第4章 非线性方程求根

本章讨论求非线性方程

$$f(x)=0 \tag{4.1}$$

的根的问题. 其中$f(x)$一般是非线性函数, 如

$$f(x)=3x^5-2x^4+8x^2-7x+1,$$

$$f(x)=e^{2x+1}-x\ln(\sin x)-2,$$

等等.

方程$f(x)=0$的解α称为它的根, 或称为函数$f(x)$的零点.

设$f(x)$在区间$[a, b]$上连续且$f(a)f(b)<0$. 根据连续函数的介值定理, 区间$[a, b]$上必有方程$f(x)=0$的根, 称这样的区间$[a, b]$为方程$f(x) =0$的一个有根区间.

关于重根的定义与基本性质

称α是方程$f(x)=0$的m重根，是指$f(x)=(x-\alpha)^m\ h(x)$，其中$h(x)$在$x=\alpha$处连续且$h(\alpha)\neq 0$.

当$m=1$时，称α是方程 $f(x)=0$的单根.

若$f(x)$在α处充分光滑(也即任意阶连续可微)，则有

α是方程$f(x)=0$的m重根.

$$\Updownarrow$$

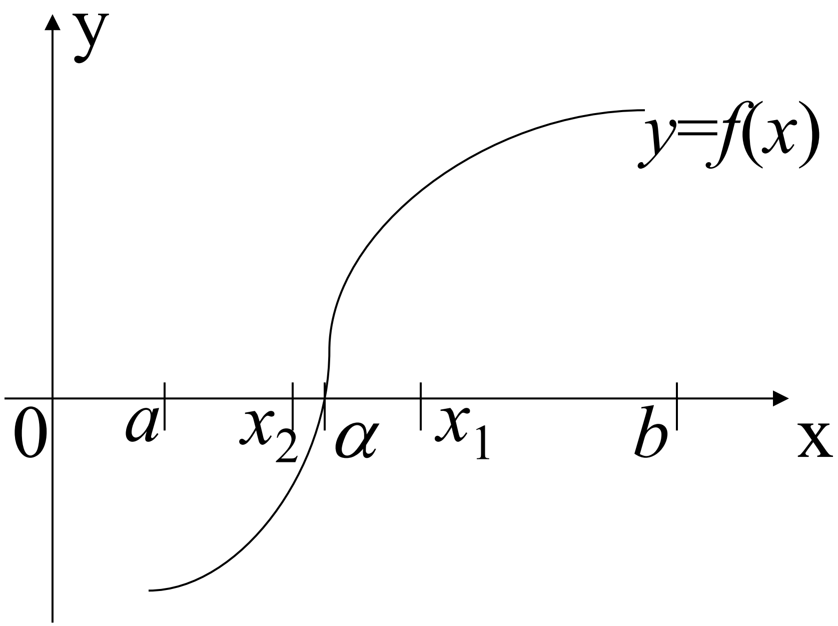
$$f(\alpha)=f'(\alpha)=\ldots=f^{(m-1)}(\alpha)=0,\ f^{(m)}(\alpha)\neq 0.$$

请思考：

1) 此结论为什么成立?

2) 重根的几何含义.

4.1 二 分 法



设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续且 $f(a)f(b)<0$.

记 $a_0=a$, $b_0=b$,计算 $x_1=\dfrac{a_0+b_0}{2}$,

若 $|f(x_1)|<\varepsilon$, 则取 $\alpha\approx x_1$; 否则,

若 $f(a_0)f(x_1)<0$, 取 $a_1=a_0$, $b_1=x_1$;

若 $f(a_0)f(x_1)>0$, 取 $a_1=x_1$, $b_1=b_0$.

新的有根区间 $[a_1, b_1]$ 长度是有根区间 $[a_0, b_0]$ 长度的一半.

再对有根区间 $[a_1, b_1]$ 重复上面运算, 即计算: $x_2=\dfrac{a_1+b_1}{2}$,

若 $|f(x_2)|<\varepsilon$, 则取 $\alpha\approx x_2$; 否则,

若 $f(a_1)f(x_2)<0$, 取 $a_2=a_1$, $b_2=x_2$;

若 $f(a_1)f(x_2)>0$, 取 $a_2=x_2$, $b_2=b_1$,

新的有根区间$[a_2, b_2]$长度是有根区间$[a_1, b_1]$长度的一半. 一直进行下去, 直到求出有根区间$[a_k, b_k]$. 此时,

$$|x_k - \alpha| \le b_k - a_k \le \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} \dots \le \frac{b_0 - a_0}{2^k} = \frac{b - a}{2^k}.$$

可见, k趋向无穷大时, x_k收敛于α.

在计算过程中, 若出现$b_k - a_k < \varepsilon$, 或$|f(x_k)| < \varepsilon$. 则可取x_k作为方程$f(x)=0$的近似根, 终止运算.

若要$|x_k - \alpha| < \varepsilon$,只要

$$\frac{b-a}{2^k} < \varepsilon$$

也即

$$k > \log_2 \frac{b - a}{\varepsilon}.$$

例1用二分法求$x^3+4x-10=0$在区间[1, 2]内根的近似值, 并估计误差.

解: 这里$f(x)=x^3+4x-7$, $f(1)f(2)=(-2)\times 9=-18<0$, 而且
$f'(x)=3x^2+4>0$, 所以$f(x)=0$在[1, 2]区间有唯一根.

