



東北大學  
Northeastern University

# 数值分析

理学院 数学系

计算数学教研室



## 第八章 常微分方程数值解法

### 已有研究

Gauss消去法

平方根方法

向量和矩阵的范数

直接三角分解方法

追赶法

线性方程组固有性态与误差分析

自然界的统一性显示在关于各种现象领域的微分方程式的“惊人的类似”中.

——列宁

在自然科学与工程技术的许多领域中,经常会遇到常微分方程定解问题. 本章主要以一阶常微分方程为主, 介绍常微分方程初值问题的差分方法和相关理论.

# 一阶常微分方程初值问题的基本概念

一阶常微分方程初值问题的一般形式为

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), & a \leq x \leq b; \\ y(a) = \alpha. \end{cases} \quad (1)$$

其中  $f(x, y)$  是已知函数,  $\alpha$  为给定的值.

上述问题之所以称为初值问题, 是因为在很多数学模型中变量  $x$  代表时间, 而定解条件  $y(a) = \alpha$  给出了函数  $y(x)$  在初始时刻的取值.

# 问题

- 1. 问题(1)何时存在惟一解?
- 2. 如何计算 $y(x)$ ?

**定理** 如果函数 $f(x, y)$ 在区域 $\{a \leq x \leq b, m < y < M\}$ 上连续, 且关于 $y$ 满足**Lipschitz (李普希兹)条件**:

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|, \quad \forall y, \bar{y},$$

其中 $L > 0$ 为**Lipschitz常数**, 则初值问题(1) (在 $a$ 的某个邻域上)存在惟一解.

注1: 此时的Lipschitz常数 $L$ 不必小于1, 这一点与前面章节中讲过的压缩映射的条件有所不同.

注2: 当不满足Lipschitz条件时, 问题(1)未必存在惟一解.

注3: 关于此结论的详细论述, 参看有关常微分方程教材.

例1 论述以下常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 1 + x \sin(xy), & 0 \leq x \leq 2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

解的存在性、唯一性.

由于此时

$$f(x, y) = 1 + x \sin(xy)$$

对任意  $y, \bar{y}$ , (应用微分中值定理) 存在  $\eta$  使得

$$\frac{f(x, y) - f(x, \bar{y})}{y - \bar{y}} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, \eta) = x^2 \cos(x\eta),$$

于是有

## 例1(续)

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| = |x^2 \cos(x\eta)| |y - \bar{y}| \leq 4|y - \bar{y}|,$$

因而此时 $f(x, y)$ 关于 $y$ 满足Lipschitz条件, 且常数 $L=4$ .

因此, 从理论上讲, 初值问题例1的解存在且惟一.

注: 但是, 对例1进行精确求解是非常困难的, 通常需要借助于数值解法.

# 为什么要研究数值解法

在《高等数学》等课程中同学们已经学习了一些方法来求解一些特殊形式的常微分方程. 但对于大量来源于实际问题的常微分方程, 其精确解很难求出或者不能用初等函数表示(譬如例1). 因此研究常微分初值问题的近似解法就显得十分必要.

近似解法主要有两类: 一类近似解法为解析近似方法; 另一类近似解法称为数值解法.

本课程中我们主要研究数值解法. 它可以给出解在一些离散节点上的近似值. 此类方法非常适于在计算机上实现.

本章我们将介绍一类最基本的方法——**有限差分法**.

# 构造数值解法的基本思想

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), & a \leq x \leq b; \\ y(a) = \alpha. \end{cases} \quad (1)$$

假设初值问题(1)的解 $y=y(x)$ 唯一存在且足够光滑. 对求解区域 $[a, b]$ 做**等距剖分**:

$$a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots < x_N=b,$$

$h=(b-a)/N$  称为**剖分步长**; 剖分节点 $x_n=a+nh, n=0, 1, \dots, N$ .

数值解法的目标就是求精确解 $y(x)$ 在剖分节点 $x_n$ 上的值 $y(x_n)$ 的近似值 $y_n, n=1, 2, \dots, N$ .

# 差分公式的导出

我们采用数值积分方法来建立差分公式.

在区间 $[x_n, x_{n+1}]$ 上对方程(1)中的微分方程两端同时做积分, 则有

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \quad (2)$$

对(2)式右边的积分应用不同的数值积分公式做逼近, 会得到相应不同的差分公式.

.....

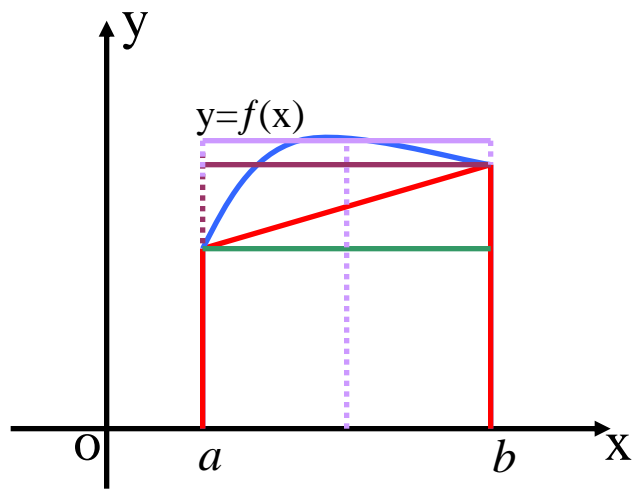
## 几个常用的数值积分公式

梯形公式  $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$

左矩形公式  $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(a)$

右矩形公式  $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(b)$

中矩形公式  $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2})$



由数值积分的有关知识可知，上述几个公式中**梯形公式**和**中矩形公式**的精度较高。

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \quad (2)$$

对(2)式右边的积分应用左矩形公式, 则有

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$$

因此, 建立节点处近似值 $y_n$ 满足的差分公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_0 = \alpha, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

称之为**Euler公式**.

# 关于Leonhard Euler（莱昂哈德·欧拉）



瑞士法郎正面的  
Euler肖像

欧拉(1707-1783)出生于瑞士巴塞尔，是数学史上公认的4名最伟大的数学家之一，也是科学史上最多产的一位杰出的数学家。几乎每一个数学领域都可以看到欧拉的名字。据统计他一生共写下了886本书籍和论文，其中包括分析、代数、数论、几何、物理、力学、天文学、弹道学、航海学、建筑学等。彼得堡科学院为了整理他的著作，足足忙碌了四十七年。

“读读欧拉，他是所有人的老师。”——拉普拉斯 (法国数学家)

“研究欧拉的著作永远是了解数学的最好方法。”——高斯

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \quad (2)$$

若对(2)式右边的积分应用梯形求积公式, 则可导出差分公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \\ y_0 = \alpha, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

称为**梯形公式**.

