

班 级
学 号
姓 名

东北大学研究生院考试试卷

2018 — 2019 学年第 一 学期

课程名称: 数值分析 (共 3 页)

总分	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十

一. (10 分) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ , 用矩阵 LU 分解法求矩阵 A 的逆矩阵.

解:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 9 \\ 0 & -8 & 17 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = U^{-1} L^{-1}$$

$$=$$

三. (12 分) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ , 向量  $b = (b_1 \ b_2 \ b_3)^T$ ,

1. 确定参数 a 的取值范围, 使求解线性方程组  $Ax = b$  的 Jacobi 迭代法收敛;

2. 在 Jacobi 迭代法收敛的前提下, 证明: 当  $0 < \omega < 1$  时, 迭代格式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(b - Ax^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \text{必收敛.}$$

解: 1.  $M_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ -a & 0 & -a \\ -a & -a & 0 \end{pmatrix}$   $|\lambda E - M_J| = \begin{vmatrix} \lambda & a & a \\ a & \lambda & a \\ a & a & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda^2 + a\lambda - 2a^2) = 0$   
 $\lambda = a, -a, -2a.$

$$\rho(M_J) = \max |\lambda_i| = 2|a| < 1 \quad \therefore |a| < \frac{1}{2}$$

$$2. x^{(k+1)} = (E - \omega A)x^{(k)} + \omega b$$

可知迭代矩阵  $M = E - \omega A = \begin{pmatrix} 1-\omega & -\omega a & -\omega a \\ -\omega a & 1-\omega & -\omega a \\ -\omega a & -\omega a & 1-\omega \end{pmatrix}$

二. (10 分) 已知函数  $f(x)$  在若干离散节点上的带权数据(权函数为  $\rho(x)$ )如下

表所示:

x	-2	-1	0	1	2
y=f(x)	1	2	3	4	10
$\rho(x)$	1	1	2	1	1

试用最小二乘法求出线性拟合多项式  $p_1(x)$  及其均方误差.

解:  $y = a + bx$   
 $f_0(x) = 1 \quad f_1(x) = x$   
 $f_0 = (1, 1, 1, 1, 1)^T \quad f_1 = (-2, -1, 0, 1, 2)^T$   
 $f_2 = (1, 2, 3, 4, 10)^T$   

$$\begin{cases} 6a + 0b = 23 \\ 0a + 10b = 20 \end{cases}$$
  
 $\therefore a = \frac{23}{6} \quad b = \frac{2}{5}$   
 $\therefore y = \frac{23}{6} + \frac{2}{5}x$

$$p_1(x) = \sqrt{\frac{1 \times (-4 + \frac{23}{6} - 1)^2 + 1 \times (-2 + \frac{23}{6} - 2)^2}{1 \times (-4 + \frac{23}{6} - 1)^2 + 1 \times (-2 + \frac{23}{6} - 2)^2 + 1 \times (2 + \frac{23}{6} - 4)^2}}$$

$$=$$

四. (10 分) 对积分  $\int_0^1 x f(x) dx$  建立两点 Gauss 公式, 并给出误差.

解: 由已知  $p(x) = x$ ,  $p_0(x) = 1$ .  $p_1(x) = x - \frac{(x-0)(x-1)}{(1-0)} \times 1 = x - \frac{x(x-1)}{1} = x - \frac{x^2 - x}{1} = x - \frac{x^2}{1} + \frac{x}{1} = x - \frac{x^2}{1} + x = 2x - x^2$

$$B(x) = x^2 - \frac{(x-0)(x-1)}{(1-0)} \times 1 = x^2 - \frac{x(x-1)}{1} = x^2 - \frac{x^2 - x}{1} = x^2 - \frac{x^2}{1} + \frac{x}{1} = x$$

$$= x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{2}{5}$$

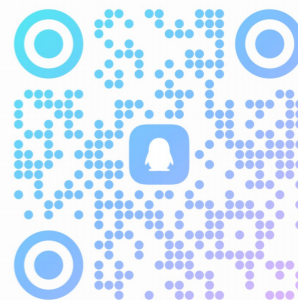
$$\text{令 } B(x) = 0 \quad \text{得 } x_1 = \frac{6+\sqrt{8}}{10} \quad x_2 = \frac{6-\sqrt{8}}{10}$$