取$x_1=1.5$, 由于$f(x_1)=2.375$, 得新有根区间[1, 1.5];

再取$x_2=1.25$, 由于$f(x_2)=-0.0468$, 得新有根区间[1.25,1.5];

取$x_3=1.375$, 由于$f(x_3)=1.0996$, 得新有根区间[1.25, 1.375];

取$x_4=1.3125$, 由于$f(x_4)=0.511$, 得新有根区间[1.25, 1.3125];

……………………………………………………

取$x_{10}=1.254882813$, 得有根区间[1.254882813,1.255859375],

$x_{11}=1.255371094$, $f(x_{11})=-0.000105285$;

取$\alpha\approx x_{11}=1.255371094$作为方程根的近似值, 且有误差估计

$$|x_{11}-\alpha| \le b_{11}-a_{11} = \frac{b_{10}-a_{10}}{2} = \frac{1.255859375-1.254882813}{2} \le 0.00049$$

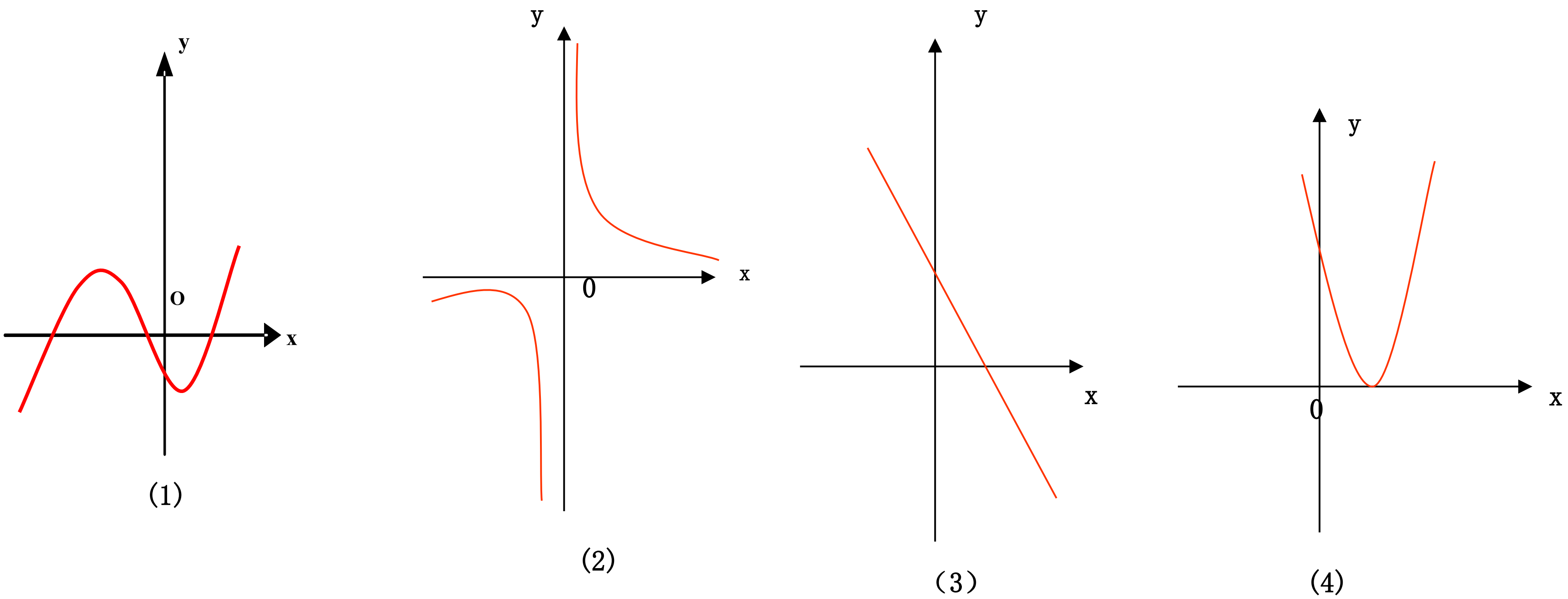
如果取精度阈值ε=10^{-5}, 则要使 $|x_k-\alpha|<\varepsilon$,

只需

$$\frac{b-a}{2^k}<\varepsilon,$$

也即 $k>\log_2\dfrac{b-a}{\varepsilon}=5\log_2 10\approx 16.61.$ 即取$\alpha\approx x_{17}$即可.

例 下列图象中不能用二分法求函数零点的是（ ）.



二分法运算简便, 易于在计算机上实现. 但是,

1. 若方程$f(x)=0$在区间$[a, b]$上有多个根, 二分法每次只能求出其中的一个根.
2. 当方程$f(x)=0$在区间$[a, b]$有重根时, 也未必满足条件$f(a)f(b)<0$, 此时不方便使用二分法.
3. 二分法不能求方程的复根.
4. 此外, 二分法的收敛速度也不是很快.

因此, 二分法一般不单独使用, 而多用于为其他方法提供一个比较好的初始近似值.

