{h\nu}{c} \sin \theta &= m_e v \gamma \sin \varphi \quad (\text{垂直方向}) \end{aligned}$$

求解上述方程, 可以得到散射前后光子的频率为

$$\nu = \frac{\nu_i}{1 + \frac{h\nu_i}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}$$

可以看到, 光子与静止电子碰撞后, 光子能量变小, 电子获得能量.

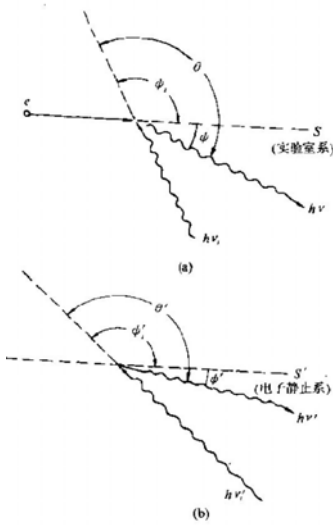


图 55: 逆康普顿散射

当电子能量相比入射光子能量较高时, 散射后光子获得能量, 称为逆康普顿散射. 有如下推导:

在电子的静止坐标系内 S' , 入射光子和散射光子频率满足上式, 此时用电子静止坐标系中的频率代替

$$\nu' = \frac{\nu'_i}{1 + \frac{h\nu'_i}{m_e c^2} (1 - \cos \theta')}$$

要从电子静止坐标系 S' 变换到实验室坐标系 S 中, 需要利用相对论变化关系

- $S \rightarrow S'$ 时, 入射光频率变换: $h\nu'_i = \gamma h\nu_i (1 - \beta \cos \psi_i)$
- $S' \rightarrow S$ 时, 散射光频率变换: $h\nu = \gamma h\nu' (1 + \beta \cos \psi')$

同时从 $S \rightarrow S'$, 入射光和散射光角度的变化:

$$\begin{aligned} \tan \psi'_i &= \frac{\sin \psi_i}{\gamma (\cos \psi_i - \beta)} \\ \tan \psi' &= \frac{\sin \psi}{\gamma (\cos \psi - \beta)} \end{aligned}$$

代入上式可得

$$h\nu = \frac{\gamma^2 h\nu_i (1 - \beta \cos \psi_i) (1 + \beta \cos \psi')}{1 + \frac{\gamma h\nu_i}{m_e c^2} (1 - \beta \cos \psi_i) (1 - \cos \theta')}$$

考虑电子以相对论性速度运动 (星系团中的电子), $\beta = \frac{v}{c} \simeq 1$, $\gamma \gg 1$. 即使如此, 对于 X 射线电子, 仍然有 $\gamma h\nu_i \ll m_e c^2$, 因此有

$$h\nu \simeq \gamma^2 h\nu_i (1 - \cos \psi_i) (1 + \cos \psi')$$

同时, $\psi \simeq 0$.

平均来说, 在与相对论电子碰撞后, 散射光子基本沿着电子运动方向, 且能量增加了 γ^2 倍.

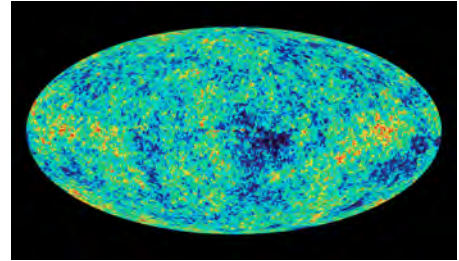


图 56: 宇宙微波背景辐射

对于宇宙背景辐射 (CMB), 其为黑体谱, 其为

$$I_\nu(\nu, T_{CMB}) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT_{CMB}}} - 1}$$

Sunyaev-Zeldovich 通过更加严格的推导得到电子对 cmb 能谱的改变为

$$\frac{\Delta I_\nu}{I_\nu} = y \frac{x e^x}{(e^x - 1)} \left[x \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} \right) - 4 \right]$$

康普顿散射光深 $y = \int \frac{KT_e}{m_e c^2} \sigma_T N_e dl$, $x = \frac{h\nu}{kT_e}$.

可以看到, 光深正比于电子的动能 kT_e , 以及电子沿着视线方向的一维密度. 即星系团质量越大, 温度越高, SZ 效应越强. 目前的观测表明光深 y 很小, $y \sim 10^{-5}$ (尽管相对改变很小, 目前的天文观测精度足以测量出该效应).

此外, 从上式对 $x = \frac{h\nu}{kT_e}$ 的依赖关系可以看出, 能谱的改变依赖于光子的能量.

下图显示 CMB 光子被热电子散射后能谱的改变

- 在低能段 ($\nu < 218$ GHz), 光子的总能量减小
- 在高能段 ($\nu > 218$ GHz), 光子的总能量增加

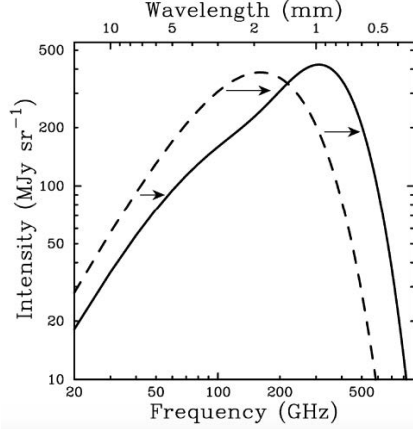


图 57: CMB 光子被热电子散射后能谱的改变

SZ 效应的最大优点是其对 CMB 光子能量的改变不依赖于星系团到我们的距离 (星系团的光学或者 X-ray 辐射随着距离平方下降, 因此很难探测到较远距离), 因此广泛利用 SZ 效应寻找星系团.

提醒: 由于 CMB 本身在天空分布的不均匀性, 即使在某一区域探测到某个频率内 CMB 信号相对平均温度升高, 也不能说明该处存在星系团需要在几个不同的频率附近测量 CMB 的温度, 最好在 218GHz 左右分别测量几个频率.

VII 宇宙学基本框架

1. 宇宙学原理

现代宇宙学的一个基本假设就是宇宙学原理: 宇宙是均匀且各向同性的. 也可以表述为: 宇宙不同地点, 同一时刻看到的宇宙图像是一样的, 其演化也是一样的.

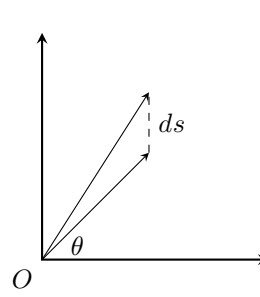


图 58: 二维平面

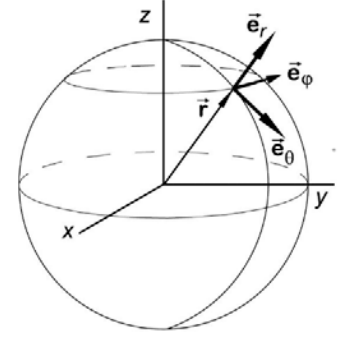


图 59: 二维球面

研究宇宙的第一步是刻画一个时空的几何结构. 考虑一个均匀各向同性的 2 维平面

$$d^2s = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

考虑一个二维球面, 其线元为

$$\begin{aligned} d^2s &= r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \\ &= r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \end{aligned}$$

为将这 2 者写为统一的形式, 令 $x = \sin \theta$, $dx = \cos \theta d\theta$

$$d^2s = r^2 \left(\frac{dx^2}{1-x^2} + x^2 d\varphi^2 \right)$$

引入空间曲率因子 K , 对于平面 $K = 0$, 对于球面, $K = 1$, 则二维平面的线元可以写为

$$d^2s = a^2(t) \left(\frac{dx^2}{1-Kx^2} + x^2 d\varphi^2 \right) \begin{cases} K = 0 & \text{平面} \\ K = 1 & \text{球面} \\ K = -1 & \text{双曲面} \end{cases}$$

这里 $a(t)$ 是空间尺度因子, 可以是时间的函数.

对于一个均匀各向同性的三维空间, 可以将其想象成为四维空间中的球面. 与三维空间中推导 2D 球面类似, 三维球面的线元之间的距离可以写成

$$dl^2 = a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\psi^2) \right] \quad (\text{VII.1})$$

它类似于球坐标下距离的表达式. (r, ϑ, φ) 是共动坐标, 是不随着尺度因子而变化的 (可以想象为下图膨胀球面上的坐标). r 是无量纲的, 转换为物理距离 (x) 时需要乘以尺度因子 a .

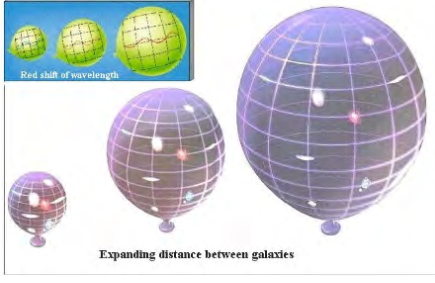


图 60: 四维球面

对于两个分别处在 $(r=0, \vartheta, \varphi)$, (r, ϑ, φ) 的星系, 其物理距离 D 可表示为

$$D = a(t) \int \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} = a(t) * \chi(r)$$

$$\chi(r) = \begin{cases} \arcsin r & K = 1 \\ r & K = 0 \\ \ln(r + \sqrt{r^2 + 1}) & K = -1 \end{cases}$$

两个星系之间的相对物理速度

$$v = \frac{dD}{dt} + \frac{d(a\chi(r))}{dt}$$

$$= \frac{\dot{a}}{a} D + \dot{\chi} a$$

$\frac{\dot{a}}{a} D$ 为空间膨胀引起的速度, $\dot{\chi} a$ 为星系位置变化引起的速度 (共动坐标), 大部分情况下 $\frac{\dot{a}}{a} D > \dot{\chi} a$. (超光速是相对速度不可超光速, 但算上膨胀速度可能超过光速)

定义哈勃常数

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

因此有 $v = HD$.

哈勃常数不依赖于空间位置, 只是个时间的函数. 取宇宙当前时刻 $t = t_0$, 则 $H = H_0$, H_0 表示目前测量的哈勃常数. 这就是熟悉的哈勃定律, 即星系的相对速度与距离成正比.

- 1) 从 $v = HD$ 可以看到, 哈勃常数的单位为 km/s/Mpc.
- 2) 目前测量的哈勃常数 $H_0 \cong 67.73 \text{ km/s/Mpc}$, 即在 1Mpc 的距离上, 星系的相对速度 $\sim 70 \text{ km/s}$
- 3) $1/H = D/V$, 为时间的量纲, 即星系用 100 h km/s 的速度分开到 1Mpc 需要的时间, 大致为宇宙年龄. $t \sim 1/H_0 = 9.78 * 10^9 \text{ hr}$, 代入 $h \sim 0.7, t \sim 139$ 亿年

考虑时间作为第四维, 则空时间隔为

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right] \quad (\text{VII.2})$$

这就是著名的 Robertson-Walker 度规. 他们分别独立证明了上式是满足均匀和各向同性要求的唯一四维时空. 该度

规也称为 Friedmann-Robertson-Walker metric (FRW), 或者 FLRW 度规与狭义相对论类似,

- 称 $ds > 0$ 为类时间隔
- 称 $ds < 0$ 为类空间隔
- 称 $ds = 0$ 为光子测地线

2. 宇宙学红移 (cosmic redshift)

几乎所有天文观测都是通过接受天体的辐射, 因此需要了解光子在 FRW 中的传播过程对于光子, 其沿着测地线传播, 即 $ds = 0$. 将光子看出波, 考虑一个波峰沿径向传播 ($d\vartheta = d\varphi = 0$), 其在 t_e 时刻从距离 r 处发出, 到今天被观测者接收到 ($r=0, t_0$) 由上述等式得到

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}}$$

其下一波峰在 $t_e + \Delta t_e$ 时刻发出, 在 $t_0 + \Delta t_0$ 时刻被接受到, 则有

$$\int_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}}$$

由于光源和接受者的共动位置没有变化, 即满足

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

将右边展开为

$$\int_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \Delta t_e}^{t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

可以得到

$$\int_{t_e + \Delta t_e}^{t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = 0$$

$$\int_{t_e}^{t_e + \Delta t_e} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

当 Δt_e 与 Δt_0 都很小时, 可得

$$\frac{\Delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\Delta t_e}{a(t_e)}$$

由于光子的波长正比于其波峰之间的时间间隔, 因此接收到的波长 λ_0 与发出波长 λ_e 之比为

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}$$

波长的变化完全由宇宙的膨胀因子 $a(t)$ 决定.

