班　级	
学　号	
姓　名	

密 封 线

东北大学研究生院考试试卷

2019—2020 学年 秋季学期

课程名称：数值分析 （共 3 页）

一. 简答题(每题 5 分，共 30 分).

1. 对于矩阵 $A=\begin{bmatrix}-5 & -2 & 0\\ 2 & -8 & 6\\ 0 & 7 & 3\end{bmatrix}$，计算 $\|A\|_1$ 和 $\|A\|_\infty$.

$\|A\|_\infty=\max\{7,16,10\}=16$； $\|A\|_1=\max\{7,17,9\}=17$

2. 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 10 & 6\\ 0 & 6 & 5\end{bmatrix}$ 的 *Cholesky* 分解. **解：** $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

3. 写出求解方程 $x^3-4x^2+5x=2$ 所有根的 *Newton* 迭代格式，并指出其收敛阶.

解：方程可写为 $(x-2)(x-1)^2=0$，故方程有重根 $x_1=x_2=1$，单根 $x_3=2$

求单根 $x_3=2$ 的 Newton 迭代格式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^3-4x_k^2+5x_k-2}{3x_k^2-8x_k+5}=\frac{2(x_k^2-x_k-1)}{3x_k^2-5}，\quad k=0,1,2...$$

其迭代函数 $\varphi(x)$ 有 $\varphi'(x)=\dfrac{6x^2-20x+16}{(3x-5)^2}$， $\varphi''(x)=\dfrac{12x+40}{(3x-5)^2}$ 可知

$\varphi'(2)=0$， $\varphi''(2)\neq 0$，故此时收敛阶为 2. 求重根 $x_1=x_2=1$ 的 Newton 迭代格式为

$$x_{k+1}=x_k-2\frac{x_k^3-4x_k^2+5x_k-2}{3x_k^2-8x_k+5}=\frac{x_k^2+x_k-4}{3x_k-5}，\quad k=0,1,2...$$

对于其迭代函数 $\varphi(x)$ 有

$$\varphi'(x)=\frac{3x^2-10x+7}{(3x-5)^2}，\quad \varphi''(x)=\frac{24x-40}{(3x-5)^2}$$

故可知 $\varphi'(1)=0$， $\varphi''(1)\neq 0$ 故收敛阶为 2.

4. 设 $f(x)=x^4+x$，求差商 $f[0,1]$ 和 $f[0,1,2,3,4]$ 的值.

$$f[0,1]=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=2；\ f[0,1,2,3,4]=\frac{f^{(4)}(\xi_m)}{4!}=1.$$

5. 采取四位十进制浮点运算，利用顺序高斯消去法和列主元高斯消去法分别求解下列线性方程组，并根据所得数值结果分析原因.

$$\begin{bmatrix}0.0001 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}.$$

解：顺序高斯消去过程：$\begin{bmatrix}0.0001 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1\times10^{-3} & 0.1\times10^{1} & 0.1\times10^{1}\\ 0.1\times10^{1} & 0.1\times10^{1} & 0.2\times10^{1}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-10^4r_1}$

$$\begin{bmatrix}0.1\times10^{-3} & 0.1\times10^{1} & 0.1\times10^{1}\\ 0.1\times10^{1}-0.1\times10^{1} & 0.1\times10^{1}-0.1\times10^{5} & 0.2\times10^{1}-0.1\times10^{5}\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}0.1\times10^{-3} & 0.1\times10^{1} & 0.1\times10^{1}\\ 0 & 0.00001\times10^{5}-0.1\times10^{5} & 0.00002\times10^{5}-0.1\times10^{5}\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}0.1\times10^{-3} & 0.1\times10^{1} & 0.1\times10^{1}\\ 0 & -0.1\times10^{5} & -0.1\times10^{5}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0.1\times10^{-3} & 0.1\times10^{1} & 0.1\times10^{1}\\ 0 & -0.1\times10^{5} & -0.1\times10^{5}\end{bmatrix}$$

解得： $x_1=0,x_2=1$.

