UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika

Tian Lipovšek, Klara Gruden

Lokalna k-matrična dimenzija grafov

Skupinski projekt

Poročilo

Mentorja: doc. dr. Janoš Vidali,
prof. dr. Riste Škrekovski

Ljubljana, januar 2024

1. Navodilo naloge

Following the paper [10], implement an ILP model for this invariant, and then write separate small programs in Sage to answer each of following questions by exhaustive search.

(1) Determine $ldim_k(G)$ for paths, cycles, complete graphs, bipartite complete graphs, hypercubes and some other interesting classes of graphs and try to guess the possible formulas based on the computations.
(2) Try to determine graphs G which satisfy $ldimk(G) = dimk(G)$ for a given k for $k = 1, 2, 3, ...$ For small graphs, apply a systematic search; for larger ones, apply some stochastic search.

2. Način reševanja problema

Za reševanje opisanega problema sva uporabila okolje Sage (SageMath) znotraj spletne platforme CoCalc. V nadaljevanju bova opisala in dodala kodo le od nekaterih funkcij, celotna koda s komentarji se nahaja na GitHub repozitorju, prilagava tudi povezavo.

3. Definicije

Za lažje razumevanje najinega problema, si najprej poglejmo par definicij, ki sva jih uporabljala v sklopu projektne naloge.

Definicija 3.1. *Vozlišče s reši par vozlišč x, y v grafu G, če* $d(s, x) \neq d(s, y)$.

Definicija 3.2. *Rešujoča množica grafa G je množica S, za katero velja, da za vsaki dve vozlišči x in y v* $V(G)$ *obstaja vozlišče* $s \in S$*, ki reši par vozlišč x,y.*

Definicija 3.3. *Metrična dimenzija povezanega grafa G, označena z* $dim(G)$*, je definirana kot velikost najmanjše množice* $S \subseteq V(G)$*, ki razlikuje vse pare vozlišč v G.*

Definicija 3.4. *Lokalna rešujoča množica grafa G je množica S, za katero velja, da za vsaki sosednji vozlišči x in y v* $V(G)$ *obstaja vozlišče* $s \in S$*, ki reši par vozlišč x,y.*

Definicija 3.5. *K-metrična dimenzija, označimo jo s* $dim_k(G)$ *je metrična dimenzija, pri kateri hočemo, da za vsak par vozlišč obstaja vsaj k vozlišč* $s \in S$*, ki rešijo par vozlišč x,y.*

Definicija 3.6. *Lokalna metrična dimenzija, označena z* $ldim(G)$*, predstavlja moč najmanjše lokalno rešujoče množice grafa G.*

4. Reševanje problema in ugotovitve

Najprej sva napisala funkcijo CLP ki izračuna lokalno k-metrično dimenzijo grafa. Funkcija sprejme graf G in število k, ter vrne vrednost lokalne k-metrične dimenzije ob upoštevanju potrebnih pogojev.

```
 import itertools

def CLP_local_k_metric_dim(g, k_value):
 p = MixedIntegerLinearProgram(maximization=False)
 x = p.new_variable(binary=True)
 for vi in g.vertices():
     neighbors = g.neighbors(vi)
     expr = sum(x[vi] + x[vj] for vj in neighbors) + x[vi]
     p.add_constraint(expr >= k_value)
 p.set_objective(sum(x[vi] for vi in g))
 optimal_solution = p.solve()
 values_for_x = p.get_values(x)
 #return int(optimal_solution), values_for_x
 return optimal_solution
```

4.1. Prvi del naloge

s pomočjo zgornje funkcije sva tako določila lokalne k-metrične dimenzije za različno velike grafe različnih skupin.

(1) Grafi poti:
najprej sva si pogledala grafe poti. S n je označeno število vozlišč grafov poti.

n	**ldim**$_1$
2	1
3	1
4	2
5	2
6	2
7	3
8	3
9	3
10	4

n	**ldim**$_2$
2	2
3	2
4	3
5	3
6	4
7	4
8	5
9	5
10	6

n	**ldim**$_3$
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10

tabele prikazujejo vrednosti, ki sva jih dobila za lokalne k-metrične dimenzije grafov poti pri
$k = 1, 2, 3$. na podlagi teh podatkov sva oblikovala približne formule za izračun $ldim_k$.

- za $k = 1$: $ldim_k = \lceil \frac{n}{3} \rceil$
- za $k = 2$: $ldim_k = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$
- za $k = 3$: $ldim_k = n$

(2) Grafi ciklov:
n prav tako prikazuje število vozlišč grafov. Pri tej družini grafov so vrednosti, ki jih dobiva za $ldim_k$ zelo podobne kot pri grafih poti z razliko, da tukaj dobimo vrednosti za k = 1,2,3,4,5

n	$\mathbf{ldim_1}$
3	1
4	2
5	2
6	2
7	3
8	3
9	3
10	4

n	$\mathbf{ldim_2}$
3	2
4	2
5	3
6	3
7	4
8	4
9	5
10	5

n	$\mathbf{ldim}_k$
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10

Na podlagi zgoraj prikazanih vrednosti sva oblikovala sledeče formule:
- za $k = 1$: $ldim_k = \lceil \frac{n}{3} \rceil$
- za $k = 2$: $ldim_k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$
- za $k = 3, 4, 5$: $ldim_k = n$

(3) Polni grafi:
n = število vozlišč grafa.

n	$ldim_1$	$ldim_2$	$ldim_4$	$ldim_6$	$ldim_9$
3	1	2	3	3	3
4	1	2	4	4	4
5	1	2	4	5	5
6	1	2	4	6	6
7	1	2	4	6	7
8	1	2	4	6	8
9	1	2	4	6	9
10	1	2	4	6	9
11	1	2	4	6	9
12	1	2	4	6	9

Tabela 1. Primer tabele z $ldim_k$ vrednostmi

V tej skupini grafov pa sva iz dobljenih vrednosti prikazanih tudi v zgornji tabeli sklepala da velja za iračun $ldim_k$ splošna formula :

$$ldim_k = \begin{cases} n, & \text{če } n \geq k, \\ k, & \text{če } n < k. \end{cases}$$

kjer je maksimalen k za posamezen n lahko $k = 2n - 1$.

