AI 岗位基础面试问题

作者：孙峥
专业：计算机技术
邮箱：sunzheng2019@ia.ac.cn
学校：中国科学院大学 (中国科学院)
学院：人工智能学院 (自动化研究所)

2019 年 11 月 3 日

Part I
基础数学问题

Question 1

定义矩阵的范数：$\parallel A \parallel_2 = max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$**，**$A$ **是对称正定阵，证明** $\parallel A \parallel_2 = \lambda(\lambda$ **是** A **的最大特征值)。**

证：{先说明一些相关的知识点：矩阵范数定义的时候，有非负性，绝对齐性，三角不等式，还比向量范数多一个相容性。然后引入矩阵的 F 范数，$\parallel A \parallel_F^2 = \sum_{i,j=1} a_{ij}^2 = tr(A^TA)$，可以验证矩阵的 F 范数是矩阵范数。再引入矩阵的 p 范数，$\parallel A \parallel_p = max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = max_{\|x\|_p=1} \parallel Ax \parallel_p$，容易证明这样定义的也是矩阵范数。由于是向量的 p 范数导出的矩阵的 p 范数，所以此矩阵范数又称为算子范数 (《泛函分析》中有定义)。

上述说明的矩阵范数有以下两个重要性质：(1) 矩阵的 F 范数和 $2-$ 范数都与向量的 $2-$ 范数相容；(2) 所定义的算子范数，即 $p-$ 范数都与向量的 $p-$ 范数相容；(3) 任一矩阵范数，一定存在与之相容的向量范数。下面开始证明这道题，网上可以查找到的证明过程都非常复杂，需要 $A \geq B, A \leq B$, 然后导出 $A = B$ 的过程，此处提供一种相对简单的方法，是我在本科时候的《数值分析》课上由林丹老师讲授。}

假设 A 是一般矩阵，A^TA 是对称半正定矩阵，则 $\exists$ 正交矩阵 $Q, s.t.$

$$A^TA = Q^T\Lambda Q, \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n), \lambda_i \geq 0$$

且有：

$$\parallel A \parallel_2^2 = (Ax)^T(Ax) = x^TA^TAx = x^TQ^T\Lambda Qx = (Qx)^T\Lambda(Qx)$$

由于 Q 正交，且 $\parallel x \parallel_2 = 1$，有 $\parallel Qx \parallel_2 = 1$, 则：

$$\begin{aligned}
\parallel A \parallel_2^2 &= max_{\|x\|_2=1} \parallel Ax \parallel_2^2 \\
&= max_{\|x\|_2=1}(Qx)^T\Lambda(Qx) \\
&= max_{\|y\|_2=1}(y)^T\Lambda(y) \\
&= max_{\|y\|_2=1}\sum_{i=1}^{n} y_i^2\lambda_i \\
&= \lambda_1
\end{aligned}$$

当 A 是对称正定阵时，特征值均大于 0。A^TA 可以视为 $f(A)g(A)$，其特征值的最大值为 λ_1^2，λ_1 是 A 特征值的最大值, 证毕。

(1) 证明过程中用到了正交矩阵不改变向量或矩阵的 $2-$ 范数的性质。假设 P, Q 均为正交矩阵，则 $\parallel A \parallel_2 = \parallel PA \parallel_2 = \parallel AQ \parallel_2 = \parallel PAQ \parallel_2$，但是会改变 $1-$ 范数;

(2) 除了矩阵的 $2-$ 范数，还有 $1-$ 范数和 ∞ 范数，计算结果可以用' 一列无穷行' 记忆。

Question 2

设 $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}, iid$ 服从 $U(0,k)$ 的均匀分布，求 k 的极大似然估计。
解：{求解极大似然估计，应该先写出极大似然函数 $ln(L(\theta))$，再对参数 θ 求导即可，必要时需要验证二阶导。}

$$f(X) = \frac{1}{k^n}, 0 \le x_i \le k.$$
$$lnL(k) = -nlnk, lnL(k)' = -\frac{n}{k} < 0.$$

不存在 k 的极大似然估计。

Part II
计算机算法设计与分析

首先介绍分治思想，求解问题的大概流程如下：
Q1: 从最简单的 $case$ 入手；
Q2: 复杂问题，分解为 $sub-problems$。
如何分解：
1. 看 $Input$: 输入的关键数据结构 (DS, 包括数组、树、有向无环图、图、集合)，决定是否可分；
2. 看 $Output$: 决定能否把解合起来。

