

班 级
学 号
姓 名

东北大学研究生考试试卷 (A)

2015-2016 学年第一学期

课程名称: 数值分析 (共 4 页)

总分	一	二	三	四	五	六

一. 填空题 (每题 4 分, 共 20 分)

1. 正方形的边长为 10 cm , 当测量边长的误差限小于等于 0.4998×10^{-3} 时才能保证面积误差不超过 0.1 cm^2 .

2. 给定方程组 $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, a 为实数, 则当 a 满足 $-1 < a < 1$, 且 $0 < \omega < 2$ 时, SOR 方法收敛.

3. 设 x^* 是方程 $f(x)=0$ 的单根, 记 $\varphi(x)$ 是对应的 Newton 迭代格式的迭代函数, 若 $f(x)$ 在 x^* 附近二阶连续可微, 则 $\varphi'(x^*) = 0$.

4. 设 $f(x) = 9x^8 + 3x^4 + 10$, 则 $f[2^0, 2^1, \dots, 2^k] = 9$, $f[3^0, 3^1, \dots, 3^k] = 0$.

5. 设 $y = f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上二次连续可微, 则满足条件 $f(0)=1$, $f(2)=5$, $f'(0)=0$ 的二次插值多项式 $H_2(x) = x^2 + 1$.

二. 解答题 (每题 10 分, 共 20 分)

1. 已知线性方程组 $Ax = b$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

求: (1) $\|A\|_1, \|A\|_\infty$;

(2) 建立求解此线性方程组的 Gauss-Seidel 迭代格式;

(3) 讨论该迭代格式的收敛性.

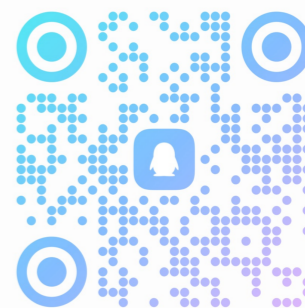
解: (1) $\|A\|_1 = \max\{|3|+|-1|+|4|, |-1|+|2|+|2|, |2|+|3|+|2|\} = 8$
 $\|A\|_\infty = 8$

(2) $x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b$

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $-L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $-U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{3}(3 + x_2^k - 4x_3^k) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}(2 + x_1^{(k+1)} + 2x_3^k) \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{2}(4 - 2x_1^{(k+1)} + 3x_2^{(k+1)}) \end{cases}$

(3) $|\lambda D - L - U| = \begin{vmatrix} 3\lambda & -1 & 4 \\ -\lambda & 2\lambda & -2 \\ 2\lambda & -3\lambda & -2\lambda \end{vmatrix} = 0$



2. 已知方程 $2x - \sin x - 2 = 0$ 在 $[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 内存在唯一根,

求: (1) 建立一种收敛的迭代格式, 说明收敛理由, 并指出收敛阶;

(2) 取初值 $x_0 = 0.5$, 用此迭代格式进行计算, 问需要迭代多少次才

能达到 $\varepsilon = 10^{-5}$ 的精度要求.

解: (1) $x_{k+1} = \frac{1}{2} \sin x_k + 1$, $f(x) = \frac{1}{2} \sin x + 1$, $x \in [\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\frac{1}{2} < \sin \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cos x, \quad |f'(x)| \leq \left| \frac{1}{2} \cos x \right| = \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} < 1$$

\therefore 由迭代格式 $x_{k+1} = f(x_k)$ 产生的迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛.

$$\because f'(x) = \frac{1}{2} \cos x \neq 0$$

\therefore 收敛阶为 1.

$$(2) x_0 = 0.5, \quad x_1 = \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} + 1 = 1.004$$

$$k > \frac{\ln \varepsilon (1-L)}{\ln L} = \frac{\ln 10^{-5} \times (1-0.5)}{\ln 0.5} \approx 16.62$$

$$(L \approx 0.5)$$

\therefore 需迭代 17 次

三. 解答题 (每题 10 分, 共 10 分)

已知实验数据

x_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

用最小二乘法求形如 $y = a + bx^2$ 的经验公式, 并计算其均方误差.