Gauss 列主元素消去过程为：

$$\begin{bmatrix}0.0001 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0.0001 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1\times10^{1} & 0.1\times10^{1} & 0.2\times10^{1}\\ 0.1\times10^{-3} & 0.1\times10^{1} & 0.1\times10^{1}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-10^{-4}r_1}$$

$$\begin{bmatrix}0.1\times10^{1} & 0.1\times10^{1} & 0.2\times10^{1}\\ 0.1\times10^{-3} & 0.1\times10^{1} & 0.1\times10^{1}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-10^{-4}r_1}$$

$$\begin{bmatrix}0.1\times10^{1} & 0.1\times10^{1} & 0.2\times10^{1}\\ 0.1\times10^{-3}-0.1\times10^{-3} & 0.1\times10^{1}-0.1\times10^{-3} & 0.1\times10^{1}-0.2\times10^{-3}\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}0.1\times10^{1} & 0.1\times10^{1} & 0.2\times10^{1}\\ 0.1\times10^{-3}-0.1\times10^{-3} & 0.1\times10^{1}-0.00001\times10^{1} & 0.1\times10^{1}-0.00002\times10^{1}\end{bmatrix}\rightarrow$$

$\begin{bmatrix}0.1\times10^{1} & 0.1\times10^{1} & 0.2\times10^{1}\\ 0 & 0.1\times10^{1} & 0.1\times10^{1}\end{bmatrix}$解得： $x_1=1,x_2=1$. 因此，Gauss 列主元素消去法相对 Gauss 直接消去法，更好地避免了误差危害.

6. 对于数值求积公式 $\int_a^b f(x)dx\approx A_1f(x_1)+A_2f(x_2)$，试举例说明：此求积公式无论参数 A_1,A_2,x_1,x_2 取何值，必定不具有 4 次代数精度.

解：取 $f(x)=(x-x_1)^2(x-x_2)^2$ 则

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b(x-x_1)^2(x-x_2)^2\mathrm{d}x>0$ 而 $A_1f(x_1)+A_2f(x_2)=0$ 故此积分公式对 4 次多项式不精确成绩，不具有 4 次代数精度

密 封 线

二. (10 分) 给定线性方程组

$$Ax=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\9\end{bmatrix}, \qquad (1)$$

将(1)中的第一个方程左右两边同时乘以非零常数 k 后，得到

$$Bx=\begin{bmatrix}2k&k\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6k\\9\end{bmatrix}. \qquad (2)$$

问 k 取何值时，$Cond_\infty(B)$ 取最小值，并说明所得结果的意义.

解：$B=\begin{bmatrix}2k&k\\1&1\end{bmatrix}$ $|B|=k\neq 0, B^{-1}=\frac{1}{k}\begin{bmatrix}1&-k\\1&2k\end{bmatrix}$

$\|B\|_\infty=\max\{3|k|,2\},\|B^{-1}\|_\infty=2+\frac{1}{|k|}$,

$Cond_\infty(B)=\|B\|_\infty\|B^{-1}\|_\infty=(2+\frac{1}{|k|})\max\{3|k|,2\}$,

$$Cond_\infty(B)=\begin{cases}3|k|(2+\frac{1}{|k|})=6|k|+3, & |k|\geq\frac{2}{3},\\ 2(2+\frac{1}{|k|}), & |k|\leq\frac{2}{3}.\end{cases}$$

所以当 $k=\frac{2}{3}$ 或 $-\frac{2}{3}$ 时，$Cond_\infty(B)$ 达到最小值了。

意义：原条件数为 9，由此可知对方程组采取等价变形可以改变线性方程组的固有形态。

三. (10 分)设线性方程组 $Ax=b$，其中 $A=\begin{bmatrix}4&2\\1&3\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}6\\-1\end{bmatrix}$，用迭代公式

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha(b-Ax^{(k)})\ (k=0,1,2\cdots)$$

求解此方程组，问 α 取何实数可使此迭代法收敛？α 取何实数可使其收敛速度最快？

解：此迭代公式迭代矩阵 $M=I-\alpha A=\begin{bmatrix}1-4\alpha&-2\alpha\\-\alpha&1-3\alpha\end{bmatrix}$

其特征方程为 $|\lambda I-M|=\begin{vmatrix}\lambda-(1-4\alpha)&2\alpha\\\alpha&\lambda-(1-3\alpha)\end{vmatrix}=0$