(4) Polni dvodelni grafi:

polne grafe v *sagamath* zrišemo kot : $graphs.CompleteBipartiteGraph(n, m)$, kjer je potem skupno število vozlišč $n+m$. Iz dobljenih vrednosti pa sklepava da velja spodnja formula.

$$ldim_k = \begin{cases} 2k, & \text{če } n, m \geq 2k, \\ m, & \text{če } n = k-1, m \geq k, \\ n, & \text{če } m = k-1, n \geq k, \\ \min m, n, & \text{če } (n \in [k, 2k) \wedge m \geq k) \vee (m \in [k, 2k) \wedge n \geq k), \\ n+m & \text{če } (n, m \in [\lceil \frac{k}{2} \rceil, k)) \vee (m = \lceil \frac{k}{2} \rceil \wedge n \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil) \vee (n = \lceil \frac{k}{2} \rceil \wedge m \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil). \end{cases}$$

(5) Hiperkocke:

hiperkocke v *sagamath* zrišemo kot : $graphs.CubeConnectedCycle(m)$. Število oglišč hiperkocke m je tako $n = 2^m \cdot m$

n	1	2	3	4	5
$ldim_1$	1	3	6	16	?
$ldim_2$	2	4	11	?	?
$ldim_3$	2	8	16	?	?
$ldim_4$	2	8	24	32	?
$ldim_5$	2	8	24	64	80
$ldim_6$	/	/	24	64	160
$ldim_7$	/	/	24	64	160
$ldim_8$	/	/	/	64	160
$ldim_9$	/	/	/	/	160

iz nekaj dobljenih vrednosti sklepava, da je formula za izračun lokalne k-metrične dimenzije :

$$ldim_k = \begin{cases} 2^m \cdot m, & \text{če } k > m, \\ 2^{m-1} \cdot m, & \text{če } k = m, \\ ?, & \text{če } k < m. \end{cases}$$

4.2. Drugi del naloge

Za začetek sva potrebovala CLP za izračun k-metrične dimenzije grafa, ki je podoben tistemu, ki sva ga napisala za lokalno k-metrično dimenzijo. Nato sva napisala funkcijo poimenovano $naloga2_1$, ki sprejme graf in vrednost k. Ta funkcija poišče lokalno k-metrično ter k-metrično dimenzijo na grafu, ter preveri ujemanja, na koncu pa vrne slovar, v katerem so ključi slovarja tiste vrednosti, pri katerih se dimenziji ujemata.

Za tem sva potrebovala še funkcijo $testiranje_naloga2_1(m, n, max_k)$, ki bo s pomočjo funkcije naloga$2_1 nagrafihstevilomvozlimedminnpoiskalatiste, prikaterihseujematak-tidimenzijitertakegrafetudiizrie.$

Najprej sva se osredotočila na posebne vrste grafov, kot so poti, cikli ter polni grafi. Pri poteh sva ugotovila, da se ujemajo za majhne grafe do 4 vozlišča, saj se pri večjem število vozlišč lokalna k-metrična dimenzija veča precej hitreje kot navadna k-metrična dimenzija ter tako ne pride več do ujemanj. Nato sva pogledala cikle, pri katerih sva našla ujemanja za grafe do 6 vozlišč za k do 1 in 2, pri čemer je bilo za cikel velikosti 5 in 6 ujemanje tudi za k=4. Pri ciklih pa ni bilo ujemanj za cikel velikosti tri, kar je poln graf na treh vozliščih. Prav pri polnih grafih sva namreč ugotovila, da je prišlo do ujemanj le za graf velikosti 2, torej le za pot dolžine 2, kar pa smo si pogledali že v prejšnji točki, za vse ostale polne grafe, ki so torej na vozliščih več kot 3, ni nobenih ujemanj lokalne k-metrične ter k-metrične dimenzije.

Pri testiranju s funkcijo s pomočjo vgrajene funkcije nauty geng sva se osredotočila na iskanje ujemanj za grafe različnih velikosti za določen k. Najprej sva si pogledala ujemanja za k enak dva in našla poleg takih grafov, ki sva jih omenila že zgoraj (poti), ujemanja pri 7 vozliščih na dveh grafih. To sta:

slike/naloga2_primer1.png slike/naloga2_primer2.png

Potem sva nadaljevala z iskanjem in ugotovila, da se pri večjih grafih, ki si med sabo niso precej podobni najde kar nekaj grafov, vendar pa se s številom vozlišč tudi število grafov precej veča. Pogledala sva si še ujemanje dimenzij za k=3 in našla ujemanja na grafu s petimi vozlišči za dva taka grafa, nato pa se je število že nekoliko bolj povečalo. Zato sva prišla do zaključka, da se res pri večjih grafih najde veliko število različnih grafov, pri katerih se dimenzije ujemajo, vendar je izjemno težko opaziti podobnosti med vsemi grafi.

Za pomoč pri nalogi sva uporabila spodnjo literaturo.

Literatura

[1] I. Peterin, J. Sedlar, R. Škrekovski, I. G. Yero, *Resolving vertices of graphs with differences*, (2023) arXiv preprint arXiv:2309.00922.