若在区间 $[x_{n-1}, x_{n+1}]$ 上对问题(1)的微分方程做积分, 则有

$$y(x_{n+1}) - y(x_{n-1}) = \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

对右边的积分应用中矩形求积公式, 则得差分公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n) \\ y_0 = \alpha, \quad n = 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

称为**Euler中点公式**或称**双步Euler公式**. 它属于多步方法.

注: 这类多步方法需要更多的初值信息. 以Euler中点公式为例, 它不能直接计算 $y_1$ 的值, 而需要其他方法来提供起始值 $y_1$ .

在Euler公式和梯形公式中, 为求得 $y_{n+1}$ , 只需用到前一步的值 $y_n$ , 这种差分方法称为**单步方法**, 这是一种自开始方法.

Euler中点公式则不然, 计算 $y_{n+1}$ 时需用到前两步的值 $y_n, y_{n-1}$ , 称其为**两步方法**. 两步以上的方法统称为**多步方法**.

在Euler公式和Euler中点公式中, 需要计算的 $y_{n+1}$ 已被显式表示出来, 称这类差分公式为**显式公式**, 而梯形公式中, 需要计算的 $y_{n+1}$ 隐含在等式两侧, 称其为**隐式公式**.

隐式公式中, 每次计算 $y_{n+1}$ 都需解方程, 要比显式公式需要更多的计算量, 但其计算稳定性较好.

## 几个差分公式的性能对比

公式名称	主要格式	单步or 多步	显式or 隐式	精度
Euler公式	$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$	单步	显式	较差
梯形公式	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$	单步	隐式	较高
Euler中点公式	$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n)$	多步	显式	较高

**例2** 请写出下列初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} - 2y^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

的Euler公式、梯形公式和Euler中点公式.

(假定已对区间 $[0, 2]$ 做等距剖分得到编号为 $n=0, 1, \dots, N$ 的节点)

## 例2答案

解：此时的Euler公式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \left( \frac{1}{1+x_n^2} - 2y_n^2 \right) \\ y_0 = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

梯形公式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left[ \left( \frac{1}{1+x_n^2} - 2y_n^2 \right) + \left( \frac{1}{1+x_{n+1}^2} - 2y_{n+1}^2 \right) \right] \\ y_0 = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

## 例2答案（续）

解: Euler中点公式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_{n-1} + 2h \left( \frac{1}{1+x_n^2} - 2y_n^2 \right) \\ y_0 = 0, \quad n = 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

# 改进的Euler方法

从数值积分的角度来看, 梯形公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \\ y_0 = \alpha, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

的计算精度要比Euler公式好, 但它属于隐式公式, 不便于计算.

注: 由于方程的两端都含有 $y_{n+1}$ 项, 每求一次 $y_{n+1}$ , 相当于解一个(可能是非线性的)方程.

思考: 如何解决上述问题?

非线性方程迭代法的理论启发我们, 可以采用以下策略进行近似计算

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1}^{[0]} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1}^{[k+1]} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{[k]})] \\ \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ y_0 = \alpha, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{array} \right.$$

应用Euler公式提供 $y_{n+1}$ 的初始值. (预估)

再采用梯形公式的框架进行关于 $y_{n+1}$ 值的迭代计算. (校正)

问题: 这种迭代计算是否一定收敛? 收敛的条件是什么?

考察关于 $y_{n+1}$ 的迭代格式

$$y_{n+1}^{[k+1]} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{[k]})]$$

知道其迭代函数为

$$\varphi(y) = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y)]$$

由迭代法理论知道: 当 $\varphi(y)$ 为压缩映射时, 迭代法收敛.

又若假设 $\partial f/\partial y$ 存在, 则当 $|\varphi'(y)| \leq L < 1$ 时, 也即

$$\frac{h}{2} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq L < 1,$$

时, 迭代必然收敛.

或者也可说: 当 $|\partial f/\partial y| \leq L$ 且 $(h/2)L < 1$ 时, 迭代收敛.

注1: 上述条件在理论上不难办到, 只需令剖分步长 $h$ 充分小即可.

注2: 实际计算时, 当  $|y_{n+1}^{[k+1]} - y_{n+1}^{[k]}| < \varepsilon$  时( $\varepsilon$ 是给定的精度要求), 取

$$y_{n+1} = y_{n+1}^{[k+1]}.$$

对于格式

$$\begin{cases} y_{n+1}^{[0]} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1}^{[k+1]} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{[k]})] \\ y_0 = \alpha, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

若关于 $y_{n+1}$ 只迭代**1**步，则得到以下格式

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})] \\ y_0 = \alpha, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

称之为**改进的Euler方法**.  
它属于单步显式方法

# 改进的Euler方法的两种格式

格式1

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})] \\ y_0 = \alpha, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

格式2

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + h, y_n + hK_1) \\ y_0 = \alpha, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

请写出初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y - \frac{2x}{y}, & 0 \leq x \leq 1; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

的Euler公式和改进的Euler方法的格式, 取步长 $h=0.1$ .

(1) Euler公式的格式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = 1.1y_n - \frac{0.2x_n}{y_n} \\ y_0 = 1, \quad n = 0, 1, \dots, 9. \end{cases}$$

(2) 改进的Euler方法的格式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + 0.05(K_1 + K_2) \\ K_1 = y_n - \frac{2x_n}{y_n} \\ K_2 = y_n + 0.1K_1 - \frac{2(x_n + 0.1)}{y_n + 0.1K_1} \\ y_0 = 1, \quad n = 0, 1, \dots, 9. \end{cases}$$

# 问题

改进的Euler方法是否还具有与梯形公式相当的计算精度？

下一节我们将从截断误差的角度来分析这个问题.

