考试复习-1-4

第一章 绪论

1.1 误差

x^* = 精确值， x = 近似值

1. 绝对误差： $e = x^* - x$
2. 相对误差： $e_r = \frac{e}{x^*} = \frac{x^* - x}{x^*}$
3. 绝对误差限： $|e| \le \varepsilon$
4. 相对误差限： $\left|\frac{x^* - x}{x^*}\right| \le \varepsilon_r$

当 $x \approx x^*$ 时可用 x 代替 x^* 进行估计，一般直接用已知的 x。

1.2 有效数字

（1）记 $x \approx x^*$ ，如果 x 的绝对误差限是它某一数位的**半个单位**，并且从 x 左起第一个**非零数字**到该数位有 n 位，则称该 n 位数字为 x 的有效数字。

（2） $x = \pm 0.a_1 a_2 \ldots a_n \times 10^m \quad (a_1 \neq 0)$ ，其中m是整数。x 作为 x^* 的近似具有 n 位有效数字，当且仅当： $|x^* - x| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$

1.3 绝对误差与函数

$|f(x^*) - f(x)| = |f'(\xi)|\,|x^* - x| \quad$ (由微分中值定理)

1.4 数值计算若干原则

避免两个相近的数相减：

1. **根式相减** $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$
2. **三角函数** $1 - \cos x = 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$
3. **指数函数** $e^x - 1 \approx (1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \ldots) - 1 = x + \dfrac{x^2}{2}$

第二章 解线性方程组的直接法

简单了解 Gauss 消去法、列主元 Gauss 消去法的思想和方法——具体内容自行搜索

方法	是否换行	是否换列	数值稳定性
普通高斯消元	❌	❌	**最差，可能崩**
部分主元消元	✔ 行内最大	❌	**常用且稳定**
全主元消元	✔	✔	**最稳定，推荐**

2.1 矩阵分解–方程组求解

掌握矩阵的直接三角分解法，掌握用三角分解法求方程组的解。会对矩阵进行 Doolittle 分解（LU）、Cholesky 分解（平方根分解）（ GG^T ），简单了解 Crout (TM) 分解。

Doolittle	$A=\bar{L}U$	$\bar{L}$ 为单位下三角， U 为一般上三角
Crout 分解	$A=L\bar{U}$	L 为一般下三角， $\bar{U}$ 为单位上三角
Cholesky 分解 （适用于对称正定矩阵）	$A=\bar{L}D\bar{L}^T$ $A=GG^T$	$\bar{L}$ 为单位下三角， D 为对角， G 为一般下三角

方程组求解步骤（以LU分解举例，其余类似）：

$$Ax=b\Rightarrow LUx=b$$

令：

$$Ly=b \quad \Rightarrow \text{先求 } y$$

$$Ux=y \quad \Rightarrow \text{再求 } x$$

适用于一般非奇异矩阵的求解过程。

2.2 求逆的运算

若要求 A^{-1} ，只需解： $AX=I$

设： $A(x_1,x_2,x_3)=(I_1,I_2,I_3)$

即： $AX_1=(1,0,0), \quad AX_2=(0,1,0), \quad AX_3=(0,0,1)$

解出 X_1,X_2,X_3 组成 A^{-1} 。

2.3 向量范数–矩阵范数

掌握向量和矩阵的范数的定义，会判定函数是否是范数；会计算几个常用的向量和矩阵的范数；理解范数的等价性（自行搜）；理解向量序列的极限、矩阵序列极限的概念。会计算矩阵的条件数。（对称矩阵的谱条件数）

2.3.1 向量范数

对向量 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$ ，

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad (1 \le p < \infty)$$

特别的， $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|$

p → ∞ 的极限关系： $\lim\limits_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$

判断是否满足向量范数：非负性、齐次性、三角不等式

2.3.2 矩阵范数

(1) 矩阵的 1—范数（列范数–列和最大）

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

(2) 矩阵的 2—范数

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

(3) 矩阵的 ∞ —范数（行范数–行和最大）

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

(4) 矩阵的 Frobenius 范数

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

判断是否满足矩阵范数：非负性、齐次性、三角不等式、相容性

2.3.3 条件数

$$\mathrm{Cond}_p(A) = \|A\|_p \cdot \|A^{-1}\|_p, \qquad p = 1, 2, \infty$$

2.3.4 向量序列收敛

设有向量序列 $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})^T, \quad k = 1, 2, \ldots$