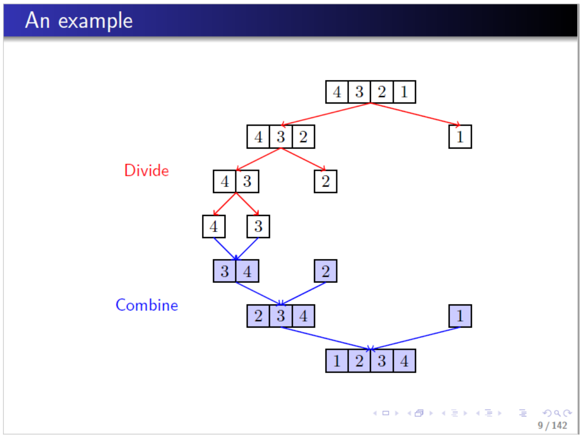
Question 1

用时间复杂度尽可能少的算法来排序一个 n 个整数的数组。
解：(1) 首先想到的是利用冒泡排序，利用两个 for 循环来排序数组，这种方法的时间复杂度是 $O(n^2)$,代码较简单, 没有递归调用，略去；
(2) 采用 DC(divide and conquer) 思想，每次递归调用数组 $[0, n]$ 的前 $n-1$ 个元素，再回溯合并，大致过程如下图所示 (选自卜东波老师上课的 slides)。

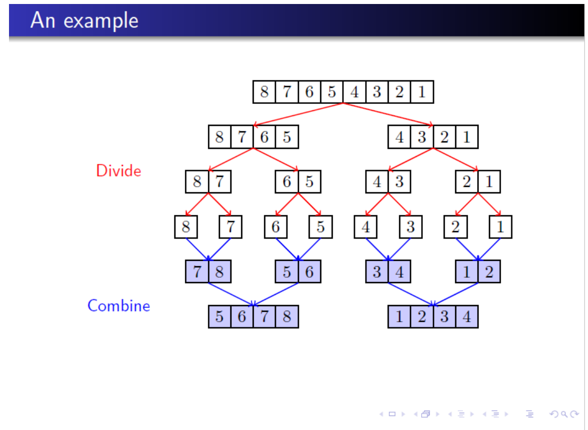
合并的时候将末尾的第 n 个元素插入前 $n-1$ 个元素当中，时间复杂度为 $O(n)$，所以有迭代式：$T(n) = T(n-1) + O(n)$，简单推导：

$$\begin{aligned} T(n) &\le T(n-1) + cn \\ &\le T(n-2) + c(n-1) + cn \\ &\le ... \\ &\le c(1+2+3+...+n) \\ &= O(n^2) \end{aligned}$$

代码相对简单，略去；
(3) 和 (2) 中方法的分治一样，按照下标来分治，此时分治从该数组的中心位置一分为二，分别对两个子问题排序，分别排好序之后再回溯合并，大致过程如图所示 (选自卜东波老师上课的 slides)，这实际上就是归并排序 (二路归并)。归并的过程可以简单描述为：先准备一个数组，数组容量是两个子问题的



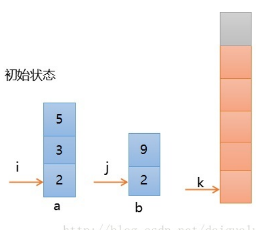
(a) 从倒数第二个元素位置一分为二



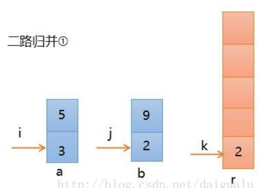
(b) 从中间的位置一分为二

图 1: 采用分治思想排序

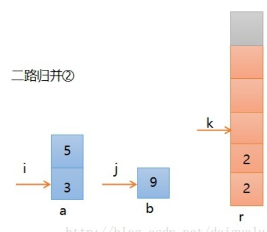
规模之和，比较 $a[i]$ 和 $b[j]$ 的大小，若 $a[i] \leq b[j]$，则将第一个有序表中的元素 $a[i]$ 复制到 $r[k]$ 中，并令 i 和 k 分别加上 1；否则将第二个有序表中的元素 $b[j]$ 复制到 $r[k]$ 中，并令 j 和 k 分别加上 1；如此循环下去，直到其中一个有序表取完；然后再将另一个有序表中剩余的元素复制到 r 中从下标 k 到最后的单元，大致过程如下 (参考 $https://blog.csdn.net/daigualu/article/details/78399168$)。介绍完方法，下面给出实际的可运行代码 (C++，在文件夹 code/MergeOrder 中)，利用分治和归并排序的思想来排序某一数组，其中的数组规模和元素是自行输入，更加灵活。