4.2 简 单 迭 代 法

4.2.1　简单迭代法的一般形式

首先把方程$f(x)=0$改写成等价(同解)形式

$$x=\varphi(x).$$

取一个合适的初始值x_0, 然后做迭代

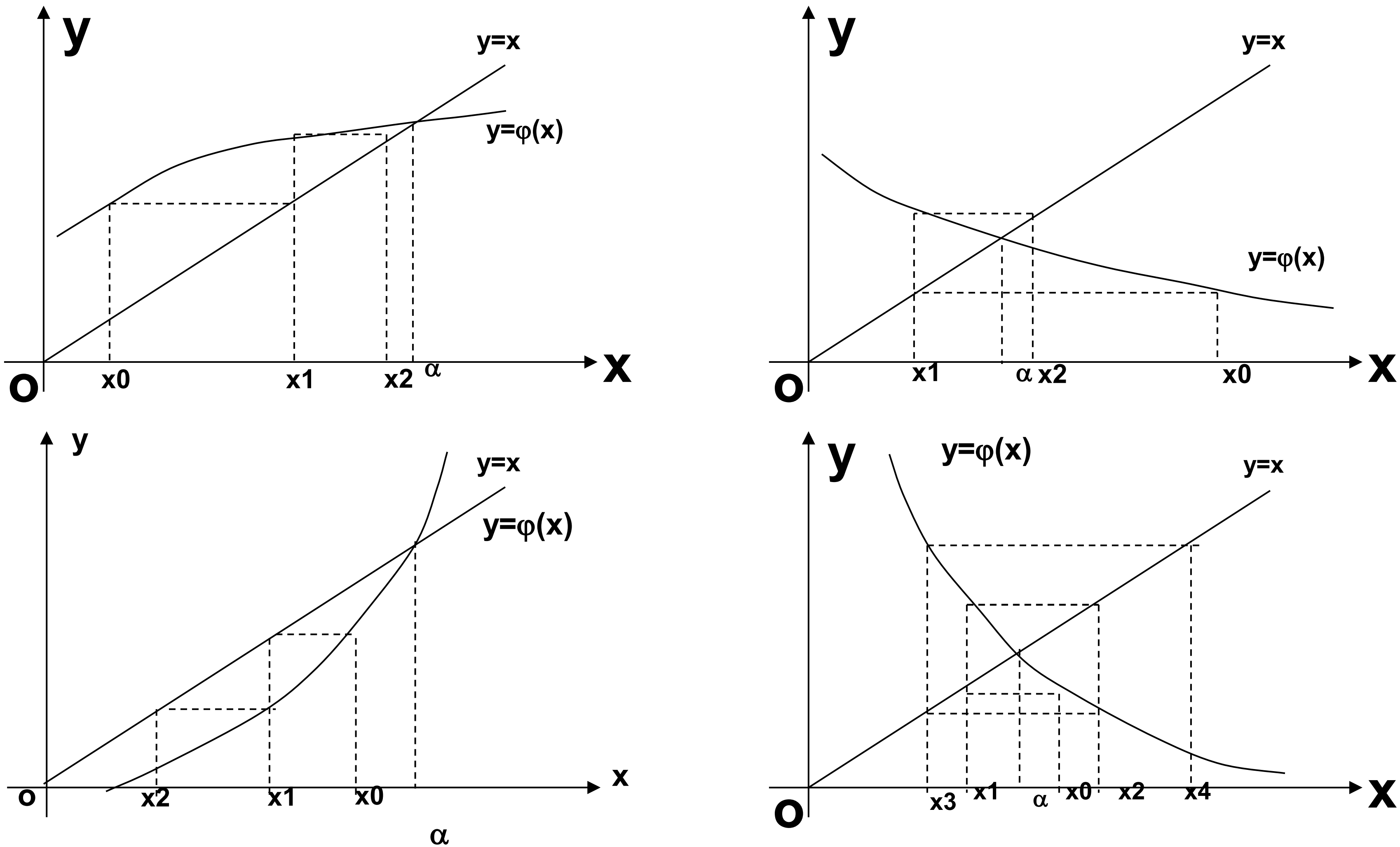
$$x_{k+1}=\varphi(x_k),\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots \tag{4.1}$$

得到迭代序列$\{x_k\}$.

如果$x_k\to\alpha$, 则有$\alpha=\varphi(\alpha)$, 即α是方程$f(x)=0$的根.

这种求方程根的方法称为**简单迭代法**, 或**逐次逼近法**. 其中$\varphi(x)$称为**迭代函数**, 式(4.1)称为**迭代格式**. 若迭代序列$\{x_k\}$收敛, 则称**简单迭代法是收敛的**.

简单迭代法的迭代原理示意图



问: 以上迭代过程都收敛吗?

例2 求方程x^4-3x-2=0在[1, 2]内的根.

解:记$f(x)=x^4-3x-2$, 则 $f(1)f(2)=-32<0$, 而且

$$f'(x)=4x^3-3\geq1>0,\ 当x\in[1, 2].$$

所以方程$x^4-3x-2=0$在区间[1, 2]内存在惟一的根.

改写原方程为等价方程.

方案1:

$$x=\sqrt[4]{3x+2}$$

建立迭代格式

$$x_{k+1}=\sqrt[4]{3x_k+2},\ \ k=0,1,2,\dots$$

如果取初值x_0=1.5, 计算结果见下表.

k	x_k	k	x_k
0	1.5	5	1.618013
1	1.596718	6	1.618030
2	1.614247	7	1.618033
3	1.617363	8	1.618034
4	1.617915	9	1.618034

由计算结果知$x_9 \approx x_8$, 因此可取$\alpha \approx x_9 = 1.618034$.

其他方案试做:

此题的方程也可改写成$x=(x^4-2)/3$, 建立迭代格式

$$x_{k+1}=(x_k^4-2)/3,\ k=0,1,2,\dots$$

如果取初值$x_0=1.5$, 计算结果见下表.

k	x_k	k	x_k
0	1.5	8	-0.617881
1	1.020833	9	-0.618082
2	-0.304676	10	-0.618019
3	-0.663794	11	-0.618039
4	-0.601951	12	-0.618032
5	-0.622902	13	-0.618035
6	-0.616483	14	-0.618034
7	-0.618520	15	-0.618034

序列$\{x_k\}$仍然收敛, 但是收敛到方程在区间[1, 2]外的根.

若取初值x_0=1.7, 迭代计算可得

$$x_1=2.117367,\ x_2=6.033156,\ x_3=440.9617,\ldots$$

此时, (很有可能) $x_k \to \infty$, 也即迭代格式(很可能)是不收敛的.

以上算例告诉我们:

1. 迭代函数$\varphi(x)$的选取是非常重要的;

2. 对于非线性方程迭代求根, 初值x_0的选取也很重要. 一般须谨慎选取迭代初值.

4.2.2 简单迭代法的收敛条件

定义4.1 设$\varphi(x)$为定义在区间I上的函数, 且对任何$x\in I$, 均有$\varphi(x)\in I$, 则称$\varphi(x)$为**I到自身上的映射**.

定义4.2 设$\varphi(x)$为I到自身上的映射, 且存在常数L满足$0<L<1$, 使对任何$x_1, x_2\in I$, 有

$$|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)|\leq L|x_2-x_1|,$$

则称$\varphi(x)$为I上的**压缩映射**, L称为**Lipschitz(李普希兹)常数**.

定理4.1 若$\varphi(x)$为I上的压缩映射, 则$\varphi(x)$为I上的连续函数.

定理4.2 设$\varphi(x)$为I到自身上的映射, 且$\varphi(x)\in C^1(I)$. 若存在L, 使对于任意的$x\in I$均有$|\varphi'(x)|\leq L<1$, 则$\varphi(x)$为I上的压缩映射.

