第6章 插值与逼近

设函数$y=f(x)$在区间$[a, b]$上连续, 给定$n+1$个点

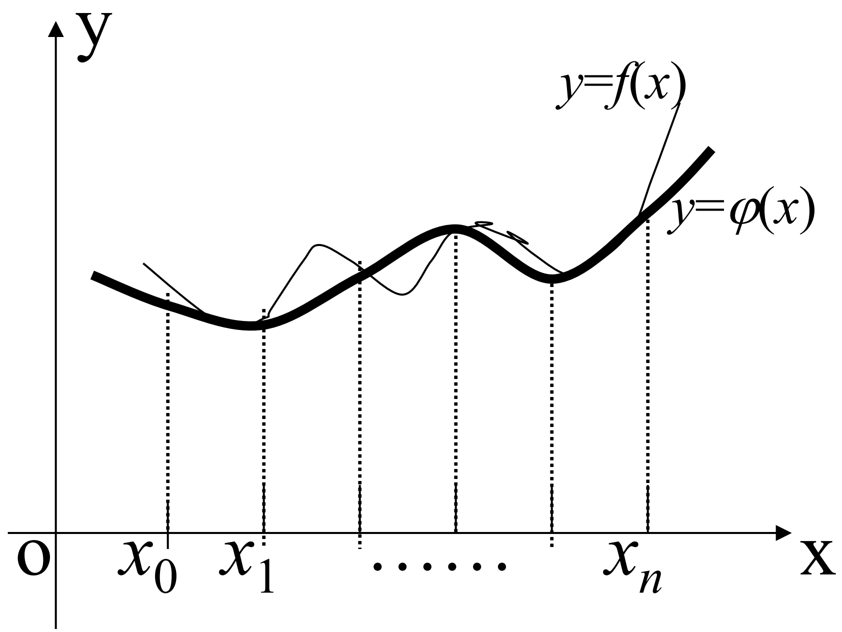
$$a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b, \tag{6.1}$$

已知$f(x_k)=y_k$ ($k=0, 1,\ldots, n$), 在函数类P中寻找一函数$\varphi(x)$作为$f(x)$的近似表达式, 使满足

$$\varphi(x_k)= y_k=f(x_k),\ k=0, 1,\ldots, n. \tag{6.2}$$

称$y=f(x)$为**被插值函数**; 称$\varphi(x)$为**插值函数**; 称$x_0, x_1,\ldots, x_n$为**插值节点**; 称式(6.2)为**插值条件**; 寻求插值函数$\varphi(x)$的方法称为**插值方法**.

函数插值问题，从几何上看就是要求过n+1个点(x_k, y_k) (k=0, 1,…, n) 的曲线$y=\varphi(x)$作为曲线$y=f(x)$的近似.



§ 6.1 多项式插值问题

在构造插值函数时，函数类P的不同选取，对应不同的插值方法. 这里主要讨论函数类P是代数多项式，即所谓的多项式插值.

用P_n表示所有次数不超过n的多项式函数类，若$p_n(x)\in P_n$，则$p_n(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$是由$n+1$个系数唯一确定的. 若$p_n(x)$满足插值条件(6.2), 并设$y_k= p_n(x_k)$, k=0, 1, …, n, 则有

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \tag{6.3}$$

其系数矩阵的行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \neq 0.$$

因而此方程组必存在唯一解. 由上述讨论可得到如下结论.

定理6.1 给定n+1个互异节点$x_0, x_1, \dots, x_n$上的函数值$y_0, y_1, \dots, y_n$, 则满足插值条件(6.2)的n次插值多项式$p_n(x)$是存在且唯一的.

注: 定理6.1也可以理解为: 满足条件(6.2)的n次多项式$p_n(x)$是存在且唯一的.

思考: 定理6.1关于唯一性的意义.

§ 6.2 Lagrange(拉格朗日)插值多项式

对n+1个节点x_0, x_1, …, x_n, 构造n+1个n次多项式$l_0(x)$, $l_1(x)$, …, $l_n(x)$, 使满足

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \qquad i, j=0, 1,\ldots, n. \quad (6.4)$$

思考题1: 考虑这些函数$l_0(x)$, $l_1(x)$,…, $l_n(x)$的曲线图形.

思考题2: 这些函数$l_0(x)$, $l_1(x)$,…, $l_n(x)$是线性无关的. 试证之.

思考题3: 考虑n次多项式空间P_n的维数, 以及它的基向量.

考察以下函数

$$L_n(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+\ldots+l_n(x)y_n. \tag{6.7}$$

其中$y_k=f(x_k)$ (k=0, 1,..., n.) 为插值节点x_k处的函数值.

可见$L_n(x)$满足以下性质:

性质1: $L_n(x)\in \mathrm{P}_n$;

性质2: $L_n(x_k)=y_k$, k=0, 1,..., n.

由定理6.1(指出的唯一性)可知, $L_n(x)$就是函数$f(x)$满足插值条件(6.2)的n次插值多项式.

(6.7)式确定的n次多项式$L_n(x)$称为**n次Lagrange(拉格朗日)插值多项式**. 称$l_k(x)$ (k=0, 1,…, n.)是关于节点x_k (k=0, 1,…, n)的n次**Lagrange插值基函数**.

由于$l_k(x)$满足: $l_k(x_j)=0, (j=0, 1, \ldots, k-1, k+1,\ldots, n)$, 所以可设

$$l_k(x)=c(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n).$$

再由$l_k(x_k)=1$确定常数c, 可得

$$c=\frac{1}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}.$$

于是

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$$

$$=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

小结

设函数$y=f(x)$在区间$[a, b]$上连续, 给定$n+1$个互异节点

$$x_0, x_1, \dots, x_n$$

以及节点函数值

$$y_k=f(x_k),\ k=0, 1, \dots, n.$$

$f(x)$的n次Lagrange(拉格朗日)插值多项式为:

$$L_n(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+\dots+l_n(x)y_n=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)y_k$$

其中基函数$l_k(x)$ ($k=0, 1, 2,\dots, n.$) 为

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$

$$=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

记$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$, 可知

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_k)[(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)],$$

观察它的一阶导函数可得

$$\omega'_{n+1}(x)= (x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)$$
$$+(x-x_k)[(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)]'.$$

因此可得$\omega_{n+1}(x)$在x_k处的一阶导数值为

$$\omega'_{n+1}(x_k) = (x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n).$$

对照Lagrange基函数$l_k(x)$的分母, 可得以下性质.

性质1 若记$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$, 则$l_k(x)$可写成

$$l_k(x)=\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}$$

定理6.1表明：满足$n+1$个节点(函数值)的插值条件的n次多项式(次数$\leq n$的多项式)是唯一的.

因此，如果被插值函数$f(x)$**是次数**$\leq n$**的多项式**，则它与由$n+1$个节点所确定的n**次插值多项式**$L_n(x)$的关系为:

$$f(x) \equiv L_n(x).$$

由此还可以得到以下一些(推论)性质.

性质2 设互异节点为x_i, i=0, 1,…, n, Lagrange插值基函数为$l_i(x)$, i=0, 1,…, n, 则有

$$x^k = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) x_i^k,\ \ k = 0,1,2,\dots n.$$

特别当k=0时, 有

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1.$$

例1 求$f(x)$关于节点x_0, x_1的线性Lagrange插值多项式.

解 对节点x_0, x_1, Lagrange插值基函数为

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1},$$

$$l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

于是得到线性Lagrange插值多项式

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

易见: $L_1(x)$就是过点$(x_0, f(x_0))$和点$(x_1, f(x_1))$的直线.

例2 求$f(x)$关于节点x_0, x_1, x_2的二次Lagrange插值多项式.

解 对节点x_0, x_1, x_2的Lagrange插值基函数为

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)},\quad l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)},$$

于是得二次Lagrange插值多项式

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

若三点共线, 则$L_2(x)$退化为直线.

$L_2(x)$是过点$(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$和$(x_2, f(x_2))$的抛物线.

为研究插值多项式的近似程度, 记插值的误差函数为

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x).$$

$R_n(x)$称为**n次Lagrange插值多项式的余项**.

更具体的结论见以下定理6.2.

定理6.2 设$f^{(n)}(x)$在$[a, b]$连续, $f^{(n+1)}(x)$在(a, b)内存在, 在节点$a\le x_0<x_1<\ldots<x_n\le b$上, 对于满足插值条件(6.2)的插值多项式$L_n(x)$, 对任一$x\in[a, b]$, 其插值余项为

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \tag{6.5}$$

其中$\xi_x\in(a, b)$且与x有关.

证明: 由于$R_n(x_i)=f(x_i)-L_n(x_i)=0$ $(i=0, 1,\ldots, n)$, 所以

$$R_n(x)=C(x)\omega_{n+1}(x).$$

对于任一$x\in[a, b], x\neq x_i$ ($i=0, 1, 2,\ldots, n$), 构造函数

$$\varphi(t)=f(t)-L_n(t)-C(x)\omega_{n+1}(t).$$

则有

$$\varphi(x_i)=0\ (i=0, 1, 2,\ldots, n),\ \varphi(x)=0,$$

即, $\varphi(t)$在$[a, b]$至少有$n+2$个零点.

由Rolle定理可知$\varphi'(t)$在$[a, b]$至少有$n+1$个零点,......,

反复应用Rolle定理知$\varphi^{(n+1)}(t)$在$[a, b]$至少有1个零点ξ_x, 于是

$$0=\varphi^{(n+1)}(\xi_x)=f^{(n+1)}(\xi_x)-C(x)(n+1)!$$

因而有 $C(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$,

所以得到 $$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$ 证毕.

定理6.2的推论

若$|f^{(n+1)}(x)|$在$[a, b]$有上界M_{n+1}，则Lagrange插值余项满足如下估计:

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\omega_{n+1}(x)\right|$$

思考: 使$|R_n(x)|$尽可能小(接近0)的几个要素是什么？

例6-1 给定函数表

x	10	11	12	13
$ln(x)$	2.302585	2.397895	2.484907	2.564949

请用二次插值计算$ln(11.25)$的近似值, 并估计误差.

解 取节点$x_0=10$, $x_1=11$, $x_2=12$, 做二次Lagrange插值, 有

$$ln(11.25) \approx L_2(11.25) = \frac{(11.25-11)(11.25-12)}{(10-11)(10-12)} \times 2.302585$$

$$+\frac{(11.25-10)(11.25-12)}{(11-10)(11-12)} \times 2.397895$$

$$+\frac{(11.25-10)(11.25-11)}{(12-10)(12-11)} \times 2.484907$$

$$= 2.420426$$

在区间[10, 12]上, $ln(x)$的3阶导数的上限为

$$M_3=0.002,$$

由此可得误差估计式

$$|R_2(11.25)| \le \frac{M_3}{3!}|(11.25-10)(11.25-11)(11.25-12)|$$

$$=0.000078125\ldots$$

注: $ln(11.25)=2.420368$, 而实际的误差为

$$|ln(11.25)-L_2(11.25)|=0.000058.$$

可见估计式是准确的.

在被插值函数未知或无法估计其高阶导数界时，上述插值余项不能用来估计误差，下面介绍**事后误差估计法**.

记$L_n(x)$是$f(x)$以x_0，$x_1,\ldots$，x_n为节点的n次插值多项式而$L_n^{(1)}(x)$为$f(x)$以$x_1, x_2,\ldots, x_n, x_{n+1}$为节点的$n$次插值多项式，由于

$$f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n),$$

$$f(x)-L_n^{(1)}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\bar{\xi}_x)}{(n+1)!}(x-x_1)\ldots(x-x_n)(x-x_{n+1}),$$

若$f^{(n+1)}(\xi_x)\approx f^{(n+1)}(\bar{\xi}_x)$，则有

$$\frac{f(x)-L_n(x)}{f(x)-L_n^{(1)}(x)}\approx\frac{x-x_0}{x-x_{n+1}}.$$

从而得

$$f(x) \approx \frac{x - x_{n+1}}{x_0 - x_{n+1}} L_n(x) + \frac{x - x_0}{x_{n+1} - x_0} L_n^{(1)}(x) \tag{6.6}$$

也有

$$f(x) - L_n(x) \approx \frac{x - x_0}{x_0 - x_{n+1}} (L_n(x) - L_n^{(1)}(x)) \tag{6.7}$$

如在例3中, 再以节点x_1=11, x_2=12, x_3=13做二次插值多项式$L_2^{(1)}(x)$, 则$L_2^{(1)}(11.25)$=2.420301. 由(6.7)式得

$$R_2(x) \approx \frac{11.25 - 10}{10 - 13}(2.420426 - 2.420301) = -0.000052$$

由(6.6)式也可得到ln11.25的新的近似值

$$\ln 11.25 \approx \frac{11.25 - 13}{10 - 13} 2.420426 + \frac{11.25 - 10}{13 - 10} 2.420301 = 2.420374$$

实际上, (6.6)式右侧恰是$f(x)$以x_0, x_1,…, x_n, x_{n+1}为节点的n+1次插值多项式.