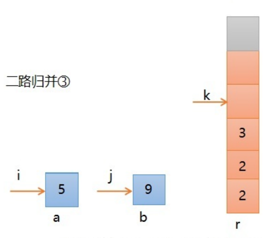
(a) S1



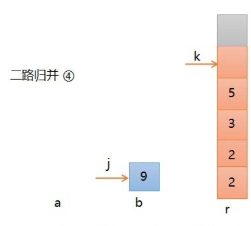
(b) S2



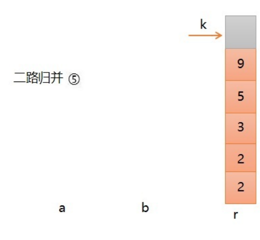
(c) S3



(d) S4



(e) S5



(f) S6

图 2: 二路归并过程

```
#include <iostream>
#include <stdio.h>
```

```
using namespace std;

long int merge(int a[], int left, int mid, int right,int b[])
{
  int i = mid;
  int j = right;
  int k = 0;
  while (i >= left && j >= mid+1)
  {
    if(a[i] > a[j])
    {
      b[k++] = a[i--];
    }
    else
    {
      b[k++] = a[j--];
    }
  }
  while (i >= left)
  {
    b[k++] = a[i--];
  }
  while (j >= mid+1)
  {
    b[k++] = a[j--];
  }
  for (i = 0; i < k; i++)
  {
    a[right - i] = b[i];
  }
}

long int solve(int a[],int left, int right,int b[])
{
  if(right > left)
  {
  int mid = (right+left) / 2;
  solve(a,left, mid,b);
  solve(a,mid + 1, right,b);
  merge(a,left, mid, right,b);
  }
}


int main()
{
  long int n;//数组维度
  scanf("%d", &n);
  int *a = new int[n];
  int *b = new int[n];
  for(long int i=0;i<n;i++)
  {
    scanf("%d", &a[i]);//scanf的速度要比cin的速度快
  }

  solve(a,0,n-1,b);//归并排序

  for(int i = 0;i<n;i++)
    cout<<a[i]<<' ';
  return 0;
}
```

Listing 1: 归并排序,C++

上述的代码过程中，两个子问题的归并实际上是从后向前的归并，下面给出从前向后的归并过程，二者本质一样。(但是不知道为什么下面这个代码无法完成排序？)

```
#include <iostream>
#include <stdio.h>

using namespace std;

long int merge(int a[], int left, int mid, int right,int b[])
{
  int i = left;
  int j = mid+1;
  int k = 0;
  while (i <= mid && j <= right)
  {
  if(a[i] > a[j])
  {
    b[k++] = a[i++];
  }
  else
  {
    b[k++] = a[j++];
  }
  }
  while (i <= mid)
  {
    b[k++] = a[i++];
  }
  while (j <= right)
  {
    b[k++] = a[j++];
  }
  for (i = 0; i < k; i++)
  {
    a[right - i] = b[i];
  }
}

long int solve(int a[],int left, int right,int b[])
{
  if(right > left)
  {
    int mid = (right+left) / 2;
    solve(a,left, mid,b);
    solve(a,mid + 1, right,b);
    merge(a,left, mid, right,b);
  }
}


int main()
{
  long int n;//数组维度
  scanf("%d", &n);
  int *a = new int[n];
  int *b = new int[n];
  for(long int i=0;i<n;i++)
  {
    scanf("%d", &a[i]);//scanf的速度要比cin的速度快
  }

  solve(a,0,n-1,b);//归并排序

  for(int i = 0;i<n;i++)
```

```
    cout<<a[i]<<' ';
  return 0;
}
```

