学院　班级　学号　姓名

密　封　线

东北大学研究生院考试试卷

2021—2022 学年第一学期

课程名称：数值分析（A 闭卷）

总分	一	二	三	四	五	六	七

注意：本试卷分正反两面，共七道大题。

一、简答题（每题 6 分，共 30 分）

1. 如何计算 $\frac{1-e^x}{x}$（$|x| \ll 1$），使其数值计算结果更精确，并说明理由.

2. 判断用Gauss-Seidel迭代法求解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$ 的收敛性，并说明理由.

3. 写出矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 4 \\ 9 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ 的Doolittle分解式 $A = LU$，并求 $\|L\|_\infty$ 和 $\|U\|_1$

4. 写出矩阵 A 的谱半径 $\rho(A)$ 和其相容范数 $\|A\|$ 之间的关系式，并加以说明.

5. 利用最小二乘法，求拟合下列数据的形如 $y = ax + bx^2$ 的拟合曲线.

i	0	1	2
x_i	-1	0	1
y_i	2	6	4

6. 写出用 $n = 3$ 的复化梯形公式 T_3 近似计算 $I = \int_0^3 x^2 dx$ 的表达式，并计算其值.

二、计算题（共 12 分）

已知某光滑函数 $f(x)$ 在一些节点上的数据如下表：

x_i	1	2	3
$f(x_i)$	2	0	8
$f'(x_i)$	未知	1	未知

(1) 计算差商 $f[1,2,3]$ 的值；

(2) 求满足如上表中全部插值条件的三次插值多项式 $H_3(x)$，并写出插值余项表达式.

三、计算题（共 10 分）

设权函数 $\rho(x) = x^2$，判定函数 $1, x, x^2 - \frac{3}{5}$ 在 $[-1,1]$ 上两两正交，并求一个三次多项式，使其在 $[-1,1]$ 上与上述函数两两正交.

四、计算题（共 10 分）

记 $|x|$ 表示 x 的绝对值，对于数值求积公式

$$\int_{-1}^{1} |x| f(x)\, dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2),$$

(1) 试确定参数 A_1，A_2，x_1，x_2，使求积公式的代数精度尽可能高，并确定其代数精度.

(2) 当 $f(x)$ 为四次多项式且四次项系数为 1 时，试计算求积误差的值.

五、论述题（共 15 分）

假设函数 $f(x)$ 充分光滑，利用迭代法

$$x_{k+1} = x_k + \omega f(x_k), \quad k = 0, 1, \cdots$$

求解非线性方程 $f(x) = 0$，其中 ω 为迭代参数，且 $\omega \neq 0$.

(1) 若近似解序列 $\{x_k\}$ 是收敛的，其极限值 α 是否是方程 $f(x) = 0$ 的根，并说明理由.

(2) 设 $f(x)$ 为单调增函数且 $f'(x) < M$，其中 M 为某个正常数.

证明：当 $\frac{-2}{M} < \omega < 0$ 时，对于适当的初值，迭代法必收敛.

(3) 对于 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$，若上述迭代法收敛，试判断其收敛阶，并说明理由.

六、论述题（共 15 分）

已知常微分方程初值问题$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=f(x,y),\ a\le x\le b\\ y(a)=1\end{cases}$，设其解$y(x)$及$f(x,y)$在定义域内都是连续且充分光滑的函数。考虑求解如上问题的差分格式

$$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+h(t_1K_1+t_2K_2),\\ K_1=f(x_n,\ y_n),\\ K_2=f(x_n+h,\ y_n+\alpha hK_1).\end{cases}$$

(1) 求此格式的绝对稳定域.

(2) 试推导当差分格式的局部截断误差达到最小时，参数t_1,t_2,α应满足的条件，并指出此时差分格式是几阶方法.

七、证明题（共 8 分）

设A，B是n阶矩阵，且A是非奇异矩阵，考虑如下线性方程组

$$\begin{cases}Ax+By=b_1\\ Bx+Ay=b_2\end{cases}$$

其中$b_1,b_2\in R^n$已知，$x,y\in R^n$未知。若$A^{-1}B$的谱半径$\rho(A^{-1}B)<1$.

证明：如下迭代格式必收敛.

$$\begin{cases}Ax^{(k+1)}=-By^{(k)}+b_1,\\ Ay^{(k+1)}=-Bx^{(k)}+b_2.\end{cases}\quad(k=0,1,2,\cdots).$$