§ 6.3 Newton插值多项式

§ 6.3.1 差商及其性质

称$f(x_j)-f(x_i)$与$x_j-x_i\ (i\neq j)$的比值

$$f[x_i,x_j]=\frac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i}$$

为$f(x)$关于点x_i, x_j的**一阶差商**, 并记为$f[x_i, x_j]$.

而称

$$f[x_i,x_j,x_k]=\frac{f[x_j,x_k]-f[x_i,x_j]}{x_k-x_i}$$

为$f(x)$关于点x_i, x_j, x_k的**二阶差商**.

一般地, 称

$$f[x_0,x_1,\dots,x_k]=\frac{f[x_1,x_2,\dots,x_k]-f[x_0,x_1,\dots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$$

为$f(x)$关于点x_0, x_1,…, x_k的**k阶差商.**

差商的性质

(1) k阶差商$f[x_0, x_1,\ldots, x_k]$可以表示成$f(x_0), f(x_1),\ldots, f(x_k)$的线性组合, 即

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_k]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{\omega'_{k+1}(x_j)}=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{k}(x_j-x_i)}.$$

证明见后. 由性质(1)马上可推得以下的性质(2).

(2)差商对节点具有对称性, 即

$$f[x_{i_0},x_{i_1},\ldots,x_{i_k}]=f[x_0,x_1,\ldots,x_k],$$

其中, $i_0, i_1,\ldots, i_k$是$0, 1,\ldots, k$的任一排列.

(3) 对于n次多项式$f(x)$的k阶差商(函数)$f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x]$,
当$k\le n$时, $f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x]$是一个$n-k$次多项式;
当$k>n$时, $f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x]$恒等于0.

证明

差商的性质(续)

(4)若$f(x)$具有k阶连续导数，则

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!},$$

其中ξ在$k+1$个节点$x_0, x_1, \ldots, x_k$之间.

证明以后给出

转差商表

关于差商的性质(1)的证明

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_k]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{\omega'_{k+1}(x_j)}$$

证明: 采用归纳法. 当k=1时,

$$左=f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0},$$

$$右=\sum_{j=0}^{1}\frac{f(x_j)}{\omega'_2(x_j)}=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=左.$$

故可见k=1时命题成立.

以下假设命题对于$k=m$时命题成立，也即：对于**任意** $m+1$个节点$x_0, x_1, \ldots, x_m$，均有

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m] = \sum_{j=0}^{m} \frac{f(x_j)}{\omega'_{m+1}(x_j)}$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \frac{f(x_j)}{\omega'_{m+1,(x_0, x_1, \ldots, x_m)}(x_j)},$$

有时，为区别具体节点信息，引入这些记号.

往证：当$k=m+1$时，

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}] = \sum_{j=0}^{m+1} \frac{f(x_j)}{\omega'_{m+2}(x_j)}.$$

由于

$$
\begin{aligned}
\text{左} &= f[x_0, x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}] \\
&= \frac{f[x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}] - f[x_0, x_1, \ldots, x_m]}{x_{m+1} - x_0}
\end{aligned}
$$

其中

$$
f[x_0, x_1, \ldots, x_m] = \sum_{j=0}^{m} \frac{f(x_j)}{\omega'_{m+1,(x_0, x_1, \ldots, x_m)}(x_j)}
$$

$$
= \frac{f(x_0)}{\omega'_{m+1,(x_0, x_1, \ldots, x_m)}(x_0)} + \sum_{j=1}^{m} \frac{f(x_j)}{\omega'_{m+1,(x_0, x_1, \ldots, x_m)}(x_j)},
$$

$$
f[x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}] = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{f(x_j)}{\omega'_{m+1,(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})}(x_j)}
$$

$$
= \sum_{j=1}^{m} \frac{f(x_j)}{\omega'_{m+1,(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})}(x_j)} + \frac{f(x_{m+1})}{\omega'_{m+1,(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})}(x_{m+1})}.
$$

因此

左侧分子$= f[x_1,\dots,x_m,x_{m+1}] - f[x_0,x_1,\dots,x_m]$

$$= \frac{f(x_{m+1})}{\omega'_{m+1,(x_1,x_2,\dots,x_{m+1})}(x_{m+1})} - \frac{f(x_0)}{\omega'_{m+1,(x_0,x_1,\dots,x_m)}(x_0)}$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} [\frac{f(x_j)}{\omega'_{m+1,(x_1,x_2,\dots,x_{m+1})}(x_j)} - \frac{f(x_j)}{\omega'_{m+1,(x_0,x_1,\dots,x_m)}(x_j)}]$$

$$= \frac{f(x_{m+1})}{(x_{m+1}-x_1)\dots(x_{m+1}-x_m)} - \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_m)}$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} f(x_j)[\frac{1}{(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_{m+1})}$$

$$- \frac{1}{(x_j-x_0)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_m)}]$$

$$=\frac{f(x_{m+1})}{(x_{m+1}-x_1)\dots(x_{m+1}-x_m)}-\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_m)}$$

$$+\sum_{j=1}^{m}f(x_j)\frac{(x_j-x_0)-(x_j-x_{m+1})}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_{m+1})}$$

$$=\frac{f(x_{m+1})}{(x_{m+1}-x_1)\dots(x_{m+1}-x_m)}-\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_m)}$$

$$+\sum_{j=1}^{m}f(x_j)\frac{x_{m+1}-x_0}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_{m+1})}$$

于是

$$左=\frac{f[x_1,\dots,x_m,x_{m+1}]-f[x_0,x_1,\dots,x_m]}{x_{m+1}-x_0}$$

$$
\begin{aligned}
左 = &\frac{f(x_{m+1})}{(x_{m+1}-x_0)(x_{m+1}-x_1)\dots(x_{m+1}-x_m)} \\
&- \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_m)(x_{m+1}-x_0)} \\
&+ \sum_{j=1}^{m} f(x_j)\frac{1}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_{m+1})} \\
= &\frac{f(x_{m+1})}{(x_{m+1}-x_0)(x_{m+1}-x_1)\dots(x_{m+1}-x_m)} \\
&+ \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_m)(x_0-x_{m+1})} \\
&+ \sum_{j=1}^{m} f(x_j)\frac{1}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_{m+1})}
\end{aligned}
$$

因此

$$左=\sum_{j=0}^{m+1} f(x_j)\frac{1}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_{m+1})}$$

$$=\sum_{j=0}^{m+1}\frac{f(x_j)}{\omega'_{m+2}(x_j)}$$

$$=右.$$

综上, 此命题得证.

返回性质1

关于差商的性质(3)的证明

证明: 对于$k \le n$情形采用归纳法. 当$k=1$时, 观察k阶差商函数$f[x_0, x]$. 设n次多项式$f(x)$为:

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0,$$

于是

$$f(x_0)= a_n x_0{}^n+a_{n-1}x_0{}^{n-1}+\ldots+a_1 x_0+a_0.$$

因此

$$f[x_0,x]=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i-\sum_{i=0}^{n} a_i\, x_0^i}{x-x_0}$$

$$=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}\ldots+a_1 x+a_0-(a_n x_0^n+a_{n-1}x_0^{n-1}\ldots+a_1 x_0+a_0)}{x-x_0}$$

$$=\frac{a_n(x^n-x_0^n)+a_{n-1}(x^{n-1}-x_0^{n-1})\ldots+a_1(x-x_0)}{x-x_0}$$

$$= a_n(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1})$$
$$+ a_{n-1}(x^{n-2} + x^{n-3}x_0 + \cdots + x_0^{n-2}) + \cdots + a_1$$
$$\in P_{n-1}.$$

故命题对于k=1情形成立.

以下假设命题对于$k \le m$情形(m+1 $\le n$)均成立, 故

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, x] \in P_{n-m}.$$

设n-m次多项式$f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, x]$为

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, x] = b_{n-m}x^{n-m} + b_{n-m-1}x^{n-m-1} + \ldots + b_1 x + b_0,$$

顺便还可得到

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m] = b_{n-m}x_m^{n-m} + b_{n-m-1}x_m^{n-m-1} + \ldots + b_1 x_m + b_0,$$

则当k=m+1时(m+1 $\le n$), 考察k阶差商$f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m, x]$.

由差商关于节点的对称性、$f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, x]$的表达式可得

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m, x] = f[x_m, x_1, \ldots, x_{m-1}, x_0, x]$$

$$= \frac{f[x_1, \ldots x_{m-1}, x_0, x] - f[x_m, x_1 \ldots x_{m-1}, x_0]}{x - x_m}$$

$$= \frac{f[x_0, x_1, \ldots x_{m-1}, x] - f[x_0, x_1, \ldots x_{m-1}, x_m]}{x - x_m}$$

$$= \frac{b_{n-m}x^{n-m} + \cdots + b_1 x + b_0 - (b_{n-m}x_m^{n-m} + \cdots + b_1 x_m + b_0)}{x - x_m}$$

$$= \frac{b_{n-m}(x^{n-m} - x_m^{n-m}) + \cdots + b_1(x - x_m)}{x - x_m}$$

$$= b_{n-m}(x^{n-m-1} + x^{n-m-2}x_m + \ldots + x_m^{n-m-1}) + \cdots + b_1$$

$$\in P_{n-m-1} = P_{n-(m+1)}.$$

故可知命题对于$k=m+1$情形也成立. 综上, 命题的$k\le n$情形结论得证.

当差商的阶数$k>$多项式$f(x)$的次数n时, 比如$k=n+1$时, 由$k\le n$情形的结论可知: k-1(=n)阶差商函数$f[x_0, x_1, ..., x_{k\text{-}2}, x]$为0次多项式, 即常数$c$, 故有$f[x_0, x_1, ..., x_{k\text{-}2}, x]=c$. 此时, 对于$k$阶差商函数$f[x_0, x_1, ..., x_{k\text{-}2}, x_{k\text{-}1}, x]$, 必有

$$f[x_0, x_1, ..., x_{k\text{-}1}, x] = f[x_{k\text{-}1}, x_1, ..., x_{k\text{-}2}, x_0, x]$$

返回

$$= \frac{f[x_1, \ldots x_{k-2}, x_0, x] - f[x_{k-1}, x_1 \ldots x_{k-2}, x_0]}{x - x_{k-1}}$$

$$= \frac{f[x_0, x_1, \ldots x_{k-2}, x] - f[x_0, x_1, \ldots x_{k-2}, x_{k-1}]}{x - x_{k-1}} = \frac{c - c}{x - x_{k-1}}$$

$$= 0.$$

故知: 当$k>n$时, k阶差商函数$f[x_0, x_1, ..., x_{k\text{-}1}, x]=0$. 证毕.

给出节点$x_0, x_1,\ldots, x_n$和函数值$f(x_0), f(x_1),\ldots, f(x_n)$, 可按如下的差商表顺序逐次计算各阶差商值.

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	…	n阶差商
x_0	$f(x_0)$				…	
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$			…	
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		…	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	…	
…	…	…	…	…	…	
x_n	$f(x_n)$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	…	$f[x_0, x_1,\ldots, x_n]$

例4 给出函数$y=f(x)$的函数表

i	0	1	2	3
x_i	-2	-1	1	2
$f(x_i)$	5	3	17	21

写出函数$y=f(x)$的差商表.

返回例5

解 差商表如下

i	x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
0	-2	5			
1	-1	3	-2		
2	1	17	7	3	
3	2	21	4	-1	-1

练习题

练习题: 已知 $f(x)=2x^4+x+1$, 计算以下差商.

(1) $f[2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5] = 0$

(2) $f[2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4] = 2$

(3) $f[0, 1, 2, 3] = 12$

§ 6.3.2 Newton插值多项式及其余项

由差商的定义

$$f[x_0,x]=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

可得: $f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0, x]$,

再由

$$f[x_0,x_1,x]=f[x_1,x_0,x]=\frac{f[x_0,x]-f[x_1,x_0]}{x-x_1}$$

$$=\frac{f[x_0,x]-f[x_0,x_1]}{x-x_1}$$

可得: $f[x_0, x]=f[x_0, x_1]+(x-x_1)f[x_0, x_1, x]$,

类似地还可得到:

$$f[x_0, x_1, x]=f[x_0, x_1, x_2]+(x-x_2)f[x_0, x_1, x_2, x],$$

……

$$f[x_0, x_1,\ldots, x_{n-1}, x]=f[x_0, x_1,\ldots, x_n]+(x-x_n)f[x_0, x_1,\ldots, x_n,$$

$]$

总结以上结果, 可知:

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0, x],$$

$$f[x_0, x]=f[x_0, x_1]+(x-x_1)f[x_0, x_1, x],$$

$$f[x_0, x_1, x]=f[x_0, x_1, x_2]+(x-x_2)f[x_0, x_1, x_2, x],$$

......

$$f[x_0, x_1,\ldots, x_{n-1}, x]=f[x_0, x_1,\ldots, x_n]+(x-x_n)f[x_0, x_1,\ldots, x_n, x],$$

所以有

$$\begin{aligned} f(x)=&f(x_0)+(x-x_0)f[x_0, x_1] \\ &+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_2]+\ldots\ldots \\ &+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f[x_0, x_1,\ldots, x_n] \\ &+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)f[x_0, x_1,\ldots, x_n, x]. \end{aligned}$$

记

$$N_n(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0, x_1]$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_2]+\ldots\ldots$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f[x_0, x_1, \ldots, x_n], \quad (6.8)$$

$$R_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)f[x_0, x_1,\ldots, x_n, x],$$

则有

$$f(x)=N_n(x)+R_n(x).$$

$N_n(x)$满足性质:

(1) $N_n(x)$是n次多项式;

(2) $N_n(x_i)=f(x_i)$, $i=0, 1,\ldots, n$.