定义红移 $z(\text{redshift})$

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} - 1 \quad (\text{VII.3})$$

这就是宇宙学红移. (目前最重要的公式之一)

由于宇宙膨胀, 令 $a(t_0) = 1$, 则 $a(t) < 1, z > 0, (t < t_0)$:

- 对于本地宇宙 $z = 0$
- 对于极早期宇宙 $a \sim 0, z \sim \infty$
- 对于宇宙微波背景辐射 $z \sim 1000$

3. 星系的红移

不同红移的概念.

- 多普勒红移, $z_d = \frac{v}{c}$
- 宇宙学红移 $z_c = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} - 1$

他们的来源完全不一样. 一个是由于物体相对于观测者运动引起, 另一个是由宇宙膨胀引起. 但是当红移 $z \ll 1$ 时, 宇宙膨胀引起的红移与多普勒红移是等价的.

一般来说, 观测的星系红移时其多普勒红移与哈勃红移的叠加.

对于星系, 在其发出光子处, 由于多普勒效应, 其波长相对于本地实验室变化为

$$\lambda'_e = (1 + z_d)\lambda_e$$

由于宇宙学红移, 今天的观测者测量的波长

$$\lambda_0 = (1 + z_c)\lambda'_e = (1 + z_c)(1 + z_d)\lambda_e$$

因此, 观测到的红移

$$1 + z_0 = (1 + z_c)(1 + z_d)$$

$$z_0 = z_c + z_d + z_c z_d$$

实际上我们只能测量 z_0 , 并不能测量 z_c . 但是由于多普勒效应导致的红移 $z_d < 0.01$, 因此对于 $z_c > 0.05$, 一般来说都是宇宙学红移占主导.

4. Friedmann 方程

给定宇宙的几何度规, 即 RW 度规以后, 宇宙的演化 (尺度因子 $a(t)$) 由爱因斯坦场方程决定)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (\text{VII.4})$$

$R_{\mu\nu}$ 为 Ricci 张量, R 为曲率标量, $g_{\mu\nu}$ 为空间度规, $T_{\mu\nu}$ 为能量动量, Λ 为宇宙学常数. (完全理解VII.4的意义, 需要广义相对论基础知识, 不是本课程的重点)

对于均匀各向同性宇宙, 可以用理想流体, 密度为 ρ , 压强为 P , 来描述宇宙物质的能量动量张量, 且流体只有时间分量. 在一系列简化假设之后, 有爱因斯坦场方程的时-时分量

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + 3\frac{P}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (\text{VII.5})$$

与场方程的空间-空间分量

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{Kc^2}{a^2} = 4\pi G \left(\rho - \frac{P}{c^2} \right) + \Lambda c^2 \quad (\text{VII.6})$$

根据VII.5与VII.6, 可得到

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (\text{VII.7})$$

VII.5与VII.7, 被称为 Friedmann 方程.

Friedmann 方程给出 2 个方程, 但有三个未知数, $a(t)$, $\rho(t)$, $P(t)$. 因此, 要得到宇宙膨胀因子 $a(t)$, 必须还要知道状态方程, 即 P 与 ρ 的关系, 或者他们与膨胀因子 a 的关系.

特殊情况: 爱因斯坦宇宙模型. 根据 Friedmann 方程VII.7, VII.5, 可以看到, 在没有宇宙学常数, 即 $\Lambda = 0$, 且在物质压强 $P = 0$ 的情况下, 宇宙不能保持静止状态, $\ddot{a} \neq 0$. 当时爱因斯坦, 包括几乎所有人, 都认为宇宙应该处于静止状态. 因此爱因斯坦给他的场方程添加了宇宙学常数 Λ .

- 若 VII.5=0, 可得 $\rho = \frac{\Lambda c^2}{4\pi G}$, 且很显然 $\rho > 0, \Lambda > 0$
- 若 VII.7=0, 由 $K = [-1, 0, 1]$, 可得 $K = 1$, 且 $a = \frac{1}{\Lambda}$

即宇宙的物质密度 ρ , 尺度因子 a 分别满足上述要求时, 宇宙可以保持静止状态实际上, 即使满足上述条件, 宇宙也是处于不稳定状态, 如果一个微扰, 导致:

- $\dot{a} > 0$, 宇宙塌缩, 则密度 $\rho \uparrow$, 导致 $\ddot{a} < 0$, 宇宙继续塌缩
- $\dot{a} > 0$, 宇宙膨胀, 则密度 $\rho \downarrow$, 导致 $\ddot{a} > 0$, 宇宙继续膨胀

4.1 热力学和状态方程

为了求解 Friedmann 方程, 必须知道物质的密度 ρ 和压强 P 随着时间的变化, 或者随着宇宙膨胀因子 a 的变化.

考虑某一体积 $V(\sim a(t)^3)$ 内理想流体的热力学过程. 根据热力学第一定律, 系统的内能变化为, $dU = dQ + dW$, dQ 为系统与外界的热量交换, dW 为做功. 由于宇宙均匀, 因此系统与外界没有热量交换 ($dS = \frac{dQ}{T} = 0$), 因此对于绝热过程, $dU + PdV = 0$, P 为压强. 单位体积的内能 $\varepsilon = \rho c^2$, 宇宙的能量密度来源于普通物质, 辐射, 真空能, 即

$$\rho c^2 = \rho_m c^2 + \rho_m K + \frac{4\sigma_{SB}}{c} T^4 + \rho_{vac} c^2$$

这里 ρ_m 为物质密度, K 为其热能 ($\frac{3}{2}kT$), $\frac{4\sigma_{SB}}{c} T^4$ 为辐射能量密度, $\rho_{vac} c^2$ 为真空能量密度.

由 $dU + PdV = 0$, 可得

$$d(\rho c^2 V) + PdV = 0$$

$$V d\rho + \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) dV = 0$$

由于 $V \sim a^3$, $dV \sim 3a^2 da$ 可得

$$\frac{d\rho}{da} + 3 \left(\frac{\rho + \frac{P}{c^2}}{a} \right) = 0$$

一般定义物质的状态方程为 $P = w\rho c^2$, 代入上式可得

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}$$

对于以下三种极端情况,可以得到密度随膨胀因子 a 的演化:

1) 冷物质 (非相对论性物质 (普通物质, 暗物质), 压强相对于物质内能很小): $P = 0, w = 0, \rho \propto a^{-3}$

2) 热物质 (相对论性物质, 如辐射): $P = \frac{p}{3}, w = \frac{1}{3}, \rho \propto a^{-4}$. 由于 $\rho \propto \frac{4\sigma_{SB}}{c} T^4$, 可得 $T \propto a^{-1}$, 即辐射的温度随着膨胀因子反比变化.

3) 真空能 (与 a 无关): 即 $w = -1, P = -\rho c^2$, 因此真空能为负压

从观测可知:

1) 对于目前宇宙, 其物质 (主要为非相对论性暗物质) 密度 $\sim 10^{-29} \text{g/cm}^3$, 辐射 (宇宙微波背景) 的密度 $\sim 10^{-33} \text{g/cm}^3$, 目前宇宙为物质主导

2) $z \sim 1000 (a \sim 10^{-3})$ 物质主导

3) $z \sim 10000$ 物质与辐射密度大致相当

4) $z > 10000$ 辐射主导

4.2 Friedmann 方程求解

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

利用上述关于物质密度随膨胀因子 a 的变化, 并定义暗能量密度 $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$, 可得

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\rho_{m,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \rho_{r,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \rho_\Lambda \right] - \frac{Kc^2}{a^2} \quad (\text{VII.8})$$

不用求解 VII.8, 我们可以大致得到宇宙膨胀因子 a 随时间的变化 [3].

在宇宙当前时刻, Friedmann 方程为

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 - \frac{Kc^2}{a_0^2}$$

这里 $\rho_0 = \rho_{m,0} + \rho_{r,0} + \rho_\Lambda$, 定义宇宙临界密度及一些宇宙学参数, 令 $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$

$$\Omega_m = \frac{\rho_{m,0}}{\rho_c}, \Omega_r = \frac{\rho_{r,0}}{\rho_c}, \Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}, \Omega_K = -\frac{K}{H_0^2 a_0^2}$$

Friedmann 方程可以写为

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1 \quad (\text{VII.9})$$

$\rho_c = 1.88 \times 10^{-29} h^2 \text{g/cm}^3 = 2.78 \times 10^{11} h^2 M_\odot / \text{Mpc}^3$ 为宇宙临界密度.

目前宇宙的辐射密度 Ω_r 很小, $\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1$, 只需要确定物质密度, 暗能量密度, 就可以得到宇宙空间曲率. 最新观测得到 $\Omega_m = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7, K = 0$, 宇宙是平坦的.

令 $\Omega_0 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda$, 利用 VII.9, 即 $\Omega_K = 1 - \Omega_0$, 则 VII.8 可以写为

$$\begin{aligned} H^2(z) &= H_0^2 [\Omega_\Lambda + (1 - \Omega_0)(1+z)^2 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^4] \\ &= H_0^2 E^2(z) \end{aligned} \quad (\text{VII.10})$$

上式给出了哈勃常数随红移的变化 (非常重要的公式). 因此只要测量了当前宇宙的 $\Omega_m, \Omega_r, \Omega_\Lambda$, 就可以求解 VII.10, 计算出宇宙膨胀因子 a 随时间的变化.

4.3 减速参数

将宇宙的膨胀因子在 $t = t_0$ 时刻展开, 有

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 + \dot{a}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}_0(t - t_0)^2 + O(t - t_0) \\ &= a_0 \left[1 + H - 0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t - t_0)^2 \right] + O \end{aligned}$$

$q_0 = -\frac{\ddot{a}_0 a_0}{\dot{a}_0^2}$ 为减速因子, 利用 VII.5, 可得 $q_0 = \frac{1}{2}\Omega_0 + \Omega_r - \Omega_\Lambda$. 只要测量了目前的哈勃常数和减速因子, 宇宙膨胀因子也可以大体确定.

5. 宇宙的距离概念

1) 物理距离

FRW 度规下, 物体之间的物理距离 D , 定义为共动距离乘以宇宙尺度因子. 对于处在坐标 $(0, \theta, \varphi)$, (r, θ, φ) 的两个星系, 其物理距离

$$D(t) = a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = a(t)\chi(r)$$

$\chi(r)$ 为共动距离.

2) 角直径距离

对于一个尺度为 D , 处在共动坐标 r_e 处的星系, 若其在天空的张角为 θ , 按照我们熟悉的定义, 其距离为

$$d_a = \frac{D}{\theta}$$

由 RW 度规 (VII.1 or VII.2), 可知共动坐标 r_e , 角度 θ 对应的共动距离为 $r_e \theta$, 可以得到

$$d_A = \frac{D}{\theta} = \frac{a_e r_e \theta}{\theta} = a_e r_e = \frac{a_0}{(1+z)} r_e$$

3) 光度距离

在我们熟悉的框架里, 对于光度为 L (单位时间的辐射总能量) 的天体, 其观测的流量 f (单位时间, 单位面积的辐射能量), 满足如下关系

$$f = \frac{L}{4\pi r^2}$$

表 3: 宇宙膨胀因子 a 随时间的变化

	$K = -1$	$K = 0$	$K = 1$
$\Lambda > 0$	$\dot{a} > 0$ 未来一直膨胀	$\dot{a} > 0$ 未来一直膨胀	$\rho_{m,0} + \rho_{r,0} \gg \rho_\Lambda$ 先膨胀到 $\dot{a} = 0$, 再收缩 $\rho_{m,0} + \rho_{r,0} \ll \rho_\Lambda$ 一直膨胀
$\Lambda = 0$	$\dot{a} > 0$ 未来一直膨胀	$\dot{a} > 0$ 未来一直膨胀	先膨胀到 $\dot{a} = 0$, 再收缩
$\Lambda < 0$	先膨胀到 $\dot{a} = 0$, 再收缩	先膨胀到 $\dot{a} = 0$, 再收缩	先膨胀到 $\dot{a} = 0$, 再收缩

r 就是距离.

