

班 级
学 号
姓 名

东北大学研究生院考试试卷

2013—2014 学年 第一学期

课程名称：数值分析（共 3 页）

总分	—(1—7)	—(8—10)	二	三	四	五

一、解答下列各题：（每题 5 分，共 50 分）

1. 设 x 是 $\sqrt{70}$ 的近似值，问 x 至少要保留几位有效数字才能使得相对误差限不超过 0.001。

求满足条件 $f(0) = H(0) = 1, f(1) = H(1) = 2, f(2) = H(2) = 9, f'(1) = H'(1) = 3$ 的三次插值多项式 $H_3(x)$ 的表达式。

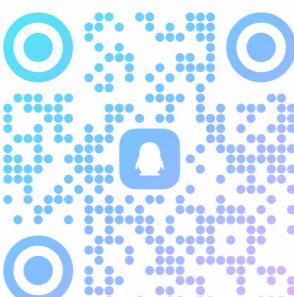
2. 用列主元高斯消去法求解方程组 $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 10 & -7 & 0 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$.

设 $f(x) = x^3 - 2x + 3$ ，求差商 $f[0,1], f[1,2,3,4], f[0,1,2,3,4]$ 。

3. 讨论求解线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$ 的 Gauss-Seidel 迭代法的收敛性。

7. 求用最小二乘法拟合四点 $(0, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 5)$ 的直线。

4. 证明对任意初值 $x_0 \in \mathbb{R}$ ，迭代公式 $x_{k+1} = \cos x_k$ 都收敛于方程 $x = \cos x$ 唯一的根。



8. 试确定参数 A, B, C 及 h, 使求积公式 $\int_{-2}^2 f(x)dx \approx Af(-h) + Bf(0) + Cf(h)$ 代数精度尽可能高, 并判断其是不是高斯型求积公式.

9 求区间 [0, 1] 上权函数为 $\rho(x) = x^2$ 的二次正交多项式 $P_2(x)$.

10. 用二阶中点公式 $y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right)$ 求解初值问题

$$\begin{cases} y' = -4y & 0 \leq x \leq 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

二、(14 分) 有简单迭代公式 $x_{k+1} = x_k + c(x_k^2 - 3)$, (1) c 取何值时收敛速度最快?

(2) 最高收敛阶为多少? (3) 如果取 $c = -0.3$, $x_0 = 1.7$, 则 k 取多少时能够满足精度 $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-6}$

三、(14 分) 利用复化 Simpson 公式 S_n 计算定积分 $I = \int_1^2 \ln x dx$, 若使 $|I - S_n| < 10^{-4}$, 问: (1) n 至少应取多大? (2) 并求此近似值 S_n .

四、(14分) 已知求解常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \quad x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

的差分公式：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(k_1 + \lambda k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h k_1) \end{cases}$$

确定参数 λ, α, β , 使差分公式的阶尽可能高，并指出差分公式的阶。

密 封 线

五、(8分) 给定线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

用迭代公式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha(b - Ax^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

求解 $Ax = b$, 其中 α 为实数。问 α 的取值在什么范围内可使迭代收敛？ α 取何值可使迭代收敛最快？