

东北大学研究生院考试试卷

2009 —2010 学年第 一 学期

课程名称: 数值分析(A)

总分	一 (1-8)	一 (9-10)	二	三	四	五	六

一、解答下列各题: (每题 5 分, 共 50 分)

1. 设近似值 $x = 321.235$ 近似 x^* 具有 5 位有效数字, 求 x 的相对误差限。

5. 求满足条件 $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 0, f'(1) = 0$ 的三次插值多项式 $H_3(x)$ 的表达式。

2. 用 LU 分解法求方程组 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的解。

6. 设求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ 是插值型求积公式, 求 $\sum_{k=0}^n A_k$ 。

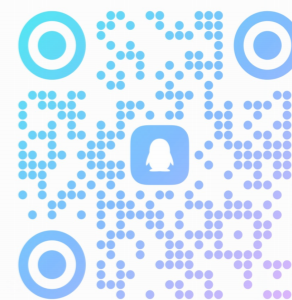
7. 求区间 $[-1, 1]$ 上权函数为 $\rho(x) = x^2$ 的二次正交多项式 $P_2(x)$ 。

3. 解线性方程组的迭代格式 $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + g$, $k = 0, 1, 2, \dots$ 是否收敛, 为什么? 其

$$\text{中 } M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. 求简单迭代法 $x_{k+1} = \frac{x_k}{2} + \frac{1}{x_k}$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) 的收敛阶。

8. 设 $f(x) = 5x^3 - x^2 + 3$, 求差商 $f[0, 1], f[7, 6, 3, 5], f[3, 1, 2, 6, 4]$ 。



9. 给定离散数据

x_i	-1	0	1	2
y_i	3	1	2	4

试求形如 $y = a + bx^2$ 的拟合曲线。

密

封

10. 求解初值问题 $\begin{cases} y' = ye^x & 1 \leq x \leq 2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$ 的改进 Euler 方法是否收敛? 为什么?

什么?

线

二、(11 分) 用 Jacobi 法解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$, 取 $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

若使 $\|x^{(k)} - x^*\|_1 < 10^{-5}$, 问应迭代多少步?

三、(11 分) 说明方程 $x = x^3 - 5$ 在区间 $[1, 2]$ 内有唯一根, 并建立一个收敛的迭代格式, 使对任意初值 $x_0 \in [1, 2]$ 都收敛, 说明收敛理由。

四、(11 分) 利用复化 Simpson 公式 S_n 计算定积分 $I = \int_0^1 \sin x dx$ 若使 $|I - S_n| < 10^{-5}$, 问应取 n 为多少? 并求此近似值。

五、(11 分) 已知求解常微分方程初值问题:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

的差分公式:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3}(k_1 + 2k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{4}hk_1) \\ y_0 = \alpha \end{cases}$$

求此差分公式的阶。

六、(6 分) 利用 Lagrange 基函数性质, 证明: $\sum_{i=1}^n \frac{i^k}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (i-j)} = 0, k = 1, 2, \dots, n-2。$