



班 级
学 号
姓 名

东北大学研究生院考试试卷

2012 —2013 学年第 一 学期

课程名称: 数值分析 (共 2 页)

总分	一	二	三	四

一、填空题: (每题 5 分, 共 50 分)

1. 设近似值 x 的相对误差限为 10^{-5} , 则 x 至少具有 (5) 位有效数字.

2. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 则 A 的 Doolittle 分解式是 ($A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$), Crout

分解式是 ($A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).

3. 解线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 2 \\ x_1 + 9x_2 = 1 \end{cases}$ 的 Jacobi 迭代矩阵的谱半径 $\rho(B) = (2/3)$.

4. 迭代格式 $x_{k+1} = x_k^3 - 3x_k^2 + 3x_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ 求根 $\alpha = 1$ 是 (3) 阶收敛的.

5. 设 $f(x) = \sin x$, 用以 $x_i = i$, $i = 0, 1, 2$ 为节点的二次插值多项式近似 $\sin 1.5$ 的值, 误差为 $|R_2(1.5)| \leq (1/16 = 0.0625)$.

6. 设 $f(x) = 5x^3 + 3$, 则差商 $f[0, 1] = (5)$, $f[1, 2, 3, 4] = (5)$, $f[1, 2, 3, 4, 5] = (0)$.

7. 区间 $[-1, 1]$ 上权函数为 x^2 的二次正交多项式设 $p_2(x) = (x^2 - 3/5)$.

8. 对离散数据

x_i	-1	0	1	2
y_i	2	-1	1	3

 的拟合曲线 $y = \frac{5}{6}x^2$ 的均方差为 $(\sqrt{2.5} \approx 1.58)$.

9. 设求积公式 $\int_{-1}^1 f(x)dx \approx A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1)$ 是插值型求积公式, 则积分系数 $A_0 = (3/4)$, $A_1 = (0)$, $A_2 = (9/4)$.

10. 求解常微分方程初值问题的差分公式 $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)) \\ y_0 = \alpha \end{cases}$

的绝对稳定区间是 $((-2, 0))$.

二、(10 分) 已知求线性方程组 $Ax = b$ 的迭代格式:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\mu}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^{(k)}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(1) 求此迭代法的迭代矩阵 M ;

(2) 证明: 当 A 是严格对角占优矩阵, $\mu = 0.5$ 时, 此迭代格式收敛.

解: 迭代法的矩阵形式为:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \mu D^{-1}(b - Ax^{(k)}) = D^{-1}(D - \mu A)x^{(k)} + \mu D^{-1}b$$

所以, 迭代矩阵为 $M = D^{-1}(D - \mu A)$.

当 A 是严格对角占优矩阵, $\mu = 0.5$ 时, 由于

$$\rho(M) \leq \|M\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|}{2a_{ii}} \right| < 1, \text{ 所以, 迭代格式收敛.}$$

三、(12 分) 说明方程 $x - \cos x = 0$ 有唯一根, 并建立一个收敛的迭代格式, 使对任意初值 x_0 都收敛, 说明收敛理由和收敛阶.

解: 记 $f(x) = x - \cos x$, 则 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 - \cos 1 > 0$, 而且,

$f'(x) = 1 + \sin x \geq 0$, 所以, 方程 $x - \cos x = 0$ 有唯一根, 且在区间 $[0, 1]$ 内.

建立迭代格式: $x_{k+1} = \cos x_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

由于, 迭代函数 $\varphi(x) = \cos x$ 在区间 $[-1, 1]$ 上满足条件:

$$-1 < \cos 1 \leq \varphi(x) \leq 1, \quad |\varphi'(x)| = |\sin x| \leq \sin 1 < 1$$

所以, 此迭代格式对任意 $x_1 \in [-1, 1]$ 都收敛. 因此, 对任意初值 x_0 都收敛.

又由于, $\varphi'(\alpha) = -\sin \alpha \neq 0$ ($0 < \alpha < 1$), 所以, 此迭代格式 1 阶收敛.

四、(10分) 利用复化 Simpson 公式 S_2 计算定积分 $I = \int_0^2 \cos x dx$ 的近似值, 并估计误差。

$$\text{解: } I \approx S_2 = \frac{1}{6} [\cos 0 + \cos 2 + 2 \cos 1 + 4 \cos \frac{1}{2} + 4 \cos \frac{3}{2}] = 0.909622804$$

由于 $f(x) = \cos x$ 的 4 阶导数在 $[0, 2]$ 上的最大值为: $M_4 = 1$, 所以

$$\text{误差为: } |I - S_2| \leq \frac{2^5 M_4}{2880 \times 2^4} = 0.000694444$$

五、(10分) 设求解常微分方程初值问题: $\begin{cases} y' = f(x, y), & x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha \end{cases}$ 的差分公式:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n))] \\ y_0 = \alpha \end{cases}$$

求此差分公式的阶。

解: 由于

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f_n + f_n + \frac{h}{2} (\frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y} f_n) + O(h^2)]$$

$$= y_n + hf_n + \frac{h^2}{4} (\frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y} f_n) + O(h^3)$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + O(h^3)$$

$$= y_n + f_n h + \frac{h^2}{2} (\frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y} f_n) + O(h^3)$$

$$\text{所以, } y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{h^2}{4} (\frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y} f_n) + O(h^3) = O(h^2)$$

所以, 此差分公式是 1 阶方法。

六、(8分) 设 $p_1(x)$ 是 $f(x)$ 以 $x_0 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, x_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ 为节点的一次插值多项式,

试由 $p_1(x)$ 导出求积分 $I = \int_0^2 f(x) dx$ 的插值型求积公式, 并导出公式的截断误差。

解 设由 $p_1(x)$ 导出求积分 $I = \int_0^2 f(x) dx$ 的插值型求积公式为:

$$I = \int_0^2 f(x) dx \approx A_0 f(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) + A_1 f(1 + \frac{1}{\sqrt{3}})$$

由插值余项知, 公式至少具有 1 次代数精度, 于是有:

$$A_0 + A_1 = 2, \quad A_0(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) + A_1(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}) = 2, \quad \text{即: } A_0 = A_1 = 1.$$

所以, 由 $p_1(x)$ 导出求积分 $I = \int_0^2 f(x) dx$ 的插值型求积公式为:

$$I = \int_0^2 f(x) dx \approx f(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) + f(1 + \frac{1}{\sqrt{3}})$$

容易验证此公式具有 3 次代数精度, 即对次数不大于 3 次的多项式精确成立,

记 $H_3(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 $[x_0, x_1]$ 的 3 次 Hermite 插值多项式, 则有:

$$R[f] = \int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 p_1(x) dx = \int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 H_3(x) dx + \int_0^2 H_3(x) dx - \int_0^2 p_1(x) dx$$

$$= \int_0^2 \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!} (x + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 (x - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 dx = \frac{f^{(4)}(\eta)}{24} \int_0^2 (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx$$

$$= \frac{f^{(4)}(\eta)}{24} \int_0^2 (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx = \frac{109 f^{(4)}(\eta)}{540}$$