班 级
学 号
姓 名

密 封 线

东 北 大 学 考 试 试 卷（B）

2014-2015 学年第一学期

课程名称： 数值分析（共 4 页）

总分	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十

一、（本题 10 分）

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$，求 $\rho(A)$、$cond_2(A)$.

2. 写出矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$ 的 LU 分解式 $A=LU$.

二、（本题 10 分）

1. 设 $x=(x_1,x_2,x_3)^T\in R^3$，问 $f(x)=\sqrt{x_1^2+2x_2^2+3x_3^2}$ 是不是 R^3 上的向量范数，为什么？

2. 若迭代法 $x^{(k+1)}=Mx^{(k)}+g$ 收敛，设 $0<\omega<1$，问迭代法 $x^{(k+1)}=[\omega I+(1-\omega)M]x^{(k)}+(1-\omega)g$ 是否收敛，为什么？

三、（本题 10 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & \alpha & \alpha\\ \alpha & 1 & \alpha\\ \alpha & \alpha & 1\end{pmatrix}$，$x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$.

1. 设 $\alpha\in U$ 时，A 可分解为 GG^T（其中 G 为下三角矩阵），求 U；

2. 写出解线性方程组 $Ax=b$ 的 $Jacobi$ 迭代格式，并讨论此格式在 $\alpha\in U$ 时的收敛性.

密

封

四.（本题 10 分）

考虑求方程 $2\cos x-3x+12=0$ 根迭代公式

$$x_{k+1}=4+\frac{2}{3}\cos x_k,\qquad k=0,1,2\cdots$$

1. 试证：对任意 $x_0\in R$，该迭代方法收敛，并指明收敛阶.

2. 取初值 $x_0=4$，用此格式计算需迭代多少步能使得近似根 x_k 满足精度要求 $|x_k-x_{k-1}|\le 10^{-3}$.

五.（本题 10 分）

给定函数 $f(x)$ 的数据表如下

x	0	1
$f(x)$	1	2
$f'(x)$	0	

1. 构造二次 *Hermite* 插值多项式 $H_2(x)$；

2. 试根据插值余项确定一个常数 C，使不等式

$$|f(x)-H_2(x)|\le C\cdot\max_{0\le x\le 1}|f'''(x)|$$

对任意 $x\in[0,\ 1]$ 能保持成立.

密 封 线

六.（本题 10 分）

已知实验数据

x_i	0	1	2	3
y_i	1	2	4	5
ρ_i	1	2	2	1

1. 用最小二乘法求出拟合这组数据的直线 $y=a+bx$；

2. 给出均方误差（结果保留 4 位有效数字）.

七.（本题 10 分）试构造区间 $[-1,1]$ 上权函数 $\rho(x)\equiv 1$ 的两点 Gauss 型求积公式 $G(f)$，并继续构造两点复化 Gauss 公式 $G_n(f)$.

八.（本题 10 分）

设 $\varepsilon=10^{-3}$，用复化 Simpson 公式计算 $I=\int_1^2 \ln x dx$ 的近似值时，若要求 $|I-S_n|\le\varepsilon$.

1. 求出 n；

2. 计算相应 S_n.

密

封

线

九．（本题 10 分）

给定常微分方程初值问题：$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = \alpha \end{cases}$，$a \le x \le b$.

求多步方法 $y_{n+1} = \frac{1}{2}(\ y_n + y_{n-1}\ ) + \frac{h}{4}[7f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})]$ 的局部截断误差，并指出是几阶方法.

十．（本题 10 分）

若用二阶中点公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hK_2 \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_1) \end{cases}$$

求解常微分方程初值问题 $\begin{cases} y' = -4y & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

1. 试分析此差分格式的收敛性；
2. 为保证该公式绝对稳定，步长 h 应取多少.

解：

2 写出IVP问题的二阶中点公式.

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hK_2 \\ K_1 = -4y_n \end{cases}$$

$K_1' = -4K_1$

$K_2' = -4K_2$.

$K_2 = \cancel{[illegible]} -4(y_n + \frac{1}{2}h(-4y_n))$

$y_{n+1} = y_n + h[-4(y_n + \frac{1}{2}h(-4y_n))]$