请仔细考虑、核查具体细节(没那么简单).

称$N_n(x)$为***n*次Newton插值多项式**, 称$R_n(x)$为***n*次Newton插值多项式的余项**.

关于Newton插值余项

对于同一个被插值函数$f(x)$, 我们有:

Newton插值: $f(x)=N_n(x)+R_n(x)$;

Lagrange插值: $f(x)=L_n(x)+R_n(x)$.

当插值条件相同时(均为插值条件(6.2)), 由插值多项式的唯一性, 有:

$$L_n(x)=N_n(x).$$

对比以上各式可得: 两种插值余项本质上是相同的, 即

$$f[x_0,x_1,\dots,x_n,x]=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!},$$

这顺便也证明了差商的性质4.

→差商的性质4

Newton插值的优点

由(6.8)式易见

$$N_{k+1}(x)=N_k(x)+\omega_{k+1}(x)f[x_0, x_1,\ldots, x_{k+1}],$$

$$k=1, 2,\ldots, n-1.$$

此性质也称为“承袭性”.

例5 对例4中的$f(x)$, 求:

(1) 节点为x_0=-2, x_1=-1 的一次插值;

(2) 节点为x_0=-2, x_1=-1, x_2=1的二次插值;

(3) 节点为x_0=-2, x_1=-1, x_2=1, x_3=2的三次插值多项式.

回看例4

解: 由例4的差商表知

$$f(x_0)=5,\ f[x_0, x_1]=-2,\ f[x_0, x_1, x_2]=3,\ f[x_0, x_1, x_2, x_3]=-1,$$

于是有

$$N_1(x)=5-2(x+2)=-2x+1,$$

$$N_2(x)=-2x+1+3(x+2)(x+1)=3x^2+7x+7,$$

$$N_3(x)=3x^2+7x+7-(x+2)(x+1)(x-1)=-x^3+x^2+8x+9.$$

补充: 重节点差商

思考: 当$f(x)$连续可微时, 差商 $f[x_0,x_0]$ 的意义.

$$
\begin{aligned}
& f[x_0,x_0] \\
&= \lim_{x\to x_0} f[x_0,x] \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\
&= f'(x_0)
\end{aligned}
$$

思考题: 当$f(x)$任意阶连续可微时, 以下差商的意义.

1) $f[x_0,x_0,x_0]$

2) $f[x_0,x_0,x_1]$

§ 6.4 Hermite插值

带有导数插值条件的插值多项式称为Hermite插值多项式.

例6-4 设$y=f(x)$在区间$[x_0, x_1]$具有三阶连续导数，确定二次插值多项式$H_2(x)$, 使满足

$$H_2(x_0)=f(x_0)=y_0,\quad H_2'(x_0)=f'(x_0)=y_0',\quad H_2(x_1)=f(x_1)=y_1,$$

并求插值余项.

思考: 满足以上插值条件的Hermite插值多项式是否唯一存在?

解: (基函数法) 设

$$H_2(x)=\varphi_0(x)y_0+\varphi_1(x)y_1+\psi_0(x)y_0',$$

其中基函数 $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_0(x)$都是二次多项式, 满足条件

$$\varphi_0(x_0)=1,\quad \varphi_0(x_1)=0,\quad \varphi_0'(x_0)=0,$$

$$\varphi_1(x_0)=0,\quad \varphi_1(x_1)=1,\quad \varphi_1'(x_0)=0,$$

$$\psi_0(x_0)=0,\quad \psi_0(x_1)=0,\quad \psi_0'(x_0)=1,$$

于是得到

$$\varphi_1(x)=C(x-x_0)^2=\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2,$$

由于

$$\varphi_0(x)+\varphi_1(x)=1,$$

Why?

思考, 见黑板

因此

$$\varphi_0(x)=1-\varphi_1(x)=1-\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2,$$

对于另一个基函数$\psi_0(x)$, 有

$$\psi_0(x)=C(x-x_0)(x-x_1)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{x_0-x_1}$$

$$=(x-x_0)\left(1-\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right),$$

于是得到

$$H_2(x)=\varphi_0(x)y_0+\varphi_1(x)y_1+\psi_0(x)y_0'$$

$$=\left[1-\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2\right]\cdot y_0+\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 y_1+(x-x_0)\left(1-\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)y_0'$$

$$=y_0+\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2(y_1-y_0)+(x-x_0)\left(1-\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)y_0'.$$

插值余项为

$$R_2(x)=f(x)-H_2(x)=C(x)(x-x_0)^2(x-x_1)$$

构造函数

$$\varphi(t)=f(t)-H_2(t)-C(x)(t-x_0)^2(t-x_1)$$

此函数在区间$[x_0, x_1]$上至少有4个零点: x_0, x_0, x_1, x.

反复应用Rolle定理或重根的理论可得：在区间$(x_0,\ x_1)$上至少存在一个零点ξ_x, 使

$$0=\varphi'''(\xi_x)=f'''(\xi_x)-C(x)3!$$

故得插值余项为

$$R_2(x)=\frac{f'''(\xi_x)}{3!}(x-x_0)^2(x-x_1)$$

解法2: (承袭法) 假设

$$H_2(x) = N_1(x) + C(x-x_0)(x-x_1)$$

$$= f(x_0) + (x-x_0)f[x_0,x_1] + C(x-x_0)(x-x_1)$$

可使$H_2(x)$满足插值条件:

$$H_2(x_0) = f(x_0) = y_0, \quad H_2(x_1) = f(x_1) = y_1$$

以下只需根据条件 $H_2'(x_0)=y_0'$来确定参数C. 可得

$$C = \frac{f[x_0,x_1] - y_0'}{x_1 - x_0}$$

于是得到插值多项式:

$$H_2(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_0,x_1] + \frac{f[x_0,x_1] - y_0'}{x_1 - x_0}(x-x_0)(x-x_1)$$

例6-5 确定三次插值多项式$H_3(x)$, 使满足条件

$$H_3(x_0)=f(x_0)=y_0, \quad H_3(x_1)=f(x_1)=y_1,$$

$$H_3'(x_0)=f'(x_0)=y_0', \quad H_3'(x_1)=f'(x_1)=y_1',$$

注: 满足以上插值条件的Hermite插值多项式是唯一存在的.

解: 采用基函数法, 构造

$$H_3(x)=\varphi_0(x)y_0+\varphi_1(x)y_1+\psi_0(x)y_0'+\psi_1(x)y_1'$$

其中基函数$\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$都是三次多项式, 且

$$\varphi_0(x_0)=1,\ \varphi_0(x_1)=0,\ \varphi'_0(x_0)=0,\ \varphi'_0(x_1)=0;$$

$$\varphi_1(x_0)=0,\ \varphi_1(x_1)=1,\ \varphi'_1(x_0)=0,\ \varphi'_1(x_1)=0;$$

$$\psi_0(x_0)=0,\ \psi_0(x_1)=0,\ \psi'_0(x_0)=1,\ \psi'_0(x_1)=0;$$

$$\psi_1(x_0)=0,\ \psi_1(x_1)=0,\ \psi'_1(x_0)=0,\ \psi'_1(x_1)=1.$$

下面求基函数.因为$\varphi_0(x_1)=0$, $\varphi'_0(x_1)=0$, 所以

$$\varphi_0(x)=(ax+b)(x-x_1)^2.$$

将条件$\varphi_0(x_0)=1$, $\varphi'_0(x_0)=0$带入$\varphi_0(x)$的表达式, 可得

$$(ax_0+b)(x_0-x_1)^2=1$$

$$a(x_0-x_1)^2+2(ax_0+b)(x_0-x_1)=0$$

解得

$$a=\frac{-2}{(x_0-x_1)^3}$$

$$b=\frac{1}{(x_0-x_1)^2}-ax_0=\frac{1}{(x_0-x_1)^2}-\frac{-2x_0}{(x_0-x_1)^3}=\frac{3x_0-x_1}{(x_0-x_1)^3}$$

$$\varphi_0(x)=\frac{-2x+3x_0-x_1}{(x_0-x_1)^3}(x-x_1)^2=\frac{x_0-x_1+2x_0-2x}{x_0-x_1}\cdot\frac{(x-x_1)^2}{(x_0-x_1)^2}$$

$$\varphi_0(x)=\frac{x_0-x_1+2x_0-2x}{x_0-x_1}\cdot\frac{(x-x_1)^2}{(x_0-x_1)^2}=\left[1-\frac{2(x-x_0)}{x_0-x_1}\right]\frac{(x-x_1)^2}{(x_0-x_1)^2}$$

由对称性可知

$$\varphi_1(x)=\left[1-\frac{2(x-x_1)}{x_1-x_0}\right]\frac{(x-x_0)^2}{(x_1-x_0)^2}$$

对于基函数 $\psi_0(x)$, 由于 $\psi_0(x_0)=0$, $\psi_0(x_1)=0$, $\psi'_0(x_1)=0$, 可知

$$\psi_0(x)=C(x-x_0)(x-x_1)^2$$

再由条件 $\psi'_0(x_0)=1$ 可得

$$C(x-x_1)^2+2C(x-x_0)(x-x_1)\Big|_{x=x_0}=1$$

$$C=\frac{1}{(x_0-x_1)^2}$$

于是

$$\psi_0(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)^2}{(x_0-x_1)^2}=(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

由对称性可知

$$\psi_1(x)=(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

于是得到插值多项式:

$$H_3(x)=\left[1-\frac{2(x-x_0)}{x_0-x_1}\right]\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 y_0+\left[1-\frac{2(x-x_1)}{x_1-x_0}\right]\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 y_1$$

$$+(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 y_0'+(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 y_1'$$

返回分段插值

称$H_3(x)$为三次Hermite插值多项式.

如果$f(x)$在$[x_0, x_1]$上具有4阶连续导数, 类似上例的讨论可得其插值余项为:

$$R_3(x) = f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2$$

其中$\xi_x \in (x_0, x_1)$且与x有关.

思考: 如何用承袭法求$H_3(x)$?

例 设$f(x)\in C^4[0, 2]$, 且$f(0)=1$, $f(1)=0$, $f(2)=3$, $f'(1)=0$, 试求$f(x)$的三次插值多项式$H_3(x)$, 并给出插值余项.

解法1(基函数法): 设

$$H_3(x)=\varphi_0(x)y_0+\varphi_1(x)y_1+\varphi_2(x)y_2+\psi_1(x)y_1'$$
$$=\varphi_0(x)+3\varphi_2(x)$$

根据$\varphi_0(x)$满足的条件: $\varphi_0(0)=1$, $\varphi_0(1)=\varphi_0(2)=\varphi'_0(1)=0$,

可知: $\varphi_0(x)=c(x-1)^2(x-2)=\dfrac{-1}{2}(x-1)^2(x-2)$

根据$\varphi_2(x)$满足的条件: $\varphi_2(0)=\varphi_2(1)=\varphi'_2(1)=0$, $\varphi_2(2)=1$,

可知: $\varphi_2(x)=cx(x-1)^2=\dfrac{1}{2}x(x-1)^2$

所以可得三次插值多项式为:

$$H_3(x)=\frac{-1}{2}(x-1)^2(x-2)+\frac{3}{2}x(x-1)^2=(x-1)^2(x+1)$$

解法2(待定系数法):

由条件$H_3(1)=H'_3(1)=0$ 可知

$$H_3(x)=(x-1)^2(ax+b)$$

再由条件$H_3(0)=1$, $H_3(2)=3$, 解得:

$$a=1,\ b=1.$$

所以得到插值多项式为:

$$H_3(x)=(x-1)^2(x+1)$$

以下讨论插值余项.

记$R_3(x)=f(x)-H_3(x)$, 则由插值条件可知:

$$R_3(0)=R_3(1)=R_3(2)=R'_3(1)=0$$

于是可得

$$R_3(x)=C(x)x(x-1)^2(x-2)$$

对于任一$x\in[0, 2]$, $x\neq 0, 1, 2$, 构造函数:

$$\varphi(t)=f(t)-H_3(t)-C(x)t(t-1)^2(t-2)$$

由于

$$\varphi(0)=\varphi(1)=\varphi(2)=\varphi'(1)=\varphi(\mathrm{x})=0\ ,$$

可知$\varphi(t)$至少有5个零点: 0, 1, 1, 2, x.

