班级
学号
姓名

密 封 线

东北大学研究生院考试试卷

2016 —2017 学年 第 一 学期

课程名称： 数值分析 （共 2 页）

总分	一	二	三	四	五	六

一、填空题：（每题 3 分，共 15 分）

1. 为了使计算 $y=12+3(x-1)-4(x-1)^2+9(x-1)^3$ 的乘除法次数最少，应该将表达式改写为（ $y=\{[9(x-1)-4](x-1)+3\}(x-1)+12$ ）.

2. 用 $\frac{22}{7}$ 作为圆周率 π 的近似值，有效数字的位数为（ 3 ）.

3. 求方程 $x=\frac{1}{3}e^x$ 根的 Newton 迭代格式是 $x_{k+1}=x_k-\frac{3x_k-e^{x_k}}{3-e^{x_k}}$.

4. 设求积公式 $\int_{-1}^{2}f(x)dx\approx A_0f(-1)+A_1f(0)+A_2f(1)$ 是插值型求积公式，则积分系数 $A_0=($ 3/4 $)$, $A_1=($ 0 $)$, $A_2=($ 9/4 $)$.

5. 已知实对称矩阵 A 的全部特征值是 3,2,1，则 $\mathrm{cond}_2(A)=$ 3

二、（10 分）设 $A=\begin{bmatrix}10 & a & 0\\ b & 10 & b\\ 0 & a & 5\end{bmatrix}$，试推导用 Jacobi 迭代法求解方程组 $Ax=\beta$ 收敛的充要条件.

解 雅可比法的迭代矩阵

$$B_J=\begin{bmatrix}0 & -\frac{a}{10} & 0\\ -\frac{b}{10} & 0 & -\frac{b}{10}\\ 0 & -\frac{a}{5} & 0\end{bmatrix},$$

$|\lambda I-B_J|=\lambda(\lambda^2-\frac{3ab}{100}),\rho(B_J)=\frac{\sqrt{3|ab|}}{10}$，故雅可比法收敛的充要条件是 $|ab|<\frac{100}{3}$.

三、（10 分）请叙述用牛顿迭代法求解非线性方程单根的收敛定理，并加以证明.

四、（10 分）取 6 个点的函数值，用复化辛普森公式计算积分

$$I=\int_0^1\frac{dx}{1+x}$$

并估计截断误差.

解 区间长度为 $b-a=1, n=5$, 故 $h=1/5=0.2$, 所需节点为 $x_i=0+ih$ ($i=0,1,2,3,4,5$) ,在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 中还需计算 $x_{i-1/2}=x_{i-1}+\frac{1}{2}h,\ i=1,2,3,4,5$ 故有

$$S_5=\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}[\frac{1}{1+0}+2\times(\frac{1}{1+0.2}+\frac{1}{1+0.4}+\frac{1}{1+0.6}+\frac{1}{1+0.8})+4\times(\frac{1}{1+0.1}+\frac{1}{1+0.3}+\frac{1}{1+0.5}+\frac{1}{1+0.7}+\frac{1}{1+0.9})+\frac{1}{1+1}=0.69315$$

其截断误差可估计如下 $|R[f]|=|-\frac{1}{2880}h^4f^{(4)}(\xi)|\le\frac{h^4}{2880}\max_{0\le x\le 1}|f^{(4)}(x)|$

由于 $f^{(4)}(x)=24/(1+x)^5$，$\max_{0\le x\le 1}|f^{(4)}(x)|=24$，故

$$|R[f]|\le\frac{h^4}{2880}\bullet 24=1.3333\times10^{-5}$$

五、(10 分)给定离散数据

x_i	-1	0	1	2
y_i	1	-1	0	2

试求形如 $y=a+bx^3$ 的拟合曲线。

解：取 $\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x^3$

则有 $\varphi_0=(1,1,1,1)^T,\varphi_1(x)=(-1,0,1,8)^T,f=(1,-1,0,2)^T$,

正则方程组为 $\begin{cases}4a+8b=2\\8a+66b=15\end{cases}$,

拟合曲线为：$y=\frac{3}{50}+\frac{11}{50}x^3=0.06-0.22x^3$

六、(10 分)求区间[-1，1]上权函数为 $\rho(x)=x^2$ 的二次正交多项式 $P_2(x)$.

解　$P_0(x)=1$，　$P_1(x)=x-\frac{(x,1)}{(1,1)}1=x$，

$$P_2(x)=x^2-\frac{(x^2,1)}{(1,1)}1-\frac{(x^2,x)}{(x,x)}x=x^2-\frac{3}{5}$$

七、

八、(15 分)设求解常微分方程初值问题 $\begin{cases}y'=f(x,y), & x\in[a,b]\\y(a)=\alpha\end{cases}$ 的差分公式为

$$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}f(x_n,y_n))]\\y_0=\alpha\end{cases}$$

(1)求此差分公式的阶；(2)判断如上给出的差分方法是否收敛？为什么？

(3)以此法求解 $y'=\lambda y(\lambda<0),y(a)=\alpha$ 时是否稳定?为什么?

(1) $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}f_n+\frac{h}{2}[f_n+\frac{h}{2}(\frac{\partial f_n}{\partial x}+\frac{\partial f_n}{\partial y}\cdot f_n)+\frac{h^2}{8}(\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x\partial y}\cdot f_n+\frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}f_n^2)+o(h^3)]$

$=y_n+hf_n+\frac{h^2}{4}(\frac{\partial f_n}{\partial x}+\frac{\partial f_n}{\partial y}\cdot f_n)+\frac{h^3}{16}(\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x\partial y}f_n+\frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}f_n^2)+o(h^4)$

$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+\frac{h^3}{6}y'''(x_n)+o(h^4)$

$=y_n+hf_n+\frac{h^2}{2}(\frac{\partial f_n}{\partial x}+\frac{\partial f_n}{\partial y}f_n)+\frac{h^3}{6}(\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x\partial y}f_n+\frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}f_n^2+\frac{\partial f_n}{\partial x}\frac{\partial f_n}{\partial y}$

$+(\frac{\partial f_n}{\partial y})^2f_n)+o(h^4)$

$y(x_{n+1})-y_{n+1}=o(h^3)$　阶为2.

九、(8 分) 已知求积公式

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx \frac{5}{9}g(-\sqrt{\frac{3}{5}})+\frac{8}{9}g(0)+\frac{5}{9}g(\sqrt{\frac{3}{5}})$$

为高斯公式，试给出形如

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)+A_2 f(x_2)$$

的求积公式，使其代数精度达到 5.

密

解 令 $x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$，$t\in[-1,1]$，并记 $g(t)=\frac{b-a}{2}f(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t)$，则当 $f(x)$ 是任意次数不超过 5 的关于 x 的多项式时，$g(x)$ 是次数不超过 5 的关于 t 的多项式. 由于 3 点 Gauss 公式的代数精度为 5，所以有

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{b-a}{2}f(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t)dt$$
$$=A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)+A_2 f(x_2)$$

封

其中

$$A_0=\frac{5(b-a)}{18},\quad A_1=\frac{4(b-a)}{9},\quad A_2=\frac{5(b-a)}{18}.$$

$$x_0=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}},\quad x_1=\frac{a+b}{2},\quad x_2=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

因此求积公式

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)+A_2 f(x_2)$$

线

的代数精度是 5.