证明: 由题设条件知, 对任意$x_1, x_2\in I$,有

$$|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)|=|\varphi'(\xi)||x_2-x_1|\leq L|x_2-x_1|.$$ 得证.

定义4.3 若$\varphi(x)$为I到自身上的映射，且$\alpha\in$I满足$\alpha=\varphi(\alpha)$，则称α为$\varphi(x)$的**不动点**.

定理4.3 (压缩映射原理) 若$\varphi(x)$为I上的压缩映射, 则$\varphi(x)$在I上存在唯一的一个不动点α, 且对任何$x_0\in$I, 由迭代格式

$$x_{k+1}=\varphi(x_k),\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

产生的序列$\{x_k\}$收敛于$\varphi(x)$的不动点α.

证明:

1. 存在性.

设I=$[a, b]$, 做函数$\psi(x)=\varphi(x)-x$.

由于$x\in$I时, $\varphi(x)\in$I, 则$\psi(a)=\varphi(a)-a\geq 0$, $\psi(b)=\varphi(b)-b\leq 0$. 由$\varphi(x)$的连续性, 必存在$\alpha\in$I, 使$\psi(\alpha)=\varphi(\alpha)-\alpha=0$, 即$\alpha=\varphi(\alpha)$, α就是$\varphi(x)$的不动点.

2. 唯一性.

假设$\varphi(x)$在I上有两个不同的不动点α与β, 则由压缩映射的定义可得

$$|\alpha-\beta|=|\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)|\leq L|\alpha-\beta|<|\alpha-\beta|.$$

矛盾. 所以假设错误, 即$\varphi(x)$在I上只能有一个不动点.

3. 收敛性.

对任意$x_0\in \mathrm{I}$, 有$x_1=\varphi(x_0)\in \mathrm{I}$, 递推得$\{x_k\}\in \mathrm{I}$, 设$\alpha$是$\varphi(x)$的不动点, 则

$$\begin{aligned}|x_k-\alpha|&=|\varphi(x_{k-1})-\varphi(\alpha)|\leq L|x_{k-1}-\alpha|\\&\leq L^2|x_{k-2}-\alpha|\leq\ldots\leq L^k|x_0-\alpha|.\end{aligned}$$

由于$0<L<1$, 所以$L^k|x_0-\alpha|\to 0$, ($k\to+\infty$时), 所以

$$|x_k-\alpha|\to 0, \ (k\to+\infty\text{时}).$$

也即迭代解x_k收敛于α, 得证.

思考

1. 定理4.3是充分条件还是充要条件?
2. 若$\varphi(x)$处处不满足压缩映射条件，会怎样?

推论 若$\varphi(x)\in C^1[a, b]$, 且满足

1. $a\le\varphi(x)\le b$, $\forall x\in[a, b]$;

2. $|\varphi'(x)|\le L<1$, $\forall x\in[a, b]$,

则迭代格式$x_{k+1}=\varphi(x_k)$, $k=0, 1, 2,\ldots$, 对于$\forall x_0\in[a, b]$都收敛于方程 $x=\varphi(x)$在区间$[a, b]$的唯一根α.

定理4.4 若$\alpha=\varphi(\alpha)$,而在$I=[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$上$\varphi(x)$满足

$$|\varphi(x)-\varphi(\alpha)|\le L|x-\alpha|,$$

也称"局部压缩映射条件"

这里Lipschitz常数L满足$0<L<1$, 则当$x_0\in[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$时有

(1) 由迭代$x_{k+1}=\varphi(x_k)$产生的迭代序列$\{x_k\}\in I$;

(2) $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=\alpha$;

(3) α是I上$\varphi(x)$的唯一不动点.

推论 若$\alpha=\varphi(\alpha)$, $\varphi(x)$在α附近具有一阶连续导数, 且$|\varphi'(\alpha)|<1$, 则存在$\delta>0$, 当$x_0\in I=[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$时, 有

(1) 由迭代$x_{k+1}=\varphi(x_k)$产生的迭代序列$\{x_k\}\in I$;

(2) $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=\alpha$;

(3) α是I上$\varphi(x)$的唯一不动点.

此时x_0须取在α附近的某个邻域内

证明思路: 由于$|\varphi'(\alpha)|<1$,也即存在$L>0$, 使$|\varphi'(\alpha)|\le L<1$, 再根据函数$|\varphi'(x)|$的连续性可知, 存在$\delta>0$, 使对任何$x\in I=[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$都有

$$|\varphi'(x)|\le L<1.$$

然后采用与前面定理类似的讨论即可得到本命题的诸结论.

回到Newton迭代法的收敛性

定理4.5 若$\varphi(x)$为I上压缩映射，L为相应的Lipschitz常数满足条件$0<L<1$，则$\forall x_0\in \mathrm{I}$，由迭代

$$x_{k+1}=\varphi(x_k),\ \ k=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

产生的迭代序列$\{x_k\}$满足:

$$|x_k-\alpha|\le \frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|$$

$$|x_k-\alpha|\le \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$$

证明: 由于 $|x_{k+1}-x_k|=|\varphi(x_k)-\varphi(x_{k-1})|\le L|x_k-x_{k-1}|$,

$$|x_{k+1}-\alpha|=|\varphi(x_k)-\varphi(\alpha)|\le L|x_k-\alpha|.$$

因此 $|x_{k+1}-x_k|=|(x_{k+1}-\alpha)-(x_k-\alpha)|\ge|x_k-\alpha|-|x_{k+1}-\alpha|\ge(1-L)|x_k-\alpha|.$

故 $$|x_k-\alpha|\le\frac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k|\le\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$$

证毕.

由误差估计式可见, 对任一ε>0, 要使$|x_k-\alpha|<\varepsilon$, 只需

$$\frac{L^k}{1-L}\left|x_1-x_0\right|<\varepsilon$$

也即

$$k>\ln\frac{\varepsilon(1-L)}{\left|x_1-x_0\right|}\div\ln L$$

再取满足条件的最小的k即可(向上取整).