应用Rolle定理或重根的结论, 可知$\varphi'(t)$至少有4个零点.

反复应用Rolle定理或重根的结论, 可得到:

$$\varphi^{(4)}(t)\text{至少有1个零点}\xi_x.$$

于是可得: $0=\varphi^{(4)}(\xi_x)=C(x)4!$.

因此: $C(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}$

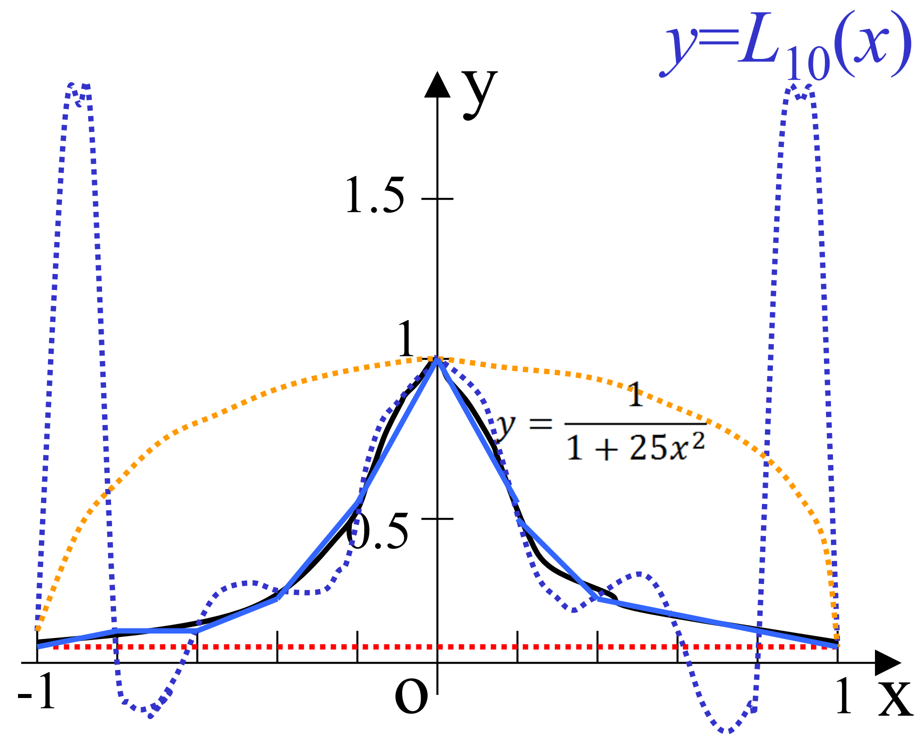
故插值余项为: $R_3(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}x(x-1)^2(x-2)$

§ 6.5 分段插值多项式

问: 如何提高插值的近似效果？增加插值节点是否一定可行?

请见下面算例.

对 $f(x)=(1+25x^2)^{-1}$，在区间[-1，1]上取等距节点，即 $x_i=-1+ih$, $i=0, 1,\ldots, 10$, $h=0.2$, 做 $f(x)$ 关于节点 x_i ($i=0$，$1,\ldots, 10$)的10次插值多项式 $L_{10}(x)$. 效果如图所示.



此现象称为**Runge现象**. 它表明高次多项式插值未必有效.

思考题1: 试分析Runge现象的原因.

思考题2: 如何改进插值方法来克服Runge现象?

思考题3: Runge现象是否对于任意的被插值函数都存在?

§ 6.5.1 分段拉格朗日(Lagrange)插值

剖分区间$[a, b]$: 取节点$a\le x_0<x_1<\ldots<x_n\le b$, 每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$的长度记为 $h_i=x_i-x_{i-1}$ $(i=1, 2,\ldots, n)$. 并记 $h=\max h_i$.

给定节点上的函数值 $y_i=f(x_i)$, $i=0, 1,\ldots, n$. 要构造$[a, b]$上的**分段低次**插值多项式$S(x)$, 使其满足条件

$$S(x_i)=y_i=f(x_i),\ i=0, 1,\ldots, n.$$

1. 分段线性Lagrange插值

设$S_1(x)$是满足插值条件的分段一次多项式，在各段区间$[x_{i-1}, x_i]$, (i=1, 2,…, n.)上分别做线性Lagrange插值可得

$$S_1(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} y_i$$

$$= \frac{x_i - x}{h_i} y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{h_i} y_i, \qquad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

$S_1(x)$是平面上以点(x_i, y_i) (i=0, 1 ,…, n.)为节点的折线.

若$f(x) \in C^2[a, b]$, 则当$x \in [x_{i-1}, x_i]$时, 有

$$f(x) - S_1(x) = \frac{f''(\xi_i)}{2!}(x - x_{i-1})(x - x_i)$$

因而

不等式:

$$\mathbf{ab \le \frac{(a+b)^2}{4}}$$

$$|f(x)-S_1(x)| = \frac{|f''(\xi_i)|}{2}(x_i - x)(x - x_{i-1})$$

$$\le \frac{|f''(\xi_i)|}{2}\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{4} = \frac{|f''(\xi_i)|}{8}h_i^{\,2}$$

若记 $M_2 = \max\limits_{a \le x \le b}|f''(x)|$, $h = \max\limits_{1 \le i \le n} h_i$ ，对任一$x\in[a, b]$都有

$$|f(x)-S_1(x)| \le \frac{M_2}{8}h^2$$

可见，当$h\to 0$时，分段线性插值$S_1(x)$收敛于$f(x)$.

$S_1(x)$具有如下性质:

(1) $S_1(x)\in C[a, b]$;

(2) $S_1(x)$在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上为线性(1次)多项式;

(3)当$h\to 0$时，$S_1(x)$收敛于$f(x)$;

(4) $S_1(x)$不光滑，即 $S_1(x) \notin C^1[a,b]$.

2. 分段二次Lagrange插值

在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$内, 取半节点 $x_{i-\frac{1}{2}}=\dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$,

补充插值条件$y_{i-1/2}=f(x_{i-1/2})$ ($i=1, 2,\ldots, n$). 设$f(x)$满足插值条件的分段二次插值多项式为$S_2(x)$, 则有

$$S_2(x)=\frac{(x-x_{i-\frac{1}{2}})(x-x_i)}{\frac{1}{2}h_i^2}y_{i-1}-\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{\frac{1}{4}h_i^2}y_{i-\frac{1}{2}}+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i-\frac{1}{2}})}{\frac{1}{2}h_i^2}y_i$$

$x\in[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2,\ldots, n$.

若$f(x)\in C^3[a, b]$, 则当$x\in[x_{i-1}, x_i]$时, 有

$$f(x)-S_2(x)=\frac{f'''(\xi_i)}{3!}(x-x_{i-1})(x-x_{i-\frac{1}{2}})(x-x_i)$$

故有

$$|f(x)-S_2(x)| = \frac{|f'''(\xi_i)|}{3!}\left|(x-x_{i-1})(x-x_{i-\frac{1}{2}})(x-x_i)\right|$$

$$\le \frac{|f'''(\xi_i)|}{3!}\frac{h_i^3}{12\sqrt{3}}$$

$$= \frac{|f'''(\xi_i)|}{72\sqrt{3}}h_i^3$$

思考

另一版本的误差上界见黑板

若记 $M_3 = \max\limits_{a\le x\le b}|f'''(x)|$, 则对任一$x\in[a, b]$都有

$$|f(x)-S_2(x)| \le \frac{M_3}{72\sqrt{3}}h^3$$

$S_2(x)$具有如下性质:

(1) $S_2(x)\in C[a, b]$;

(2) $S_2(x)$在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上为2次多项式;

(3)当$h\to 0$时, $S_2(x)$收敛于$f(x)$, 且收敛速度快于$S_1(x)$;

(4) $S_2(x)$不光滑, 即 $S_2(x)\notin C^1[a,b]$

§ 6.5.2 分段Hermite插值

设在节点$a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$, $h_i = x_i - x_{i-1}$ ($i=1, 2, \ldots, n$)上给出插值条件$y_i = f(x_i)$, $y'_i = f'(x_i)$, $i=0, 1, \ldots, n$.

要构造$[a, b]$上的分段三次多项式$H_3(x)$, 满足插值条件:

$$H_3(x_i) = y_i = f(x_i),\ H'_3(x_i) = y'_i = f'(x_i),\ i=0, 1, \ldots, n.$$

设$H_3(x)$在每段小区间$[x_{i-1}, x_i]$上的表达式为$H_3^{(i)}(x)$.

根据基函数法, $H_3^{(i)}(x)$形为:

$$H_3^{(i)}(x) = \varphi_{i-1}(x) y_{i-1} + \varphi_i(x) y_i + \psi_{i-1}(x) y'_{i-1} + \psi_i(x) y'_i$$

其中$\varphi_{i-1}(x)$, $\varphi_i(x)$, $\psi_{i-1}(x)$, $\psi_i(x)$为**三次Hermite插值基函数**, 而且满足

$$\varphi_{i-1}(x_{i-1})=1,\ \varphi_{i-1}(x_i)=0,\ \varphi'_{i-1}(x_{i-1})=0,\ \varphi'_{i-1}(x_i)=0,$$

$$\varphi_i(x_{i-1})=0,\ \varphi_i(x_i)=1,\ \varphi'_i(x_{i-1})=0,\ \varphi'_i(x_i)=0,$$

$$\psi_{i-1}(x_{i-1})=0,\ \psi_{i-1}(x_i)=0,\ \psi'_{i-1}(x_{i-1})=1,\ \psi'_{i-1}(x_i)=0,$$

$$\psi_i(x_{i-1})=0,\ \psi_i(x_i)=0,\ \psi'_i(x_{i-1})=0,\ \psi'_i(x_i)=1.$$

与例6-5的解法完全类似, 见Hermite插值 可得

$$\varphi_{i-1}(x)=\left[1-\frac{2(x-x_{i-1})}{x_{i-1}-x_i}\right]\frac{(x-x_i)^2}{(x_{i-1}-x_i)^2}=\left[1+\frac{2(x-x_{i-1})}{h_i}\right]\frac{(x-x_i)^2}{h_i^2}$$

$$\varphi_i(x)=\left[1-\frac{2(x-x_i)}{x_i-x_{i-1}}\right]\frac{(x-x_{i-1})^2}{(x_i-x_{i-1})^2}=\left[1-\frac{2(x-x_i)}{h_i}\right]\frac{(x-x_{i-1})^2}{h_i^2}$$

$$\psi_{i-1}(x)=(x-x_{i-1})\left(\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}\right)^2=(x-x_{i-1})\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)^2$$

$$\psi_i(x)=(x-x_i)\left(\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)^2=(x-x_i)\left(\frac{x-x_{i-1}}{h_i}\right)^2$$

于是得到$H_3(x)$在区间$[x_{i-1}, x_i]$上的表达式:

$$H_3^{(i)}(x)=\frac{1}{h_i^2}\left\{\left[1+\frac{2(x-x_{i-1})}{h_i}\right](x-x_i)^2 y_{i-1}+\left[1-\frac{2(x-x_i)}{h_i}\right](x-x_{i-1})^2 y_i\right\}$$

$$+\frac{1}{h_i^2}\left\{(x-x_{i-1})(x-x_i)^2 y'_{i-1}+(x-x_{i-1})^2(x-x_i)y'_i\right\}$$

i=1, 2,..., n.

满足插值条件$H_3(x_i)=y_i$, $H'_3(x_i)=y'_i$ ($i=0, 1,\ldots, n$)的分段三次多项式$H_3(x)$为

$$H_3(x)=H_3^{(i)}(x),\ x\in[x_{i-1}, x_i], \qquad i=1, 2,\ldots, n.$$

若$f(x)\in C^4[a, b]$, 则当$x\in[x_{i-1}, x_i]$时, 有

$$f(x)-H_3^{(i)}(x)=\frac{f^{(4)}(\xi_i)}{4!}(x-x_{i-1})^2(x-x_i)^2, \quad \xi_i\in[x_{i-1},x_i]$$

记 $M_4=\max\limits_{a\le x\le b}|f^{(4)}(x)|$, 则有

$$\left|f(x)-H_3(x)\right|\le\frac{M_4}{4!}\frac{1}{16}h^4=\frac{M_4}{384}h^4$$

具体推导自修
或见黑板

可见, $H_3(x)$是收敛的. 而且由于$H'_3(x_i+0)=H'_3(x_i-0)=y'_i$, 知$H_3(x)$在$[a, b]$具有一阶连续导数.