# 差分公式的误差分析

在节点 $x_{n+1}$ 处的误差 $y(x_{n+1})-y_{n+1}$ ，不仅与 $y_{n+1}$ 这一步计算有关，而且与前 $n$ 步计算值 $y_n, y_{n-1}, \dots, y_1$ 都有关。

为了简化误差分析，着重研究进行一步计算时产生的截断误差，我们**假设在前 $n$ 步的计算中没有截断误差，也即 $y_n=y(x_n)$** ，这时求得的误差 **$y(x_{n+1})-y_{n+1}$** 称为**局部截断误差**，它可以反映出差分公式的精度。

如果单步差分公式的局部截断误差为 $O(h^{p+1})$ ，则称该公式为 **$p$ 阶方法**。这里 $p$ 为非负整数。显然，**阶数越高，方法的精度越高**。

- 一元Taylor公式
- 二元Taylor公式
- 其他

# 关于Taylor公式

## 一元Taylor公式

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2!}h^2 + \frac{y'''(x_n)}{3!}h^3 + O(h^4)$$

## 二元Taylor公式

$$\begin{aligned} f(x_n + h, y_n + k) &= f(x_n, y_n) + \frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial y} k \\ &+ \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 f(x_n, y_n)}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_n, y_n)}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f(x_n, y_n)}{\partial y^2} k^2 \right] + \dots \\ &+ \frac{1}{k!} \left[ h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right]^k f(x_n, y_n) + \dots \end{aligned}$$

另外, 在 $y_n=y(x_n)$ 的假设条件下, 考虑到 $y'(x)=f(x, y(x))$ , 则有

$$y'(x_n)=f(x_n, y(x_n))=f(x_n, y_n)=f_n$$

$$y''(x_n)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n)y'(x_n)=\frac{\partial f_n}{\partial x}+\frac{\partial f_n}{\partial y}f_n$$

$$y'''(x_n)=\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x\partial y}f_n+\frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}f_n^2+\frac{\partial f_n}{\partial x}\frac{\partial f_n}{\partial y}+(\frac{\partial f_n}{\partial y})^2f_n$$

# 关于Euler公式的局部截断误差分析

Euler公式:  $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + y'(x_n)h$

Taylor公式:  $y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2!}h^2 + O(h^3)$

得到局部截断误差:  $y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{y''(x_n)}{2!}h^2 + O(h^3) = O(h^2)$

局部截断误差为 $O(h^{p+1})$ 的差分公式为 $p$ 阶方法.

此项称为截断误差主项

所以Euler公式是1阶方法.

# 关于改进的Euler方法的局部截断误差分析

改进的Euler方法:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + h, y_n + hK_1) \\ y_0 = \alpha, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

其中

$$K_1 = f(x_n, y_n) = f(x_n, y(x_n)) = y'(x_n)$$

对于 $K_2$ 应用二元Taylor展开公式, 可得

$$\begin{aligned}
 K_2 = f(x_n + h, y_n + hK_1) &= f_n + \frac{\partial f_n}{\partial x} h + \frac{\partial f_n}{\partial y} hK_1 \\
 &+ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f_n}{\partial x \partial y} h^2 K_1 + \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} h^2 K_1^2 \right] + O(h^3)
 \end{aligned}$$

对于  $y(x_{n+1})=y(x_n+h)$ , 由假设  $y(x_n)=y_n$ , 可得

$$y'(x_n)=f(x_n, y(x_n))=f(x_n, y_n)=f_n$$

$$y''(x_n) = \frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y} \cdot f_n = \frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y} \cdot K_1$$

$$y'''(x_n) = \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f_n}{\partial x \partial y} f_n + \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} f_n^2 + \frac{\partial f_n}{\partial x} \frac{\partial f_n}{\partial y} + \left( \frac{\partial f_n}{\partial y} \right)^2 f_n$$

于是

$$\begin{aligned}y(x_{n+1}) &= y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2}h^2 + \frac{y'''(x_n)}{3!}h^3 + O(h^4) \\&= y_n + f_n h + \frac{h^2}{2} \left[ \frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y} f_n \right] \\&\quad + \frac{h^3}{6} \left[ \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f_n}{\partial x \partial y} f_n + \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} f_n^2 + \frac{\partial f_n}{\partial x} \frac{\partial f_n}{\partial y} + \left( \frac{\partial f_n}{\partial y} \right)^2 f_n \right] + O(h^4)\end{aligned}$$

而

$$y_{n+1} = y_n + f_n h + \frac{h^2}{2} \left[ \frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y} f_n \right] + \frac{h^3}{4} \left[ \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f_n}{\partial x \partial y} f_n + \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} f_n^2 \right] + O(h^4)$$

从而得到局部截断误差为： $y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3)$

所以, 改进的Euler方法是2阶方法.

## 思考题

- 试估计梯形公式的局部截断误差. (较难)

# Taylor展开方法

设 $y(x)$ 是初值问题(1)的精确解, 利用Taylor展开式可得

$$\begin{aligned}y(x_{n+1}) &= y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2!}h^2 + \dots + \frac{y^{(p)}(x_n)}{p!}h^p + \frac{y^{(p+1)}(\xi)}{(p+1)!}h^{p+1} \\&= y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2!}f^{(1)}(x_n, y(x_n)) + \dots + \frac{h^p}{p!}f^{(p-1)}(x_n, y(x_n)) + O(h^{p+1})\end{aligned}$$

因此, 可建立节点处近似值 $y_n$ 满足的差分公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!}f^{(1)}(x_n, y_n) + \dots + \frac{h^p}{p!}f^{(p-1)}(x_n, y_n) \\ y_0 = \alpha, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

即为 $p$ 阶Taylor展开方法.

其中

$$f^{(1)}(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} f(x, y)$$

$$f^{(2)}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 f$$

.....

.....

.....

可见, 此公式的局部截断误差为:  $y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^{p+1})$ .

所以此差分公式是 $p$ 阶方法.

**Taylor**展开方法给出了一种构造单步显式高阶方法的途径, 然而由于此方法涉及很多复合函数 $f(x, y(x))$ 的导数的计算, 比较繁琐, 因而很少直接使用.

## 深入思考

设 $y(x)$ 是初值问题(1)的精确解, 由Taylor展开式可得

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(\xi) = y(x_n) + hf(\xi, y(\xi)), \quad x_n \leq \xi \leq x_{n+1}.$$

构造差分方法就是研究如何利用适当的方法来近似计算数值  
 $f(\xi, y(\xi))$ .

回顾Euler方法, 它可写为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hK_1 \\ K_1 = f(x_n, y_n) \end{cases}$$

这相当于用一个函数值 $K_1$ 作为 $f(\xi, y(\xi))$ 的近似.

当 $y(x_n) = y_n$ 时,  $y_{n+1}$ 的表达式与精确解 $y(x_{n+1})$ 的Taylor展式的前两项完全一致, 因此其局部截断误差为

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^2)$$

改进的Euler方法的格式可写为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + h, y_n + hK_1) \end{cases}$$

这相当于用两个函数值 $K_1$ 和 $K_2$ 的线性组合作为 $f(\xi, y(\xi))$ 的近似.