例3 求方程$xe^x-1=0$在0.5附近的根, 精度要求$|x_k-x_{k-1}|<\varepsilon=10^{-3}$.

解 可以验证方程$xe^x-1=0$在区间[0.5, 0.6]内仅有一个根.

改写方程为$x=e^{-x}$, 建立迭代格式

$$x_{k+1}=e^{-x_k}, \quad k=0, 1, 2, \ldots$$

可以验证: $\varphi(x)=e^{-x}$, 在[0.5, 0.6]上有$|\varphi'(x)|\le e^{-0.5}\approx 0.6<1$.

取初值$x_0=0.5$, 计算得

k	x_k	$\|x_k-x_{k-1}\|$	k	x_k	$\|x_k-x_{k-1}\|$
0	0.5		6	0.56486	0.00631
1	0.60653	0.10653	7	0.56844	0.00358
2	0.54524	0.06129	8	0.56641	0.00203
3	0.57970	0.03446	9	0.56756	0.00115
4	0.56006	0.01964	10	0.56691	0.00065
5	0.57117	0.01111			

转例5

从计算结果上来看，此时迭代是收敛的.所以，可取根的近似解

$$\alpha \approx x_{10} = 0.56691.$$

若迭代函数为压缩映射, 如果精度要求为$|x_k - \alpha| < \varepsilon = 10^{-5}$, 则由

$$k > \ln \frac{\varepsilon(1-L)}{|x_1 - x_0|} \div \ln L$$

$$= \ln \frac{0.4 \times 10^{-5}}{0.10653} \div \ln 0.6 \approx 19.95$$

可知, 迭代20次即可满足精度要求.

然而，以上迭代函数$\varphi(x)=e^{-x}$是区间[0.5，0.6]上的压缩映射吗？请仔细思考.

具体讨论见黑板.

4.2.3 简单迭代法的误差分析与收敛阶

定义4.4 设迭代序列$\{x_k\}$收敛于α, 记误差$e_k=x_k-\alpha$, 如果存在正实数p和非零常数C, 使得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=C$$

或

$$|x_{k+1}-\alpha|\approx C|x_k-\alpha|^p,\ k>>1,$$

则称序列$\{x_k\}$是***p*阶收敛的**，称p是**收敛阶**，C是**渐近误差常数**.

$p=1$时称为**线性收敛**; $p>1$时称为**超线性收敛**; $p=2$时称为**平方收敛**.

设简单迭代法的迭代函数$\varphi(x)$充分光滑, 由于

$$|e_{k+1}|=|x_{k+1}-\alpha|=|\varphi(x_k)-\varphi(\alpha)|=|\varphi'(\xi_k)||e_k|.$$

所以, 当$\varphi'(\alpha)\neq0$时, 有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|}=\lim_{k\to\infty}|\varphi'(\xi_k)|=|\varphi'(\alpha)|\neq 0$$

所以, 当$\varphi'(\alpha)\neq0$时, 简单迭代法只是线性收敛的.

设$\varphi'(\alpha)=\varphi''(\alpha)=\ldots=\varphi^{(p-1)}(\alpha)=0$, 但$\varphi^{(p)}(\alpha)\neq0$, 由于

$$\varphi(x_k)=\varphi(\alpha)+\varphi'(\alpha)(x_k-\alpha)+\frac{1}{2!}\varphi''(\alpha)(x_k-\alpha)^2+\cdots$$
$$+\frac{1}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}(\alpha)(x_k-\alpha)^{p-1}+\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(\xi_k)(x_k-\alpha)^p,$$

所以

$$|e_{k+1}|=|x_{k+1}-\alpha|=|\varphi(x_k)-\varphi(\alpha)|=\frac{1}{p!}\left|\varphi^{(p)}(\xi_k)\right|\left|e_k\right|^p$$

于是

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{p!}\left|\varphi^{(p)}(\xi_k)\right|=\frac{1}{p!}|\varphi^{(p)}(\alpha)|\neq 0$$

此时, 迭代法是p阶收敛的.

综上所述, 我们得到以下结论.

定理4.6 设$\alpha=\varphi(\alpha)$, $\varphi(x)$在α的邻域充分光滑, 且满足

$$\varphi'(\alpha)=\varphi''(\alpha)=\ldots=\varphi^{(p-1)}(\alpha)=0,\ \varphi^{(p)}(\alpha)\neq 0,\ p\geq 1,$$

则当初值x_0充分靠近α时, 迭代格式

$$x_{k+1}=\varphi(x_k),\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

是p阶收敛的, 且满足条件

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=\frac{1}{p!}|\varphi^{(p)}(\alpha)|\neq 0$$

回到Newton迭代法的收敛性

下面介绍**Aitken加速算法**, 此方法可对线性收敛的简单迭代法起到加速作用, 而且可应用于其它数值方法中.

由于

$$x_{k+1}-\alpha=\varphi'(\xi_1)(x_k-\alpha)$$

$$x_{k+2}-\alpha=\varphi'(\xi_2)(x_{k+1}-\alpha)$$

假设 $\varphi'(\xi_1)\approx\varphi'(\xi_2)$, 则有

$$\frac{x_{k+1}-\alpha}{x_{k+2}-\alpha}\approx\frac{x_k-\alpha}{x_{k+1}-\alpha}$$

即

$$(x_{k+1}-\alpha)^2\approx(x_k-\alpha)(x_{k+2}-\alpha)$$

$$x_{k+1}^2-2x_{k+1}\alpha+\alpha^2\approx x_kx_{k+2}-(x_k+x_{k+2})\alpha+\alpha^2$$

解得

$$\alpha \approx \frac{x_k x_{k+2} - x_{k+1}^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

如果记

$$\hat{x}_k = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

则序列 $\{\hat{x}_k\}$ 要比序列$\{x_k\}$更快地收敛于α,

可构造如下的**Aitken**加速算法:

$$\begin{cases} y_k = \varphi(x_k) \\ z_k = \varphi(y_k) \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k}, \quad k = 0, 1, 2 \ldots \end{cases}$$

注意, 如果第k步发生z_k-2y_k+x_k=0, 就终止计算, 取$\alpha \approx x_k$.