Question 2

$C++$ 中输入二维 (多维) 数组的方法。(这不是个具体的问题，只是为了面试要求手写代码的时候可参考)。
1. 使用 $C++$ 中的 $vector$ 数据结构，$vector$ 是一个动态数组结构，可以在其中添加或删除元素。在头文件中声明 $\#include < vector >$，定义一维数组 $vector < int > a;$，定义二维数组 $vector < vector < int >> a;$，注意最后两个尖括号之间应该有个空格，使用方法如下：
(1) 数组规模较小时使用；

```
vector<vector<int> >vec;
vector<int>a;
a.push_back(1);
a.push_back(2);
vetor<int>b;
b.push_back(3);
b.push_back(4);
vec.push_back(a);
vec.push_back(b);
```

(2) 数组规模较大，且不需要自行输入；

```
vector<vector<int> >arry(6);//先确定数组的行数
for(int i=0;i<arry.size();i++)
  arry[i].resize(8);//确定每行的列数

for(int i=0;i<arry.size();i++)
  for(int j=0;j<array[0].size();j++)
    arry[i][j]=i*j;
```

(3) 数组规模较大，且需要自行输入数组元素；

```
int m,n;
cin>>m>>n;//输入时可以中间可以加空格
vector<vector<int> >arry;
for(int i=0;i<arry.size();i++)
  for(int j=0;j<array[0].size();j++)
    cin>>arry[i][j];//输入时每行之间可以回车
```

2. 利用指针生成二维数组，数组名是实际上是一个指针，使用指针来分配指针，使用方法如下：
(1) 一维数组：

```
int arraysize;//数组规模
scanf("%d",&arraysize);//输入数组规模，scanf比cin快很多
int *arry=new int[arraysize];//数组名是指针
for(int count=0;count<arraysize;count++)
  scanf("%d",&arry[count]);
```

(2) 二维数组

```
int row,col;
scanf("%d %d",%row,%col);
int **arry=new int*[row];//指向指针的指针，申请row个指向int*的指针
for(int i=0;i<row;i++)
{
  arry[i]=new int[col];//arry每个元素都是指针
  for(int j=0;j<col;j++)
    scanf("%d",&arry[i][j]);
}
```

以上的代码在输入元素时，用的都是 $scanf$ 函数，需要声明头文件 $\#include < stdio.h >$。使用 $scanf$ 函数要比 cin 快很多，在很多 OJ 题当中，当自己的算法时间不通过时，可以通过更换输入函数来使代码通过 (个人经验)。

Question 3

利用问题 1 和问题 2 中的方法，来解决数组逆序数计算问题 (包括数组显著逆序数计算问题)。

解：这是第 1 题第 (3) 种方法归并排序的引用。计算 (显著) 逆序数：可以在归并排序一个数组时，进行 (显著) 逆序数的计算，显著逆序数就是 $a_i > k * a_j, i < j$，网上找到的逆序数计算的代码和显著逆序数的可能不一样。此处把逆序数的计算也当成显著逆序数的一种来统一计算。代码如下：

```
#include <iostream>
#include <stdio.h>
using namespace std;

long int merge(int a[], int left, int mid, int right,int b[])
{
  int i = mid;
  int j = right;
  long int lcount = 0;
  while (i >= left && j > mid)
  {
    if(a[i] > (long long) 3 * a[j])
    {
      lcount += j - mid;
      i--;
    }
    else
    {
      j--;
    }
  }
  i = mid;
  j = right;
  int k = 0;
  while (i >= left && j > mid)
  {
    if(a[i] > a[j])
    {
      b[k++] = a[i--];
    }
    else
    {
      b[k++] = a[j--];
    }
  }
```

```
  while (i >= left)
  {
    b[k++] = a[i--];
  }
  while (j > mid)
  {
    b[k++] = a[j--];
  }
  for (i = 0; i < k; i++)
  {
    a[right - i] = b[i];
  }
  return lcount;
}

long int solve(int a[],int left, int right,int b[])
{
  long int cnt = 0;
  if(right > left)
  {
    int mid = (right+left) / 2;
    cnt += solve(a,left, mid,b);
    cnt += solve(a,mid + 1, right,b);
    cnt += merge(a,left, mid, right,b);
  }
  return cnt;
}

long int InversePairs(int a[],int len)
{
  int *b=new int[len];
  long int count=solve(a,0,len-1,b);
  delete[] b;
  return count;
}

int main()
{
  long int n;//数组维度
  int *array;//数组
  scanf("%d", &n);
  array  = new int[n];
  for(long int i=0;i<n;i++)
    scanf("%d", &array[i]);

  long int count = InversePairs(array, n);
  printf("%d", count);
  return 0;
}
```