$$A_1 = \int_0^1 \frac{x-x_2}{x_1-x_2} p(x) dx \approx 0.318$$

$$A_2 = \int_0^1 \frac{x-x_1}{x_2-x_1} p(x) dx \approx 0.182$$

$$\therefore \int_0^1 x f(x) dx \approx 0.318 f(\frac{6+\sqrt{8}}{10}) + 0.182 f(\frac{6-\sqrt{8}}{10})$$

$$\text{误差 } R(f) = \frac{f^{(2)}(\eta)}{(2n)!} \int_0^1 p(x) w(x) dx$$



五. (10分) 利用复化 Simpson 公式  $S_2$  计算定积分  $I = \int_0^2 \cos x dx$  的近似值,

并给出误差。

$$\text{解: } S_2 = \frac{2}{12} (\cos 0 + \cos 2 + 4\cos \frac{1}{2} + 4\cos \frac{3}{2} + 2\cos 1) \approx$$

$$|I - S_2| \leq \frac{2^5}{2880 \times 2^4} M_4$$

$$|f(x)| = |\cos x| \leq 1$$

$$\therefore |I - S_2| \leq \frac{2}{2880}$$

六. (10分) 对于数值求积公式

$$\int_0^1 f(x) dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(1)$$

确定参数  $A_0, A_1, x_0$ , 使得此公式的代数精度尽可能高; 并求此公式的代数精

度。解:  $f(x) = 1, x, x^2$  都精确成立则有

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 1 \\ A_0 x_0 + A_1 = \frac{1}{2} \\ A_0 x_0^2 + A_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$A_0 = \frac{3}{4}$$

$$A_1 = \frac{1}{4}$$

$$x_0 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \int_0^1 f(x) dx \approx \frac{3}{4} f(\frac{1}{3}) + \frac{1}{4} f(1)$$

$$\text{对于 } f(x) = x^3$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{27} + \frac{1}{4} \times 1 \neq \frac{1}{4}$$

$\therefore$  代数精度为 2.

七. (10分) 设  $f(x) = x^2 - a (a > 0)$ , 构造求解方程  $f(x) = 0$  根的简化牛顿迭代格式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{M}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

1. 求使该迭代格式具有局部收敛性的参数  $M$  的取值范围;
2. 求使该迭代格式具有尽可能高收敛阶的参数  $M$  的值.

八. (5分) 证明: 矩阵的  $F$ -范数在正交变换下保持不变, 即

$$\|A\|_F = \|QA\|_F = \|AQ\|_F, \quad \text{其中 } A, Q \text{ 是 } n \text{ 阶方阵, 且 } Q^{-1} = Q^T.$$

九. (15 分) 已知求解常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

的差分公式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3}(K_1 + \lambda K_2) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h K_1) \\ y_0 = \alpha \end{cases}$$

1. 确定参数  $\lambda, \alpha, \beta$ , 使差分公式的阶尽可能高, 并指出差分公式的阶;
2. 试判断用此差分公式求解初值问题  $\begin{cases} y' = ye^x & 1 \leq x \leq 2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$  的收敛性;
3. 对试验方程  $y' = \lambda y, \lambda < 0$ , 试给出如上差分方法的绝对稳定区间?

十. (8 分) 已知函数  $f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + 1$ ,  $a_4, a_3 \in R$ , 等距节点  $x_0, x_1, x_2$  满足条件  $x_1 - x_0 = x_2 - x_1$ , 而  $x_3$  为  $R$  上任意一点。

1. 若三次插值多项式  $H_3(x)$  满足插值条件:

$$H_3(x_0) = f(x_0), \quad H_3(x_1) = f(x_1), \quad H_3(x_2) = f(x_2), \quad H_3'(x_1) = f'(x_1),$$

求  $H_3(x)$  的插值余项  $R(x)$  在区间  $[x_0, x_2]$  上的积分  $I(R) = \int_{x_0}^{x_2} R(x) dx$  的值。

2. 若三次插值多项式  $L_3(x)$  满足插值条件:

$$L_3(x_0) = f(x_0), \quad L_3(x_1) = f(x_1), \quad L_3(x_2) = f(x_2), \quad L_3(x_3) = f(x_3),$$

设  $L_3(x)$  的插值余项  $\bar{R}(x)$  在区间  $[x_0, x_2]$  上的积分为  $I(\bar{R}) = \int_{x_0}^{x_2} \bar{R}(x) dx$ ,

证明:  $I(R) = I(\bar{R})$ 。