以及常向量 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)^T$ ，若

$$\lim_{k \to \infty} \|x^{(k)} - x^*\| = 0,$$

则称向量列 $x^{(k)}$ 收敛于向量 x^* ，记作

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* \quad 或 \quad x^{(k)} \to x^*.$$

由此有 $x^{(k)} \to x^* \iff x_i^{(k)} \to x_i^*, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

设 $\|\cdot\|$ 是一种向量范数，则称

$$\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

为向量范数所诱导的**矩阵算子范数**。

第三章 解线性方程组的迭代法

3.1 迭代法介绍

（1）给定线性方程组 $Ax = b$ ，若能将其等价改写为 $x = Mx + g$ ，其中 $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ，$g \in \mathbb{R}^n$ ，就得到一个标准迭代格式：$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + g, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$ 这个形式称为固定点迭代 。

（2）若迭代序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛于 x^* ，则取极限得到：$x^* = Mx^* + g.$ 由于迭代方程来自 $Ax = b$ ，所以 x^* 与原方程解一致。**换句话说：若迭代法收敛，它一定收敛到原方程的唯一解。**

3.2 迭代格式（分量形式）

线性方程组（以3/4个未知量的方程组为例），假设 $a_{ii} \neq 0 \ (i = 1, 2, 3)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

3.2.1 Jacobi（雅可比）迭代法的迭代格式（分量形式）

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - a_{14}x_4^{(k)}\right), \\
x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - a_{24}x_4^{(k)}\right), \\
x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} - a_{34}x_4^{(k)}\right), \\
x_4^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{44}}\left(b_4 - a_{41}x_1^{(k)} - a_{42}x_2^{(k)} - a_{43}x_3^{(k)}\right).
\end{cases}
$$

$$
x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j\neq i} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.
$$

3.2.2 Gauss–Seidel（高斯一赛德尔）迭代法的迭代格式（分量形式）

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - a_{14}x_4^{(k)}\right), \\
x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - a_{24}x_4^{(k)}\right), \\
x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{34}x_4^{(k)}\right), \\
x_4^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{44}}\left(b_4 - a_{41}x_1^{(k+1)} - a_{42}x_2^{(k+1)} - a_{43}x_3^{(k+1)}\right).
\end{cases}
$$

$$
x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.
$$

3.2.3 SOR 法（逐次超松弛迭代法）的迭代格式（分量形式）

在 G–S 基础上加入松弛因子 ω

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \dfrac{w}{a_{11}}\left(b_1 - a_{11}x_1^{(k)} - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right), \\
x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \dfrac{w}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{22}x_2^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}\right), \\
x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} + \dfrac{w}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{33}x_3^{(k)}\right).
\end{cases}
$$

$$
x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n,\ k = 0, 1, \ldots
$$

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

上面的原始公式，不过对这个做了些变形。

3.3 迭代格式（矩阵形式）

线性方程组： $Ax = b$ ，将矩阵 A 分解为：

$$A = D - L - U$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}}_{D-\text{对角矩阵}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}}_{\text{（}-L\text{）}-\text{严格下三角矩阵}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{（}-U\text{）}-\text{严格上三角矩阵}}$$

3.3.1 Jacobi 迭代法的迭代格式（矩阵形式）

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b, \quad k = 0, 1, \ldots$$

迭代矩阵： $B = D^{-1}(L+U)$

$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \frac{a_{14}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{a_{23}}{a_{22}} & \frac{a_{24}}{a_{22}} \\ \frac{a_{31}}{a_{33}} & \frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \frac{a_{34}}{a_{33}} \\ \frac{a_{41}}{a_{44}} & \frac{a_{42}}{a_{44}} & \frac{a_{43}}{a_{44}} & 0 \end{pmatrix} x^{(k)} + \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \frac{b_3}{a_{33}} \\ \frac{b_4}{a_{44}} \end{pmatrix}$$

$$Dx^{(k+1)} = (L+U)x^{(k)} + b, \quad k = 0, 1, \ldots$$

3.3.2 Gauss–Seidel 迭代法（GS）迭代格式（矩阵形式）

$$x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b, \quad k = 0, 1, \ldots$$