当 $y(x_n)=y_n$ 时,  $y_{n+1}$ 的表达式与精确解 $y(x_{n+1})$ 的Taylor展式的前三项完全一致, 因此其局部截断误差为

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3)$$

这启发我们：

是否可以通过增加计算 $f(x, y)$ 函数值的次数来构造高阶的差分公式？

## Runge-Kutta方法

上一节的讨论启发我们, 可以通过增加计算关于 $f(x, y)$ 的函数值的方法来构造高阶差分格式, 为此我们建立以下公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \dots + \lambda_p K_p) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \alpha_2 h, y_n + h\beta_{21} K_1) \\ \dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ K_P = f(x_n + \alpha_P h, y_n + h \sum_{i=1}^{p-1} \beta_{pi} K_i) \end{cases}$$

其中 $\{\lambda_i, \alpha_i, \beta_{ij}\}$ 为待定参数.此公式为 $p$ 级显式Runge-Kutta方法.

若此公式的局部截断误差为 $O(h^{p+1})$ , 则称其为 **$p$ 阶Runge-Kutta方法**, 简称( $p$ 级) **$p$ 阶R-K方法**.

## $p=2$ 情形的R-K方法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h K_1) \end{cases}$$

由于

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\lambda_1 f_n + h\lambda_2 \left( f_n + \alpha h \frac{\partial f_n}{\partial x} + \beta h f_n \frac{\partial f_n}{\partial y} \right) + O(h^3) \\ &= y_n + h(\lambda_1 + \lambda_2) f_n + h^2 \lambda_2 \left( \alpha \frac{\partial f_n}{\partial x} + \beta f_n \frac{\partial f_n}{\partial y} \right) + O(h^3) \end{aligned}$$

而

$$y(x_{n+1}) = y_n + h f_n + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial f_n}{\partial x} + f_n \frac{\partial f_n}{\partial y} \right) + O(h^3)$$

所以, 只要令  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ,  $\alpha \lambda_2 = 1/2$ ,  $\beta \lambda_2 = 1/2$ , 即可使局部截断误差达到  $O(h^3)$ .

若取 $\alpha=1$ , 则得 $\lambda_1=\lambda_2=1/2$ ,  $\beta=1$ , 此时公式形如

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + h, y_n + hK_1) \end{cases}$$

这就是**改进的Euler公式**;

若取 $\lambda_1=0$ , 则得 $\lambda_2=1$ ,  $\alpha=\beta=1/2$ , 此时公式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hK_2 \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_1) \end{cases}$$

称之为**中点公式**, 或可写为

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n))$$

一般地, 以上确定的一族差分公式统称为(二级)二阶R-K方法.  
高阶R-K公式可类似推导.

常用的三阶、四阶R-K公式.

## 三阶R-K公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_1) \\ K_3 = f(x_n + h, y_n - hK_1 + 2hK_2) \end{cases}$$

## 四阶标准R-K公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_1) \\ K_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_2) \\ K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3) \end{cases}$$

例 用四阶标准R-K方法求初值问题

$$\begin{cases} y' = y - 2x/y, & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的数值解, 取步长 $h=0.2$ .

解 四阶标准R-K公式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = y_n - 2x_n / y_n \\ K_2 = y_n + \frac{1}{2}hK_1 - (2x_n + h) / (y_n + \frac{1}{2}hK_1) \\ K_3 = y_n + \frac{1}{2}hK_2 - (2x_n + h) / (y_n + \frac{1}{2}hK_2) \\ K_4 = y_n + hK_3 - 2(x_n + h) / (y_n + hK_3) \end{cases}$$

计算结果如下:

$n$	$x_n$	$y_n$	$y(x_n)$		$n$	$x_n$	$y_n$	$y(x_n)$
0	0.0	1.00	1.00		3	0.6	1.4833	1.4832
1	0.2	1.1832	1.1832		4	0.8	1.6125	1.6125
2	0.4	1.3417	1.3416		5	1.0	1.7321	1.7321

# 隐式Runge-Kutta方法

隐式R-K方法一般形式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \sum_{r=1}^p \lambda_r K_r \\ K_r = f\left(x_n + \alpha_r h, y_n + h \sum_{i=1}^r \lambda_{ri} K_i\right), \quad r = 1, 2, \dots, p. \end{cases}$$

称之为**p级隐式R-K方法**.

例如, 梯形公式就可以写成一个二级隐式R-K方法:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} h (K_1 + K_2) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + h, y_n + \frac{1}{2} h K_1 + \frac{1}{2} h K_2) \end{cases}$$

它是一个2阶方法.

但是 $p$ 级隐式R-K方法的阶可以大于 $p$ , 例如, 一级隐式中点公式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hK_1 \\ K_1 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_1) \end{cases}$$

或写为

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{1}{2}h, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1}))$$

它是2阶方法.

隐式R-K方法的计算一般每步均需要求解(可能是非线性的)方程组, 计算量较大, 但隐式方法的数值稳定性较好.

## 变步长Runge-Kutta方法

一些常微分方程初值问题的解在求解区域内变化程度差别很大. 如果在整个区域上统一使用大步长可能达不到精度要求, 而使用小步长又可能浪费计算量, 还会导致舍入误差累积的增加. 这就要求根据解的性态来调整步长的大小: 在变化平缓的部分, 数值求解可以使用较大步长; 而在变化剧烈的部分, 则使用较小的步长, 其目的是在保证精度的前提下尽可能减少计算量. 因此有必要讨论变步长的差分方法.

以下以 $p$ 阶R-K方法为例简单介绍变步长差分方法的误差估计问题.

设从 $x_n$ 以步长 $h$ 计算 $y(x_{n+1})$ 的近似值为 $y_{n+1}^{(h)}$  , 并假设局部截断误差为

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{(h)} = Ch^{p+1}$$

其中,  $C$ 是与 $h$ 无关的常数.

