东北大学研究生院考试试卷（闭卷）

2023-2024学年 秋 季学期

课程名称：数值分析(A)

一、简答题(每题5分，共30分)

1.建立一种稳定的递推算法计算定积分 $I_n=\int_0^1 \frac{x^n+1}{4x+1}dx$ 的值，并说明算法稳定的理由。

2.利用平方根法求下列线性方程组的解

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

3.设$l_0(x),l_1(x),\dots,l_6(x)$是以 $x_0,x_1,\cdots x_6$ 为节点的6次Lagrange插值基函数，求

$\sum_{j=0}^{6}(x_j-x)^4 l_j(x)$的值。

4.某旧书一页上印有积分为 $I=\int_{-2}^{2}(3x^2-4)(ax+b)dx$, 符号a，b处的数字已无法辨认，试计算积分 I 的值，并说明理由。

5.已知 $A=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 计算$\mathrm{Cond}_2(A)$的值并估计$\|Ax\|$。

6.设 $f(x)\in C^2(\mathbb{R})$, 证明: $\frac{d}{dx}f[a,x]=f[a,x,x]$.

二、解答题(10分)

已知y=f(x)的函数值表

xi	0	1	2	3	4	5	6	7	8
yi	4.9	7.3	11.9	13.4	15.5	20.1	24.3	36.7	41.6

利用如上数据，请选用至少两种复化求积公式求 $\int_0^8 f(x)dx$ 的近似值。

三、解答题(10分)

试确定A_0，A_1，x_0，x_1的值，使如下公式为高斯型求积公式

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}f(x)\,dx\approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1).$$

四、解答题(10分)

试确定三次插值多项式$H_3(x)$，使其满足 $H_3(1)=f(1)=1$，$H_3(2)=f(2)=0$，$H_3(3)=f(3)=-1$，$H_3'(2)=f'(2)=2$，并写出插值余项。

总分	一	二	三	四	五	六	七	八

五、解答题(10分)

设函数f(x)在其零点附近充分光滑，请写出求解f(x)=0的m重根α的含参牛顿迭代格式，给出此迭代方法是二阶收敛的条件，并加以证明。

六、解答题(10分)

给定线性方程组$\begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix}$，考虑如下迭代格式

$$\begin{cases}x^{(k+1)}=(1-\omega)x^{(k)}+\dfrac{\omega\left(5-y^{(k)}\right)}{3}\\y^{(k+1)}=(1-\omega)y^{(k)}+\dfrac{\omega\left(-6-x^{(k)}\right)}{3}\end{cases}$$

试确定实参数ω的取值范围，使迭代格式对任意初始向量都收敛。

七、解答题(10分)

已知一组实验数据

xi	-2	-1	0	1	2
yi	2	2.5	4	6	6.5
ρi	1	2	1	3	2

用最小二乘方法求线性拟合曲线。

八、解答题(10分)

对于一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y(x)), \quad a\le x\le b,\\ y(a)=\alpha.\end{cases}$$

(1)试写出如上方程有解的充分条件。

(2)证明：求解上述初值问题的差分方法

$$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+\dfrac{1}{4}h(K_1+K_2)\\K_1=f(x_n,y_n)\\K_2=f\left(x_n+\dfrac{2}{3}h,y_n+\dfrac{2}{3}hK_1\right)\\y_0=\alpha\end{cases}$$

是2阶方法。