迭代矩阵： $G = (D-L)^{-1}U$

G–S 使用新的结果立即参与下一维更新，因此可直接利用下三角部分。

从 $(D-L)x = Ux + b$ ，右边仍用旧值 $x^{(k)}$ ，左边用新值：

$$x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}(Ux^{(k)} + b)$$

由于 D–L 是下三角矩阵，可以逐个顺序计算 $x_1, x_2, x_3, \ldots$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & a_{33} & 0 \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ x_4^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ x_4^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

$$(D-L)x^{(k+1)} = Ux^{(k)} + b, \quad k = 0, 1, \ldots$$

3.3.3 SOR（逐次超松弛法）迭代格式（矩阵形式）

$$x^{(k+1)} = (D-wL)^{-1}[(1-w)D + wU]x^{(k)} + w(D-wL)^{-1}b, \quad k = 0, 1, \ldots$$

迭代矩阵： $L_w = (D-wL)^{-1}[(1-w)D + wU]$

在 G–S 基础上加入松弛因子 ω 。

$$(D-\omega L)x^{(k+1)} = \left[(1-\omega)D + \omega U\right]x^{(k)} + \omega b$$

3.3.4 一般迭代格式（矩阵形式）

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + g, \quad k = 0, 1, \ldots$$

迭代矩阵： M

3.4 收敛条件

3.4.1 收敛的充要条件

一般迭代格式： $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + g, \quad k = 0, 1, \ldots$

$\rho(M) < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad$ 迭代法收敛

注： $\rho(A)$为谱半径 ， $\rho(A) = \max\limits_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$

对应迭代法：

$$\rho(B) < 1 \iff \text{Jacobi 收敛}$$

$$\rho(G) < 1 \iff \text{Gauss–Seidel 收敛}$$

$$\rho(L_w) < 1 \iff \text{SOR 收敛}$$

3.4.2 收敛的充分条件

若 $\|M\| < 1 \quad \Rightarrow \quad$ 迭代收敛

对应：

$\|B\| < 1 \Rightarrow$ Jacobi 收敛

$\|G\| < 1 \Rightarrow$ Gauss–Seidel 收敛

$\|L_w\| < 1 \Rightarrow$ SOR 收敛

3.4.3 其它 GS 收敛条件

	Jacobi 迭代法	Gauss–Seidel 迭代法	SOR 方法
当 A 严格对角占优时	收敛	收敛	当 $0 < \omega \leq 1$ 时 收敛
当 A 对称正定时	且$2D - A$ 均为 对称正定矩阵 时收敛	收敛	当 $0 < \omega < 2$ 时 收敛

注：此时线性方程组 Ax=b 必有唯一解。

（必要条件）若 SOR 方法（对任意迭代初始向量）收敛，则 $0 < \omega < 2$ ；

严格对角占优：即每一行的对角元素绝对值都**严格大于**该行其余元素绝对值之和。 **（没有等于）**

3.5 误差估计式的应用

设迭代法 $x^{(k+1)}=Mx^{(k)}+g$ ，如果矩阵 M 的某个矩阵范数满足： $\|M\|<1,$

则迭代对 任意初始向量 $x^{(0)}$ 收敛到唯一极限 x^* ，并满足误差估计：

$$\|x^{(k)}-x^*\|\le\frac{\|M\|}{1-\|M\|}\cdot\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|$$
$$\|x^{(k)}-x^*\|\le\frac{\|M\|^k}{1-\|M\|}\cdot\|x^{(1)}-x^{(0)}\|$$

注： $\|M\|<1$ 是指M的**某个范数**小于1；上述两个不等式中的矩阵范数和向量范数相容。

根据误差估计，对任意 $\varepsilon>0$ ，

若希望 $\|x^{(k)}-x^*\|<\varepsilon$ ，只需使迭代次数满足：

$$k>\frac{\ln\varepsilon+\ln\frac{1-\|M\|}{\|x^{(1)}-x^{(0)}\|}}{\ln\|M\|}$$

第四章 解非线性方程的迭代法

4.1 有根区间判断

若：（1）f(x) 在区间 [a,b] 上连续（2）且满足： $f(a)\cdot f(b)<0$

则一定存在至少一个根 $\xi\in(a,b)$ ： $f(\xi)=0.$ 这就是有根区间的最基本判断法：符号相反 ⇒ 有根。

若增加 $f(x)$ 在该区间单调，那么就有唯一根。

不动点

如果 $\varphi(x)$ 把区间 I 映到自身（即 $\varphi(I)\subset I$ ），并且存在某个 $\alpha\in I$ 满足 $\alpha=\varphi(\alpha)$ ，则： α 是映射 $\varphi(x)$ 的不动点。在求解方程 f(x)=0 时，我们把它改写成： $x=\varphi(x)$ ，所以 方程的根就是 φ 的不动点。