$H_3(x)$具有如下性质:

(1) $H_3(x)\in C^1[a, b]$, 即$H_3(x)$是光滑的(1阶可导);

(2) $H_3(x)$在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上为3次多项式;

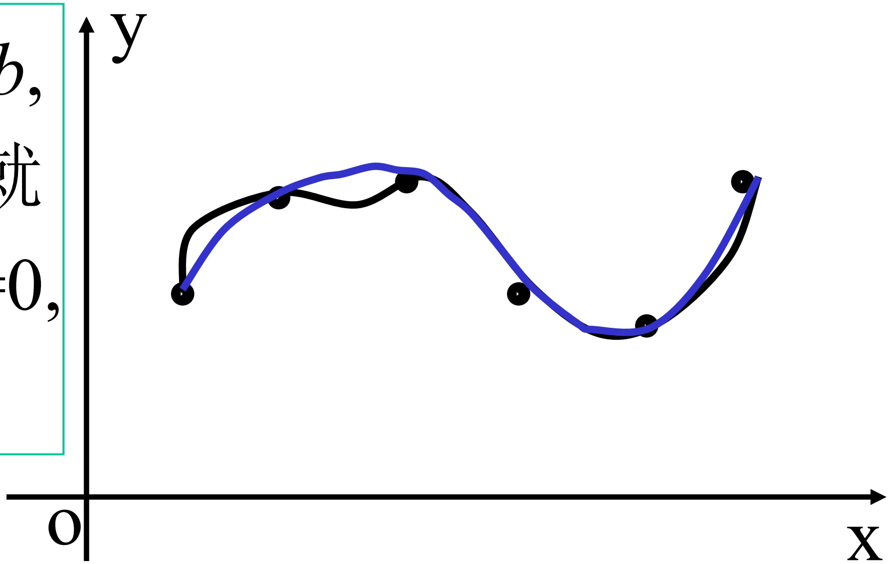
(3)当$h\to 0$时, $H_3(x)$收敛于$f(x)$, 且收敛速度快于$S_2(x)$.

§6.6 三次样条插值

样条(spline)一词来源于可变形的样条工具，那是一种在工程制图(据说最早来自于船体放样)时为了将一些指定点连接成一条光顺曲线所使用的工具，即富有弹性的细木条或薄钢条．由这样的样条形成的曲线在连接点处具有连续的坡度与曲率，**分段低次多项式**、在分段处**具有一定光滑性**的函数插值就是模拟以上原理发展起来的.

样条函数是一类分段(片)光滑、并且在各段交接处也有一定光滑性的函数．样条函数的研究始于20世纪中叶，到了60年代它与计算机辅助设计相结合，在外形设计方面得到成功的应用．样条理论已成为函数逼近的有力工具．它在很多领域都有广泛的应用.

给定节点$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, 及函数值$y_i=f(x_i)$, $k=0, 1,\ldots, n$. 就是给出平面上$n+1$个点(x_i, y_i), $i=0, 1,\ldots, n$.



定义6.3 给定区间$[a, b]$上$n+1$个节点$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, 及节点上的函数值$y_i=f(x_i)$, $i=0, 1,\ldots, n$. 如果函数$S(x)$满足

(1) $S(x_i)=y_i$, $i=0, 1,\ldots, n$;

(2) 在每个区间$[x_{i-1}, x_i]$上$S(x)$为三次多项式且$S(x)\in C^2[a, b]$.

则称$S(x)$是$f(x)$在区间$[a, b]$上的**三次样条插值函数**.

算例1(习题6-15) 确定参数a, b, c, d,使函数

$$S(x)=\begin{cases} x^2+x^3 & 0\le x\le 1 \\ a+bx+cx^2+dx^3 & 1\le x\le 2 \end{cases}$$

是一个三次样条函数, 且满足 $S'''(2)=12$.

解: 由

$$\left.\begin{array}{l} S(1-0)=S(1+0), \\ S'(1-0)=S'(1+0), \\ S''(1-0)=S''(1+0), \\ S'''(2)=12 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{l} 2=a+b+c+d, \\ 5=b+2c+3d, \\ 8=2c+6d, \\ 6d=12 \end{array}$$

故得 $d=2$, $c=-2$, $b=3$, $a=-1$.

算例(习题6-14) 自修.

转到正交多项式

$S(x)$在区间$[x_{i-1}, x_i]$上是三次多项式,

$$S(x)=a_i x^3+b_i x^2+c_i x+d_i,$$

有4个待定系数, 欲确定$S(x)$需确定$4n$个待定系数.

而已知条件有:

$$S(x_i)=y_i,\ i=0, 1,\ldots, n, \text{ 有 } n+1 \text{ 个条件;}$$

$$S(x_i-0)=S(x_i+0),\ i=1, 2\ldots, n-1, \text{ 有 } n-1 \text{ 个条件;}$$

$$S'(x_i-0)=S'(x_i+0),\ i=1, 2\ldots, n-1, \text{ 有 } n-1 \text{ 个条件;}$$

$$S''(x_i-0)=S''(x_i+0),\ i=1, 2\ldots, n-1, \text{ 有 } n-1 \text{ 个条件;}$$

这样(至少)共有$4n-2$个条件.

为了唯一确定三次样条函数$S(x)$, 通常在区间$[a, b]$的端点$x_0=a$, $x_n=b$上各加一个条件, 称为边界条件.

常用的边界条件有:

(1) $S'(x_0)=y'_0,\ S'(x_n)=y'_n$;

(2) $S''(x_0)=y''_0,\ S''(x_n)=y''_n$;

(3) 假设$f(x)$是以$b-a$为周期的周期函数, 这时要求

$$S(x_0+0)=S(x_n-0),$$

$$S'(x_0+0)=S'(x_n-0),$$

$$S''(x_0+0)=S''(x_n-0),$$

这样确定的$S(x)$为**周期样条函数**.

三转角方法

假设$S'(x_i)=m_i$, $i=0, 1,\ldots, n$, 利用分段Hermite插值多项式的结论, 当$x\in[x_{i-1}, x_i]$时, 有

$$
\begin{aligned}
S(x)=\frac{1}{h_i^2}\Big[&\left(1+2\frac{x-x_{i-1}}{h_i}\right)(x-x_i)^2y_{i-1}\\
&+\left(1-2\frac{x-x_i}{h_i}\right)(x-x_{i-1})^2y_i\\
&+(x-x_{i-1})(x-x_i)^2m_{i-1}\\
&+(x-x_{i-1})^2(x-x_i)m_i\Big],
\end{aligned}
$$

其中$h_i=x_i-x_{i-1}$.

为了确定$S(x)$, 只需确定m_i, $i=0, 1,\ldots, n$.

可利用$S''(x_i-0)=S''(x_i+0)$来求出每个m_i, $i=1,\ldots, n-1$.

当$x\in[x_{i-1},x_i]$时，由于

$$S(x)=\frac{1}{h_i^2}\left[\left(1+2\frac{x-x_{i-1}}{h_i}\right)(x-x_i)^2y_{i-1}\right.$$
$$+\left(1-2\frac{x-x_i}{h_i}\right)(x-x_{i-1})^2y_i$$
$$+(x-x_{i-1})(x-x_i)^2m_{i-1}$$
$$\left.+(x-x_{i-1})^2(x-x_i)m_i\right]$$

即

$$S(x)=\frac{1}{h_i^2}[a_{i-1}(x)y_{i-1}+a_i(x)y_i+b_{i-1}(x)m_{i-1}+b_i(x)m_i],$$

其中

$$a_{i-1}(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\right)(x - x_i)^2,$$
$$a_i(x) = \left(1 - 2\frac{x - x_i}{h_i}\right)(x - x_{i-1})^2,$$
$$b_{i-1}(x) = (x - x_{i-1})(x - x_i)^2,$$
$$b_i(x) = (x - x_{i-1})^2(x - x_i).$$

可得

$$\begin{aligned} a''_{i-1}(x) &= \frac{8}{h_i}(x - x_i) + 2\left(1 + 2\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\right) \\ &= \frac{1}{h_i}(8x - 8x_i + 2h_i + 4x - 4x_{i-1}) \\ &= \frac{1}{h_i}(12x - 6x_i - 6x_{i-1}) \\ &= \frac{6}{h_i}(2x - x_{i-1} - x_i). \end{aligned}$$

$$a_i(x) = \left(1 - 2\frac{x - x_i}{h_i}\right)(x - x_{i-1})^2,$$

$$\begin{aligned} a_i''(x) &= \frac{-8}{h_i}(x - x_{i-1}) + 2\left(1 - 2\frac{x - x_i}{h_i}\right) \\ &= \frac{1}{h_i}(-8x + 8x_{i-1} + 2h_i - 4x + 4x_i) \\ &= \frac{1}{h_i}(-12x + 6x_i + 6x_{i-1}) \\ &= \frac{6}{h_i}(-2x + x_{i-1} + x_i). \end{aligned}$$

$$b_{i-1}(x)=(x-x_{i-1})(x-x_i)^2,$$

$$b_i(x)=(x-x_{i-1})^2(x-x_i).$$

$$b''_{i-1}(x)=4(x-x_i)+2(x-x_{i-1})$$
$$=6x-2x_{i-1}-4x_i.$$

$$b''_i(x)=2(x-x_i)+4(x-x_{i-1})$$
$$=6x-4x_{i-1}-2x_i.$$

因此可得

$$S''(x)=\frac{6(x_{i-1}+x_i-2x)}{h_i^3}(y_i-y_{i-1})+\frac{6x-2x_{i-1}-4x_i}{h_i^2}m_{i-1}+\frac{6x-4x_{i-1}-2x_i}{h_i^2}m_i, \quad x\in[x_{i-1},x_i],\ i=1,2,\ldots,n. \tag{6.20}$$

这是$S''(x)$在 x_i 左侧的表达式

$$S''(x)=\frac{6(x_{i-1}+x_i-2x)}{h_i^3}(y_i-y_{i-1})+\frac{6x-2x_{i-1}-4x_i}{h_i^2}m_{i-1}+\frac{6x-4x_{i-1}-2x_i}{h_i^2}m_i,\quad x\in[x_{i-1},x_i],\ i=1,2,\ldots,n.$$

注: $S''(x)$在x_i右侧(即区间$[x_{i-1}, x_i]$)的表达式为

$$S''(x)=\frac{6(x_i+x_{i+1}-2x)}{h_{i+1}^3}(y_{i+1}-y_i)+\frac{6x-2x_i-4x_{i+1}}{h_{i+1}^2}m_i+\frac{6x-4x_i-2x_{i+1}}{h_{i+1}^2}m_{i+1},\quad x\in[x_i,x_{i+1}],\ i=0,1,\ldots,n-1. \tag{6.20'}$$

$$S''(x)=\frac{6(x_{i-1}+x_i-2x)}{h_i^3}(y_i-y_{i-1})$$
$$+\frac{6x-2x_{i-1}-4x_i}{h_i^2}m_{i-1}$$
$$+\frac{6x-4x_{i-1}-2x_i}{h_i^2}m_i,$$

$x\in[x_{i-1}, x_i]$,

$i=1, 2,\ldots, n$.

于是有

$$S''(x_i-0)=\frac{6x_i-2x_{i-1}-4x_i}{h_i^2}m_{i-1}+\frac{6x_i-4x_{i-1}-2x_i}{h_i^2}m_i$$
$$+\frac{6(x_{i-1}+x_i-2x_i)}{h_i^3}(y_i-y_{i-1})$$
$$=\frac{2}{h_i}m_{i-1}+\frac{4}{h_i}m_i-\frac{6}{h_i^2}(y_i-y_{i-1}).$$

$$S''(x) = \frac{6(x_i + x_{i+1} - 2x)}{h_{i+1}^3}(y_{i+1} - y_i) + \frac{6x - 2x_i - 4x_{i+1}}{h_{i+1}^2} m_i + \frac{6x - 4x_i - 2x_{i+1}}{h_{i+1}^2} m_{i+1}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, 1, \ldots, n\text{-}1.$$

$$S''(x_i + 0) = \frac{6x_i - 2x_i - 4x_{i+1}}{h_{i+1}^2} m_i + \frac{6x_i - 4x_i - 2x_{i+1}}{h_{i+1}^2} m_{i+1} + \frac{6(x_i + x_{i+1} - 2x_i)}{h_{i+1}^3}(y_{i+1} - y_i)$$

$$= -\frac{4}{h_{i+1}} m_i - \frac{2}{h_{i+1}} m_{i+1} + \frac{6}{h_{i+1}^2}(y_{i+1} - y_i).$$

也即

$$S''(x_i-0)=\frac{2}{h_i}m_{i-1}+\frac{4}{h_i}m_i-\frac{6}{h_i^2}(y_i-y_{i-1}),$$

$$S''(x_i+0)=-\frac{4}{h_{i+1}}m_i-\frac{2}{h_{i+1}}m_{i+1}+\frac{6}{h_{i+1}^2}(y_{i+1}-y_i).$$

由连续性条件$S''(x_i-0)=S''(x_i+0)$, $(i=1, 2,\ldots, n\text{-}1.)$可得

$$\frac{1}{h_i}m_{i-1}+2\left(\frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{i+1}}\right)m_i+\frac{1}{h_{i+1}}m_{i+1}$$
$$=3\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}^2}+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i^2}\right).$$

两侧同除以 $\frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{i+1}}=\frac{h_i+h_{i+1}}{h_ih_{i+1}}$, 并记

$$\lambda_i=\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}},\qquad \mu_i=\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}=1-\lambda_i,$$

$$\frac{1}{h_i}m_{i-1}+2\left(\frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{i+1}}\right)m_i+\frac{1}{h_{i+1}}m_{i+1}$$

$$=3\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}^2}+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i^2}\right).$$

两侧同除以 $\frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{i+1}}=\frac{h_i+h_{i+1}}{h_ih_{i+1}}$，并记

$$\lambda_i=\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}},\qquad \mu_i=\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}=1-\lambda_i,$$

并注意到

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}=f[x_i,x_{i+1}],\quad \frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}=f[x_{i-1},x_i],$$

差商

差商

整理可得:

$$\boxed{\lambda_i m_{i-1}+2m_i+\mu_i m_{i+1}=g_i,\quad i=1,2,\ldots,n-1. \quad (6.21)}$$

其中，$g_i=3(\lambda_i f[x_{i-1},x_i]+\mu_i f[x_i,x_{i+1}])$.

$$\lambda_i m_{i-1}+2m_i+\mu_i m_{i+1}=g_i,\ \ i=1, 2,\ldots, n-1. \quad (6.21)$$

再结合不同的边界条件, 可得关于m_i的方程.