在空间曲率不为 0, 以及膨胀宇宙条件下, r 用光度距离 d_L 代替. 观测者在宇宙当前时间 t_0 , 单位时间间隔 dt_0 , 单位面积 ds 内接收的总能量和总光子数分别为

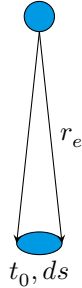
$$dE = f ds dt_0, \quad dN = \frac{dE_e}{h\nu_0}$$

这些能量/光子来自处在共动坐标 r_e, r_e 时刻的星系源朝向观测者的方位角发射的光子

$$dE_e = \frac{L}{4\pi} \frac{ds}{a_0^2 r_e^2} dt_e, \quad dN_e = \frac{dE_e}{h\nu_e}$$

这里 $\frac{ds}{a_0^2}$ 是共动坐标下的面积. 由于发射的光子数等于接收的光子数 (由于红移, 光子能量不守恒), 结合 $\frac{dt_0}{a_0} = \frac{dt_e}{a_e}$, $\frac{v_0}{a_0} = \frac{v_e}{a_e}$ 可得

$$d_L = a_0 r_e (1+z)$$



5.1 距离-红移关系

从前述角直径距离 $d_A = \frac{a_0}{(1+z)} r_e$, 光度距离 $d_L = a_0 r_e (1+z)$, 可以看到, 对于给定红移 z 的星系, 只需要确定膨胀因子, 共动坐标与红移的关系. 由 VII.2

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} = \chi(r_e)$$

代入 $dt = \frac{da}{\dot{a}}$, $H(z) = \frac{\dot{a}}{a} = H_0 E(z)$ VII.10 可得

$$\chi(r_e) = \frac{c}{H_0 a_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)} \quad (\text{VII.11})$$

就是宇宙共动距离与红移的关系.

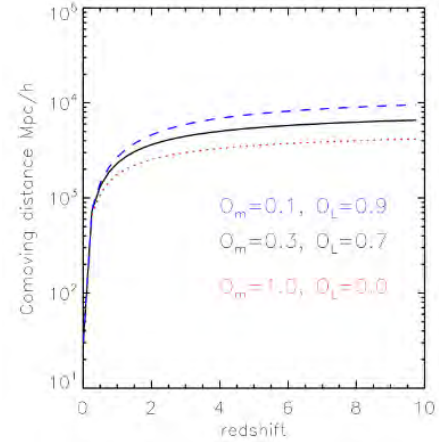


图 61: 共动距离-红移关系

5.2 宇宙的年龄

由 $\dot{a} = \frac{da}{dt}$, 即 $dt = \frac{da}{\dot{a}}$ 得

$$t(z) = \int_0^{a(z)} \frac{da}{\dot{a}} = \frac{1}{H_0} \int_z^\infty \frac{dz}{(1+z)E(z)}$$

回溯时间 (lookback time), 即从红移 z 到目前 $z=0$ 的年龄

$$t_b(z) = t_0 - t = \frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{(1+z)E(z)}$$

这里 $\frac{1}{H_0}$ 是哈勃时标, $\sim 9.78 \times 10^9$ /hr

图62 给出回溯时间对宇宙学参数的依赖关系.

5.3 视界 (Horizon)

在宇宙某一时刻, 视界, $D_h(t)$, 定义为从宇宙诞生之时, 到观测者所在时间, 光子能传播的最大固有距离, 由 VII.2, 与推导 VII.11 类似, 但 $t=0$ 对应于红移 $z=\infty$

$$\chi(r_e) = \frac{c}{H_0 a_0} \int_z^\infty \frac{dz}{E(z)} \quad (\text{VII.12})$$

因此

$$D_h(z) = a\chi = \frac{c}{H_0(1+z)} \int_z^\infty \frac{dz}{E(z)}$$

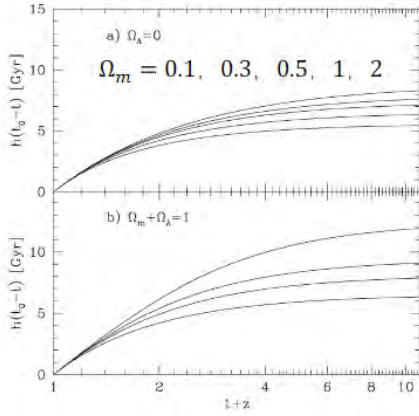


图 62: 宇宙的年龄

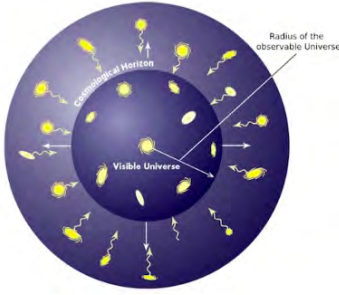


图 63: 视界 (Horizon)

由于 $E(z)$ 随 z 增加而衰减很快, 实际计算中, z 可以取一个较大的值, 如 10000, 结果就相对精确。

图64 为平坦宇宙下, 不同宇宙学参数下, 宇宙视界与红移的关系。

- 视界随着时间而增加
- 宇宙学常数越大, 宇宙膨胀越快, 界越大。

5.4 光度距离与红移的关系

由 $d_L = a_0(1+z)r_e$ 代入 VII.11 得

$$d_L = (1+z) \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)}$$

距离模数 $m - M = 5 \log(\frac{d_L}{10 \text{ pc}})$ 可得其与红移的关系。利用 SN-Ia, 可以独立测量其红移 z (谱线移动) 和距离模数 (SN-Ia 的绝对星等和视星等都可以测量)。

- 注意, 光度距离对宇宙学参数的依赖较弱, 因此需要高精度的测量才能确定暗能量参数。
- 高红移数据对宇宙学参数差别大, 但目前 $z > 1$ 的数据较少。

6. 宇宙膨胀因子随时间的变化

考虑几种简单情况下, a 随时间变化

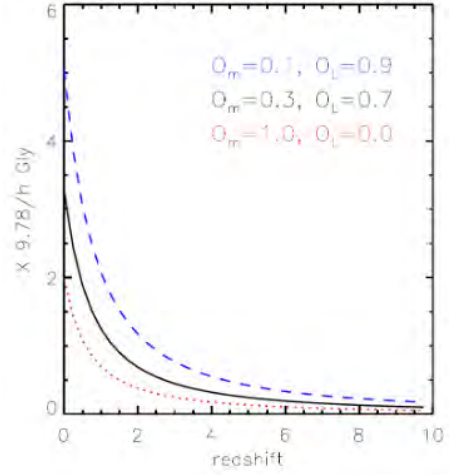


图 64: 宇宙视界与红移

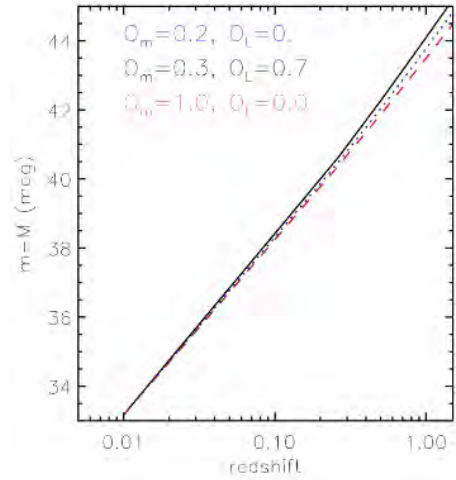


图 65: 光度距离与红移的关系

1) 辐射为主时期, 宇宙早期, 辐射主导 ($\sim a^{-4}$), VII.8 简化为

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{r,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4$$

可以积分得到

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \left(\frac{32\pi G \rho_{r,0}}{3}\right)^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{2}} \quad (\text{VII.13})$$

2) 物质为主时期, 且假设 $\Lambda = 0$, VII.8 为

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 - \frac{Kc^2}{H_0^2 a_0^2} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \right]$$

a. For $K = 0$

$$\frac{a}{a_0} = \left(\frac{3}{2} H_0 t\right)^{\frac{2}{3}}$$

这就是著名的 Einstein-de Sitter (EdS) 宇宙.

b. For $K = -1$

$$\frac{a}{a_0} = \frac{1}{2} \frac{\Omega_{m,0}}{1 - \Omega_{m,0}} (\cosh \vartheta - 1)$$

$$H_0 t = \frac{\Omega_{m,0}}{(1 - \Omega_{m,0})^{\frac{3}{2}}} (\sinh \vartheta - \vartheta)$$

$\vartheta \in (0, \infty)$

c. For $K = 1$

$$\frac{a}{a_0} = \frac{1}{2} \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0} - 1} (1 - \cos \vartheta)$$

$$H_0 t = \frac{\Omega_{m,0}}{(\Omega_{m,0} - 1)^{\frac{3}{2}}} (\vartheta - \sin \vartheta)$$

$\vartheta \in (0, 2\pi)$, a 存在一个最大值在 t_{max} 时刻, $\frac{a_{max}}{a_0} = \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0} - 1}$, 之后宇宙塌缩到 $a = 0$.

3) 物质为主平坦宇宙, 即 $\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1$, VII.8化简为

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a}\right) + \Omega_{\Lambda,0} \right]$$

当随着宇宙膨胀, 物质项可以忽略时

$$\frac{a}{a_0} = \exp \left[\Omega_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} H_0 (t - t_0) \right]$$

这就是著名的 de Sitter 宇宙, 即宇宙指数膨胀.

For $0 < \Omega_{m,0} < 1$, (目前观测支持的模型), 膨胀因子的严格解为

$$\frac{a}{a_0} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{\frac{1}{3}} \left[\sinh \left(\frac{3}{2} \Omega_{\Lambda,0}^{\frac{1}{2}} H_0 t \right) \right]^{\frac{2}{3}} \quad (\text{VII.14})$$

根据该表达式, 早期 $a \propto t^{\frac{2}{3}}$, 即 Einstein-de Sitter Universe. 晚期 $a \propto \exp \left[\Omega_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} H_0 (t - t_0) \right]$, 即 de Sitter 宇宙.

4) 其他, 对于包含宇宙学常数, 且 $K \neq 0$ 的情况, a 随时间演化更加复杂, 这里不再讨论可以参考 <Galaxy Formation and Evolution>, by Mo et al. book

7. 宇宙的创生 (普朗克时期)

目前大爆炸理论认为宇宙来自于 ~ 138 亿前的大爆炸. 大爆炸之前没有时间, 没有空间, 只有真空. 充满了量子涨落的“沸腾的真空”. 根据量子力学的测不准原理, 时间涨落与能量涨落满足

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{h}{4\pi}$$

h 为普朗克常数. 在宇宙早期, 辐射主导, 由 VII.13 知 $\rho_{r,0} = \sigma T^4$, 此外辐射温度满足 $\frac{T}{T_0} = \frac{a_0}{a}$, 可以得到宇宙的温度与时

间的关系为

$$T = \left(\frac{3c^2}{32\pi G\sigma} \right)^{\frac{1}{4}} t^{-\frac{1}{2}}$$

可以看到宇宙温度与目前时刻的温度 T_0 没有依赖关系. 宇宙的总能量 $E \cong \sigma T^4 a^3 \sim KT$, 因此由测不准关系

$$tE \approx tKT = K \left(\frac{3c^2}{32\pi G\sigma} \right)^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{2}} = \frac{h}{4\pi}$$

代入相关系数, 可以得到 $p_{pl} \approx 6 \times 10^{-44}\text{s}$, 其对应的能量 $E_{pl} \approx 1.2 \times 10^{19}\text{GeV}$, 对应温度 10^{32}K . t_{pl}, E_{pl} 分别称为普朗克时间, 普朗克能量. 光子在普朗克时间内传播的距离为 10^{-35}m , 该尺度称为普朗克长度. 与普朗克能量对应的质量 $m_{pl} = \frac{E_{pl}}{c^2} = 2.2 \times 10^{-5}\text{g}$.

普朗克时间, 尺度的意义: 它们代表了经典连续时空中能测量的最小时间和空间间隔. 在更小的尺度上, 时间和空间不连续了, 即量子化了.

宇宙大爆炸可以看着是一次 $t \rightarrow 0, E \rightarrow \infty$ 的一次真空能释放. 从质能角度看, 相当于“无中生有”, 创造了物质.

宇宙各处都在普朗克时间内发生了爆炸, 因此总能量远远大于普朗克能量.

8. 宇宙的暴胀

在上世纪 80 年代, 人们发现标准宇宙大爆炸模型碰到了严重困难, 即如何解释宇宙的空间平直性和视界问题, 于是提出了宇宙暴胀模型.

8.1 平直性问题

在没有宇宙学常数的模型下, Friedmann 方程写为

$$1 = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho - \frac{K}{H^2 a^2} \quad (k = 0, -1, 1)$$

定义 $\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G \rho}{3H^2}$, 可得

$$1 - \frac{1}{\Omega} = \frac{3K}{8\pi G \rho a^2}$$

在辐射为主时期, $\rho \propto a^{-4}$, 物质为主时期, $\rho \propto a^{-3}$, 因此有

$$\left| 1 - \frac{1}{\Omega} \right| \propto |K| \times \begin{cases} a^2 & \text{辐射为主} \\ a & \text{物质为主} \end{cases}$$

因此, 无论 $k = 0/1$, 在宇宙早期, 等式右边趋近于 0, 即 $\Omega = 1$, 宇宙表现为平直空间. 但是当 a 很大时, Ω 与 1 有明显偏离.

