AI 岗位基础面试问题

作者：孙峥
专业：计算机技术
邮箱：sunzheng2019@ia.ac.cn
学校：中国科学院大学 (中国科学院)
学院：人工智能学院 (自动化研究所)

2019 年 10 月 30 日

Part I
基础数学问题

Question 1

定义矩阵的范数：$\| A \|_2 = max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$，$A$ 是对称正定阵，证明 $\| A \|_2 = \lambda$(λ 是 A 的最大特征值)。
证：{先说明一些相关的知识点：矩阵范数定义的时候，有非负性，绝对齐性，三角不等式，还比向量范数多一个相容性。然后引入矩阵的 F 范数，$\| A \|_F^2 = \sum_{i,j=1} a_{ij}^2 = tr(A^T A)$，可以验证矩阵的 F 范数是矩阵范数。再引入矩阵的 p 范数，$\| A \|_p = max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = max_{\|x\|_p=1} \| Ax \|_p$，容易证明这样定义的也是矩阵范数。由于是向量的 p 范数导出的矩阵的 p 范数，所以此矩阵范数又称为算子范数 (《泛函分析》中有定义)。
上述说明的矩阵范数有以下两个重要性质：(1) 矩阵的 F 范数和 $2-$ 范数都与向量的 $2-$ 范数相容；(2) 所定义的算子范数，即 $p-$ 范数都与向量的 $p-$ 范数相容；(3) 任一矩阵范数，一定存在与之相容的向量范数。下面开始证明这道题，网上可以查找到的证明过程都非常复杂，需要 $A \geq B, A \leq B$, 然后导出 $A = B$ 的过程，此处提供一种相对简单的方法，是我在本科时候的《数值分析》课上由林丹老师讲授。}
假设 A 是一般矩阵，$A^T A$ 是对称半正定矩阵，则 $\exists$ 正交矩阵 $Q, s.t.$

$$A^T A = Q^T \Lambda Q, \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n), \lambda_i \geq 0$$

且有：

$$\| A \|_2^2 = (Ax)^T (Ax) = x^T A^T A x = x^T Q^T \Lambda Q x = (Qx)^T \Lambda (Qx)$$

由于 Q 正交，且 $\| x \|_2 = 1$，有 $\| Qx \|_2 = 1$, 则：

$$\begin{aligned}
\| A \|_2^2 &= max_{\|x\|_2=1} \| Ax \|_2^2 \\
&= max_{\|x\|_2=1} (Qx)^T \Lambda (Qx) \\
&= max_{\|y\|_2=1} (y)^T \Lambda (y) \\
&= max_{\|y\|_2=1} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \lambda_i \\
&= \lambda_1
\end{aligned}$$

当 A 是对称正定阵时，特征值均大于 0。$A^T A$ 可以视为 $f(A)g(A)$，其特征值的最大值为 λ_1^2，λ_1 是 A 特征值的最大值, 证毕。
(1) 证明过程中用到了正交矩阵不改变向量或矩阵的 $2-$ 范数的性质。假设 P, Q 均为正交矩阵，则 $\| A \|_2 = \| PA \|_2 = \| AQ \|_2 = \| PAQ \|_2$;
(2) 除了矩阵的 $2-$ 范数，还有 $1-$ 范数和 ∞ 范数，计算结果可以用' 一列无穷行' 记忆。

Question 2

设 $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}, iid$ 服从 $U(0,k)$ 的均匀分布，求 k 的极大似然估计。

解：{求解极大似然估计，应该先写出极大似然函数 $ln(L(\theta))$，再对参数 θ 求导即可，必要时需要验证二阶导。}

$$f(X)=\frac{1}{k^n}, 0 \le x_i \le k.$$
$$lnL(k)=-nlnk, lnL(k)'=-\frac{n}{k}<0.$$

不存在 k 的极大似然估计。

Part II
计算机算法设计与分析

Part III
机器学习与深度学习基础模型与算法