

学 院
班 级
学 号
姓 名

东北大学研究生院考试试卷 (A/闭卷)

2017—2018 学年第 1 学期

课程名称: 数值分析

一. 简答题 (每题 6 分, 共 48 分)

1. 已知 $x=6.7321$ 具有 5 位有效数字, 问由此计算 $f(x)=x^3+4x^2-10$ 至少具有几位有效

①

2. 写出矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ 的 *Crowd* 分解式 $A=TM$.

3. 试给出简化 *Newton* 迭代法的收敛性条件并加以证明.

分	一 (1-3)	二 (4-5)	三 (6-8)	二	三	四	五

4. 给定离散数据:

x_i	-1	0	1	2
y_i	1	-1	0	2

试求形如 $y=a+bx^3$ 的拟合曲线.

5. 求矩阵 Q 的 $\|Q\|_1, \|Q\|_\infty$ 与 $Cond_2(Q)$, 其中

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$



学 院
班 级
学 号
姓 名

密

封

线

6. 对积分 $\int_0^1 f(x) dx$ 建立两点 Gauss 公式.

7. 设求积公式 $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$, ($n \geq 3$) 是插值型求积公式, 求 $\sum_{k=0}^n A_k x_k^2$.

8. 利用复化 Simpson 公式 S_2 计算定积分 $I = \int_0^1 \cos x dx$ 的近似值, 并估计误差.

③. (本题 12 分) 设有线性方程组 $Ax=b$ 的迭代格式 $Bx^{(k+1)} + Cx^{(k)} = b$, $k=0,1,\dots$

其中 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \xi & 0 & 0 \\ 2 & \eta & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, $x^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix}$

试确定实参数 ξ 和 η 的取值范围, 使得迭代格式收敛.

三. (本题 15 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有 4 阶连续导数,

1. 求一个次数不超过 3 次的多项式 $p(x)$, 使 $p(x)$ 满足

$$p(a) = f(a), p(b) = f(b), p'(a) = f'(a), p'(b) = f'(b)$$

2. 证明 $R(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!} (x-a)^2 (x-b)^2$, $\xi_x \in (a, b)$ 且与 x 有关.

学 院
班 级
学 号
姓 名

窳

封

0

线

四. (本题 15 分) 已知求解常微分方程初值问题:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

的差分公式:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hk_1) \\ y_0 = \alpha \end{cases}$$

1. 证明: 此差分公式是二阶方法.
2. 讨论此差分公式的收敛性.
3. 用此差分公式求解初值问题 $y' = -10y$, $y(0) = 1$ 时, 取步长 $h = 0.25$, 所得数值解是否稳定, 为什么?

五、证明题(本题 10 分)

设 A 是 n 阶非奇异矩阵, B 是 n 阶奇异矩阵, 试证明

$$\text{Cond}(A) \geq \frac{\|A\|}{\|A-B\|}$$