从宇宙爆炸至今, 宇宙从普朗克时间 (10^{-44}s), 从辐射为主 ($t = 10^4\text{yr} = 10^{11}\text{s}$) 到物质为主的今天 (10^{17}s), 宇宙尺度因子的变化为,

$$\frac{a_0}{a_{pl}} = \frac{a_{eq}}{a_{pl}} \frac{a_0}{a_{eq}} = \left(\frac{10^{11}}{10^{-43}} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{10^{17}}{10^{11}} \right)^{\frac{2}{3}} = 10^{31}$$

同时从爆炸至今 $|1 - \frac{1}{\Omega}|$ 的变化为

$$\frac{|1 - \frac{1}{\Omega}|_{t_0}}{|1 - \frac{1}{\Omega}|_{t_{pl}}} = \left(\frac{a_{eq}}{a_{pl}}\right)^2 \frac{a_{t_0}}{a_{eq}} \approx 10^{58}$$

从几率角度看, 很难理解. 为什么早期宇宙的密度和哈勃常数 (ρ, H) 应该是两个相互独立的随机量, 但是它们给出的组合量 Ω 却非常精确的等于 1, 与 1 的偏差只是在小数点后面 58 位. 即宇宙诞生之初, 其曲率应该 $K = 0$.

8.2 视界问题

从宇宙爆炸到微波背景形成的时刻 t_R , 光线传播的共动距离

$$\chi = \int_0^{t_R} \frac{dt}{a(t)}$$

在 t_R 以前, 宇宙基本为辐射主导, 即 $a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}$, 因此

$$\chi = \frac{1}{a_R} 2t_R$$

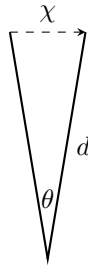
此外, 光子从 t_R 时刻到现在走过的共动距离, 在物质主导时

$$a \sim t^{2/3}, d = \int_{t_R}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \frac{3t_0}{a_0}$$

因此, 该视界在空间的张角

$$\theta = \frac{r}{d} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{1+z_R} \right)^{1/2}$$

微波背景辐射对应于 $z_R \sim 1000$, 得到 $\theta \sim 1.8^\circ$. 即有物理联系的区域不超过 1.8° .



观测发现, CMB 的辐射在全天的温度基本均匀, 因此有物理因果关系, 需要再次证明宇宙需要经历一个暴胀阶段.

8.3 宇宙暴胀理论-Inflation

暴胀模型有多种. GUT (大统一理论) 认为, 暴胀发生在真空发生相变的时刻. 假设宇宙处于真空状态, 但宇宙学常数不为 0, 即 $\rho = 0, \Lambda > 0$. 由 Freedmann 方程 VII.5 可得

$$\ddot{a} - \frac{\Lambda c^2}{3} a = 0$$

可以求解得到

$$a = a_{if} e^{\sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}} t}$$

a_{if} 为宇宙暴胀开始时刻宇宙的大小. 可以看到宇宙暴胀时, 宇宙尺度因子按指数增长.

大统一理论认为暴胀发生在宇宙温度为 $T_c \sim 10^{15} \text{ GeV}$ 时刻, 该时刻之前, 宇宙为辐射主导. $a \sim T^{-1} \propto t^{1/2}$, 由 $1 \text{ eV} \cong 1.16 \times 10^4 \text{ K}$, 结合宇宙在普朗克时间的温度为 10^{32} K , 可以知道暴胀发生在 $t \approx 10^{-35} \text{ s}$, 当时真空能密度 $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^3}{8\pi G} \sim T_c^4$, 因此有

$$H = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}} = 10^{35} / \text{s}$$

按照 GUT 理论, 暴涨过程从 $t \approx 10^{-35} \text{ s}$ 开始, 持续到 $t \approx 10^{-33} \text{ s}$ 结束. 宇宙在此过程中膨胀了 $e^{10^{35}(10^{-33}-10^{-35})} = e^{100} = 10^{43}$ 倍.

将尺度因子 $a \sim e^{\sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}} t}$ 代入 Freedmann VII.7, 且设密度为 $\rho = 0$, 可得 $K = 0$. 宇宙尺度因子的暴胀可以看成是宇宙曲率因子的急剧膨胀, 如一个二维球面, 不管其之前的曲率半径为多少, 急剧暴胀后曲率半径变成无穷大, 球面可以看成平面. 因此暴胀解决了“宇宙平直性”问题.



图 66: 暴胀让宇宙变得平坦

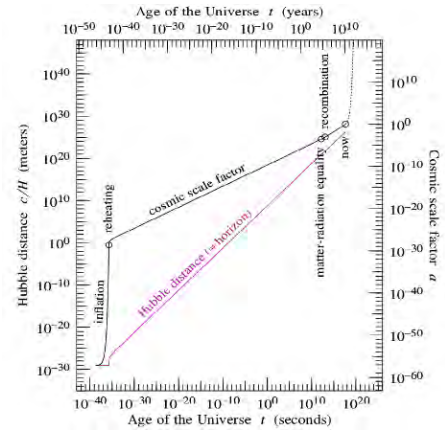


图 67: 视界问题, 左轴: 视界尺度. 右轴: 尺度因子

视界问题:

- 视界正比于宇宙年龄，从当前时间反推到普朗克时间，视界从 10^{10} 光年缩小到 10^{-43} 光秒，两者相比为 10^{60} 倍。
- 空间区域大小正比于宇宙尺度因子 $a(t)$ ，如果没有暴胀，从现在 (10^{10} 光年) 到普朗克时间，观测的空间区域将缩小 10^{31} 倍。
- 视界的大小会远小于空间尺度，产生视界疑难。

加入暴胀，宇宙空间区域的大大缩小，因此空间尺度远远小于视界尺度。就使得我们今天看到的全部宇宙，完全可以在宇宙暴胀前处在同一个有因果联系的区域，解决了“视界”问题。

9. 宇宙演化史

目前关于早期宇宙的演化还知之甚少，有许多模型。一般认为宇宙经历如下阶段：

- 1) 普朗克时期：从大爆炸开始到 10^{-43} 秒，最小的时间单位，期间物理过程基本不了解
- 2) 大一统时期：从 10^{-43} 秒到 10^{-36} 秒，重力与其他作用力（电弱力）分离。X,Y 玻色子产生
- 3) 电弱时期： 10^{-36} 到 10^{-12} 秒，强核力从电弱力分量，各种基本粒子 (W,Z,X,Y 玻色子及希格斯玻色子产生)，宇宙暴涨产生并结束，宇宙由夸克-胶子等离子体，光子组成。
- 4) 夸克时期： 10^{-12} 到 10^{-6} 秒，四种基本作用力完全分开。
- 5) 强子时期： 10^{-6} 到 1 秒，宇宙温度 $\sim 10^9\text{K}$ ，夸克形成强子，包括质子，中子。
- 6) 轻子时期：1 秒 ~ 10 秒，强子和反强子相互湮灭。
- 7) 光子时期： ~ 10 秒，轻子和反轻子湮灭，电子和正电子湮灭，剩下少数电子
- 8) 元素核合成：3 分钟 ~ 20 分钟，质子和中子形成原子核，最终形成氢，氦。
- 9) 辐射主导：10 秒 $\sim 60,000$ 年，光子与原子核，电子组成等离子体，并与其有相互作用
- 10) 复合时期： $\sim 380,000$ 年，宇宙温度 $\sim 3000\text{K}$ ，自由电子消失，光子开始自由穿梭
- 11) 黑暗时期：380,000 年 $\sim 1-2$ 亿年，宇宙中没有恒星，只有光子。暗物质开始聚集成团
- 12) 再电离时期：2 ~ 7 亿年，第一代恒星，星系形成，宇宙再次变得透明，完成再电离
- 13) 大量结构形成：7 亿年-138 亿年，银河系形成，太阳系形成

10^{-6}s 之前都是猜的，380000 年时形成微波背景辐射。

10. 宇宙早期物理过程—轻元素合成

宇宙原初核合成。

当宇宙温度下降到 $\sim 10^{10}\text{K}$ 时，夸克-胶子等离子体形成稳定的强子后，电子与质子通过如下弱作用过程而相互转化：

$$\begin{aligned} n + e^+ &\rightleftharpoons p + \bar{\nu}_e \\ n + \nu_e &\rightleftharpoons p + e^- \\ n &\rightleftharpoons p + e^- + \bar{\nu}_e \end{aligned}$$

这里 $\nu_e, \bar{\nu}_e$ 表示电子型中微子及其反粒子。由于中子与质子的静止质量之间差异为 $Q = (m_n - m_p)c^2 = 1.3\text{MeV}$ ，因此热平衡时，其密度并不相等，两者之比由玻尔兹曼公式给出，

$$\frac{n_n}{n_p} = \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{Q}{KT}\right) \approx \exp\left(-\frac{Q}{KT}\right)$$

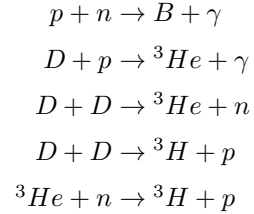
即中子数略少于质子数。当温度低于 0.87MeV 时（宇宙年龄 ~ 2 秒），上面的弱相互作用反应率小于宇宙膨胀速率，中子和质子之间停止相互转化，其数密度“冻结”，定义中子数与全部核子数之比为

$$X_n(0) = \frac{n_n}{n_n + n_p} = \left[1 + \exp\left(\frac{Q}{KT}\right)\right]^{-1} \approx 0.17$$

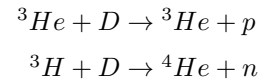
这一比值可以维持到宇宙年龄 $t_n \sim 20$ 秒，宇宙温度 $\sim 3.3 \times 10^9\text{K}$ 。此外，自由中子寿命为 $\tau_n \approx 886$ 秒，会衰变为质子， $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ ，因此 $X_n(0)$ 随时间演化为

$$X_n(t) = X_n(0) \exp\left(-\frac{t - t_n}{\tau_n}\right) \approx X_n(0)e^{-t/\tau_n}$$

当宇宙温度进一步降低到 $\sim 10^9\text{K}$ ($t \sim 270\text{s}$) 时，中子和质子开始形成氘 (^2H or D ， D 的结合能为 2.2MeV ，只有当温度 $< 10^9\text{K}$ ， D 才能形成)，



最终通过



形成稳定的氦。一旦 D 形成，上述反应很快进行，将所有中子都结合到氦核，因此 D 生成时 ($t_D \sim 270\text{s}$) 的中子丰度 $X_n = X(0) \exp(-t_D/\tau_n) = 0.125$ ，此时氦的丰度为（质量比）

$$Y = \frac{2n_n}{n_n + n_p} \approx 0.25$$

伽莫夫等人于 1948 年得到了上述结果。剩下的氢元素质量占比 $\sim 75\%$ 。事实上， He 生成以后还会产生少量的锂元素。上述核合成过程大约持续到宇宙爆炸后 3 分钟。

上述标准模型预言的轻元素丰度与宇宙中总重子密度密切相关。图68表明，目前观测的原初氢元素丰度与重子密度关系与理论非常符合。表明大爆炸宇宙学模型的正确性。宇宙中比锂更重的元素都来自恒星内部核反应，并通过星风和超新星爆炸，将它们转移星际空间。

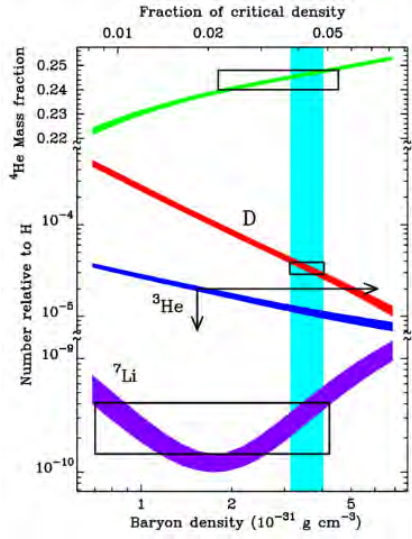


图 68: 轻元素核合成

11. 宇宙热力史—复合时期

- 1) 宇宙微波背景辐射 (CMB)
- 2) $2.7 \pm 10^{-5} \text{K}$
- 3) $t_{\text{age}} = 3.8 \times 10^5 \text{yr}$
($T > 3000 \text{K}$, H 电离)

轻元素合成以后, 宇宙继续为辐射主导, 一直到 ~ 40000 年宇宙变为物质主导, 但是此时宇宙温度足够高, 物质 (重子) 还是处于电离状态, 一直到宇宙 ~ 380000 年, 温度下降到 4000K 时, 自由电子和原子核开始结合为原子, 光子不再与电子/质子发生散射, 从而在宇宙中自由穿行, 形成宇宙背景辐射. 光子穿行到今天, 其温度下降到 2.7K , 辐射峰值在微波波段 ($\sim 1 \text{mm}$), 因此称为宇宙微波背景辐射 (Cosmic Microwave Background).