如果将步长减半, 取 $h/2$ 为步长, 从 $x_n$ 经两步计算得到 $y(x_{n+1})$ 的近似值记为 $y_{n+1}^{(\frac{h}{2})}$  , 其局部截断误差为:

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{(\frac{h}{2})} \approx 2C\left(\frac{h}{2}\right)^{p+1} = \frac{1}{2^p} Ch^{p+1}$$

于是有

$$\frac{y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{(\frac{h}{2})}}{y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{(h)}} \approx \frac{1}{2^p}$$

从而, 得到事后误差估计

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{(\frac{h}{2})} \approx \frac{1}{2^p - 1} (y_{n+1}^{(\frac{h}{2})} - y_{n+1}^{(h)})$$

可见, 当  $|y_{n+1}^{(\frac{h}{2})} - y_{n+1}^{(h)}| \leq \varepsilon$  成立时, 可取  $y(x_{n+1}) \approx y_{n+1}^{(\frac{h}{2})}$ , 否则应将步长再次减半进行计算, 直至满足精度要求. 然后再进行下一步的计算及相应步长的选择.

# 单步方法的收敛性

求解初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), & a \leq x \leq b; \\ y(a) = \alpha. \end{cases}$$

的单步显式方法可以统一写为如下形式

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h),$$

其中 $\Phi(x, y, h)$ 称为**增量函数**.

不同的单步方法对应着不同的增量函数.

对于Euler方法, 有

$$\Phi(x, y, h) = f(x, y).$$

对于改进的Euler方法, 有

$$\Phi(x, y, h) = \frac{1}{2} [f(x, y) + f(x + h, y + hf(x, y))]$$

类似地可写出与各阶R-K方法相应的增量函数.

对于任意给定的点 $x_n$ , 用(单步)差分方法求出精确解 $y(x_n)$ 的似解 $y_n$ , 当步长 $h$ 充分小时,  $y_n$ 能否逼近 $y(x_n)$ ? 这就是收敛性问题.

**定义8.1** 设 $y(x)$ 是初值问题(1)的解,  $y_n$ 是某(单步)差分方法产生的近似解. 如果对任意固定的点 $x_n$ , 均有

$$\lim_{h \rightarrow 0} y_n = y(x_n),$$

则称**此(单步)差分方法是收敛的**.

**注1:** 可见, 单步方法收敛的**等价条件**是:  $y(x_n) - y_n = e_n \rightarrow 0$  (当 $h \rightarrow 0$ 时).

**注2:** 此时所指的 $e_n = y(x_n) - y_n$ , 不仅与 $y_n$ 这一步计算有关, 而且与前 $n$ 步计算值 $y_{n-1}, \dots, y_1, y_0$ 都有关, 称为**整体截断误差**. **这一条件与在局部截断误差的定义中的条件是不同的**.

**注3:** 上述关于收敛性的定义也适用于单步隐式方法和多步方法.

注: 本章中涉及到的两种收敛性的定义是不同的.

## (1) 关于微分方程初值问题的差分方法数值解的收敛

$y(x_n)$ 代表在点 $x_n$ 的精确值,  $y_n$ 代表差分方法在点 $x_n$ 的计算值. 差分方法的“数值解收敛”是指近似值与精确值满足下述关系: 对于任意的 $x_n, n=0, 1, \dots, N$ , 有

$$\lim_{h \rightarrow 0} y_n = y(x_n)$$

$h$ 代表剖分步长

此收敛不是彼收敛!

## (2) 梯形公式关于计算值 $y_{n+1}$ 的迭代计算的收敛

$$\begin{cases} y_{n+1}^{[0]} = y_n + hf(x_n, y_n) & \text{预估} \\ y_{n+1}^{[k+1]} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{[k]})] \\ k = 0, 1, 2, \dots & \text{校正} \\ y_0 = \alpha, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

此时的“迭代收敛”是指:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n+1}^{[k]} = y_{n+1}$$

$k$ 代表迭代步数

**定理8.1** 设某单步方法满足以下条件:

- 1) 它是 $p$ 阶方法( $p \geq 1$ ), 也即其局部截断误差为 $O(h^{p+1})$ ;
- 2) 增量函数 $\Phi(x, y, h)$ 在区域 $\{a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty, 0 \leq h \leq h_0\}$ 上连续, 且关于 $y$ 满足Lipschitz条件, 也即存在常数 $L > 0$ , 使

$$|\Phi(x, y, h) - \Phi(x, \bar{y}, h)| \leq L|y - \bar{y}|, \quad \forall y, \bar{y},$$

- 3) 初值是精确的, 即 $y_0 = y(a) = \alpha$ ;

则此单步方法是收敛的, 且存在与 $h$ 无关的常数 $C$ , 使

$$|y(x_n) - y_n| \leq Ch^p.$$

证明: 因为单步方法

$$y_{n+1}=y_n+h\Phi(x_n, y_n, h),$$

是 $p$ 阶方法, 故 $y(x)$ 满足

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+h\Phi(x_n, y(x_n), h)+R_n(h),$$

其中局部截断误差 $|R_n(h)|\leq C_1 h^{p+1}$ .

记 $e_n=y(x_n)-y_n$ , 则有

$$e_{n+1}=e_n+h[\Phi(x_n, y(x_n), h)-\Phi(x_n, y_n, h)]+R_n(h).$$

由Lipschitz条件得

$$|\Phi(x_n, y(x_n), h)-\Phi(x_n, y_n, h)|\leq L|y(x_n)-y_n|=L|e_n|.$$

因此

$$|e_{n+1}|\leq(1+hL)|e_n|+C_1 h^{p+1}.$$

递推得到

$$\begin{aligned}|e_n| &\leq (1+hL)^n |e_0| + C_1 h^{p+1} \sum_{i=0}^{n-1} (1+hL)^i \\ &\leq (1+hL)^n |e_0| + \frac{C_1 h^{p+1}}{hL} [(1+hL)^n - 1]\end{aligned}$$

注意到

$$1+hL \leq e^{hL}, (1+hL)^n \leq e^{nhL} \leq e^{L(b-a)},$$

则有

$$|e_n| \leq |e_0| e^{L(b-a)} + \frac{C_1 h^p}{L} [e^{L(b-a)} - 1]$$

由于  $e_0 = y(a) - y_0 = 0$ , 所以有

$$|e_n| \leq \frac{C_1 h^p}{L} [e^{L(b-a)} - 1] = Ch^p$$

证毕.

**例1** 对于初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), & a \leq x \leq b; \\ y(a) = \alpha. \end{cases}$$

设 $f(x, y)$ 连续且关于 $y$ 满足Lipschitz条件, 请分析Euler方法的收敛性.

解: 由于Euler方法的格式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_0 = \alpha, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

它是1阶方法. 其增量函数 $\Phi(x, y, h) = hf(x, y)$ ,

因此增量函数 $\Phi(x, y, h)$ 连续, 并关于 $y$ 满足Lipschitz条件;

另外由于 $y_0 = y(a)$ , 初值也是精确的, 根据定理8.1, 此时Euler方法收敛.

