

班级
学号
姓名

东北大学研究生院考试试卷

2018—2019学年第—学期

课程名称：数值分析（共3页）

总分	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十

- 一、(10分) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ , 用矩阵LU分解法求矩阵A的逆矩阵。

解：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1}$$

=

- 二、(12分) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ , 向量  $b = (b_1 \ b_2 \ b_3)^T$ ,

1. 确定参数a的取值范围, 使求解线性方程组  $Ax=b$  的Jacobi迭代法收敛;
2. 在Jacobi迭代法收敛的前提下, 证明: 当  $0 < a < 1$  时, 迭代格式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(b - Ax^{(k)})$$

$$\text{解: } 1. M_j = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ -a & 0 & -a \\ -a & -a & 0 \end{pmatrix} \quad |M_j| = \begin{vmatrix} 1-a & a & a \\ a & 1-a & a \\ a & a & 1-a \end{vmatrix} = (1-a)(\lambda^2 + a\lambda - 2a^2) = 0$$

$$|\lambda| = \max |\lambda_i| = 2|a| < 1 \quad \therefore |a| < \frac{1}{2}$$

$$2. x^{(k+1)} = (E - WA)x^{(k)} + wb$$

$$\text{可知迭代矩阵 } M = E - WA = \begin{pmatrix} 1-w & -wa & -wa \\ -wa & 1-w & -wa \\ -wa & -wa & 1-w \end{pmatrix}$$

- 二、(10分) 已知函数  $f(x)$  在若干离散节点上的带权数据(权函数为  $p(x)$ )如下表所示:

x	-2	-1	0	1	2
$y=f(x)$	1	2	3	4	10
$p(x)$	1	1	2	1	1

试用最小二乘法求出线性拟合多项式  $p_1(x)$  及其均方误差。

解:  $y = at + bx$

$$f_0(x) = 1 \quad f_1(x) = x$$

$$f_0 = (1, 1, 1, 1, 1)^T \quad f_1 = (-2, -1, 0, 1, 2)^T$$

$$f_1 = (1, 2, 3, 4, 10)^T$$

$$\begin{cases} 6a + 10b = 23 \\ 0a + 10b = 20 \end{cases}$$

$$\therefore a = \frac{23}{6}, \quad b = \frac{12}{5}$$

$$y = \frac{23}{6}x + \frac{12}{5}$$

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \sqrt{1 \times (-4\frac{23}{6}-1)^2 + 1 \times (-2+\frac{23}{6}-2)^2} \\ &\quad + 2 \times (\frac{23}{6}-3)^2 + 1 \times (2+\frac{23}{6}-4)^2 \\ &\quad + 1 \times (4+\frac{23}{6}-10)^2 \end{aligned}$$

- 四、(10分) 对积分  $\int_0^1 xf(x)dx$  建立两点Gauss公式, 并给出误差。

解: 由  $\int_0^1 p(x)dx = 1$ ,  $p_0(x) = 1$ ,  $p_1(x) = x - \frac{(x-1)^2}{4 \cdot 15}x^3 = x - \frac{\int_0^1 x^2 dx}{\int_0^1 x^3 dx}x^3$

$$p(x) = x^2 - \frac{(x-1)^2}{(1-1)}x^3 - \frac{(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2})}{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})(\frac{3}{2}-\frac{1}{2})}x^3 = x - \frac{2}{3}$$

$$= x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{3}{10}$$

$$\text{令 } p(x) = 0 \quad \text{得 } x_1 = \frac{6+\sqrt{6}}{10}, \quad x_2 = \frac{6-\sqrt{6}}{10}$$

$$A_1 = \int_0^1 \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \cdot p(x) dx \approx 0.318$$

$$A_2 = \int_0^1 \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \cdot p(x) dx \approx 0.182$$

$$\therefore \int_0^1 xf(x)dx \approx 0.318 f\left(\frac{6+\sqrt{6}}{10}\right) + 0.182 f\left(\frac{6-\sqrt{6}}{10}\right)$$

$$\text{误差 } R_{eff} = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \int_0^1 p(x) w(x) dx$$