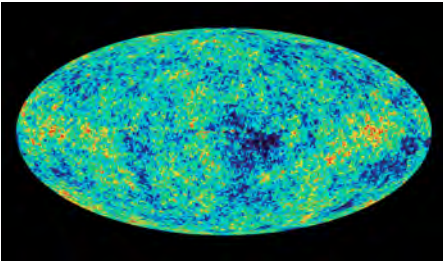


图 69: 宇宙微波背景辐射

11.1 复合时期温度计算

对于氢原子, 其电离能 $E = 13.6 \text{eV}$, 对应温度 $\sim 1.6 \times 10^5 \text{K}$. 而温度 4000K 时, 对应的光子平均能量为 0.34eV , 但宇宙中光子数目与重子数目比非常大, 只要光子中存在一部分能量高于 E 的“高能尾巴”, 则原子将保持电离.

在温度 T 时, 宇宙背景辐射为黑体, 其能谱分布为普朗克公式,

$$f(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu$$

总光子密度可由在某个频率范围 ($\nu, d\nu$) 内的光子密度 $dN(\nu, T) = f(\nu, T) d\nu / h\nu$ 积分而得.

$$\begin{aligned} N(T) &= \frac{8\pi k^3 T^3}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx \\ &= 19.23\pi \left(\frac{kT}{hc} \right)^3 \approx 420(1+z)^3 / \text{cm}^3 \end{aligned}$$

$$x = \frac{h\nu}{kT}$$

宇宙重子密度

$$\begin{aligned} n_B &= \Omega_B \rho_c (1+z)^3 / m_p \\ &\approx 1.12 \times 10^{-5} (1+z)^3 \Omega_B h^2 / \text{cm}^3 \end{aligned}$$

宇宙中光子与重子数密度之比为

$$\frac{n_r}{n_B} \approx 3.8 \times 10^7 (\Omega_B h^2)^{-1}$$

取 $\Omega_B h^2 \sim 0.02$, 比值可高达 10^9 .

单位体积内, 能量 $h\nu \geq E$ 的光子数与总光子数之比为

$$\beta = \frac{n(h\nu \geq E)}{N} \approx \frac{1}{N} \int_{E/h}^\infty \frac{8\pi \nu^3}{c^3} \frac{d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

令 $y = \frac{E}{kT}$, 可得 $\beta(y) = \frac{1}{0.24\pi^2} e^{-y} (y^2 + 2y + 2)$, 取 $\beta(y) = 10^{-9}$, 可得 $y = E/kT \approx 26.5$.

如果取 E 为氢原子的基态能量 13.6eV , 可得 $T \sim 6000 \text{K}$. 此时占光子总数 $1/10^9$ 的光子 (与重子数相当) 的高能光子可以让所有氢原子电离. 更为详细的计算表明即使 $T \sim 4500 \text{K}$, 也有足够的光子将氢原子先从基态跃迁到第一激发态, 其余光子再使他们从激发态电离.

在辐射与重子脱耦过程中, 定义电离率

$$x = \frac{n_e}{n}$$

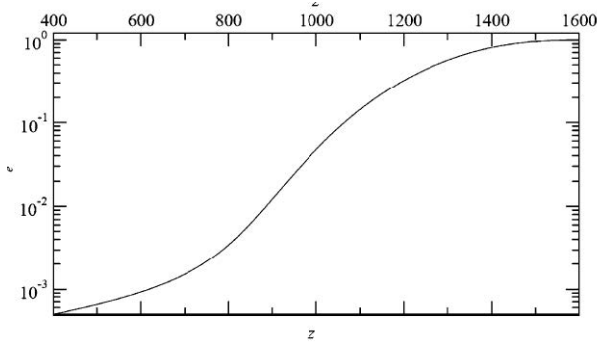
n_e 为自由电子的数密度, n 为氢原子加上自由电子的数密度, 在热平衡条件下, 氢原子的电离平衡由 Saha 公式给出,

$$\frac{n_e n_p}{n_H n} = \frac{x^2}{1-x} = \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{n h^3} e^{-B/kT}$$

这里 n_p 为氢粒子的数密度 ($n_p = n_e$), $n_H = n - n_p$ 为中性氢原子的数密度, $B=13.6 \text{eV}$ 为基态氢原子的电离能. 取 $T = 2.73(1+z) \text{K}$, $n = 1.12 \times 10^{-5} (1+z)^3 \Omega_B h^2 / \text{cm}^3$, 可以得到

$$\log \left(\frac{x^2}{1-x} \right) = 21.0 - \log [\Omega_B h^2 (1+z)^{3/2}] - 2.5 * \frac{10^4}{1+z}$$

可以看到在 $z < 1100$ 时, 电离率很快衰减. 因此宇宙中绝大部分氢原子保持中性, 光子可以自由穿梭.

图 70: x 随红移的变化

11.2 CMB 最大的扰动尺度

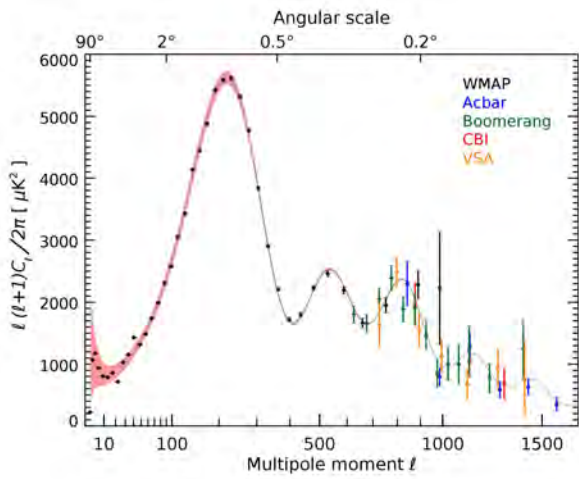


图 71: 扰动角度

由日常经验可知, 对于某种震动引起的波, 其在 t 时间范围内传播的距离为

$$d = c_s t$$

c_s 为波的声速. 在复合开始前, 光子和电子通过康普顿散射发生很强的相互作用, 可以视为单一流体, 其声速 $c_s \sim 0.45c$.

从大爆炸到再复合时期, 该声波传播的共动距离为

$$r = \int_0^t \frac{c_s dt}{a(t)}$$

而微波背景辐射距离我们的共动距离 $D(z = 1100)$ 可以很容易计算, 因此该扰动的最大角度

$$\theta = \frac{r}{D}$$

通过计算, 可以发现 $\theta \sim 0.8^\circ$, 对应 $l = 250$, 对应图 71 的第一个峰.

注: $z = 1100$ 时刻, 宇宙视界 $\sim 2 * 0.8^\circ$ (光速传播)

VIII 结构形成理论

宇宙学原理认为宇宙在足够大的尺度上是均匀, 各向同性的. 实际上在小尺度, 甚至较大尺度上, 宇宙是不均匀的, 并且这种不均匀在目前宇宙中更加明显.

$$\delta = \frac{\rho(x) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}$$

密度的涨落的扰动导致引力不平衡破坏了稳定性.

1. 流体力学

均匀宇宙可以看成是一个流体. 流体力学基本方程:

1) 连续性方程: 质量守恒, 流出与流入相同

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad (\text{VIII.1})$$

2) 运动学方程 (欧拉方程)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \Phi \quad (\text{VIII.2})$$

3) Poisson (泊松方程)

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (\text{VIII.3})$$

上述等式是在欧拉坐标下的描述, 即给定时间, 给定位置处流体的密度、速度的变化情况. 另一种有效的描述是拉格朗日坐标, 即考察某一固定流体元本身的密度, 速度等变化, 在此情况下, 流体性质 (密度, 速度, 温度等) 只是时间的函数, 其导数一般写为 $\frac{d}{dt}$.

拉格朗日坐标描述与欧拉坐标描述下偏导之间的关系为

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (v \cdot \nabla)$$

考察一个均匀、各向同性宇宙的平衡情况. 对于连续性方程, 由于密度 ρ 与位置 r 无关, 只是时间的函数, 可得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \Delta \cdot v + v \Delta \cdot \rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \Delta \cdot v = 0$$

上式中每项都应该是时间的函数, 因此速度 v 应该满足 $v = f(t)r$, 令 $f(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$, 代入上式可得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\rho \frac{\dot{a}}{a} = 0$$

可得 $\rho \sim a(t)^{-3}$ (物质守恒). 由球对称下的泊松方程 VIII.3, 可写为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r})}{\partial r} = 4\pi G \rho(t)$$

可得 $\Phi = \frac{2\pi G}{3}\rho r^2$, 将其代入欧拉方程, 可得

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho$$

该等式正是 Friedmann 方程之一. 代入物质守恒方程, 可得 $a \sim t^{2/3}$.

可以看到, 完全可以从牛顿定律出发, 得到哈勃定律, 以及宇宙正在膨胀 (而且必须膨胀) 的解, 其尺度因子与前述求解 Friedmann 方程完全一样.

因此, 一个均匀各向同性的宇宙不可能是静止的. 基于宇宙学原理, 任何观测者都会看到一个运动的流体, 因此必然推导出空间的膨胀.

2. 金斯不稳定性

2.1 静止宇宙下的扰动方程

假设在平衡态时, 密度 ρ_0 , 速度 v_0 , 满足流体方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot v_0 + v_0 \nabla \cdot \rho_0 &= 0 \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} + v_0 \nabla \cdot v_0 + \frac{\nabla P_0}{\rho_0} + \nabla \Phi_0 &= 0 \\ \nabla^2 \Phi_0 &= 4\pi G \rho_0\end{aligned}$$

对于一个相对平衡态的轻微扰动, 有

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + \delta\rho \\ v &= v_0 + \delta v \\ P &= P_0 + \delta P \\ \Phi &= \Phi_0 + \delta\Phi\end{aligned}$$

将其代入流体方程, 并略去平衡项和高阶项

$$\begin{aligned}\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \delta v + \delta\rho \nabla \cdot v_0 + \delta v \nabla \cdot \rho_0 + v_0 \nabla \cdot \delta\rho &= 0 \\ \frac{\partial \delta v}{\partial t} + v_0 \nabla \cdot \delta v + \delta v \nabla \cdot v_0 + \frac{\nabla \delta P}{\rho_0} + \nabla \delta\Phi &= 0 \\ \nabla^2 \delta\Phi &= 4\pi G \delta\rho\end{aligned}$$

进一步假设密度 ρ_0 均匀, 只是时间的函数, 其流体平衡时处于静止状态 $v_0 = 0$, 可以得到

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \delta - 4\pi G \rho_0 \delta = 0 \quad (\text{VIII.4})$$

这里 $\delta = \frac{\delta\rho}{\rho_0}$, $c_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho}$ 为流体的声速.

2.2 膨胀宇宙下的扰动方程

均匀各向同性的宇宙不可能处于静止状态, 其存在一个满足流体方程的平衡态解, $\rho \sim a^{-3}$, $v = \frac{\dot{a}}{a}r$, 结合宇宙学基本概念可知, 这里密度变化与速度量来自宇宙膨胀. 如果将流体方

程坐标从 $r \rightarrow x(r = ax)$ 转换到共动坐标 x 下, 则哈勃膨胀项 ($v = Hr$) 可以忽略.

可证明, 在 $r = ax$ 时 ($v = \dot{r} = \dot{a}x + a\dot{x} = \dot{a}x + u$), 将流体方程从坐标 (r, t) 转换到 (x, t) 下, 需要做如下变化

$$\begin{aligned}\nabla_r &\rightarrow \frac{1}{a}\nabla_x \\ \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a}x\dot{\nabla}_x\end{aligned}$$

令 $\rho(x, t) = \overline{\rho(t)}(1 + \delta(x, t))$, $a\dot{x} = v$, 可得共动坐标下流体方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a}\nabla \cdot [(1 + \delta)v] &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a}v + \frac{1}{a}(v \cdot \nabla)v &= -\frac{\nabla \Phi}{a} - \frac{\nabla P}{a\bar{\rho}(1 + \delta)} \\ \nabla^2 \Phi &= 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta \\ \Phi &= \phi + \frac{a\ddot{a}x^2}{2}\end{aligned}$$

略去高阶项后可以得到

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\partial \delta}{\partial t} = 4\pi G \bar{\rho} \delta + \frac{c_s^2}{a^2} \nabla^2 \delta \quad (\text{VIII.5})$$

(共动坐标下的宇宙扰动方程) 可以看到, 相比 VIII.4, 膨胀宇宙下扰动方程只多出一个膨胀项, 当 $\dot{a} = 0$ 是, 与 VIII.4 等价. 在密度扰动较小的线性情况下, 实空间的扰动可以表示为傅里叶空间分量之和, 每个傅里叶模独立演化 (类似于不同频率平面波叠加, k 相当于频率), $\delta(x, t) = \sum_k \delta_k(t) e^{ik \cdot x}$ 代入扰动方程

$$\frac{d^2 \delta_k}{dt^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d\delta_k}{dt} = \left(4\pi G \bar{\rho} - \frac{k^2 c_s^2}{a^2}\right) \delta_k \quad (\text{VIII.6})$$

可以在不同宇宙学模型下 ($a = a(t)$) 下得到扰动的演化.