解得 $\lambda_1=1-2\alpha,\lambda_2=1-5\alpha$

$$\rho(M)=\max\{|1-2\alpha|,|1-5\alpha|\}=\begin{cases}5\alpha-1, & \alpha\geq 2/7,\\1-2\alpha, & 0<\alpha<2/7,\\1-5\alpha, & \alpha\leq 0.\end{cases}$$

$\rho(M)<1$，当且仅当 $0<\alpha<2/5$ 时，故取 $0<\alpha<2/5$ 时，迭代法收敛；

当 $\alpha=\frac{2}{7}$ 时，$\rho(M)$ 达到最小值 $\frac{3}{7}$，故当 $\alpha=\frac{2}{7}$ 时，收敛速度最快。

四. (10 分) 确定常数 p,q,r，使迭代过程 $x_{k+1}=px_k+q\frac{a}{x_k^2}+r\frac{a^2}{x_k^5}$，$k=0,1,2,\cdots$ 产生的迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\sqrt[3]{a}$，并使其收敛阶尽可能高.

解：由 $x_{k+1}=px_k+q\frac{a}{x_k{}^2}+r\frac{a^2}{x_k{}^5},k=0,1,2,\cdots$ 得迭代函数为 $\varphi(x)=px+q\frac{a}{x^2}+r\frac{a^2}{x^5}$，

代入不动点 $\sqrt[3]{a}$ 得 $\sqrt[3]{a}=p\sqrt[3]{a}+q\frac{a}{(\sqrt[3]{a})^2}+r\frac{a^2}{(\sqrt[3]{a})^5}$，或

$1=p+q+r$.

由 $\varphi'(x)=p-2q\frac{a}{x^3}-5r\frac{a^2}{x^6}$ 令 $\varphi'(\sqrt[3]{a})=p-2q\frac{a}{(\sqrt[3]{a})^3}-5r\frac{a^2}{(\sqrt[3]{a})^6}=0$ 有

$p-2q-5r=0$.

由 $\varphi''(x)=6q\frac{a}{x^4}+30r\frac{a^2}{x^7}$，令 $\varphi''(\sqrt[3]{a})=6q\frac{a}{(\sqrt[3]{a})^4}+30r\frac{a^2}{(\sqrt[3]{a})^7}=0$ 有

$q+5r=0$.

联立方程组 $\begin{cases}p+q+r=1,\\p-2q-5r=0,\\q+5r=0.\end{cases}$ 得 $p=\frac{5}{9},q=\frac{5}{9},r=-\frac{1}{9}$.

即，$\varphi(x)=\frac{5}{9}x+\frac{5}{9}\frac{a}{x^2}-\frac{1}{9}\frac{a^2}{x^5}$ 迭代过程为：$x_{k+1}=\frac{5}{9}x_k+\frac{5}{9}\frac{a}{x_k{}^2}-\frac{1}{9}\frac{a^2}{x_k{}^5},k=0,1,2,\cdots$

经检验，$\varphi'''(\sqrt[3]{a})=-24\times\frac{5}{9}\frac{a}{(\sqrt[3]{a})^5}+210\times\frac{1}{9}\frac{a^2}{(\sqrt[3]{a})^8}\neq 0$，因此，迭代 2 阶收敛.

五. (10 分)已知函数 $f(x)$ 在区间 $[x_0,x_2]$ 上有定义，且 $x_1=\frac{1}{2}(x_0+x_2)$，试求函数 $f(x)$ 的三次插值多项式 $p(x)$，使其满足如下条件：

$$p(x_0)=f(x_0),\quad p'(x_1)=0,\quad p''(x_1)=0,\quad p(x_2)=f(x_2).$$

解：由 $p'(x_1)=0,p''(x_1)=0$，得 $p'(x)=c(x-x_1)^2$ 积分得

$$p(x)=c_1(x-x_1)^3+c_2.$$

又 $p(x_0)=f(x_0),p(x_2)=f(x_2)$，经过待定系数得

$$c_1=\frac{4(f(x_2)-f(x_0))}{(x_2-x_0)^3},c_2=\frac{f(x_0)+f(x_2)}{2}$$

故三次插值多项式为

$$p(x)=\frac{4(f(x_2)-f(x_0))}{(x_2-x_0)^3}(x-x_1)^3+\frac{f(x_0)+f(x_2)}{2}.$$

密 封 线

六.(10 分) 已知 $f(x)=\ln x$ 的部分点处的函数值如下表：

x	1	2	3	4	5
$\ln x$	0	0.6931	1.0986	1.3863	1.6094

1. 分别用复化梯形公式和复化 *Simpson* 公式求 $\int_1^5 \ln x\,dx$ 的近似值.
2. 试根据所得数值结果写出可以获得的相关结论.