代码跟归并排序的过程差不多，不同的是在 $merge$ 函数中，进行归并排序之前会计算两个子数组之间的显著逆序数个数 (两个子数组内的显著逆序数由于递归调用已经计算完毕)，就是 $merge$ 函数中的第一个 $while$ 循环，计算过后要将 i, j 设置成原来的值，再进行排序。此处应注意的是，网上关于逆序数 (不是显著逆序数) 的计算是边排序边计算逆序数，二者是一起的，原因就是顺序规则跟计算逆序数的规则是一致的。所以要计算逆序数，除了把上述代码中 $merge$ 函数中第一个 $while$ 循环里的 3 改成 1 之外，还可以在排序的同时计算逆序数，由于计算逆序数的代码网上可以很容易找到，此处略去。

Question 4

快速排序算法

解：与第 1 题按照数组的下标来分治不同，这道题按照数组的值来分治，即选取 *pivot* 来排序一个数组。

Question 5

计算分治问题时间复杂度的总结，主定理 (Master theorem))

解：第 1 题第 (3) 种方法和第 4 题分别介绍了排序一个数组的方法，一个是按照数组的下标分治，一个是按照数组的值来分治。但是没有分析两种方法的时间复杂度，下面给出一般的分治问题的复杂度分析方法。

假设某个问题的规模为 n，分成 a 个子问题，每个子问题的规模为 $\frac{n}{b}$(这里的 a, b 不一定相等，因为子问题往往有重叠的部分，所以 $a \geq b$)，有递推式：$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + O(d^n)$。