情形I: 若边界条件为: $m_0=y'_0$, $m_n=y'_n$, 带入(6.21)式可得以下(*n*-1阶)线性方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & \mu_1 & & & & \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\ & & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1-\lambda_1 y'_0 \\ g_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1}-\mu_{n-1} y'_n \end{pmatrix}.$$

$$S''(x)=\frac{6x-2x_{i-1}-4x_i}{h_i^2}m_{i-1}+\frac{6x-4x_{i-1}-2x_i}{h_i^2}m_i$$
$$+\frac{6(x_{i-1}+x_i-2x)}{h_i^3}(y_i-y_{i-1}) \quad x\in[x_{i-1}, x_i],\ i=1, 2,\ldots, n. \tag{6.20}$$

$$S''(x)=\frac{6x-2x_i-4x_{i+1}}{h_{i+1}^2}m_i+\frac{6x-4x_i-2x_{i+1}}{h_{i+1}^2}m_{i+1}$$
$$+\frac{6(x_i+x_{i+1}-2x)}{h_{i+1}^3}(y_{i+1}-y_i) \quad x\in[x_i, x_{i+1}],\ i=0,\ldots, n\text{-}1. \tag{6.20'}$$

情形II: 若边界条件为: $S''(x_0)=y''_0$, $S''(x_n)=y''_n$, 则由(6.20')及(6.20)有

$$2m_0+m_1=3f[x_0,x_1]-\frac{h_1}{2}y''_0=g_0,$$
$$m_{n-1}+2m_n=3f[x_{n-1},x_n]+\frac{h_n}{2}y''_n=g_n,$$

$$\lambda_i m_{i-1}+2m_i+\mu_i m_{i+1}=g_i,\quad i=1,2,\ldots,n-1. \tag{6.21}$$

$$2m_0+m_1=3f[x_0,x_1]-\frac{h_1}{2}y_0''=g_0,$$

$$m_{n-1}+2m_n=3f[x_{n-1},x_n]+\frac{h_n}{2}y_n''=g_n,$$

连同(6.21)式一起,可得以下(n+1阶)线性方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_i m_{i-1}+2m_i+\mu_i m_{i+1}=g_i,\quad i=1,2,\ldots,n-1. \tag{6.21}$$

情形III: 若边界条件为周期性边界条件, 由

$$S'(x_0+0)=S'(x_n-0)$$

可知

$$m_0=m_n\,.$$

在式(6.21)中令$i=1$, 可得方程

$$\lambda_1 m_n+2m_1+\mu_1 m_2=g_1, \tag{*1}$$

而对于另一个周期性条件:

$$S''(x_0+0)=S''(x_n-0),$$

由(6.20)及(6.20') 可得对应的方程. 具体如下.

$$S''(x)=\frac{6x-2x_{i-1}-4x_i}{h_i^2}m_{i-1}+\frac{6x-4x_{i-1}-2x_i}{h_i^2}m_i$$

$$+\frac{6(x_{i-1}+x_i-2x)}{h_i^3}(y_i-y_{i-1})\quad x\in[x_{i-1},x_i],\ i=1,2,\ldots,n. \tag{6.20}$$

$$S''(x)=\frac{6x-2x_i-4x_{i+1}}{h_{i+1}^2}m_i+\frac{6x-4x_i-2x_{i+1}}{h_{i+1}^2}m_{i+1}$$

$$+\frac{6(x_i+x_{i+1}-2x)}{h_{i+1}^3}(y_{i+1}-y_i)\quad x\in[x_i,x_{i+1}],\ i=0,\ldots,n\text{-}1. \tag{6.20'}$$

由 $S''(x_0+0)=S''(x_n-0)$, 得

$$\frac{1}{h_n}m_{n-1}+2\left(\frac{1}{h_n}+\frac{1}{h_1}\right)m_n+\frac{1}{h_1}m_1=3\left(\frac{y_1-y_0}{h_1^2}+\frac{y_n-y_{n-1}}{h_n^2}\right),$$

$$\frac{1}{h_n}m_{n-1}+2\left(\frac{1}{h_n}+\frac{1}{h_1}\right)m_n+\frac{1}{h_1}m_1$$
$$=3\left(\frac{y_1-y_0}{h_1^2}+\frac{y_n-y_{n-1}}{h_n^2}\right),$$

两侧同时除以
$$\frac{1}{h_n}+\frac{1}{h_1}=\frac{h_nh_1}{h_nh_1}$$

并令
$$\lambda_n=\frac{h_1}{h_n+h_1},\quad \mu_n=\frac{h_n}{h_n+h_1}=1-\lambda_n,$$
$$g_n=3(\lambda_nf[x_{n-1},x_n]+\mu_nf[x_0,x_1]).$$

则上述方程可化为
$$\lambda_nm_{n\text{-}1}+2m_n+\mu_nm_1=g_n, \tag{*2}$$

于是…

$$\lambda_i m_{i-1}+2m_i+\mu_i m_{i+1}=g_i,\quad i=2,3,\ldots,n-1. \tag{6.21}$$

$$\lambda_1 m_n+2m_1+\mu_1 m_2=g_1, \tag{*1}$$

$$\lambda_n m_{n-1}+2m_n+\mu_n m_1=g_n, \tag{*2}$$

由(6.21), (*1), (*2)可得(n阶)线性方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & \mu_1 & & & & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ \mu_n & & & & \lambda_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{pmatrix}.$$

对应不同的边界条件的三个方程组的系数矩阵都是严格对角占优矩阵,所以都有唯一解.

前两个方程组均可用追赶法求解，第三个方程组可用LU分解法或Gauss消去法求解.

由上述方程组求出m_i (i=1, …, n-1. 或 i=0, 1, …, n. 或 i=1, …, n) 后, 再代回到表达式

$$S(x)=\frac{1}{h_i^2}\left[\left(1+2\frac{x-x_{i-1}}{h_i}\right)(x-x_i)^2y_{i-1}\right.$$
$$+\left(1-2\frac{x-x_i}{h_i}\right)(x-x_{i-1})^2y_i$$
$$+(x-x_{i-1})(x-x_i)^2m_{i-1}$$
$$\left.+(x-x_{i-1})^2(x-x_i)m_i\right],$$

即得到三次样条函数在区间$[x_{i-1}, x_i]$上的表达式.

例 设$f(0)=1$, $f(1)=0$, $f(2)=-1$, $f(3)=0$, $f'(0)=1$, $f'(3)=0$, 试求$f(x)$在区间$[0, 3]$的三次样条插值函数$S(x)$.

解 这里$h_1=h_2=h_3=1$, $y'_0=1$, $y'_3=0$, 计算参数有

$$\lambda_1=\lambda_2=\mu_1=\mu_2=1/2,\ g_1=-3,\ g_2=0.$$

于是有 $\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, 解得 $m_1=-\dfrac{28}{15}, m_2=\dfrac{7}{15}$

故有

$$S(x)=\begin{cases} (x-1)\left(\dfrac{17}{15}x^2-2x-1\right) & x\in[0,1] \\ (x-1)\left(\dfrac{3}{5}x^2-\dfrac{14}{15}x-\dfrac{23}{15}\right) & x\in[1,2] \\ (x-3)^2\left(\dfrac{31}{15}-\dfrac{23}{15}x\right) & x\in[2,3] \end{cases}$$

三弯矩方法

三次样条函数$S(x)$也可以利用在节点处的二阶导数为参数来表示, 设$S''(x_i)=M_i$, $i=0, 1,\dots, n$, 则对$x\in[x_{i-1}, x_i]$有

$$S''(x)=\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}M_{i-1}+\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}M_i$$

连续积分两次, 并利用$S(x_{i-1})=y_{i-1}$, $S(x_i)=y_i$, 确定积分常数, 可得

$$S(x)=\frac{1}{6h_i}\left[(x_i-x)^3M_{i-1}+(x-x_{i-1})^3M_i\right]$$

$$+\left(\frac{y_{i-1}}{h_i}-\frac{h_iM_{i-1}}{6}\right)(x_i-x)+\left(\frac{y_i}{h_i}-\frac{h_iM_i}{6}\right)(x-x_{i-1})$$

其中$h_i=x_i-x_{i-1}$. 为了确定$S(x)$, 只需确定M_i, $i=0, 1,\dots, n$.可利用$S'(x_i-0)=S'(x_i+0)$来求出每个M_i. 对$S(x)$求导易得:

$$S'(x)=\frac{1}{2h_i}\left[(x-x_{i-1})^2M_i-(x-x_i)^2M_{i-1}\right]+f[x_{i-1},x_i]+\frac{h_i}{6}(M_{i-1}-M_i)$$

于是有

$$S'(x_i-0)=\frac{h_i}{6}(M_{i-1}+2M_i)+f[x_{i-1},x_i]$$

$$S'(x_i+0)=-\frac{h_{i+1}}{6}(2M_i+M_{i+1})+f[x_i,x_{i+1}]$$

因此

$$\frac{h_i}{6}M_{i-1}+\frac{h_i+h_{i+1}}{3}M_i+\frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1}=f[x_i,x_{i+1}]-f[x_{i-1},x_i]$$

若记 $\lambda_i=\dfrac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}$ ，$\mu_i=\dfrac{h_i}{h_i+h_{i+1}}$，$d_i=6f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]$

则有

$$\mu_iM_{i-1}+2M_i+\lambda_iM_{i+1}=d_i,\quad i=1,2,\ldots,n-1.$$

再结合不同的边界条件，可得关于M_i的方程.

若边界条件为: $M_0=y''_0, M_n=y''_n$，可得

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & & \mu_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - \mu_1 y_0'' \\ d_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} y_n'' \end{pmatrix}.$$

若边界条件为: $S'(x_0)=y'_0, S'(x_n)=y'_n$，则有

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_1}(f[x_0, x_1] - y_0') = d_0$$

$$M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_n}(y_n' - f[x_{n-1}, x_n]) = d_n$$

可得

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix},$$

若边界条件为周期性边界条件，由$S'(x_0+0)=S'(x_n-0)$，和$S''(x_0+0)=S''(x_n-0)$, 有

$$M_0=M_n,$$

和

$$\lambda_n M_1+\mu_n M_{n-1}+2M_n=d_n,$$

其中

$$\lambda_n=\frac{h_1}{h_1+h_n},\quad \mu_n=1-\lambda_n=\frac{h_n}{h_1+h_n},\quad d_n=6f[x_0,x_1,x_{n-1}]$$

于是有

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & & \mu_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix},$$

而且M_0=M_n.

例8 设$f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=0$, $f(3)=1$, $f''(0)=1$, $f''(3)=0$, 试求$f(x)$在区间[0, 3]的三次样条插值函数$S(x)$.

解 这里$h_1=h_2=h_3=1$, $y''_0=1$, $y''_3=0$, 计算参数有

$$\lambda_1=\lambda_2=\mu_1=\mu_2=1/2,\ d_1=-6,\ d_2=6$$

于是有$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{13}{2} \\ 6 \end{pmatrix}$, 解得 $M_1=-\dfrac{64}{15}, M_2=\dfrac{61}{15}$

故有

$$S(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{90}\left(-79x^3+45x^2+124x\right) & x\in[0,1] \\ \dfrac{1}{90}\left(125x^3-567x^2+736x-204\right) & x\in[1,2] \\ \dfrac{1}{90}\left(-61x^3+549x^2-1496x+1284\right) & x\in[2,3] \end{cases}$$

§6.8.1 正交多项式

记区间$[a, b]$上所有(实)连续函数的全体为$C[a, b]$. 可以证明$C[a, b]$是一个线性空间. 把所有次数不超过n的(实系数)多项式全体记为P_n, 则P_n是$C[a, b]$的子空间.