4.2 迭代格式

4.2.1 简单迭代法的迭代格式

$$x_{k+1}=\varphi(x_k),\qquad k=0,1,2,\dots$$

简单迭代法的关键是选择一个合适的、在根附近“收缩”的迭代函数 $\varphi(x)$ （迭代函数不唯一）；此外对于非线性方程迭代求根，初值 x_0 的选取也很重要。

压缩映射原理

设迭代函数 $\varphi(x)$ 满足

(1) $a \le \varphi(x) \le b, \qquad x \in [a,b];$

(2) $\forall x, y \in I, \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \le L|x-y| \quad (L \in (0,1))$ ——压缩映射

直观理解： φ **函数会缩短所有点之间的距离。反复迭代必然把所有点“拉向中心”，那个中心就是唯一不动点，也就是简化迭代求得的根。**

则可以得到以下结论

1. **有且存在一个不动点**

$$\exists \alpha \in I \quad \text{使得} \quad \varphi(\alpha) = \alpha.$$

2. **从任意初值都会收敛到它**

只要 $x_0 \in I$ ，通过简单迭代

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

都会得到一个收敛序列 $x_k \to \alpha.$

这是整个简单迭代法、牛顿法、割线法等大量迭代求根算法的理论基础。

4.2.2 Newton 迭代格式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Newton 迭代的“不动点”恰好就是方程 f(x)=0 **的根。**

Newton 迭代法的优点在于：当初值足够接近真实根且导数良好时，它具有平方收敛速度，比一般的线性迭代法快得多，同时只需局部信息 f(x) 与 f'(x) 就能实现高精度的快速逼近，因此在数值求根中极为高效。

但其局限性也很明显：方法依赖导数，若 f'(x) 难以计算或在迭代过程中接近 0，会导致发散或震荡；初值敏感，离根太远时可能根本不收敛；对多重根收敛速度会退化为线性；在函数不光滑或存在奇异点时也容易失败。

因此 Newton 法既强大又脆弱，需要良好的初值与函数条件支撑。

4.3 收敛定理

4.3.1 全局收敛

设迭代函数 $\varphi(x)$ 在区间 [a,b] 上可导，且满足：

$$(1) \quad a \le \varphi(x) \le b, \qquad x \in [a,b];$$

$$(2) \quad \exists L < 1, \text{使} \ \forall x \in [a,b], \quad |\varphi'(x)| \le L < 1;$$

则：迭代方程 $x=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在唯一不动点 x^*，并且对任意初始值$x_0 \in [a,b]$ 由迭代格式$x_{k+1}=\varphi(x_k)$产生的迭代序列$\{x_k\}$ 收敛于 x^*。

4.3.2 局部收敛定义

当且仅当迭代函数 $\varphi(x)$ 在根 α 的邻域满足 $|\varphi'(\alpha)|<1$ 时，该迭代序列在该邻域是收敛的；若 $|\varphi'(\alpha)|>1$ ，则迭代发散。

4.4 误差

4.4.1 误差上界

若 $\varphi(x)$ 为区间 I 上的压缩映射，L 为对应的 Lipschitz 常数，满足条件 0<L<1，则对于任意初值 $x_0 \in I$, 由迭代 $x_{k+1}=\varphi(x_k), \quad k=0,1,2,\ldots$ 产生的迭代序列 $\{x_k\}$ 满足：

$$|x_k-\alpha| \le \frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|$$

$$|x_k-\alpha| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$$

4.4.2 由误差界推迭代次数

由压缩映射的迭代误差估计可知，若迭代函数 $\varphi(x)$ 满足 Lipschitz 常数 L<1，且不动点为 α ，则迭代误差满足近似上界： $|x_k-\alpha| \le \dfrac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|.$