五. (10分) 利用复化 Simpson 公式  $S_2$  计算定积分  $I = \int_0^2 \cos x dx$  的近似值，并给出误差。

$$\text{解: } S_2 = \frac{2}{12} (f(0) + f(2) + 4f(\frac{1}{2}) + 4f(\frac{3}{2}) + 2f(1)) \approx$$

$$|I - S_2| \leq \frac{2^5}{2880 \times 2^4} M_4$$

$$|f''(x)| = |\cos x| \leq 1$$

$$\therefore |I - S_2| \leq \frac{2}{2880}$$

密

封

线

六. (10分) 对于数值求积公式

$$\int_0^1 f(x) dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(1)$$

确定参数  $A_0, A_1, x_0$ ，使得此公式的代数精度尽可能高；并求此公式的代数精

度。解:  $f(x) = 1, x, x^2$  都精确成立，则有

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 1 \\ A_0 x_0 + A_1 = \frac{1}{2} \\ A_0 x_0^2 + A_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$A_0 = \frac{3}{4}$$

$$A_1 = \frac{1}{4}$$

$$x_0 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \int_0^1 f(x) dx \approx \frac{3}{4} f(\frac{1}{3}) + \frac{1}{4} f(1)$$

对于  $f(x) = x^3$

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times 1 \neq \frac{1}{4}$$

∴ 代数精度为 2。

七. (10分) 设  $f(x) = x^2 - a (a > 0)$ ，构造求解方程  $f(x) = 0$  根的简化牛顿迭代格式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{M}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

1. 求使该迭代格式具有局部收敛性的参数  $M$  的取值范围；
2. 求使该迭代格式具有尽可能高收敛阶的参数  $M$  的值。

八. (5分) 证明: 矩阵的  $F$ -范数在正交变换下保持不变，即  $\|A\|_F = \|Q A Q^T\|_F = \|A Q^T\|_F$ ，其中  $A, Q$  是  $n$  阶方阵，且  $Q^{-1} = Q^T$ 。

九. (15分) 已知求解常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

的差分公式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3}(K_1 + \lambda K_2) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h K_1) \\ y_0 = \alpha \end{cases}$$

1. 确定参数  $\lambda, \alpha, \beta$ ，使差分公式的阶尽可能高，并指出差分公式的阶；
2. 试判断用此差分公式求解初值问题  $\begin{cases} y' = ye^x & 1 \leq x \leq 2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$  的收敛性；
3. 对试验方程  $y' = \lambda y, \lambda < 0$ ，试给出如上差分方法的绝对稳定区间？

封

○

线

十. (8分) 已知函数  $f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + 1, a_4, a_3 \in R$ ，等距节点  $x_0, x_1, x_2$  满足条件  $x_1 - x_0 = x_2 - x_1$ ，而  $x_3$  为  $R$  上任意一点。

1. 若三次插值多项式  $H_3(x)$  满足插值条件：

$$H_3(x_0) = f(x_0), \quad H_3(x_1) = f(x_1), \quad H_3(x_2) = f(x_2), \quad H_3'(x_1) = f'(x_1),$$

求  $H_3(x)$  的插值余项  $R(x)$  在区间  $[x_0, x_2]$  上的积分  $I(R) = \int_{x_0}^{x_2} R(x) dx$  的值。

2. 若三次插值多项式  $L_3(x)$  满足插值条件：

$$L_3(x_0) = f(x_0), \quad L_3(x_1) = f(x_1), \quad L_3(x_2) = f(x_2), \quad L_3(x_3) = f(x_3),$$

设  $L_3(x)$  的插值余项  $\bar{R}(x)$  在区间  $[x_0, x_2]$  上的积分为  $I(\bar{R}) = \int_{x_0}^{x_2} \bar{R}(x) dx$ 。

证明： $I(R) = I(\bar{R})$ 。