例4 分别用简单迭代法和**Aitken**加速算法求方程

x=1.6+0.99cos$x$在x_0=π/2附近的根. (α=1.585471802)

取x_0= π/2,计算结果如下

k	简单迭代法		k	**Aitken**算法	
	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$		x_k	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	1.57080		0	1.5707963	
1	1.6	0.0292	1	1.58547258	0.01467628
2	1.57109	0.02891	2	1.58547180	0.00000078
3	1.59971	0.02862			
4	1.57138	0.02833			

§ 4.3 Newton迭代法

Newton迭代法是求方程根的重要方法之一，其最大优点是在方程的单根附近具有平方收敛，而且Newton迭代法还可用来求方程的重根、复根及非线性方程组.

4.3.1 Newton迭代公式

设$f(x)$在有根区间$[a, b]$上二阶连续可微，x_0是根α的某个近似值, 因为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi_0)}{2}(x - x_0)^2$$

故可取$f(x) \approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, 使方程$f(x)=0$近似化为

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0.$$

若$f'(x_0)\neq 0$, 则上述方程的解为

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

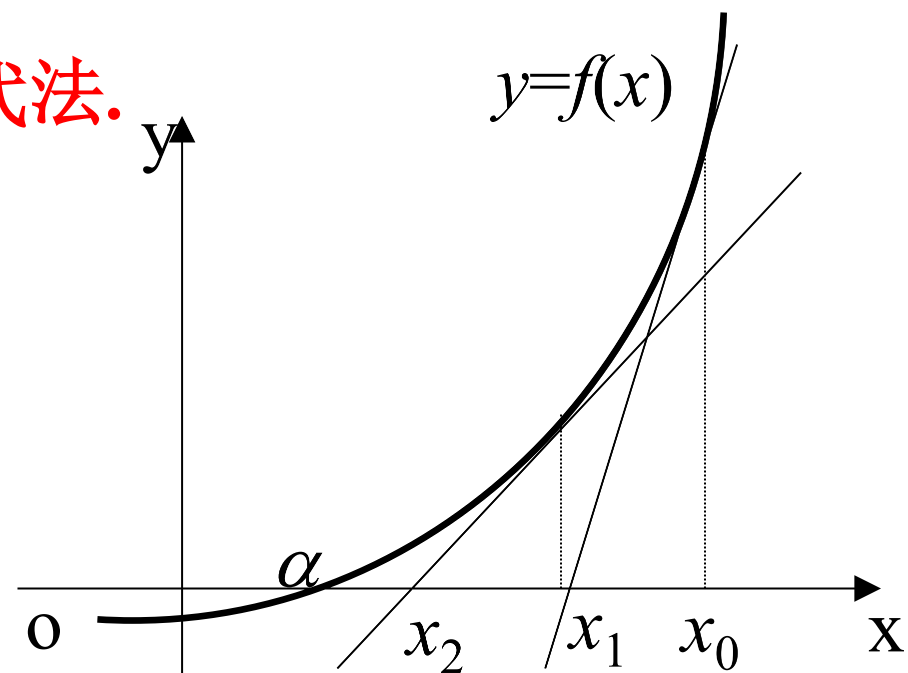
得到根α的新的近似值x_1. 一般地, 在x_k附近线性化方程为

$$f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)=0.$$

设$f'(x_k)\neq 0$, 其解为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad k=0,1,2,\ldots \qquad (4.4)$$

迭代格式(4.4)称为**Newton迭代法.**



直线 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

就是 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

Newton迭代法也叫**切线法**.

§ 4.3.2 Newton迭代法的收敛性

Newton迭代法相当于取迭代函数

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

的简单迭代法.

思考: 此迭代函数的不动点是否是方程$f(x)=0$的根?

因为

$$\varphi'(x)=1-\frac{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

如果α是$f(x)=0$的单根, 即$f(\alpha)=0$, 但$f'(\alpha)\neq 0$, 则有$\varphi'(\alpha)=0$,

由定理4.4的推论 **由定理4.6**

可知Newton迭代法此时在根α附近是收敛的, **而且收敛阶大于1.**

更具体地, 因为

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_k)^2$$

所以

$$f(\alpha)=f(x_k)+f'(x_k)(\alpha-x_k)+\frac{f''(\xi_k)}{2}(\alpha-x_k)^2$$

注意到 $f(\alpha)=0$, 于是可得

$$\alpha=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}-\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}(\alpha-x_k)^2=x_{k+1}-\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}(\alpha-x_k)^2$$

于是有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)^2}=\lim_{k\to\infty}\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}=\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$$

可见, **(当 $f'(\alpha)\neq 0$ 时)** Newton迭代法**至少**是平方收敛的.

关于Newton迭代法的初值选取

由于

$$\frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)^2}=\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}$$

若记

$$C=\frac{M_2}{2m_1}$$

其中 $M_2=\max|f''(x)|$, $m_1=\min|f'(x)|$,

则有

$$|x_{k+1}-\alpha|\le C|x_k-\alpha|^2.$$

因此

$$C|x_{k+1}-\alpha|\le (C|x_k-\alpha|)^2 \le (C|x_{k-1}-\alpha|)^4 \le \ldots \le (C|x_0-\alpha|)^{2^{k+1}}.$$

可见, 当$C|x_0-\alpha|<1$, 即

$$|x_0-\alpha|<2m_1/M_2\text{ 时},$$

Newton迭代法是收敛的.

思考: 如果有根区间的长度$<2m_1/M_2$, 那么……

定理4.7 设$f(x)$在单根α附近具有二阶连续导数, 则对充分接近α的初值x_0

($当|x_0-\alpha|<2m_1/M_2$, 其中$M_2=\max|f''(x)|$, $m_1=\min|f'(x)|$),

Newton迭代法产生的序列$\{x_k\}$收敛于α, 并且

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)^2}=\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$$

例5 用Newton迭代法求方程$xe^x-1=0$在0.5附近的根，精度要求$\varepsilon=10^{-5}$.