且由定理8.1可知, 此时Euler方法的整体截断误差满足条件:

$$|e_n| = |y(x_n) - y_n| \leq Ch.$$

## 例2 对于初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), & a \leq x \leq b; \\ y(a) = \alpha. \end{cases}$$

设 $f(x, y)$ 连续且关于 $y$ 满足Lipschitz条件, 请分析改进的Euler方法的收敛性.

解: 由于改进的Euler方法的格式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + h, y_n + hK_1) \\ y_0 = \alpha, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

将其改写为:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))] \\ y_0 = \alpha, \end{cases} \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

它是2阶方法, 且可见其增量函数为

$$\Phi(x, y, h) = \frac{1}{2} [f(x, y) + f(x + h, y + hf(x, y))].$$

显然它是关于 $x$ 和 $y$ 的连续函数, 并且对于 $\forall y, \bar{y}$ , 均有

$$\begin{aligned} |\Phi(x, y, h) - \Phi(x, \bar{y}, h)| &= \frac{1}{2} |f(x, y) + f(x + h, y + hf(x, y)) \\ &\quad - [f(x, \bar{y}) + f(x + h, \bar{y} + hf(x, \bar{y}))]| \\ &= \frac{1}{2} |f(x, y) - f(x, \bar{y}) + f(x + h, y + hf(x, y)) - \\ &\quad f(x + h, \bar{y} + hf(x, \bar{y}))| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2} \{ |f(x, y) - f(x, \bar{y})| + |f(x+h, y+hf(x, y)) - f(x+h, \bar{y}+hf(x, \bar{y}))| \} \\
&\leq \frac{1}{2} \{ L|y - \bar{y}| + L|y + hf(x, y) - (\bar{y} + hf(x, \bar{y}))| \} \\
&= \frac{1}{2} \{ L|y - \bar{y}| + L|y - \bar{y} + hf(x, y) - hf(x, \bar{y})| \} \\
&\leq \frac{1}{2} \{ L|y - \bar{y}| + L|y - \bar{y}| + Lh|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \} \\
&\leq \frac{1}{2} \{ L|y - \bar{y}| + L|y - \bar{y}| + L^2h|y - \bar{y}| \} \\
&= \frac{1}{2} L(2 + Lh)|y - \bar{y}| \leq \frac{1}{2} L(2 + Lh_0)|y - \bar{y}|,
\end{aligned}$$

也即当 $h \leq h_0$ 时,  $\Phi(x, y, h)$ 关于 $y$ 满足常数为 $\frac{1}{2}L(2 + h_0L)$ 的Lipschitz条件;

又由其初值满足

$$y_0 = \alpha = y(a).$$

于是根据定理8.1可知, 此时, 改进的Euler方法是收敛的, 且其整体截断误差满足

$$|e_n| = |y(x_n) - y_n| \leq Ch^2.$$

类似地可验证其他各阶R-K方法的收敛性.

## 单步方法的稳定性

在关于收敛性的讨论中，我们总是假设没有发生舍入误差，但实际情形并非如此. 例如，初始数据可能存在误差，计算过程中也会不可避免地产生舍入误差，这些误差的传播和积累都会对数值计算的精确程度造成影响. 实际计算的数值解能否作为精确解的近似，取决于计算误差是否可控制，这就涉及到数值方法稳定性的概念.

收敛性反映差分公式本身的截断误差对数值解的影响；稳定性反映计算过程中舍入误差对数值解的影响. 只有既收敛又稳定的差分公式才有实用价值.

# 符号表示

符号	含义	是否考虑误差
$y(x_n)$	$x_n$ 处的精确值	无误差
$y_n$	$x_n$ 处的(理论)计算值 即手动计算解	只考虑截断误差的影响 不考虑舍入误差的影响
$\tilde{y}_n$	$x_n$ 处的(实际)计算值 即计算机计算解	考虑舍入误差的影响

**定义8.2** 对于某给定的初值问题, 取定步长 $h$ , 用某差分方法进行计算时, 假设只在一个节点值 $y_n$ 上产生计算误差 $\delta_n$ (即 $\delta_n = \tilde{y}_n - y_n$ ), 如果这个误差引起的以后各节点计算值 $y_m (m > n)$ 的变化 $\delta_m$ (即 $\delta_m = \tilde{y}_m - y_m$ )均不超过 $\delta_n$ , 则称此差分方法是**绝对稳定的**.

讨论数值方法的稳定性, 通常仅限于典型的**试验方程**

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y$$

其中 $\lambda$ 是复数且 $\text{Re}(\lambda) < 0$ .

在复平面上, 当某方法绝对稳定时要求变量 $\lambda h$ **满足的区域**称为此方法的**绝对稳定域**, 绝对稳定域与实轴的交集称为**绝对稳定区间**.

## 补充：关于单步方法绝对稳定的另一定义

**定义8.3** 将单步方法用于解试验方程, 得到递推关系式:

$$y_{n+1}=E(\lambda h)y_n,$$

若满足条件

$$|E(\lambda h)|<1,$$

则称此单步方法是**绝对稳定的**.

在复平面上关于变量 $\lambda h$ 满足 $|E(\lambda h)|<1$ 的区域称为此方法的**绝对稳定域**, 它与实轴的交集称为**绝对稳定区间**.

**注:** 在上述定义中**规定** $|E(\lambda h)|<1$ , 而不是 $|E(\lambda h)|\leq 1$ , 是为了和线性多步方法的绝对稳定性定义一致. 事实上, **对于单步方法, 当** $|E(\lambda h)|=1$ **时也可以认为误差没有增长(即稳定的).**

**例1** 试推导将Euler方法应用于求解试验方程

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y$$

时的绝对稳定域和绝对稳定区间.

解: Euler方法此时的格式为

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n,$$

可得递推关系:

$$y_{n+1} = (1 + \lambda h)y_n.$$

假设只在计算 $y_n$ 时有舍入误差 $\delta_n$ (即 $\tilde{y}_n = y_n + \delta_n$ ), 则计算 $y_{n+1}$ 时产生的误差 $\delta_{n+1}$ 必然是只由 $\delta_n$ 引起的, 易见 $\delta_{n+1}$ 与 $\delta_n$ 二者间存在关系

$$\delta_{n+1} = (1 + \lambda h)\delta_n.$$

类似地可推得计算每个 $y_m(m>n)$ 时产生的误差 $\delta_m$ 与 $\delta_n$ 之间的关系为:

$$\delta_m = (1 + \lambda h) \delta_{m-1} = \dots = (1 + \lambda h)^{m-n} \delta_n.$$

若要

$$|\delta_m| < |\delta_n|,$$

教师做详细解释

必须且只需

$$|1 + \lambda h| < 1.$$

因此, Euler方法的绝对稳定域是 $|1 + \lambda h| < 1$ 所确定的( **$\lambda h$ 所在的**)区域,  
即, **Euler方法的绝对稳定域** =  **$\{\lambda h \mid |1 + \lambda h| < 1\}$** .

