学院________ 班级________ 学号________ 姓名________

密 封 线

东北大学考试试卷（A 闭卷）

2020—2021 学年秋季学期

课程名称：数值分析

得分：

一. 简答题（每题 5 分，共 30 分）.

1. 假设在四舍五入的计算系统中，$x = 2.000$具有 4 位有效数字. 请判断$y = x^2$具有几位有效数字.

2. 对于矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$以及正交矩阵$\boldsymbol{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，求矩阵$\boldsymbol{A}$的$\infty$-范数$\|\boldsymbol{A}\|_\infty$以及矩阵$\boldsymbol{QA}$的 F-范数$\|\boldsymbol{QA}\|_F$的值.

3. 设$f(x)=x^4+1$，求差商$f[-1, 0, 1, 2]$的值.

4. 已知矩阵 A 可分解为$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&8&12\\0&4&8\\0&0&4\end{pmatrix}$. 请写出 A 的平方根分解 $A=GG^{\mathrm{T}}$，其中 G 是所有对角元均为正数的下三角矩阵.

5. 已知插值节点分别为$x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$. 请计算二次拉格朗日插值多项式的基函数$l_0(x)$在 x=1/2 处的值$l_0\left(\frac{1}{2}\right)$.

6. 已知$\boldsymbol{A}$为n阶实对称正定矩阵，$\boldsymbol{B}$为n阶实对称矩阵，且$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BAB}$是正定矩阵. 求证：迭代格式$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{d}$对于任意初始向量$\boldsymbol{x}^{(0)}$均收敛.

学院______ 班级______ 学号______ 姓名______

密 线

得分：

二. 计算题 （共 10 分）

已知三次样条函数形如$S(x)=\begin{cases}a_3x^3+a_2x^2+1, & x\in[0,\ 1];\\ b_3x^3+b_1x+2, & x\in[1,\ 2],\end{cases}$

且其二阶导函数满足条件$S''(2)=12$. 求参数a_3,a_2,b_3,b_1.

得分：

三. 论述题 （共 12 分）

对于方程

$$9xe^{x}-1=0,$$

(1) 说明此方程在$\left[0,\ \frac{2}{9}\right]$上存在唯一的根 α;

(2) 写出解此方程的 Newton 迭代格式;

(3) 求证：在区间$\left[0,\ \frac{2}{9}\right]$内任取初值，均能使Newton迭代格式收敛于正根 α.

学院________ 班级________ 学号________ 姓名________

密 线

得分：

四．论述题 （共 12 分）

对于数值求积公式

$$\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\,dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1),$$

(1) 当 $A_1=1/4$, $x_1=3/8$ 时，请确定参数 A_0, x_0, 使此公式的代数精度尽可能地高，并确定此时公式的代数精度;

(2) 请说明：当调整参数 A_0, A_1, x_0, x_1 使此求积公式具有理论上的最大代数精度时，对于求积节点 x_0, x_1, 必成立以下等式

$$\int_{-1/2}^{1/2} (x-x_0)(x-x_1)\,dx = 0.$$

得分：

五. 计算题（共 10 分）

已知一组实验数据如下表

x_i	1	2	3	4	5
y_i	4	4.5	6	8	8.5
ρ_i	2	1	3	1	1

试用最小二乘法求线性拟合曲线 $y=a+bx$.

得分：

六. 证明题（共 10 分）

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优矩阵，请证明：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异矩阵.

学院________ 班级________ 学号________ 姓名________

密 线

得分：

七. 论述题 （共 16 分）

已知常微分方程初值问题$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y), \ 1 < x < 2, \\ y(1) = 1. \end{cases}$，其中$f(x,y)$关于$y$满足 Lipschitz 条件.

(1) 用显式二步方法$y_{n+1} = \alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n-1} + h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n-1})$解此初值问题，其中$f_n = f(x_n, y_n)$，$f_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})$．请确定参数$\alpha_0$，$\alpha_1$，$\beta_0$，$\beta_1$，使此方法的阶数尽可能高，并求局部截断误差主项;

(2) 对于解此常微分方程初值问题的如下差分格式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hK_2, \\ K_1 = f(x_n, y_n), \\ K_2 = f(x_n + h, y_n + hK_1), \end{cases}$$

在题设条件下以及$h \le h_0$时，请判断：此格式的增量函数$\Phi(x, y, h)$是否关于y满足 Lipschitz 条件？说明理由.

(3) 对于试验方程$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \lambda y, \ \ 1 < x < 2, \\ y(1) = 1. \end{cases}$请确定(2)中差分格式的绝对稳定域.