为了使误差进入精度范围 $\varepsilon>0$ ，只需要：

$$\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0| \le \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad L^k \le \frac{\varepsilon(1-L)}{|x_1-x_0|}.$$

两边取对数（注意 $0<L<1$，$\ln L<0$ ），可得到对迭代次数的估计：

$$k \ \geq \ \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(1-L)}{|x_1-x_0|}\right)}{\ln L}$$

4.5 重根

4.5.1 重根的定义

称 α 是方程 $f(x)=0$ 的 m **重根**，是指存在函数 h(x)，使

$$f(x)=(x-\alpha)^m h(x),$$

其中 h(x) 在 $x=\alpha$ 处连续且 $h(\alpha)\neq 0$ 。

特别地，当 m=1 时，称 α 为方程 f(x)=0 的 **单根**。

4.5.2重根的等价判别条件

若 f(x) 在 α 附近充分光滑（即各阶可导），则下面两种描述完全等价：

$$\alpha \text{ 是 } f(x)=0 \text{ 的 } m \text{ 重根}$$
$$\Updownarrow$$
$$f(\alpha)=f'(\alpha)=\cdots=f^{(m-1)}(\alpha)=0, \qquad f^{(m)}(\alpha)\neq 0$$

重根为什么导致 Newton 失效?

若 α 是 m 重根：

$$f(x)=(x-\alpha)^m h(x), \quad h(\alpha)\neq 0,$$

则 $f'(\alpha)=0.$

Newton 在重根处“切线斜率接近 0”，导致每次迭代走得极慢：

你会得到 只有线性收敛的行为，而不是二次收敛。

4.6 收敛阶

4.6.1 收敛阶定义

设迭代序列 x_k 收敛于 α ，记误差

$e_k = x_k - \alpha$

若存在正整数 p 和非零常数 C，使

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C,$$

或写成误差近似关系

$$|x_{k+1} - \alpha| \approx C|x_k - \alpha|^p, \qquad (k \gg 1),$$

则称迭代序列 $\{x_k\}$ 为 p **阶收敛**，

其中 p 为 **收敛阶**，C 为 **渐近误差常数**。

4.6.2 收敛阶定理

设迭代格式为 $x_{k+1} = \varphi(x)$ ，不动点 $\alpha = \varphi(\alpha)$ ，

若迭代函数 $\varphi(x)$ 在 α 邻域内充分光滑，并满足

$$\varphi'(\alpha) = \varphi''(\alpha) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(\alpha) = 0, \qquad \varphi^{(p)}(\alpha) \neq 0, \quad p \geq 2.$$

则当初值 x_0 足够接近 α ，迭代 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 是 p **阶收敛**，并且满足

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = \frac{1}{p!}|\varphi^{(p)}(\alpha)| \neq 0.$$

4.6.3 Newton收敛性定理

如果：

1. f(x) 在根 α 附近二阶连续可微；
2. α 是单根 $(f(\alpha) = 0,\ f'(\alpha) \neq 0)$ （**单根就是导数不为 0 的根**）
3. 初值满足： $|x_0 - \alpha| < 2m_1/M_2$, $M_2 = \max|f''(x)|,\ m_1 = \min|f'(x)|$ ，这也称为 Newton法的收敛半径；

则 Newton 迭代 $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ **必定收敛到** α ，并且满足：

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^2} = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$ 则说明 Newton 法具有**平方收敛**。

> $f(x)$ 在根 α 的邻域内有二阶连续导数，且 $f'(\alpha) \neq 0$ ，则 Newton迭代法在根 α 的某个邻域上收敛，收敛阶（至少）为 2。

4.7 其他了解内容

掌握 Newton 迭代法的变形方法的有关思想和收敛性。

方法	是否要导数	对单根的收敛阶	对 m 重根的表现	是否需知道 m
Newton	要 f	**二次收敛**	降为线性	否
简化 Newton	不更新导数	线性	更慢	否
割线法	不要导数	1.618	更慢	否
带参数 m 的 Newton	要梯度	**二次收敛**	二次收敛	**需知道 m**
可求重根的 Newton	要导数与二阶导	接近二次	接近二次	**不用知道 m**