2.2.1 没有宇宙膨胀 $\dot{a} = 0$ 此时扰动方程 VIII.6 为:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \delta_k}{dt^2} &= -\omega^2 \delta_k \\ \omega^2 &= \left(\frac{k^2 c_s^2}{a^2} - 4\pi G \bar{\rho}\right)\end{aligned}$$

该方程的普适解为 $\delta_k(t) = \delta_k(t=0)e^{\pm i\omega t}$, 其定义了一个特征物理尺度, 金斯长度 $\lambda_J \equiv \frac{2\pi a}{k} = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\bar{\rho}}}$, 与原恒星形成类似, 金斯长度定义了一个均匀流体发生坍缩的条件.

- 当 $\lambda < \lambda_J (k > k_J)$ 时, $\omega^2 > 0$, ω 为实数, 因此

$$\delta_k(t) \sim \delta_k(t=0)e^{\pm i\omega t}$$

表示一个声波, 其振幅不发生变化, 在空间以声速传播.

- 当 $\lambda > \lambda_J (k < k_J)$ 时, $\omega^2 < 0$, ω 为虚数, 因此

$$\delta_k(t) \sim \delta_k(t=0)e^{\pm i\omega t}$$

表示静态波 (不传播), 其振幅随时间衰减或增长, 这里只关心增长解。

特殊时刻的金斯波长和金斯质量:

1) 再复合以前 (before recombination)

再复合之前, 重子处于电离状态, 光子与电子之间频繁发生散射, 因此光子和重子可以视为一种单一流体, 其密度 $\rho = \rho_r + \rho_b$, 压强主要由光子主导, 因此声速为 $c_s = \frac{c}{\sqrt{3}} \left[\frac{3}{4} \frac{\rho_b(z)}{\rho_r(z)} + 1 \right]^{-1/2}$, 定义在球半径 $\frac{\lambda_J}{2}$ 的质量为金斯质量 $M_J \approx 1.2 \times 10^{16} (\Omega_b h^2)^{-2} M_\odot$. 因此再复合之前, 只有超过星系团质量的重子物质结构才能增长, 小质量为声波振荡。

2) 再复合时期结束时 (after recombination)

在 recombination 结束时, 光子与重子脱耦, 重子气体的声速 $c_s = \left(\frac{5kT}{3m_p} \right)^{1/2}$, 该时刻金斯长度 (物理尺度) $\lambda_J \sim \frac{0.01}{(1+z_{rec})} (\Omega_b h^2)^{-1/2} \text{Mpc}$,

$$M_J \equiv \frac{\pi}{6} \overline{\rho(z_{rec})} \lambda_J^3 \sim 1.5 \times 10^5 (\Omega_b h^2)^{-1/2} M_\odot$$

因此, 复合结束时, 金斯质量的质量与球状星团相当. (大于该质量的结构可以形成)

2.2.2 宇宙膨胀时的解 宇宙的物质: 光子, 重子物质, 暗物质, 暗能量

1) 物质主导

考虑没有压强项的时候 (对于暗物质, 或者扰动尺度远大于金斯长度, 压强项可以忽略), 扰动方程

$$\frac{d^2 \delta_k}{dt^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{d\delta_k}{dt} = 4\pi G \bar{\rho} \delta_k$$

对物质主导 $a \sim t^{2/3}$, 可得 $\delta \sim t^{2/3} \sim a$. 结合哈勃常数 $H(z) = H(0) * E(z)$, 可对此方程进行数值求解 (对 z 从 0 积分到给定红移), 其增长解可以写为

$$\delta_k \propto D(z) = \frac{g(z)}{(1+z)}$$

$$g(z) \approx \frac{5}{2} \Omega_m(z) / \left[\Omega_m^{4/7}(z) - \Omega_\Lambda(z) + \left(1 + \frac{\Omega_m(z)}{2} \right) \left(1 + \frac{\Omega_\Lambda(z)}{70} \right) \right]$$

$\Omega_m(z) = \frac{\Omega_{m,0}(1+z)^3}{E^2(z)}$, $\Omega_\Lambda(z) = \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{E^2(z)}$. 扰动在没有宇宙学常数情况下增加得更快. (哈勃膨胀减弱了扰动的增长, 因为宇宙学常数导致宇宙膨胀的更快.)

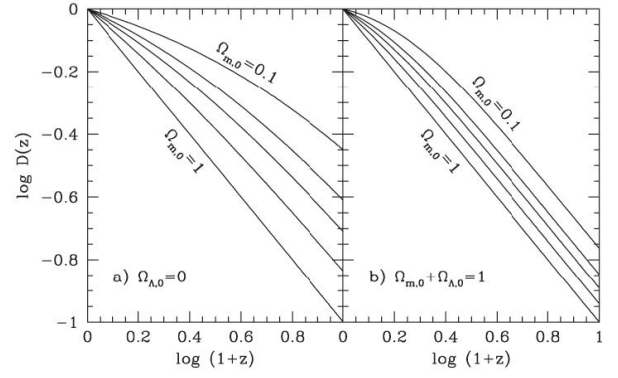


图 72: 几种宇宙学参数下扰动因子随红移的变化

有压强的**重子物质**扰动, 对于再复合以后, 由暗物质和重子组成的宇宙, 当暗物质密度大于重子密度时, 暗物质的密度演化由前述无压强扰动方程给出. 对于重子, 其引力项由暗物质提供, 但是需要考虑其压强. 扰动方程

$$\frac{d^2 \delta_k}{dt^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{d\delta_k}{dt} + \frac{k^2 c_s^2 a}{a^3} \delta_b = 4\pi G \bar{\rho}_0 \frac{a_0^3}{a^3} \delta_{dm}$$

存在较普遍的解

$$\delta_b(k, t) = \frac{\delta_{dm}(k, t)}{1 + k^2/k_J^2}$$

$$k_J^2 \equiv \frac{3a^2 H^2}{2c_s^2}. \text{ 可以看到}$$

- 当 $k \ll k_J$, $\delta_b = \delta_{dm}$, 即大尺度上, 重子物质扰动与暗物质相当.

- 当 $k \gg k_J$, $\delta_b = \delta_{dm} \frac{k_J^2}{k^2}$, 且由于 $a^2 H^2 \sim t^{-2/3}$, 因此重子的扰动远小于暗物质扰动, 且随着时间增加而衰减.

随着宇宙膨胀, 重子温度降低, 其声速降低, 导致 k_J 快速变大, 因此, 对任意 k 的扰动, 其很快满足 $k \ll k_J$, 因此重子的扰动很快跟上暗物质的扰动.

2) 辐射主导

光子的扰动 (相对论性流体, 且扰动尺度小于视界): 当宇宙处于辐射主导时期, 必须考虑辐射压对能量密度的贡献, 基本流体方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho + P)v] = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v + \frac{\nabla P}{(\rho + P)} + \nabla \Phi = 0$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G(\rho + 3P) = 8\pi G\rho$$

与前述得到扰动方程类似, 可以得到相对性流体情况下的

扰动方程

$$\frac{d^2\delta_k}{dt^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d\delta_k}{dt} = \left(\frac{32\pi G\rho}{3} - \frac{k^2 c_s^2}{a^2}\right)\delta$$

唯一差别为引力项中, 此外 $c_s^2 = \frac{c^2}{3}$.

在辐射主导时期, $a \sim t^{1/2}$, $\rho \sim a^{-4}$, 寻求 $\delta \sim t^n$ 的解, 可得

$$n = \pm \sqrt{1 - \frac{3c_s^2 k^2}{32\pi G\rho}}$$

- 对长波 ($\lambda > \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{c}{H} \approx d_H$, 视界尺度), 得到增长解为 $\delta \sim t^1 \sim a^2$.

对比之前物质主导时扰动情况可以看到:

- 物质主导时期, $\delta \sim a$
- 辐射主导时期, $\delta \sim a^2$

- 对于大部分扰动 ($\lambda < \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{c}{H} \approx d_H$, $k > \sqrt{3}Ha$), 其扰动解为

$$\delta = e^{i\frac{k}{\sqrt{3}Ha}} = e^{i\frac{d_H(a)}{\lambda}}$$

该解为平面波, 其震荡频率很快 ($d_H(a) > \lambda$), 因此, 在空间任何位置, 其密度扰动平均值 $\langle \delta \rangle \sim 0$, 即视界内的光子的扰动基本不增长, 而是处于震荡状态.

暗物质是无压强流体, 其扰动方程为 VIII.6, 但略去压强项

$$\frac{d^2\delta_k}{dt^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d\delta_k}{dt} = 4\pi G\bar{\rho}\delta_{k,\gamma}$$

在辐射主导时期, 等式右边扰动源为光子的扰动. 由于视界内光子扰动为平面波, 且平均扰动 $\langle \delta_{k,\gamma} \rangle \sim 0$. 可以证明, 暗物质的扰动满足 $\delta_k \sim \ln a$, 即扰动增长较慢, 按对数增加.

重子扰动, 在再复合之前, 电子与光子通过 Thomson 散射发生耦合, 因此其扰动与光子一样, 都是声波震动, 其幅度也与光子扰动相当.

3) 扰动尺度大于视界

宇宙视界的物理尺度 $\sim ct$, 显然宇宙视界随着时间而增长. 在宇宙早期, $a \sim t^{1/2}$, 因此视界 $\sim ca^2$, 对于一个给定共动尺度的扰动, 其物理尺度 $\sim a\lambda$, 显然视界尺度下降更快, 因此对任意给定尺度的扰动, 在宇宙早期, 其尺度大于视界.

当扰动尺度大于视界尺度时, 不能用牛顿近似来处理扰动的增长, 需要用广义相对论的扰动形式. 其扰动可以写成如下形式

$$\begin{cases} a^2 \frac{d^2\delta}{da^2} - 2\delta \approx 0 & \text{辐射主导} \\ a^2 \frac{d^2\delta}{da^2} + \frac{3}{2}a\frac{d\delta}{da} - \frac{3}{2}\delta \approx 0 & \text{物质主导} \end{cases}$$

可以得到其增长模式

$$\begin{cases} a^2 & \text{辐射主导} \\ a & \text{物质主导} \end{cases}$$

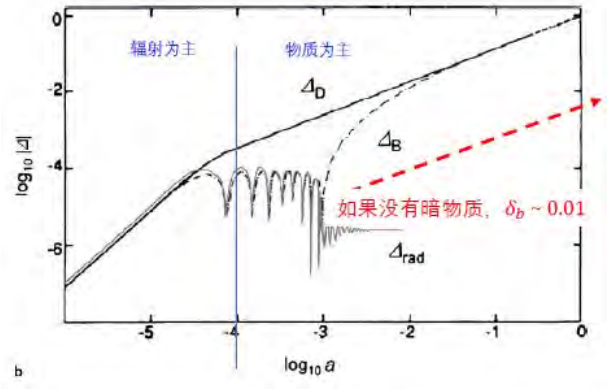


图 73: 扰动尺度 $\sim 15Mpc/h$ ($k = 0.42h/Mpc$) 上不同物质分量的扰动增长

e.g. 不同物质组份的扰动增长: 给定尺度的扰动 (视界随时间增加)

1) 进入视界前

$$\delta \sim \begin{cases} a^2 & \text{辐射主导} \\ a & \text{物质主导} \end{cases}$$

2) 进入视界后, 辐射为主, 再复合前

- 光子: 声波震荡
- 重子: 声波震荡
- 暗物质: $\delta \sim \ln a$

3) 进入视界后, 物质为主, 再复合前

- 光子: 声波震荡
- 重子: 声波震荡
- 暗物质: $\delta \sim a$

4) 复合之后

- 光子: 声波震荡
- 重子: $\delta \sim a$
- 暗物质: $\delta \sim a$

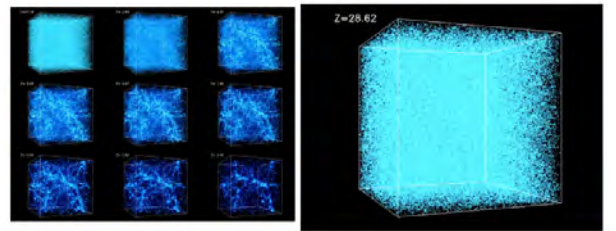


图 74: 大尺度上, 物质形成宇宙网络结构

3. 球塌缩模型

当某些区域密度扰动变得接近于 $\delta \sim 1$ 时, 线性扰动理论失效, 发生物质塌缩, 形成暗物质晕 (dark matter halo).