结论见下图 (卜东波老师的课上 slides)。

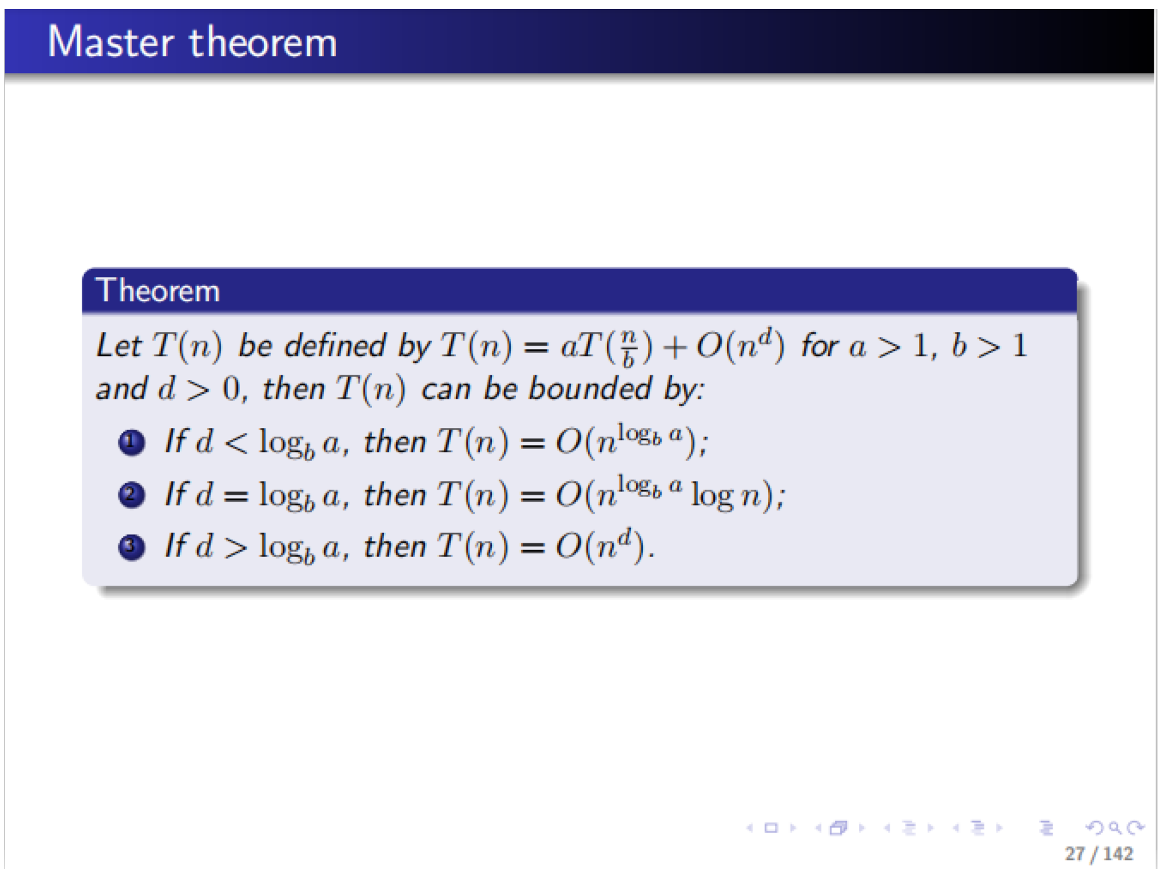


图 3: Master theorem

计算该递推式：

$$\begin{aligned} T(n) &= aT(\frac{n}{b}) + O(d^n) \\ &\le aT(\frac{n}{b}) + cn^d \\ &\le a[aT(\frac{n}{b^2}) + c(\frac{n}{b})^n] + cn^d \\ &\le ... \\ &\le cn^d + ac(\frac{n}{b})^d + a^2c(\frac{n}{b^2})^d + ... + a^{log_b n-1}c(\frac{n}{b^{log_b n-1}})^d + alog_b n \\ &\le cn^d[1 + \frac{a}{b^d} + (\frac{a}{b^d})^2 + ... + (\frac{a}{b^d})^{log_b n-1}] + a^{log_b n} \end{aligned}$$

对上式中的等比项分类讨论:

(1)$a < b^d$，即 $d > log_b a$，以指数项的第一项计算，则：

$$\begin{aligned} T(n) &\le cn^d + a^{log_b n} \\ &= cn^d + n^{log_b a} \\ &= O(n^d) \end{aligned}$$

(2)$a = b^d$，即 $d = log_b a$，所有的指数项都要计算，则：

$$\begin{aligned} T(n) &\le cn^d log_b n + a^{log_b n} \\ &= cn^{log_b a} log_b n + a^{log_b n} \\ &= O(cn^{log_b a} log_b n) \\ &= O(n^{log_b a} logn) \end{aligned}$$

(3)$a > b^d$，即 $d < log_b a$，以指数项的最后一项计算，则：

$$\begin{aligned} T(n) &\le cn^d(\frac{a}{b_d})^{log_b n-1} + a^{log_b n} \\ &= \frac{cn^d}{\frac{a}{b^d}} n^{log_b \frac{a}{b^d}} + n^{log_b a} \\ &= \frac{c}{a}(nb)^d n^{log_b \frac{a}{b^d}} + n^{log_b a} \\ &= \frac{cb^d}{a} n^d n^{log_b a - log_b b^d} + n^{log_b a} \\ &= \frac{cb^d}{a} n^d \frac{n^{log_b a}}{n^d} + n^{log_b a} \\ &= \frac{cb^d}{a} n^{log_b a} + n^{log_b a} \\ &= O(n^{log_b a}) \end{aligned}$$

命题证毕。

Question 6

用时间复杂度尽可能少的算法找出一个数组中第 k 个小的元素

解：首先想到的是对数组进行排序，即可以找出数组中第 k 小的元素。上述已经介绍 n 个元素的数组最快的排序算法 (归并排序和快速排序) 时间复杂度为 $O(nlogn)$，此处介绍更快的解决此问题的算法。

Question 7

leetcode 第 33 题，搜索旋转排序数组。问题描述：

Question 7

leetcode 第 153 题，寻找旋转排序数组中的最小值。问题描述：

Question 9

leetcode 第题，寻找一个数组的众数。问题描述：

Question 10

leetcode 第 200 题，计算岛屿的个数。问题描述：

这道题实际上是计算连通域的个数，可以用 DFS 和 BFS 求解。

Question 11

二叉树的构建 (递归与非递归方法)，先序中序后序遍历 (递归与非递归方法)