$$\text{解: } f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x^2$$

$$f_0 = (1, 1, 1, 1, 1), \quad f_1 = (19^2, 25^2, 31^2, 38^2, 44^2)$$

$$f = (19, 32.3, 49, 73.3, 97.8)$$

四. 解答题 (每题 10 分, 共 20 分)

$$f(x) = \frac{x}{4+x^2} \quad f''(x) =$$

1. 已知定积分 $\int_0^1 \frac{x}{4+x^2} dx$. 令 $n=2$, 分别利用复化梯形公式和复化辛普森公式计算此积分 (保留四位有效数字), 并估计它们的误差: 根据计算结果你能得到什么

结论? $T_2 = \frac{1}{2 \times 2} (0 + \frac{1}{4} + 2 \times \frac{\frac{1}{2}}{4 + \frac{1}{4}} + 2 \times \frac{\frac{3}{4}}{4 + \frac{9}{4}}) \approx$
解 $S_2 = \frac{1}{12} (0 + \frac{1}{4} + 4 \times \frac{\frac{1}{4}}{4 + \frac{1}{4}} + 4 \times \frac{\frac{3}{4}}{4 + \frac{9}{4}} + 2 \times \frac{\frac{1}{2}}{4 + \frac{1}{4}}) \approx$

$$|I - T_2| \leq \frac{1}{12 \times 4} M_2 =$$

$$|I - S_2| \leq \frac{1}{2880 \times 2^4} M_4 =$$

2. 试以 $x_0 = -h, x_1 = 0, x_2 = h$ ($0 < h < 1$) 为求积节点, 推出计算积分 $\int_{-h}^h f(x) dx$ 的插值型求积公式, 指出其截断误差; 并确定 h 的值, 使其具有尽可能高的代数精度.

解 设 $\int_{-h}^h f(x) dx = A_0 f(-h) + A_1 f(0) + A_2 f(h)$

五. 解答题 (每题 10 分, 共 20 分)

1. 求下列差分公式的局部截断误差, 并指出此方法的阶数.

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 5k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{3}{5}h, y_n + \frac{3}{5}hk_1) \end{cases}$$

$$k_2 = f_n + \frac{3}{5}h \frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{3}{5}h f_n \frac{\partial f_n}{\partial y} + \frac{1}{2} (\frac{9}{25} h^2 \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + \frac{18}{25} h^2 f_n \frac{\partial^2 f_n}{\partial x \partial y} + \frac{9}{25} h^2 f_n^2 \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}) + o(h^3)$$

$$= f_n + \frac{3}{5}h (\frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y} f_n) + \frac{9}{50} h^2 (\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f_n}{\partial x \partial y} f_n + \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} f_n^2) + o(h^3)$$

$$\therefore y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{1}{2} h^2 (\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} f_n) + \frac{3}{10} h^3 (\frac{\partial^3 f_n}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 f_n}{\partial x \partial y} f_n + \frac{\partial^3 f_n}{\partial y^3} f_n^2) + o(h^4)$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \frac{h^3}{6} y'''(x_n)$$

$$= y_n + hf_n + \frac{1}{2} h^2 (\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} f_n) + \frac{1}{6} h^3 (\frac{\partial^3 f_n}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 f_n}{\partial x \partial y} f_n + \frac{\partial^3 f_n}{\partial y^3} f_n^2 + \frac{\partial^3 f_n}{\partial x} \frac{\partial^2 f_n}{\partial y} + (\frac{\partial^2 f_n}{\partial y})^2 f_n) + o(h^4)$$

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = o(h^3)$$

阶数为 2.

2. 已知求解常微分方程初值问题:

$$\begin{cases} y' = ye^x, & x \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的差分公式:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hk_1) \\ y_0 = \alpha \end{cases}$$

(1) 判断此差分公式是否是收敛的;

(2) 求此差分公式的绝对稳定区间.

解: 1) $|ye^x - \bar{y}e^x| = e^x |y - \bar{y}| \leq e |y - \bar{y}|$
满足 Lipschitz 条件.

六. 证明题 (每题 5 分, 共 10 分)

1. 设 $\| \cdot \|$ 为矩阵的算子范数, $\|B\| < 1$, 求证: $\frac{1}{1 + \|B\|} \leq \|(I+B)^{-1}\|$

2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有二阶连续导数, 证明:

$$|f(x) - [f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)]| \leq \frac{M_2}{8}(b-a)^2$$