

班 级
学 号
姓 名

# 东北大学研究生院考试试卷

2013 —2014 学 年 第 一 学 期

课程名称: 数值分析 (共 3 页)

总分	一 (1-7)	二 (8-10)	三	四	五

一、解答下列各题: (每题 5 分, 共 50 分)

1. 设  $x$  是  $\sqrt{70}$  的近似值, 问  $x$  至少要保留几位有效数字才能使得相对误差限不超过 0.001.

2. 用列主元高斯消去法求解方程组 
$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 10 & -7 & 0 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

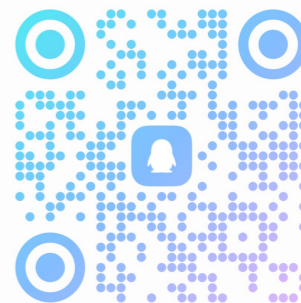
3. 讨论求解线性方程组 
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$
 的 Gauss-Seidel 迭代法的收敛性.

4. 证明对任意初值  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 迭代公式  $x_{k+1} = \cos x_k$  都收敛于方程  $x = \cos x$  唯一的根.

5. 求满足条件  $f(0) = H(0) = 1, f(1) = H(1) = 2, f(2) = H(2) = 9, f'(1) = H'(1) = 3$  的三次插值多项式  $H_3(x)$  的表达式.

6. 设  $f(x) = x^3 - 2x + 3$ , 求差商  $f[0,1], f[1,2,3,4], f[0,1,2,3,4] \dots$

7. 求用最小二乘法拟合四点  $(0,1), (1,2), (2,4), (3,5)$  的直线.



.....  
○ .....  
密 .....  
○ .....  
封 .....  
○ .....  
.....

8. 试确定参数 A, B, C 及 h, 使求积公式  $\int_{-2}^2 f(x)dx \approx Af(-h) + Bf(0) + Cf(h)$  代数精度尽可能高, 并判断其是不是高斯型求积公式.

9 求区间  $[0, 1]$  上权函数为  $\rho(x) = x^2$  的二次正交多项式  $P_2(x)$ .

10. 用二阶中点公式  $y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right)$  求解初值问题

$$\begin{cases} y' = -4y & 0 \leq x \leq 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}, \text{为使该公式绝对稳定, 步长 } h \text{ 取值范围多少?}$$

二. (14 分) 有简单迭代公式  $x_{k+1} = x_k + c(x_k^2 - 3)$ , (1) c 取何值时收敛速度最快?  
(2) 最高收敛阶为多少? (3) 如果取  $c = -0.3$ ,  $x_0 = 1.7$ , 则 k 取多少时能够满足精度  $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-6}$

三. (14 分) 利用复化 Simpson 公式  $S_n$  计算定积分  $I = \int_1^2 \ln x dx$ , 若使  $|I - S_n| < 10^{-4}$ , 问: (1) n 至少应取多大? (2) 并求此近似值  $S_n$ .

四、(14 分) 已知求解常微分方程初值问题:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

的差分公式:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(k_1 + \lambda k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h k_1) \end{cases}$$

确定参数  $\lambda, \alpha, \beta$ , 使差分公式的阶尽可能高, 并指出差分公式的阶.

五、(8 分) 给定线性方程组  $Ax = b$ , 其中

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

用迭代公式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha(b - Ax^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

求解  $Ax = b$ , 其中  $\alpha$  为实数. 问  $\alpha$  的取值在什么范围内可使迭代收敛?  $\alpha$  取何值可使迭代收敛最快?