Question 12

寻找二叉树上最远的两个节点的距离。问题描述：

介绍完分治思想部分的题，接下来的题将会面向动态规划。流程大致如下：

Q1: 从最简单的 $case$ 入手；

Q2: 对大的 $case$ 分解。

如何分解？这实际上是一个多步决策的过程：

1. 解能否逐步构造出来 (类似于分治思想中的数据结构和解能否可分)；
2. 目标函数能够分解 (与分治思想不同，分治没有目标函数)。

动态规划快的原因是：**问题定义可能是指数级多的 $case$ 找最优，DP 可以去除冗余**，这一点在具体的问题中会体现。

Question 13

矩阵乘法。问题描述：n 个矩阵 $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ 相乘，矩阵 A_i 的规模为 $p_{i-1} * p_i$，确定最优的运算顺序（结合律），使得整体运算次数最少（只看乘法，不看加法）。
解：动态规划求解，即采用多步决策，设 $OPT(i,j)$ 表示 $A_iA_{i+1}...A_{j-1}A_j$ 的最优运算次数。假设从第 k 个位置一分为二，即 $(A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, ..., A_k)(A_{k+1}, A_{k+2}, ..., A_j)$，则有递推式：

$$OPT(i,j) = OPT(i,k) + OPT(k+1,j) + p_{i-1}p_kp_j$$

如何选择中间的位置是一个枚举过程，对于每一个位置都要递归地去调用分成的两部分，然后每一部分再进行枚举过程，以此类推，伪代码如下：

Trial 1: Explore the recursion in the top-down manner

```
RECURSIVE_MATRIX_CHAIN(i, j)
if i == j then
    return 0;
end if
OPT(i, j) = +∞;
for k = i to j − 1 do
    q = RECURSIVE_MATRIX_CHAIN(i, k)
      + RECURSIVE_MATRIX_CHAIN(k + 1, j)
      +p_{i−1}p_k p_j;
    if q < OPT(i, j) then
      OPT(i, j) = q;
    end if
end for
return OPT(i, j);
```

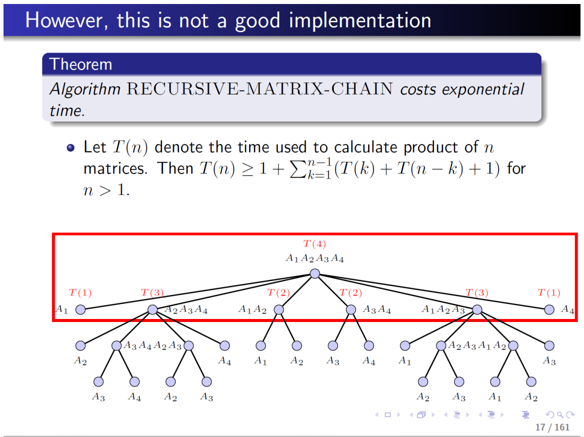
- Note: The optimal solution to the original problem can be obtained through calling RECURSIVE_MATRIX_CHAIN$(1, n)$.

15 / 161

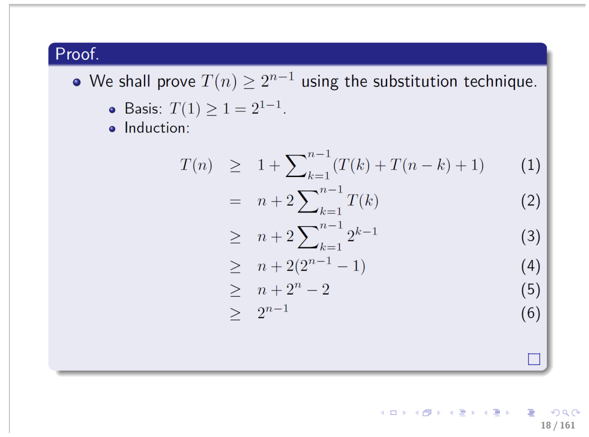
图 4: trial 1

此算法的时间复杂度为指数级的，证明如图 5。

指数级时间复杂度很大，实践中并不实用。观察上述递归过程，实际上有很多“冗余”，很多子问题 $OPT(i,j)$ 在重复计算。i, j 各有 n 种情况，共有 $O(n^2)$ 个子问题。每个子问题的最优值可以先存储起来，**以空间换时间**。如果粗略估计，每个子问题又有 n 种划分，故时间复杂度为 $O(n^3)$。



(a) 已知的条件



(b) 数学归纳法证明

图 5: 指数级时间复杂度证明

Question 100

牛客网剑指 offer 中的题，和 leetcode 一样，面试手写代码基本上都是直接写类中的函数

Part III
机器学习与深度学习基础模型与算法

Question 1

手推 BP(Back Propagation) 算法。

Part IV
视频分析与处理相关知识点