解: Newton迭代格式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k e^{x_k} - 1}{e^{x_k} + x_k e^{x_k}} = x_k - \frac{x_k - e^{-x_k}}{1 + x_k}, \quad k = 0, 1, \dots$$

取$x_0=0.5$, 计算结果如下:

k	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k-x_{k-1}\rvert$
0	0.5	-0.17563936	
1	0.57102044	0.01074751	0.07102044
2	0.56715557	0.00003393	0.00386487
3	0.56714329	0.0000000003	0.00001228
4	0.56714329	0.0000000003	0.00000000

从结果可见, Newton迭代法迭代3次已获得精确到小数点后四位的近似解, 迭代4次已获得精确到小数点后八位的近似解. 与例3比较可见Newton迭代法收敛的确实快.

例3

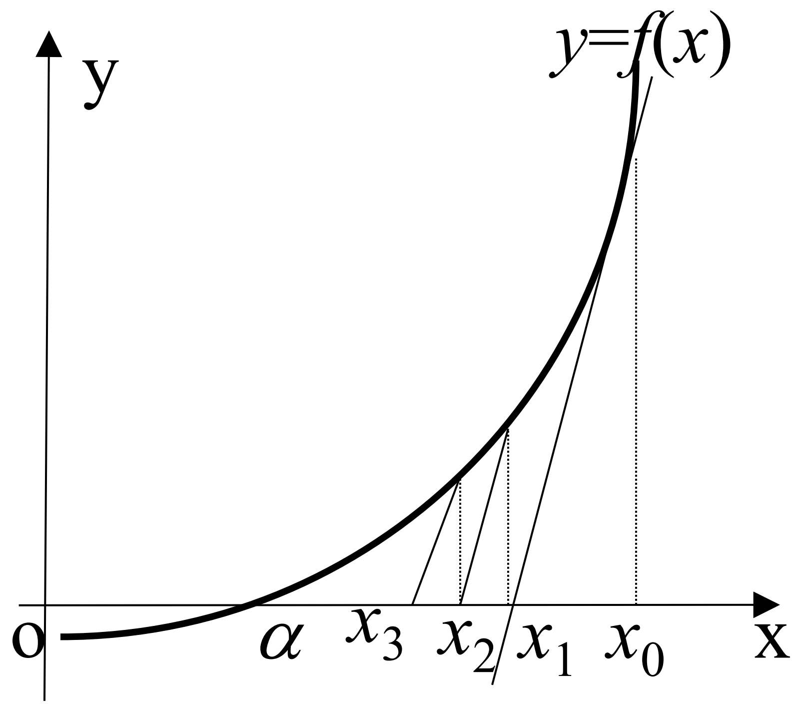
§ 4.3.3 Newton迭代法的变形

1. 简化的Newton迭代法

为了简化计算$f'(x_k)$, 采用迭代格式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{M}, k = 0, 1, \ldots$$

称为**简化Newton迭代法.**



若M与$f'(x)$同号, $|M|>(1/2)\max|f'(x)|$, 则存在区间$I=[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$, 简化Newton迭代法对$x_0 \in I$收敛.

通常取$M=f'(x_0)$.

简化Newton迭代法一般只具有线性收敛性.

(特殊情形下也许会有“超常”表现)

2. 割线法

因为 $f'(x_k) \approx \dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$,

为了简化计算 $f'(x_k)$, 采用迭代格式

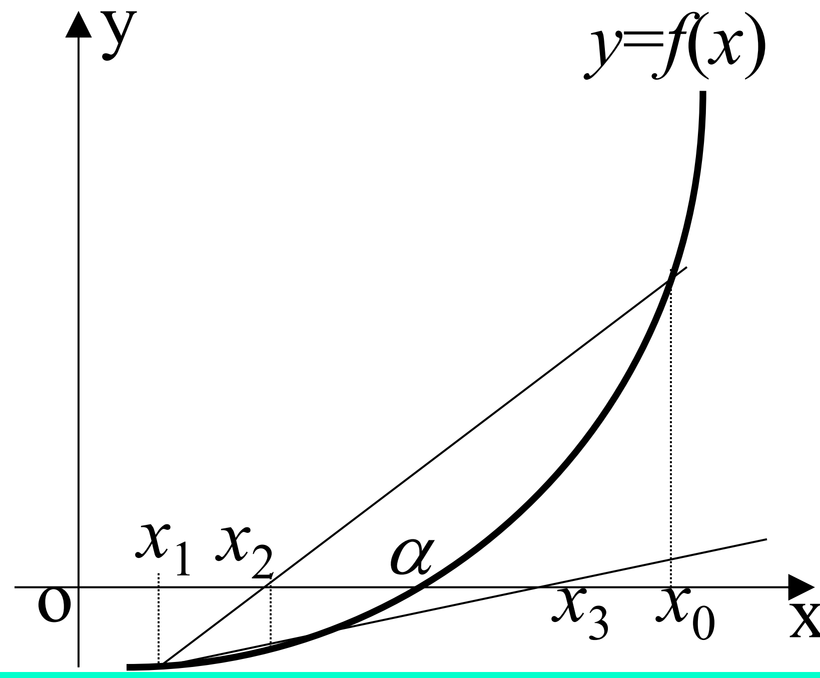
此方法需要2个迭代初值 x_0 和 x_1.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}),\ k = 1, 2, \ldots$$

此格式称为**割线法.**

若 $f(x)$ 在根 α 附近二次连续可微, 且 $f'(\alpha) \neq 0$, 可以证明割线法是收敛的, 且有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k e_{k-1}} = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$



割线法收敛的阶为 $p = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618.$

可计算重根的Newton迭代法: 关于重根

称α是方程$f(x)=0$的m重根，是指$f(x)=(x-\alpha)^m h(x)$，其中$h(x)$在$x=\alpha$处连续且$h(\alpha)\neq 0$.