若$f(x), g(x)\in C[a, b]$, 则称

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

为$f(x)$与$g(x)$的(实)**内积**, 记为(f, g), 满足性质:

(1) $(f, g)=(g, f)$;

(2) $(cf, g)=c(f, g)$;

(3) $(f_1+f_2, g)=(f_1, g)+(f_2, g)$;

若$(f, g)=0$, 称$f(x)$与$g(x)$**正交**, 记为$f \perp g$.

利用内积可以定义函数的**平方范数** **(或称平方模)**

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$$

函数的平方范数满足以下4条性质:

(1) $\|f\|_2 \geq 0$, 而且$\|f\|_2 = 0 \Leftrightarrow f(x)=0$;

(2) $\|cf\|_2 = |c|\|f\|_2$;

(3) $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$;

(4) $|(f, g)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$.

考虑到$f(x)$在区间$[a, b]$上各点的函数值比重不同，常引进加权形式的内积以及相应的范数:

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx$$

$$\|f\|_2=\sqrt{\int_a^b \rho(x)f^2(x)dx}$$

这里函数$\rho(x)$是非负连续函数，称为$[a, b]$上的**权函数**. 它的物理意义可以解释为密度函数.

加权范数依然满足范数的4条性质. 因此，加权范数也是范数.

定理6.3 若$f_0(x)$, $f_1(x)$,…, $f_n(x)$为C[a, b]上的一组线性无关函数，则可得到C[a, b]上一组两两正交的函数组$g_0(x)$, $g_1(x)$, …, $g_n(x)$, 使对任意k=0, 1,…, n, 满足以下条件:

(1) $g_k(x)$为$f_0(x)$, $f_1(x)$,…, $f_k(x)$的线性组合;

(2) $f_k(x)$为$g_0(x)$, $g_1(x)$,…, $g_k(x)$的线性组合.

证明思路： 只要按**Schmidt正交化过程**构造

$$g_0(x)=f_0(x),$$

$$g_1(x)=f_1(x)-\frac{(f_1,g_0)}{(g_0,g_0)}g_0(x),$$

……

$$g_n(x)=f_n(x)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(f_n,g_i)}{(g_i,g_i)}g_i(x).$$

可知$g_0(x), g_1(x),\dots, g_n(x)$两两正交且满足条件(1)和(2). 证毕.

若已得到正交函数组$g_0(x), g_1(x),\dots, g_n(x)$, 再令

$$e_k(x)=\frac{1}{\|g_k\|_2}g_k(x),\quad k=0,1,\dots,n.$$

称正交函数组$e_0(x), e_1(x),\dots, e_n(x)$为**规范正交组**.

由线性无关函数$1, x, x^2,\dots, x^n$经过Schimidt正交化过程得到的多项式$p_0(x),\ p_1(x),\dots,\ p_n(x)$称为$[a,\ b]$上的**正交多项式**.

例6-9 求区间[-1, 1]上,权函数$\rho(x)=1$的(3次)正交多项式.

解: 对$1, x, x^2, x^3$ 按Schmidt正交化过程可得正交多项式为:

$p_0(x)= 1$,

$$p_1(x) = x - \frac{(x,1)}{(1,1)} \times 1 = x - \frac{\int_{-1}^{1} x dx}{\int_{-1}^{1} 1 dx} = x,$$

$$p_2(x) = x^2 - \frac{(x^2,1)}{(1,1)} 1 - \frac{(x^2,x)}{(x,x)} x$$

$$= x^2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 dx}{\int_{-1}^{1} 1 dx} - \frac{\int_{-1}^{1} x^3 dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx}$$

$$= x^2 - \frac{1}{3},$$

$$p_3(x) = x^3 - \frac{(x^3,1)}{(1,1)}1 - \frac{(x^3,x)}{(x,x)}x$$

$$- \frac{(x^3, x^2 - \frac{1}{3})}{(x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3})}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= x^3 - \frac{\int_{-1}^{1} x^3 dx}{\int_{-1}^{1} 1 dx}1 - \frac{\int_{-1}^{1} x^4 dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx}x$$

$$- \frac{\int_{-1}^{1}\left(x^5 - \frac{1}{3}x^3\right)dx}{\int_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= x^3 - \frac{3}{5}x.$$

结论: 区间[-1, 1]上,权函数$\rho(x)=1$的一组正交多项式为:

$$1,\ x,\ x^2-\frac{1}{3},\ x^3-\frac{3}{5}x,\ \dots\dots$$

它们在内积

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$$

意义下两两正交.

若$p_0(x)$, $p_1(x)$,…, $p_n(x)$是$[a, b]$上权函数为$\rho(x)$的正交多项式, 则有下列性质:

(1) $p_k(x)$是首项系数不为零的k次多项式;

(2) $p_0(x)$, $p_1(x)$,…, $p_n(x)$构成P_n上的一组正交基;

注: P_n代表全体n次(即次数$\le n$)多项式函数组成的空间.

(3) $p_n(x)$与任一不高于$n-1$次的多项式正交, 即$p_n(x)\perp \mathrm{P}_{n-1}$;

(4) 方程$p_n(x)=0$在$[a, b]$上有n个单根;

(5) 方程$p_{n-1}(x)=0$的根$x_1^{(n-1)}$, $x_2^{(n-1)}$,…, $x_{n-1}^{(n-1)}$与方程$p_n(x)=0$的根$x_1^{(n)}$, $x_2^{(n)}$,…, $x_n^{(n)}$在$[a, b]$上交错分布.

几个常用的正交多项式

1. Legendre多项式

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad x \in [-1,1], \quad n = 0,1,2,\ldots$$

是区间[-1, 1]上权函数$\rho(x)$=1的正交多项式, 且满足:

(1) $(L_m, L_n) = \int_{-1}^{1} L_m(x) L_n(x) dx \quad = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & m = n \end{cases}$

(2) 有三项递推关系

$$\begin{cases} (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x), \; n \geq 1 \\ L_0(x) = 1, \; L_1(x) = x \end{cases}$$

2. Chebyshev多项式

$$T_n(x)=cos(narccosx),\ \ x\in[-1,\ 1],\ n=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

是区间[-1, 1]上权函数$\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的正交多项式, 且满足:

(1) $(T_m,\ T_n)=\int_{-1}^{1} T_m(x)T_n(x)\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$=\int_0^{\pi}\cos m\theta\cos n\theta d\theta$$

$$(T_m,T_n)=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \pi & m=n=0\\ \pi/2 & m=n\neq 0\end{cases}$$

Chebyshev多项式(续)

(2) 有三项递推关系

$$\begin{cases} T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x),\ n=1,\ 2,\ 3,\ldots \\ T_0(x)=1,\ T_1(x)=x \end{cases}$$

(3) $T_n(x)$在[-1, 1]上的n个零点为

$$x_k^{(n)} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi, \quad k=1,2,\ldots,n.$$

3. Laguerre多项式

$$L_n(x) = \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n \mathrm{e}^{-x}),\ 0 < x < +\infty,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

是区间[0, +∞)上权函数$\rho(x)=\mathrm{e}^{-x}$的正交多项式, 且满足:

(1) $(L_m, L_n)= \int_0^{+\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ (n!)^2 & m = n \end{cases}$

(2) 三项递推关系:

$$\begin{cases} L_{n+1}(x)=(2n+1-x)L_n(x)-n^2 L_{n-1}(x),\ n\geq 1 \\ L_0(x)=1,\ L_1(x)=1-x \end{cases}$$

4. Hermite多项式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}), -\infty < x < +\infty, n = 0, 1, 2, \ldots,$$

是区间$(-\infty, +\infty)$上权函数$\rho(x) = e^{-x^2}$的正交多项式, 且满足:

(1) $(H_m, H_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 2^n n! \pi & m = n \end{cases}$

(2) 三项递推关系:

$$\begin{cases} H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \ n \geq 1 \\ H_0(x) = 1, \ H_1(x) = 2x \end{cases}$$

§ 6.8.2 最佳均方逼近

对于给定的函数$f(x)\in C[a, b]$，在某(连续)函数类Φ中寻找函数 $\varphi^*(x)\in\Phi$, 使

$$\|f(x)-\varphi^*(x)\|_2=\min_{\varphi(x)\in\Phi}\|f(x)-\varphi(x)\|_2,$$

注: 其中范数$\|\cdot\|_2$可具体定义为: 对于任意的$g(x)\in C[a, b]$,

$$\|g(x)\|_2=\left(\int_a^b|g(x)|^2dx\right)^{1/2}$$

或加权形式的范数

$$\|g(x)\|_2=\left(\int_a^b\rho(x)|g(x)|^2dx\right)^{1/2}$$

其中$\rho(x)\geq 0$, 称为权函数

则称$\varphi^*(x)$为Φ上关于函数$f(x)$的最佳均方逼近函数.

如果$\Phi=P_n$, 即次数不超过n的全体多项式空间, 则称$\varphi^*(x)$为关于函数$f(x)$的n次最佳均方逼近多项式.

§ 6.9 数据拟合的最小二乘法

§ 6.9.1 数据拟合问题

经常由观察或测试可得到$y(x)$的一组离散数据:

x_i	x_0	x_1	x_2	…	x_m
y_i	y_0	y_1	y_2	…	y_m

需要在给定的函数类Φ上根据这组离散数据作出逼近曲线. 要求逼近曲线在x_i处与离散数据尽可能接近.

曲线拟合问题: 对函数$\varphi(x)\in\Phi$, 要求以$\varphi(x)$在离散点的误差:

$$\delta_0=\varphi(x_0)-y_0,\ \delta_1=\varphi(x_1)-y_1,\dots,\ \delta_m=\varphi(x_m)-y_m,$$

为分量的误差向量$\delta=(\delta_0,\ \delta_1,\dots,\ \delta_m)^{\mathrm{T}}$, 按某一向量范数$\|\delta\|$达到最小. 对不同的范数, 可构造出不同意义下的拟合函数.

函数类Φ通常取为：$\Phi=\mathrm{Span}\{\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ldots,\ \varphi_n(x)\}$，其中函数系$\varphi_0(x), \varphi_1(x),\ldots, \varphi_n(x)$在包含节点$\{x_i\}$的区间$[a, b]$上线性无关. Φ中任一函数$\varphi(x)$可以表示为

$$\varphi(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\ldots+a_n\varphi_n(x).$$

常用的函数系有幂函数系$\{x^j\}$，三角函数系$\{sinjx\}$, $\{cosjx\}$, 指数函数系$\{e^{\lambda_j x}\}$, 正交函数系等.

最常用的是幂函数系$\{x^j\}$, 即取

$$\Phi=P_n=\mathrm{Span}\{1, x, x^2,\ldots, x^n\},$$

这时求得的拟合曲线称为**多项式拟合曲线**.

思考：拟合与插值的区别.

§ 6.9.2 数据拟合的最小二乘法

为了便于计算，在求误差向量δ的范数时，宜采用向量的2-范数, 这时对应的曲线拟合方法称为**最小二乘法**.

最小二乘法具体表述为：在函数类$\Phi=\mathrm{Span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x),\ldots, \varphi_n(x)\}$中找一个函数$y=\varphi^*(x)$，使误差向量$\delta^*$按2-范数达到最小值, 即

$$\|\boldsymbol{\delta}^*\|_2^2=\sum_{i=0}^{m}\delta_i^{*2}=\sum_{i=0}^{m}[\varphi^*(x_i)-y_i]^2=\min_{\varphi(x)\in\Phi}\|\boldsymbol{\delta}\|_2^2$$

在实际问题中, 考虑到数据的比重不同, 常采用向量的加权范数形式

$$\|\boldsymbol{\delta}\|_2^2=\sum_{i=0}^{m}\rho(x_i)[\varphi(x_i)-y_i]^2$$

其中$\rho(x)\geq 0$, 是在$[a, b]$上的权函数.

