

Lokalna k-matrična dimenzija grafov - kratek opis

Tian Lipovšek in Klara Gruden

December 2023

1 Opis

Following the paper [10], implement an ILP model for this invariant, and then write separate small programs in Sage to answer each of following questions by exhaustive search.

1. Determine $ldim_k(G)$ for paths, cycles, complete graphs, bipartite complete graphs, hypercubes and some other interesting classes of graphs and try to guess the possible formulas based on the computations.
2. Try to determine graphs G which satisfy $ldim_k(G) = dim_k(G)$ for a given k for $k = 1, 2, 3, \dots$. For small graphs, apply a systematic search; for larger ones, apply some stochastic search.

2 Definicije

Definicija 1 *Vozlišče s reši par vozlišč x, y v grafu G , če $d(s, x) \neq d(s, y)$.*

Definicija 2 *Rešujoča množica grafa G je množica S , za katero velja, da za vsaki dve vozlišči x in y v $V(G)$ obstaja vozlišče $s \in S$, ki reši par vozlišč x, y .*

Definicija 3 *Metrična dimenzija povezanega grafa G , označena z $dim(G)$, je definirana kot velikost najmanjše množice $S \subseteq V(G)$, ki razlikuje vse pare vozlišč v G .*

Definicija 4 *Lokalna rešujoča množica grafa G je množica S , za katero velja, da za vsaki sosednji vozlišči x in y v $V(G)$ obstaja vozlišče $s \in S$, ki reši par vozlišč x, y .*

Definicija 5 *K-metrična dimenzija, označimo jo s $\dim_k(G)$ je metrična dimenzija, pri kateri hočemo, da za vsak par vozlišč obstaja vsaj k vozlišč $s \in S$, ki rešijo par vozlišč x, y .*

Definicija 6 *Lokalna metrična dimenzija, označena z $\text{ldim}(G)$, predstavlja moč najmanjše lokalno rešujoče množice grafa G .*

3 Problem

V lokalni k -metrični dimenziji želimo najti najmanjšo množico vozlišč, ki omogoča razlikovanje sosednjih vozlišč v grafu. To se naredi tako, da za vsak par sosednjih vozlišč x, y obstaja vozlišče s v množici, pri čemer velja $d(s, x) \neq d(s, y)$. Cilj je določiti $\text{ldim}(G)$ za različne razrede grafov in preučiti, ali obstajajo grafi, kjer lokalna k -metrična dimenzija sovpada z običajno k -metrično dimenzijo.

4 Načrt dela

- Napisala bova celoštevilski linearni program, s katerim bova s pomočjo simulacij, za različne vrste grafov poskušala uganiti formule za lokalno k -metrično dimenzijo
- Poskušala bova ugotoviti, ali obstajajo grafi G , kjer lokalna k -metrična dimenzija sovpada z običajno k -metrično dimenzijo za dano vrednost k .

K prvemu delu naloge bova pristopila tako, da bova v Sage prepisala naslednji CLP: Naj bo $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ množica vozlišč grafa G . Naj bo $S \subseteq V(G)$. Definiramo celoštevilске spremenljivke x_i za vsako vozlišče grafa po sledečem predpisu

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{if } v_i \in S \\ 0 & \text{if } v_i \notin S \end{cases}$$

ter spremenljivko y_{ij} kot

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } v_i \neq v_j \\ 0 & \text{if } v_i = v_j \end{cases}$$

CLP za iskanje lokalne k -metrične dimenzije bo torej izgledal tako:

$$\begin{array}{ll}
& \min \sum_{i=1}^n x_i \\
\text{s.t.} & \sum_{i,j} y_{ij} \geq 1; \text{ za vsa sosednja vozlišča } i,j \\
& \sum_j y_{ij} \geq k \cdot x_i; \text{ za vsa vozlišča } i \\
& x_i \in \{0,1\} \text{ za vse } 1 \leq i \leq n \\
& y_j \in \{0,1\} \text{ za vse } 1 \leq j \leq n
\end{array}$$