最简单的球塌缩模型预言, 暗晕内的平均密度 $\sim 200\rho$ (ρ 为宇宙背景的平均密度)

$$\rho = \Omega_m \rho_c = \Omega_m \frac{3H^2}{8\pi G}$$

从数值模拟中寻找暗晕: 以某处密度最高点为中心, 寻找某一个半径, 其内的物质平均密度为宇宙背景密度的 ~ 200 倍 (具体数值依赖于宇宙学参数, 但是变化不大) 可得到暗晕的位力质量 M_{vir} , 和半径 R_{vir} .

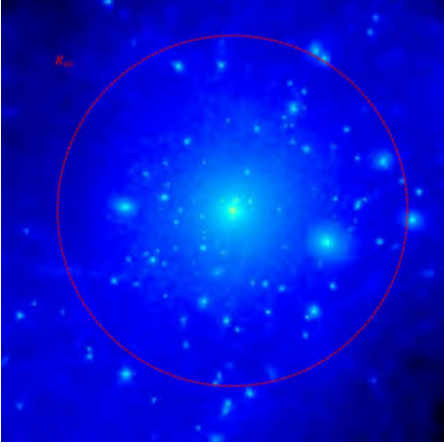


图 75: 球塌缩模型

3.1 暗晕密度分布 (Halo density profile)

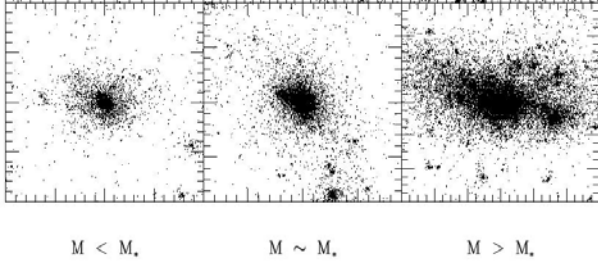


图 76: 数值模拟中暗晕的形状

尽管每个暗晕的密度各不相同, 但是 Navarro, Frenk, White 等人 (1996,1997) 发现, 暗晕密度轮廓具有相似的形式, 提出了著名的 NFW Profile

$$\rho(r) = \frac{\rho_{crit} \delta_c}{\frac{r}{r_s} \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^2} \quad (\text{VIII.7})$$

这里 $\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G}$, 是宇宙某一时刻的临界密度, 只与时间有关, 与暗晕质量无关. $r_s = \frac{R_{vir}}{c}$ 是暗晕的特征半径, R_{vir} 是暗晕的位力半径, c 为聚集度 (Concentration). 该表达式几乎不依赖于宇宙学模型和宇宙时间. 因此被广泛用于计算暗晕的质量分布和旋转曲线.

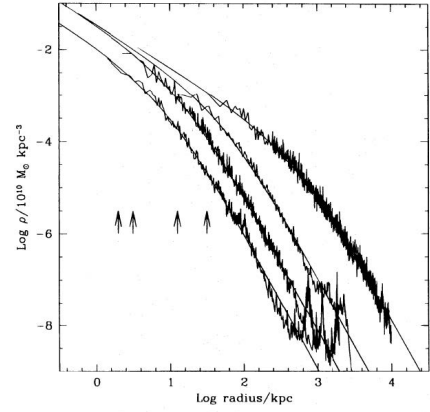


图 77: 不同质量暗晕的密度轮廓 $\rho(r)$, r 为距离暗晕中心的距离. ρ 随 r 减小而增加, 给定 r , 暗晕质量越大, ρ 越高

球塌缩模型预言暗晕质量和半径满足

$$M_{vir} = \frac{4\pi}{3} 200\rho_c R_{vir}^3$$

因此只要给定 M_{vir} , 就可以得到 R_{vir} . 积分 VIII.7 到 R_{vir} , 可得

$$\delta_c = \frac{200}{3} \frac{c^3}{[\ln(1+c) - \frac{c}{1+c}]}$$

因此, 给定 M_{vir} , NFW Profile 中只有一个自由参数 c .

研究发现, 尽管对于给定质量的暗晕, 其聚集度 c 有较大变化, 且依赖于暗晕的形成历史. 有相当多的工作发现总体来说, c 与 M_{vir} 存在较好的相关关系, M_{vir} 越大, c 越小 (Bullock et al. 2001; Wechsler et al. 2002; Zhao D.H. et al. 2009). 因此, 对于大部分研究, 只要确定 M_{vir} , 就可以唯一确定暗晕的密度 Profile, 以及旋转曲线等, 这也常用来拟合观测的星系旋转曲线, 从而确定其所在 M_{vir} .

3.2 暗晕的合并和增长

暗晕形成后并不处于静止状态, 而是在空间运动. 在暗晕运动过程中, 暗晕会相互合并 (merger) 并导致质量增长.

任何暗晕都会经历合并过程. 如银河系在成长到今天的过程中, 至少经历了上千次合并 (具体依赖于暗物质的性质和暗晕质量下限).

在宇宙不同时刻, 不同尺度的结构依次形成. 在高红移, 小质量暗晕形成. 到了低红移, 暗物质晕相互并合, 形成更大质量的暗晕. 暗晕并合是宇宙中最常见的现象. 这个过程从下而上, 也称为等级成团模型.

3.2.1 暗晕形成历史 暗晕的质量增长主要是通过并合和吸积弥散物质. 利用数值模拟, 人们发现, 即使对于相同质量的暗晕, 其形成历史也不一样. 一般将暗晕的形成历史形象地称为暗晕的并合树 (Merger tree).

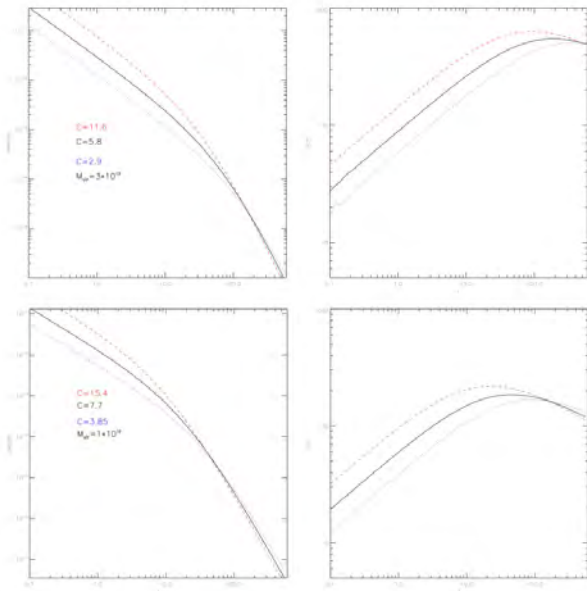


图 78: 2 个不同质量的暗晕, 其密度, 旋转速度对 c 的依赖关系. 给定暗晕质量, c 越大, 内部密度和旋转速度也越大. 存在一个半径, 旋转速度达到最大值 (与 c 有关)

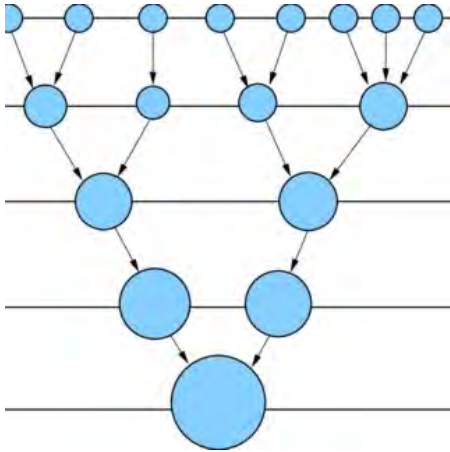


图 79: 暗晕的并合树 (Merger tree)

暗晕的形成时间 (z_{form}): 暗晕历史上质量达到目前的一半. 平均来说, (今天宇宙中) 质量较小的暗晕, 其形成时间也越早.

3.3 暗晕子结构

大量低质量暗晕合并形成大质量暗晕后, 它们在大质量暗晕内并未立即消失, 而是形成子结构 (Substructure, or subhalo). 这些子结构经历强烈的动力学过程

- 潮汐剥离 (tidal stripping): 大质量暗晕内部的潮汐力导致子结构质量损失.
- 瓦解过程: 有些子结构经历了很强的潮汐加热, 导致其最

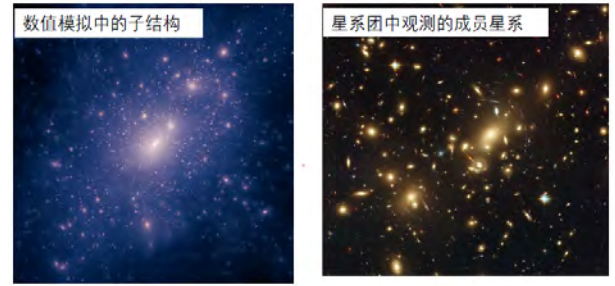


图 80: 暗晕子结构

终变成不束缚结构而解体 (瓦解).

暗晕内部的子结构是之前合并的暗晕遗迹. 每个子结构中心都可能存在恒星.

暗晕子结构如果不存在恒星, 如何探测这些子结构?

3.3.1 数值模拟 首先我们假设宇宙由大量的、等质量的粒子组成 (粒子的具体质量 $m = \frac{\bar{\rho} V}{N}$). 在初始时刻 (t_i), 宇宙的物质分布不均匀 ($\rho_i(x)$), 可利用泊松方程求得引力势 ($\psi_t(x)$), 进一步确定粒子速度 (V) 和加速度 (\dot{V}). 对时间积分, 确定新的粒子位置, 求得新的引力势和加速度, 得到新的位置. 一直重复到给定的时刻 (如 $z = 0$).

1) 确定宇宙的初始条件

初始条件就是宇宙原初的扰动谱. 扰动谱就是在不同尺度上的扰动大小. 我们能直接观测的宇宙初始扰动来自宇宙微波背景辐射. 通过对 CMB 在不同尺度的温度差异, 可以确定其功率谱.

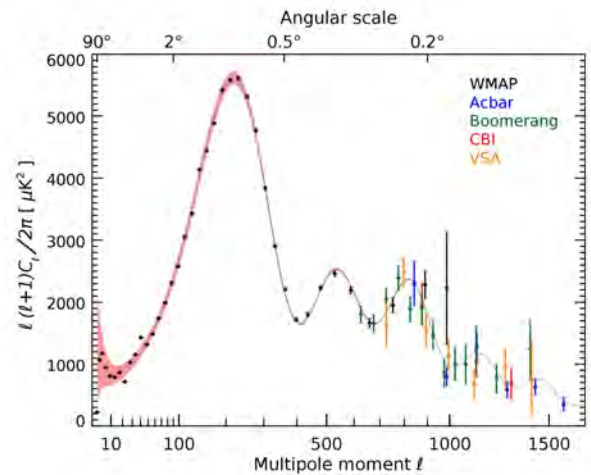


图 81: 对 CMB Power Spectrum, 黑色点为 WMAP 卫星观测数据, 红色实线为理论预言. 通过拟合观测, 可以得到宇宙学基本参数.

2) 用粒子代替密度场, 并计算运动方程

将空间分成大量等间隔的格点 (如图 82, 2 维情况).

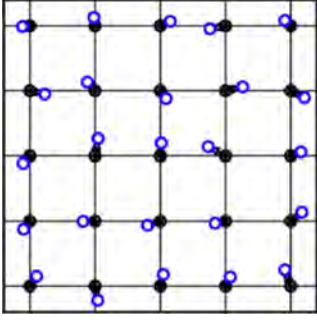


图 82: 空间格点

根据初始时刻 t_i 的功率谱, 在每个格点位置得到其密度

$$\delta_i(x) = \sum_k \delta_i(k) e^{ikx}$$

根据得到的密度 $\delta_i(x)$, 在相应位置 x 处产生对应的粒子数目 (由于粒子数目不可能为整数, 实际上在最开始在每个格点放置一个粒子, 根据 Zeldovich Approximation 进行位置移动, 这里不详细描述, 只是原理性介绍)

根据 (无压强) 流体方程得到引力势和速度

$$\nabla^2 \psi = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta \rho$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} v = -\frac{\nabla \psi}{a}$$

根据得到的 v , 将粒子移动到新的位置. 再次计算泊松方程, 得到新的速度, 依次循环.