它是复平面上以-1为中心以1为半径的一个圆域.

Euler方法的绝对稳定区间是 $(-2, 0)$ .

对隐式单步方法也可类似地讨论稳定性.

**例** 试推导将梯形公式应用于求解试验方程

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y$$

时的绝对稳定域和绝对稳定区间.

解: 梯形公式此时的格式为:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (\lambda y_n + \lambda y_{n+1})$$

可得递推关系:

$$y_{n+1} = \frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}} y_n$$

与前面的分析完全类似, 可得绝对稳定条件为

$$\left| \frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}} \right| < 1$$

更进一步, 若设

$$\frac{1}{2} \lambda h = a + bi$$

则

$$\left| \frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}} \right| = \left| \frac{1 + a + bi}{1 - a - bi} \right| = \frac{\sqrt{(1+a)^2 + b^2}}{\sqrt{(1-a)^2 + b^2}}$$

因此, 绝对稳定条件的等价条件为:  $\text{Re}(\lambda h) < 0$ .

于是梯形公式的绝对稳定域为  $\text{Re}(\lambda h) < 0$  所确定的 ( $\lambda h$  所在的) 区域, 它是复平面的左半平面. **即, 梯形公式的稳定域 =  $\{\lambda h \mid \text{Re}(\lambda h) < 0\}$ .**

梯形公式的稳定区间为:  $(-\infty, 0)$ .

由于 $\text{Re}(\lambda) < 0$ , 所以梯形公式的稳定条件对任意步长 $h$ 恒成立.  
这是隐式公式的优点.

**思考:** 请从隐式公式的格式特点入手, 分析隐式公式具有较好稳定性的原因.

## 一些常用差分方法的绝对稳定区间

方 法	方法的阶数	稳 定 区 间
Euler方法	1	$(-2, 0)$
梯形方法	2	$(-\infty, 0)$
改进Euler方法	2	$(-2, 0)$
二阶R-K方法	2	$(-2, 0)$
三阶R-K方法	3	$(-2.51, 0)$
四阶R-K方法	4	$(-2.78, 0)$

**例** 考虑初值问题 
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -300y, & 0 \leq x \leq 1; \\ y(0) = 1/3. \end{cases}$$

试用不同的步长 $h$ , 采用Euler公式计算 $y(1)$ 的近似值.

[精确解 $y(x)=(1/3)e^{-300x}$ ]

**解:** 此问题的Euler公式为:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \lambda h y_n \\ y_0 = \alpha, \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

在题设条件下, 取步长 $h=0.1$ 时, Euler公式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = -29y_n \\ y_0 = 1/3, \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

若取 $y_0=1/3$ , 手动计算可得关于 $y(1)$ 的计算解 $y_{10}$ 为:

$$y_{10}=(-29)^{10} \times 1/3=1.4023574 \times 10^{14},$$

若取 $y_0=0.3333$ , 在计算机上(Matlab系统中)采用Euler公式得到计算解 $\tilde{y}_{10}$ 为:

$$\tilde{y}_{10}=1.4022172 \times 10^{14},$$

精确值为:  $y(1)=1.716066 \times 10^{-131}$ .

理论计算与实际计算结果相差很大, 并且计算结果均严重失真! 😞

思考1: 计算失真的原因?

思考2: 能否改善计算严重失真的情况?

# 分析

理论计算解 $y_{10}$ 产生误差的原因在于:  $h$ 比较大, 因而截断误差较大.

实际计算解 $\tilde{y}_{10}$ 与理论计算解 $y_{10}$ 的差别较大的原因在于:

$$\lambda h = -30 \notin (-2, 0)$$

也即不满足稳定条件. 因此舍入误差的累计影响太大造成计算严重失真.

改善这一情况的思路: 减小步长 $h$ .

若取 $h=0.01$ , Euler公式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = -2y_n \\ y_0 = 1/3, \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

取 $y_0=1/3$ , 手动计算得 $y(1)$ 的理论计算解为

$$y_{100}=(-2)^{100} \times 1/3=4.225502 \times 10^{29}.$$

取 $y_0=0.3333$ , 经计算机计算得实际计算解为

$$\tilde{y}_{100}=4.2255087 \times 10^{29}.$$

理论计算与实际计算结果仍然相差很大, 计算严重失真! 😞

精确值为:  $y(1)=1.716066 \times 10^{-131}$ .

# 分析

理论计算解 $y_{100}$ 产生误差的原因在于:  $h$ 仍然比较大, 因而截断误差较大.

实际计算解 $\tilde{y}_{100}$ 与理论计算解 $y_{100}$ 的差别较大的原因在于:

$$\lambda h = -3 \notin (-2, 0)$$

也即此时仍不满足稳定条件. 因此舍入误差的累计仍然太大, 造成计算严重失真.

改善思路: 继续减小步长 $h$ .

若取 $h=0.001$ , 计算公式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = 0.7 y_n \\ y_0 = 1/3, \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

取 $y_0=1/3$ , 手动计算得 $y(1)$ 的理论计算解为

$$y_{1000} = (0.7)^{1000} \times 1/3 = 4.177522 \times 10^{-156}.$$

取 $y_0=0.3333$ , 经计算机计算得实际计算解为

$$\tilde{y}_{1000} = 4.177104 \times 10^{-156}.$$

理论计算与实际计算结果相差不大, 但与真解相比仍有较大误差! 😞

精确值为:  $y(1) = 1.716066 \times 10^{-131}$ .

# 分析

理论计算解 $y_{1000}$ 产生误差的原因在于： $h$ 仍然比较大，因而截断误差较大.

实际计算解 $\tilde{y}_{1000}$ 与理论计算解 $y_{1000}$ 的差别不大的原因在于：

$$\lambda h = -0.3 \in (-2, 0)$$

也即此时满足稳定条件. 因此舍入误差的累计可被控制, 影响不大.

改善思路: 继续减小步长 $h$ .