解：由复化梯形公式得

$T_4=\frac{h}{2}[f(1)+2(f(2)+f(3)+f(4))+f(5)]$，其中 $h=1$

即，

$$\int_1^5 \ln x dx \approx T_4=\frac{1}{2}[0+2(0.6931+1.0986+1.3863)+1.6094]=3.9824$$

由复化 Simpson 公式得

$S_2=\frac{h}{6}[f(1)+4f(2)+2f(3)+4f(4)+f(5)]$，其中 $h=2$

即，

$$\int_1^5 \ln x dx \approx S_2=\frac{1}{6}[0+4\times 0.6931+2\times 1.0986+4\times 1.3863+1.6094]=4.0414$$

准确积分 $\int_1^5 \ln x dx=5\ln 5-4$=4.0472...

相关结论：在同样数量节点情形下，Simpson 公式精度比梯形公式高.

七. (8 分)设 A 为 n 阶正交矩阵，$C=2I-A$，其中 I 表示 n 阶单位矩阵. 求证：解线性方程组 $C^TC\vec{x}=\vec{b}$ 的 Gauss-Seidel 迭代法必收敛.

证明：因为 A 为 n 阶正交矩阵，故 $AA^T=I$. 设 λ 为 A 的特征值，y是A的对应λ的特征向量，则有$Ay=\lambda y$,从而

$$(Ay)^T(Ay)=(\lambda y)^T(\lambda y)=\lambda^2 y^T y$$
$$(Ay)^T(Ay)=y^TA^TAy=y^Ty$$

因此，$|\lambda|=1$.

而$C=2I-A$的特征值为 $2-\lambda$,故C的特征值不为 0，从而C非奇异.

对C^TC，其对称性显然，只需证明其正定性即可说明$Gauss-Seidel$法收敛

设向量$x\neq 0$,因C非奇异，故有$Cx\neq 0$,从而$x^TC^TCx=(Cx)^TCx>0$.

C^TC正定，因此用$Gauss-Seidel$迭代法求解线性方程组$C^TCx=b$时必收敛.

八. (12 分) 考虑求解初值问题 $y'=f(x,y), y(x_0)=\alpha$ 的如下改进的欧拉格式

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)}=y_n+hf(x_n,y_n) \\ y_{n+1}^{(k+1)}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1}^{(k)})] \\ y_0=\alpha, \quad (k=0,1,2,\cdots) \end{cases}$$

1. 证明：如果 $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\le L$，且 $\frac{hL}{2}<1$，则对任意 $n\ge 1$，上述格式关于 k 的迭代是收敛的.
2. 用上面的改进的欧拉格式求解初值问题

$$\begin{cases} y'=e^x\sin(xy), (0\le x\le 1) \\ y(0)=1 \end{cases}$$

时，如何取步长 h，使上述格式关于 k 的迭代收敛.

1.证明：因为

$$y_{n+1}^{(k+1)}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1}^{(k)})],\quad y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$$

所以

$$|y_{n+1}^{(k+1)}-y_{n+1}|=\frac{h}{2}[f(x_{n+1},y_{n+1}^{(k)})-f(x_n,y_{n+1})]\le\frac{hL}{2}|y_{n+1}^{(k)}-y_{n+1}|$$

即 $\frac{hL}{2}<1$时，对任意 $n\ge 1$，迭代格式关于 k 的迭代是收敛的.

2.根据问题 1，由

$$f(x,y)=e^x\sin(xy)$$

知

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|=\left|e^x\cdot x\cdot\cos(xy)\right|\le|e^x\cdot x|\le e\ (0\le x\le 1)$$

于是，当 $\frac{he}{2}<1$，$h<\frac{2}{e}$时，改进 Euler 方法收敛.