由于

$$\|\boldsymbol{\delta}\|_2^2=\sum_{i=0}^{m}\rho(x_i)[\varphi(x_i)-y_i]^2$$

而

$$\varphi(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\ldots+a_n\varphi_n(x),$$

$$G(a_0, a_1,\ldots, a_n)=\sum_{i=0}^{m}\rho(x_i)[\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x_i)-y_i]^2$$

因此寻求拟合曲线问题就转换为求多元函数$G(a_0, a_1,\ldots, a_n)$的最小值问题.令

$$2\sum_{i=0}^{m}\rho(x_i)[\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x_i)-y_i]\varphi_k(x_i)=\frac{\partial G}{\partial a_k}=0,\quad k=0,1,\ldots,n.$$

整理, 得到关于$a_0, a_1,\ldots, a_n$的线性方程组:

$$\sum_{j=0}^{n}[\sum_{i=0}^{m}\rho(x_i)\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)]a_j=\sum_{i=0}^{m}\rho(x_i)y_i\varphi_k(x_i),\quad k=0,1,\ldots,n.$$

对于方程组

$$\sum_{j=0}^{n}\left[\sum_{i=0}^{m}\rho(x_i)\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)\right]a_j=\sum_{i=0}^{m}\rho(x_i)y_i\varphi_k(x_i),\quad k=0,1,\ldots,n.$$

引进向量

$$\boldsymbol{\varphi}_j=(\varphi_j(x_0),\ \varphi_j(x_1),\ldots,\ \varphi_j(x_m))^{\mathrm{T}},\ j=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n.$$

$$\boldsymbol{f}=(y_0,\ y_1,\ldots,\ y_m)^{\mathrm{T}},$$

且记向量内积为:

$$(\boldsymbol{\varphi}_j,\boldsymbol{\varphi}_k)=\sum_{i=0}^{m}\rho(x_i)\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i),$$

$$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\varphi}_k)=\sum_{i=0}^{m}\rho(x_i)y_i\varphi_k(x_i),$$

于是上述方程组可写为:

方程组 $$\sum_{j=0}^{n}(\boldsymbol{\varphi}_j,\boldsymbol{\varphi}_k)a_j=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\varphi}_k),\quad k=0,1,\dots,n.$$

以上方程组的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} (\boldsymbol{\varphi}_0,\boldsymbol{\varphi}_0) & (\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_0) & \dots & (\boldsymbol{\varphi}_n,\boldsymbol{\varphi}_0) \\ (\boldsymbol{\varphi}_0,\boldsymbol{\varphi}_1) & (\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_1) & \dots & (\boldsymbol{\varphi}_n,\boldsymbol{\varphi}_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\boldsymbol{\varphi}_0,\boldsymbol{\varphi}_n) & (\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_n) & \dots & (\boldsymbol{\varphi}_n,\boldsymbol{\varphi}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{f},\boldsymbol{\varphi}_0) \\ (\boldsymbol{f},\boldsymbol{\varphi}_1) \\ \dots \\ (\boldsymbol{f},\boldsymbol{\varphi}_n) \end{pmatrix},$$

由内积的对称性, 上述方程组一般常写为如下形式:

$$\begin{pmatrix} (\boldsymbol{\varphi}_0,\boldsymbol{\varphi}_0) & (\boldsymbol{\varphi}_0,\boldsymbol{\varphi}_1) & \dots & (\boldsymbol{\varphi}_0,\boldsymbol{\varphi}_n) \\ (\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_0) & (\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_1) & \dots & (\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\boldsymbol{\varphi}_n,\boldsymbol{\varphi}_0) & (\boldsymbol{\varphi}_n,\boldsymbol{\varphi}_1) & \dots & (\boldsymbol{\varphi}_n,\boldsymbol{\varphi}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{f},\boldsymbol{\varphi}_0) \\ (\boldsymbol{f},\boldsymbol{\varphi}_1) \\ \dots \\ (\boldsymbol{f},\boldsymbol{\varphi}_n) \end{pmatrix},$$

它称为(由最小二乘法导出的)法方程组(或称**正则方程组**).

如果向量组$\boldsymbol{\varphi}_0$, $\boldsymbol{\varphi}_1,\ldots$, $\boldsymbol{\varphi}_n$线性无关, 则法方程组的系数矩阵是对称正定矩阵, 此时可(由平方根法、SOR法等算法)求得法方程组的唯一解a_0^*, $a_1^*,\ldots$, a_n^*, 于是得到拟合函数:

$$\boxed{\varphi^*(x)=a_0^*\varphi_0(x)+a_1^*\varphi_1(x)+\ldots+a_n^*\varphi_n(x).}$$

思考: 如果向量组$\boldsymbol{\varphi}_0$, $\boldsymbol{\varphi}_1,\ldots$, $\boldsymbol{\varphi}_n$线性无关, 则法方程组的系数矩阵是对称正定矩阵. 为什么?

具体情形I

若取函数类$\Phi=P_n=\mathrm{Span}\{1, x, x^2,\ldots, x^n\}$, 法方程组为

$$\begin{pmatrix} \sum \rho_i & \sum \rho_i x_i & \cdots & \sum \rho_i x_i^n \\ \sum \rho_i x_i & \sum \rho_i x_i^2 & \cdots & \sum \rho_i x_i^{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum \rho_i x_i^n & \sum \rho_i x_i^{n+1} & \cdots & \sum \rho_i x_i^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \rho_i y_i \\ \sum \rho_i x_i y_i \\ \cdots \\ \sum \rho_i x_i^n y_i \end{pmatrix},$$

其中$\rho_i=\rho(x_i)$, $\sum=\sum\limits_{i=0}^{m}$, 于是可求法方程组的解: $a_0^*, a_1^*,\ldots, a_n^*$.

因此, 拟合曲线函数为n次多项式

$$\varphi^*(x)=p_n^*(x)=a_0^*+a_1^*x+\ldots+a_n^*x^n.$$

此情形即多项式拟合问题.

具体情形II

若取$\varphi_0(x)$，$\varphi_1(x),\ldots$，$\varphi_n(x)$为正交函数系，使$(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_j)=0$，$(i\neq j)$, 则法方程组的系数矩阵为对角矩阵, 法方程组为

$$\begin{pmatrix} (\boldsymbol{\varphi}_0,\boldsymbol{\varphi}_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_1) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\boldsymbol{\varphi}_n,\boldsymbol{\varphi}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{f},\boldsymbol{\varphi}_0) \\ (\boldsymbol{f},\boldsymbol{\varphi}_1) \\ \cdots \\ (\boldsymbol{f},\boldsymbol{\varphi}_n) \end{pmatrix},$$

此时法方程组的解为

$$a_k^*=(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi}_k)/(\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_k),\ k=0, 1, 2,\ldots, n.$$

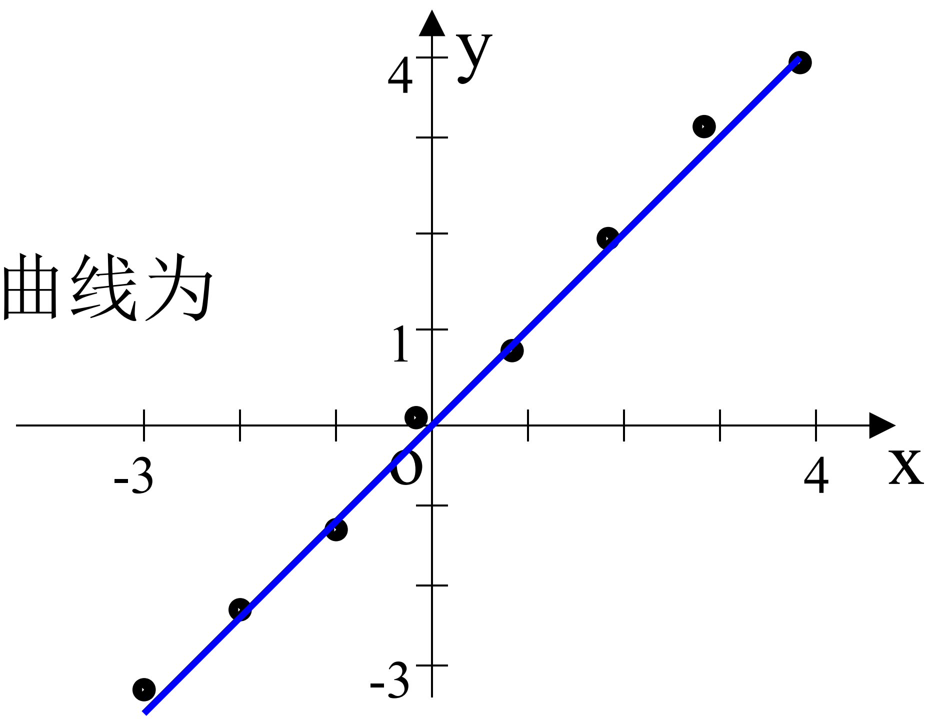
拟合曲线函数为

$$\varphi^*(x)=a_0^*\varphi_0(x)+a_1^*\varphi_1(x)+\ldots+a_n^*\varphi_n(x).$$

例10 给出如下离散数据

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y_i	-3.2	-2.1	-1.2	0.1	0.9	2.1	3.3	4

求$y(x)$的拟合曲线.



解 绘草图, 见右图.

故应做线性多项式拟合, 拟合曲线为

$p_1(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)=a_0+a_1x,$

其中$\varphi_0(x)=1$, $\varphi_1(x)=x$,

权函数$\rho(x)=1$. 记向量

$\boldsymbol{\varphi}_0=(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T,$

$\boldsymbol{\varphi}_1=(-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4)^T,$

$\boldsymbol{f}=(-3.2, -2.1, -1.2, 0.1, 0.9, 2.1, 3.3, 4)^T.$

法方程组为

$$\begin{pmatrix} (\boldsymbol{\varphi}_0,\boldsymbol{\varphi}_0) & (\boldsymbol{\varphi}_0,\boldsymbol{\varphi}_1) \\ (\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_0) & (\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{f},\boldsymbol{\varphi}_0) \\ (\boldsymbol{f},\boldsymbol{\varphi}_1) \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.9 \\ 46 \end{pmatrix}$$

解得

$$\begin{cases} a_0^* = -0.036905 \\ a_1^* = 1.048810 \end{cases}$$

所求拟合曲线为

$$p_1(x) = 1.048810x - 0.036905.$$

此时拟合曲线的均方误差为

$$\left\|\boldsymbol{\delta}^*\right\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{m}\left[p_1(x_i) - y_i\right]^2} \approx 0.329666.$$

例11 对下列数据求形如$y=ae^{bx}$的拟合曲线.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	15.3	20.5	27.4	36.6	49.1	65.6	87.8	117.6
z_i	2.72785	3.02042	3.31054	3.60005	3.89386	4.18358	4.47506	4.76729

解 设$z=ln(y)$, 则$z=A+bx$, 其中$A=ln(a)$, 由$z_i=ln(y_i)$得有关数据. 以下先对z做线性多项式拟合.

取 $\varphi_0(x)=1$, $\varphi_1(x)=x$, 权函数$\rho(x)=1$. 记向量

$$\boldsymbol{\varphi}_0=(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\varphi}_1=(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)^{\mathrm{T}},$$

z=(2.72785，3.02042，3.31054，3.60005，3.89386，4.18358, 4.47506, 4.76729)$^{\mathrm{T}}$,

法方程组为

$$\begin{pmatrix} (\boldsymbol{\varphi}_0,\boldsymbol{\varphi}_0) & (\boldsymbol{\varphi}_0,\boldsymbol{\varphi}_1) \\ (\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_0) & (\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\boldsymbol{z},\boldsymbol{\varphi}_0) \\ (\boldsymbol{z},\boldsymbol{\varphi}_1) \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} 8 & 36 \\ 36 & 204 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 29.97865 \\ 147.13503 \end{pmatrix}$$

解得

$$\begin{cases} A^* = 2.43686 \\ b^* = 0.29122 \end{cases}$$

再代回到关于y的拟合问题.于是有

$$a^*=e^{A^*}=11.43707,$$

关于y的拟合曲线为:

$$\varphi(x)=11.43707\mathrm{e}^{0.29122x}.$$

例12 用最小二乘法求超定方程组

$$\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 2x+y=2 \\ x-4y=-1 \\ 3x+2y=-3 \end{cases}$$

的近似解.

解: 记

$$G(x,y)=(3x-2y-1)^2+(2x+y-2)^2+(x-4y+1)^2+(3x+2y+3)^2 .$$

令

$$\frac{\partial G}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial G}{\partial y}=0,$$

则有

$$\begin{cases} 6(3x-2y-1)+4(2x+y-2)+2(x-4y+1)+6(3x+2y+3)=0, \\ -4(3x-2y-1)+2(2x+y-2)-8(x-4y+1)+4(3x+2y+3)=0, \end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases} 23x-2y=-3, \\ -2x+25y=-2, \end{cases}$$

解得: $x=-0.138354$, $y=-0.091068$.

思考题1: 考虑这个最小二乘解的意义.

思考题2: 此方程是否还有其他类型的最小二乘解?

注1: 以上关于方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的最小二乘解也可由方程组

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}. \qquad \textbf{(6.*)}$$

导出. 请思考原因.

注2：关于此类问题，还可以根据具体需求选择相应的加权函数. 例如上例中还可令

$G(x, y) =$

$$\rho_1(3x-2y-1)^2+\rho_2(2x+y-2)^2+\rho_3(x-4y+1)^2+\rho_4(3x+2y+3)^2 .$$

得到相应的最小二乘解. 其中$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$为权系数.

注3：一般情况下，超定方程组可能有(真)解，也可能无(真)解.

注4：超定方程组永远存在最小二乘解．当$\mathrm{Rank}(\boldsymbol{A})<\boldsymbol{A}$的列数时，超定方程组的最小二乘解不唯一. 不同的加权范数意义下对应的最小二乘解一般也可能互不相同.

注5：如果超定方程组存在唯一的(真)解，则所有的最小二乘解均与(真)解相同.

自修: P182-P183: 例6-12.