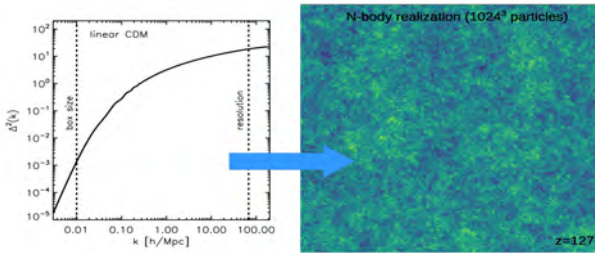
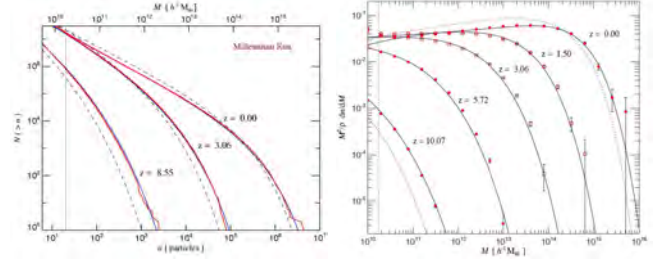


图 83: 用粒子代替密度场, 并计算运动方程

3.4 暗晕的质量函数 (Press-Schechter Mass Function)

在宇宙演化过程中, 任意时刻都会形成暗晕. 这些暗晕具有不同的质量.

- 暗晕的数目随质量减小而增加
- 暗晕数目整体随红移减小而增加 (越来越多的物质进入塌缩阶段)
- 单位对数间隔内的总质量有演化, 到红移 $z = 0$ 时, 质量主要集中在 10^{14} 太阳质量 (低质量暗晕虽然数目多, 但质量小. 大质量暗晕数目减小很快).



(a) 暗晕数目分布

(b) 暗晕质量分布

图 84: 数值模拟和理论预言的暗晕数目-质量分布 (质量函数), 随时间的演化

4. 星系形成模型 (Galaxy Formation Model)

目前有三种流行的星系形成模型, 丰度匹配模型、半解析模型、包含重子的流体数值模拟. 无论那种模型, 其基本假设都是星系形成于暗晕之中, 由于暗晕内的气体冷却, 导致了恒星的形成.

4.1 丰度匹配模型 (Abundance Matching Method)

星系形成于暗晕或者暗晕子结构之中, 星系的质量与暗晕/子结构的质量 (或者旋转速度) 之间存在一一对应关系. 常见的做法是:

- 1) 观测中星系按质量从大到小排序.
- 2) 将数值模拟中的暗晕子结构按质量从大到小排序.
- 3) 依次将两者进行匹配

该方法的优点: 假设合理且简单, 其预言的星系空间分布等与观测非常一致.

缺点: 没有涉及物理过程.

4.2 半解析模型 (Semi-analytical model)

目前广泛应用的星系形成模型之一.

基本思想: 暗物质塌缩成暗晕, 暗晕中气体冷却, 恒星形成. 暗晕的相互并合导致星系的并合, 形成了形态各异的星系. 由于其结合了暗晕形成的强烈非线性过程 (只能利用数值模拟给出完整描述) 和星系形成的物理解析过程, 因此被称为半解析模型.

4.2.1 热气体冷却并形成冷气体盘 假设气体为等温球分布

- 1) 暗晕内气体被加热到暗晕的位力温度

$$T = \frac{1}{2} \frac{u m_p}{k} V_{vir}^2$$

- 2) 由于气体温度高, 原子被电离, 产生轫制辐射, 其单位时间的辐射能量为

$$E = n_e^2(r) \Lambda(T, Z)$$

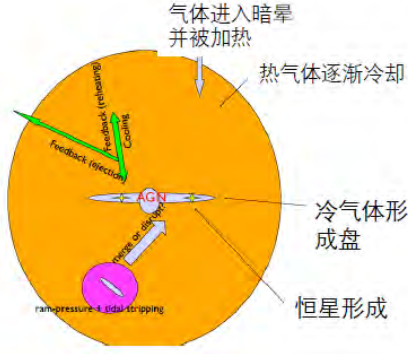


图 85: 半解析模型

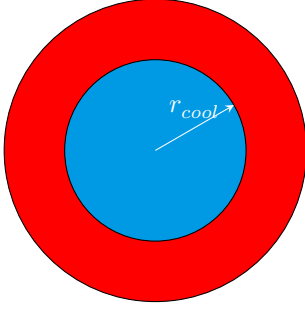


图 86: 星系合并

Λ 为冷却函数, 依赖于气体的金属丰度和温度, 因此半径 r 处气体冷却时间为

$$t_{cool}(r) = \frac{3}{2} \frac{kT\rho(r)}{um_p E}$$

3) 给定暗晕的年龄 t_{age} , 计算冷却半径 r_{cool} , 使得 $t_{age} = t_{cool}(r_{cool})$

4) 冷却半径 r_{cool} 内的气体形成冷气体盘, 其大小通常为暗晕位力半径的 10%

4.2.2 恒星形成率-Kennicutt-Schmidt law 对于冷气体, 由于引力不稳定性, 一旦扰动尺度超过金斯质量, 气体将塌缩并形成恒星. Schmidt (1959), Kennicutt (1998) 总结了大量观测数据, 发现星系中恒星形成率与气体总面密度之间存在很好的相关关系. 这一关系也被称为 Kennicutt-Schmidt Law, 广泛应用于星系形成模型之中.

KS Law 可以表示为

$$\dot{\Sigma}_* = (2.5 \pm 0.7) \times 10^{-4} \left(\frac{\Sigma_{gas}}{M_\odot pc^{-2}} \right)^{1.4 \pm 0.15} M_\odot yr^{-1} kpc^{-2}$$

Σ_* 表示恒星形成的面密度.

半解析模型中, 通常假设

$$\dot{M}_* = \alpha \frac{M_{cold}}{\tau_{dyn}}$$

实际上, 恒星形成于分子云, 因此应该只与分子气体面密度有关. 但是上述关系仍然非常精确.

4.2.3 超新星反馈 大质量恒星演化到晚期会发生超新星爆炸. 其释放出大量能量和物质到周围的冷气体中, 引起大量气体物质外流, 其外流速度可达 $1000 km/s$. 目前普遍认为超新星反馈对星系形成有着非常关键的作用.

大质量恒星的比例: 依赖于 IMF. 对于 Salpeter 形式的恒星初始质量函数, 大质量恒星的质量占比 $\eta_{SN} \sim 6.3 \times 10^{-3}$. 每个超新星爆发的能量 $E_{SN} \sim 10^{51} erg$. 因此, 单位超新星爆炸释放的总能量

$$\Delta E = \epsilon E_{SN} \dot{M}_*$$

一般假设其中有 ϵ 比例的能量用来加热周围的冷气体, 将其加热到暗晕的位力温度, 并形成外流, 因此被加热气体的总量

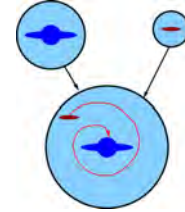
$$\Delta M_{heat} = \frac{4}{3} \frac{\epsilon \Delta E}{V_{vir}^2}$$

外流气体的命运: 非常不确定, 早期模型认为其停留在暗晕内, 与其热气体混合. 也有模型认为其逃离暗晕, 直到被再次吸积.

需要利用数值模拟从第一性原理出发, 详细研究

- 超新星爆炸有多少比例 ϵ 的能量进入周边冷气体
- 外流气体是如何在星系环境下进行循环的

4.2.4 星系合并及星暴 暗晕之间频繁发生并合, 其中的星系经历动力学摩擦也随之并合.



数值模拟发现, 动力学摩擦时标可以近似为

$$T_{df} = \frac{1}{2} \frac{f(\epsilon)}{0.43} \frac{V_{vir} R_{vir}^2}{GM_{sat} \ln \Lambda}$$

并合时间一般从 $0.5 Gyr \sim 10 Gyr$. 低质量星系甚至在哈勃时标内都不并合 (如星系团中的成员星系).

并合时, 强烈的潮汐作用导致大量的恒星形成 (星暴 star burst). 根据并合时星系的质量之比, 一般将并合分为主并合 (Major Merger, $> 1/3$) 和次并合 (Minor merger, $< 1/3$).

- 在 Minor Merger 中, 只有部分 (具体比例非常复杂) 气体在极短时间内转化为恒星.
- 在 Major Merger 中, 几乎所有的气体全部形成恒星, 形成星暴星系. 并合结束后, 所有的恒星形成一个核球, 形成椭圆星系.

4.2.5 黑洞的形成及反馈 研究发现几乎所有的星系中心都有一个高质量黑洞, 其质量与星系核球质量有非常好的相关关系 $M_{bh} \sim 0.002 M_{bulge}$ (Magorrian et al. 1998, 有时也称为 Magorrian relation, M_{bh} - M_{bulge} relation).

Kauffmann 等 (2000) 认为黑洞主要在星系并合时发生增长, 并引入黑洞的质量增加为:

$$M_{bh,acc} = \frac{f_{BH} M_{cold}}{1 + \left(\frac{280}{V_{vir}}\right)^2}$$

黑洞吸积产生能量, 大约 0.05 的能量 ($0.05 M_{bh,acc} c^2$) 释放到星系周边, 并用来加热暗晕内的热气体, 抑制其冷却.

上述模型非常简单, 以至于很难描述实际情况. 目前所有模型, 流体模拟的重点就是模拟黑洞的吸积及反馈过程. 困难在于两者尺度相差实在太太大 (10^{12}), 无法同时解析这样大范围的尺度.

4.2.6 星族合成及其他 上述过程只描述了恒星的形成过程, 但是与实际观测相比, 我们需要预言星系的能谱, 在不同波段的光谱. 这可以利用 BC03 等星族合成模型.

4.2.7 尘埃的吸收和在发射 尘埃会吸收大质量恒星在紫外的辐射, 造成星系在紫外和光学波段的吸收 (遮挡), 同时, 尘埃会将吸收的能量在远红外, 亚毫米等波段辐射出来.

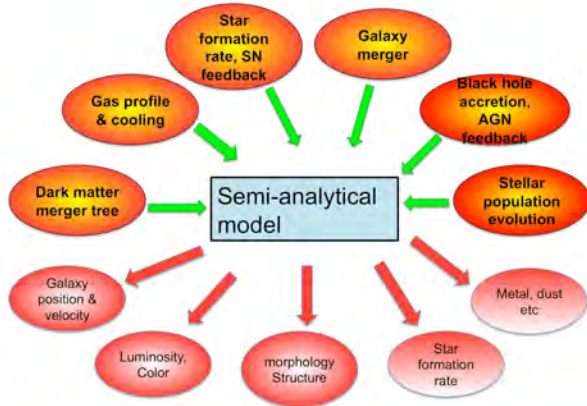


图 87: 半解析模型考虑以上所有物理过程

4.3 流体数值模拟 (Hydro-dynamical simulation)

如今, 流体模拟是研究星系形成的重要手段. 其同时模拟暗物质在宇宙中的演化, 结合几乎所有的物理过程 (气体冷却, 吸积, 恒星形成, 黑洞吸积, 超新星和黑洞反馈等物理过程), 从而预言星系的形成.

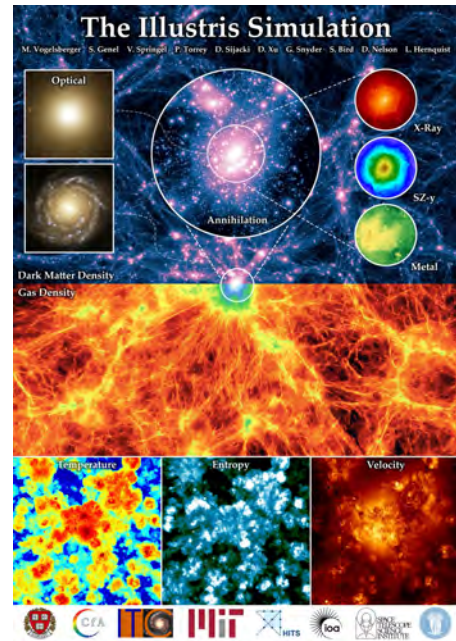


图 88: 流体数值模拟