2024-2025 学年研究生数值分析期末考试试题(A)

一、简答题：（每题 5 分，共 30 分）

1. 设 $\sqrt{2001}\approx 44.733$、$\sqrt{1999}\approx 44.710$ 分别具有 5 位有效数字，计算 $\sqrt{2001}-\sqrt{1999}$ 的近似值，使其计算结果至少具有 5 位有效数字，说明理由

2. 证明：矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ 不存在 LU 分解.

3. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. 对于线性方程组 $Ax=b$，请分析 Jacobi 迭代法的收敛性

4. 设 α 是非线性方程 $f(x)=0$ 的单根，试说明收敛的迭代格式 $x_{k+1}=x_k-m(x_k)f(x_k)$，当 $m(\alpha)\neq f'(\alpha)^{-1}$ 时是一阶收敛；当 $m(\alpha)=f'(\alpha)^{-1}$ 时至少是二阶收敛.

5. 分别利用 Simpson 求积公式 S 和 $n=2$ 的复化梯形求积公式 T_2 计算定积分 $\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$ 的近似值.

6. 求积公式 $\int_0^3 f(x)dx\approx\frac{3}{2}[f(1)+f(2)]$ 是否为插值型求积公式，说明理由.

二、解答题（10 分）

某次实验中测得两个变量 x,y 以及权函数 ρ 之间关系如下：

x_i	4	3	2	1
y_i	1/6	1/5	1/4	1/3
ρ_i	1	2	1	3

试用最小二乘法求形如 $y=\frac{1}{a+bx^2}$ 的拟合曲线.

三、解答题（10 分）设函数 $f(x)=(x^5-a)^2(a\neq 0)$，写出求解 $f(x)=0$ 实根 $\sqrt[5]{a}$ 的牛顿迭代格式和带参数 m（其中 m 为方程 $f(x)=0$ 根的重数）的牛顿迭代格式，并证明迭代格式的收敛阶.

四、解答题（10 分）设函数 $f(x)=\cos x$，将 $[0,1]$ 区间 n 等分（n 为正整数），记 $h=\dfrac{1}{n}$，$x_k=kh\ (k=0,1,\dots,n)$.

1. 求 $f(x)$ 以 $x_k(k=0,1,\dots,n)$ 为节点的 n 次 Lagrange 插值多项式 $L_n(x)$；

2. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)-L_n(x)|=0$.

五、解答题（10 分）已知 $f(x)\in C^4[-1,1]$，求积公式

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx C[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)]$$

代数精度为 3，试确定参数 C,x_1,x_2,x_3.

六、解答题（15 分）给定一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y(x)),\ a\le x\le b,\\ y(a)=0,\end{cases}$$

其中 $f(x,y)$ 连续并且关于 y 满足 Lipschitz 条件. 已知求解上述常微分方程初值问题的差分方法

$$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{5}(2K_1+3K_2),\\ K_1=f(x_n,y_n),\\ K_2=f(x_n+\alpha h,y_n+\beta hK_1),\\ y_0=0,\end{cases}$$

为二阶方法，试确定参数 α 和 β 的值并判定此方法的收敛性.

七、解答题（15 分）对于解线性方程组 $Ax=b$ 的迭代格式 $x^{(k+1)}=Mx^{(k)}+g$，设 $\rho(M)$ 为迭代矩阵 M 的谱半径.

1. 求证：当且仅当 $\rho(M)<1$ 时，对于任意初始向量 $x^{(0)}$，以上迭代格式收敛；

2. **多选题**：对于 1 中命题的理解，以下合理的选项有哪些？(**请将所有合理选项的标号写在答题卡上对应的题号处**)

(A) 当 $\rho(M)\ge 1$ 时，有可能存在初始向量 $x^{(0)}$ 使迭代收敛.

(B) 当 $\rho(M)\ge 1$ 时，不可能存在初始向量 $x^{(0)}$ 使迭代收敛.

(C) 当 $\rho(M)<1$ 时，有可能存在初始向量 $x^{(0)}$ 使迭代发散.

(D) 当 $\rho(M)<1$ 时，不可能存在初始向量 $x^{(0)}$ 使迭代发散.