观察:

$$f'(x)= m(x-\alpha)^{m-1}h(x)+(x-\alpha)^m h'(x)= (x-\alpha)^{m-1}[mh(x)+(x-\alpha)h'(x)]$$

$$=(x-\alpha)^{m-1}g(x)$$

其中$g(x)= mh(x)+(x-\alpha)h'(x)$, 满足$g(\alpha) =m h(\alpha) \neq 0$.

命题: 若α是方程$f(x)=0$的m重根, 且$f(x)$充分光滑, 则

α是方程$f'(x)=0$的m-1重根;

α是方程$f''(x)=0$的m-2重根;

…

α是方程$f^{(m-1)}(x)=0$的单根(即1重根);

还可以验证: α**不是**方程$f^{(m)}(x)=0$的根.

3. 带参数*m*的Newton迭代法

由于

$$[f(x)]^{\frac{1}{m}} = (x-\alpha)[h(x)]^{\frac{1}{m}}$$

可见, α恰是方程 $[f(x)]^{\frac{1}{m}} = 0$ 的单根. 应用Newton迭代法得:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{[f(x_k)]^{\frac{1}{m}}}{\frac{1}{m}[f(x_k)]^{\frac{1}{m}-1} f'(x_k)}$$

整理可得迭代格式:

$$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

称之为**带参数*m*的Newton迭代法**. 它是求方程$f(x)=0$的***m*重根**的**平方收敛**的迭代法.

4. 可求重根的Newton迭代法(在重数未知时)

观察函数:

$$u(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{(x-\alpha)^m h(x)}{m(x-\alpha)^{m-1}h(x)+(x-\alpha)^m h'(x)}$$

$$=\frac{(x-\alpha)h(x)}{mh(x)+(x-\alpha)h'(x)}$$

$$=(x-\alpha)\frac{h(x)}{mh(x)+(x-\alpha)h'(x)}=(x-\alpha)\bar{h}(x),$$

其中

$$\bar{h}(x)=\frac{h(x)}{mh(x)+(x-\alpha)h'(x)}$$

可知

$$\bar{h}(\alpha)=\frac{h(\alpha)}{mh(\alpha)+(\alpha-\alpha)h'(\alpha)}=\frac{1}{m}\neq 0$$

可见, α恰是方程$u(x)=0$的单根, 应用Newton迭代法有

$$x_{k+1}=x_k-\frac{u(x_k)}{u'(x_k)}$$

由于 $$u'(x)=\frac{f'(x)f'(x)-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=1-\frac{f''(x)}{f'(x)}\frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$=1-\frac{f''(x)}{f'(x)}u(x),$$

因此 $$\frac{u(x)}{u'(x)}=\frac{u(x)}{1-\frac{f''(x)}{f'(x)}u(x)}$$

或者 $$\frac{u(x)}{u'(x)}=\frac{f(x)/f'(x)}{[f'(x)f'(x)-f(x)f''(x)]/[f'(x)]^2}$$

$$=\frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}.$$

故得迭代格式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{u(x_k)}{1 - A(x_k)u(x_k)}, \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{4.6}$$

其中 $A(x) = f''(x)/f'(x)$.

上述格式也可写为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2 - f(x_k)f''(x_k)} \tag{4.6'}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

迭代格式(4.6)或(4.6’)是求方程$f(x)=0$**重根**的**平方收敛**的迭代法, 而且**不需知道根的重数**.

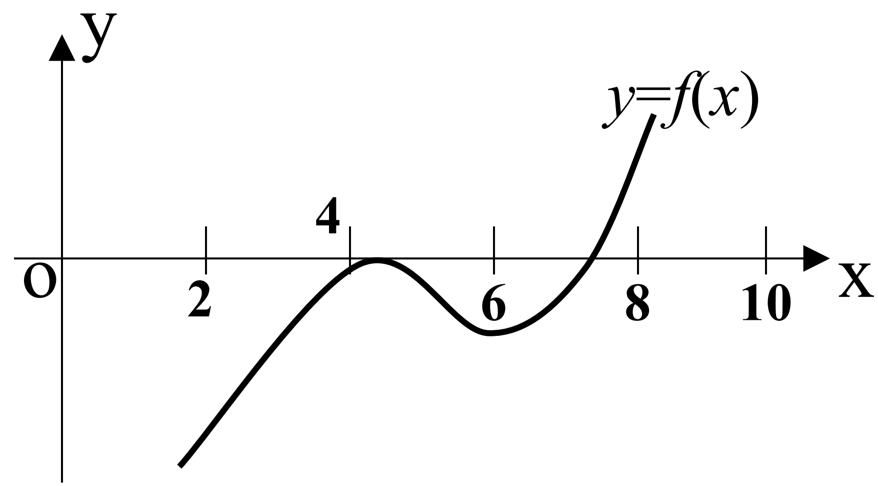
关于Newton迭代法的其他有效的收敛性判据以及其他类型的变形算法, 可参见有关文献.

例6 利用Newton迭代法求方程

$$f(x)=x^4-8.6x^3-35.51x^2+464.4x-998.46=0$$

的正实根.

解: $y=f(x)$的图形为



可见, 方程在x=4附近有一个重根, 在x=7附近有一单根.

利用Newton迭代法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad k=0,1,2,\ldots$$

求方程的单根, 取初值x_0=7, 精度$\varepsilon=10^{-6}$, 计算可得:

$$x_4=7.34846923,\ x_5=7.348469229,\ |x_5-x_4|=0.000000001.$$

可见, 迭代5次就得到满足精度的解x_5=7.348469229.

利用求重根的Newton迭代法(4.6)求重根, 取x_0=4,可得

$$x_3=4.300000,\ x_4=4.300000,\ |x_4-x_3|=0.000000006.$$

可见, 迭代4次就得到满足精度的解x_4=4.300000.

然而，若用一般的Newton迭代法(4.4)求重根，取x_0=4, 虽然也收敛, 却需要迭代19次才能得到满足精度要求的解.

利用带参数2的Ne on迭代法, 取x_0=4可得

=4.2999898.

用一般的Newton迭代法求重根, 可以证明理论上一般也是收敛的, 只是收敛阶为1. （留作思考题）

自修: 教材P96-98: 例4-8