若取 $h=0.0001$ , 计算公式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = 0.97 y_n \\ y_0 = 1/3, \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

取 $y_0=1/3$ , 手动计算得 $y(1)$ 的理论计算解:

$$y_{10000} = (0.97)^{10000} \times 1/3 = 1.738687 \times 10^{-133}.$$

取 $y_0=0.3333$ , 经计算机计算得实际计算解

$$\tilde{y}_{10000} = 1.738513 \times 10^{-133}.$$

理论计算与实际计算结果相差不大, 计算结果开始接近精确值. 😊

精确值为:  $y(1) = 1.716066 \times 10^{-131}$ .

# 分析

理论计算解 $y_{10000}$ 误差不大的原因在于:  $h$ 比较小, 因而截断误差比较小.

实际计算解 $\tilde{y}_{10000}$ 与理论计算解 $y_{10000}$ 的差别不大的原因在于:

$$\lambda h = -0.03 \in (-2, 0)$$

也即此时满足稳定条件. 因此舍入误差的累计可被控制, 影响不大.

改善思路: 还可以继续减小步长 $h$ .

若取 $h=0.00001$ , 计算公式为

此时 $\lambda h=-0.003 \in (-2,0)$   
满足稳定条件

$$\begin{cases} y_{n+1} = 0.997 y_n \\ y_0 = 1/3, \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

取 $y_0=1/3$ , 手动计算得 $y(1)$ 的理论计算解为

$$y_{100000} = (0.997)^{100000} \times 1/3 = 1.093225 \times 10^{-131}.$$

取 $y_0=0.3333$ , 经计算机计算得实际计算解为

$$\tilde{y}_{100000} = 1.096406 \times 10^{-131}.$$

理论计算与实际计算结果相差不大, 且计算结果接近精确值. 😊

精确值为:  $y(1)=1.716066 \times 10^{-131}$ .

若取 $h=0.000001$ , 计算公式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = 0.9997 y_n \\ y_0 = 1/3, \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

此时 $\lambda h = -0.0003 \in (-2, 0)$

满足稳定条件

取 $y_0=1/3$ , 手动计算得 $y(1)$ 的理论计算解为

$$y_{1000000} = (0.9997)^{1000000} \times 1/3 = 1.640540 \times 10^{-131}.$$

取 $y_0=0.3333$ , 经计算机计算得实际计算解为

$$\tilde{y}_{1000000} = 1.6403767 \times 10^{-131}.$$

理论计算与实际计算结果接近, 并且计算结果非常接近精确值. 😊

精确值为:  $y(1) = 1.716066 \times 10^{-131}$ .

思考题: 实际计算时, 步长 $h$ 太小有无弊端?

隐式方法的优越性在于: 可以任意选取步长 $h$ . 既很容易达到稳定条件, 又不耗费太大的计算量.

## 线性多步方法

单步方法是自开始方法, 计算简便, 但一般精度较低. 精度较高的一些单步方法, 譬如四阶R-K方法需要计算四次函数值, 计算量较大.

由于在计算 $y_{n+1}$ 时已经知道 $y_n, y_{n-1}, \dots$ , 及 $f(x_n, y_n), f(x_{n-1}, y_{n-1}), \dots$ , 如果能否充分利用这些信息, 就可望构造出精度高、计算量小的差分公式, 这就是线性多步方法.

## 利用待定参数法构造线性多步方法

$r+1$ 步线性多步方法的一般形式为

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^r \alpha_i y_{n-i} + h \sum_{i=-1}^r \beta_i f_{n-i}.$$

当 $\beta_{-1} \neq 0$ 时, 公式为隐式公式, 反之为显式公式.

参数 $\{\alpha_i, \beta_i\}$ 的选择原则是使方法的局部截断误差(尽可能地, 至少)为

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^{r+2}).$$

**注:** 这里, 局部截断误差 $y(x_{n+1}) - y_{n+1}$ 是指在 $y(x_{n-i}) = y_{n-i}$ ,  $y'(x_{n-i}) = f_{n-i}$ ,  $i=0, 1, \dots, r$ 的假设前提下的截断误差.

**例8-5** 选取参数 $\alpha, \beta_0, \beta_1, \beta_2$ , 使三步方法

$$y_{n+1} = \alpha y_n + h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n-1} + \beta_2 f_{n-2})$$

为三阶方法.

**解** 设 $y(x_n) = y_n, y(x_{n-1}) = y_{n-1}, y(x_{n-2}) = y_{n-2}$ , 则有

$$f_n = f(x_n, y(x_n)) = y'(x_n),$$

$$f_{n-1} = f(x_{n-1}, y(x_{n-1})) = y'(x_{n-1}) = y'(x_n - h)$$

$$= y'(x_n) - hy''(x_n) + \frac{1}{2}h^2 y'''(x_n) - \frac{1}{6}h^3 y^{(4)}(x_n) + O(h^4)$$

$$f_{n-2} = f(x_{n-2}, y(x_{n-2})) = y'(x_{n-2}) = y'(x_n - 2h)$$

$$= y'(x_n) - 2hy''(x_n) + 2h^2 y'''(x_n) - \frac{4}{3}h^3 y^{(4)}(x_n) + O(h^4)$$

于是有

$$y_{n+1} = \alpha y(x_n) + h(\beta_0 + \beta_1 + \beta_2)y'(x_n) - h^2(\beta_1 + 2\beta_2)y''(x_n) \\ + h^3\left(\frac{1}{2}\beta_1 + 2\beta_2\right)y'''(x_n) - \frac{1}{6}h^4(\beta_1 + 8\beta_2)y^{(4)}(x_n) + O(h^5),$$

而

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{1}{2}h^2y''(x_n) + \frac{1}{6}h^3y'''(x_n) \\ + \frac{1}{24}h^4y^{(4)}(x_n) + O(h^5).$$

比较系数可知, 若使  $y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^4)$ , 只需  $\alpha, \beta_0, \beta_1, \beta_2$  满足:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha=1, \\ \beta_0+\beta_1+\beta_2=1, \\ \beta_1+2\beta_2=-1/2, \\ (1/2)\beta_1+2\beta_2=1/6, \end{array} \right.$$

解之得:

$$\alpha = 1, \quad \beta_0 = \frac{23}{12}, \quad \beta_1 = -\frac{4}{3}, \quad \beta_2 = \frac{5}{12}$$

于是得到三步三阶显式差分公式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2})$$

**注:** 关于此差分公式的局部截断误差主项, 由于此时

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) - y_{n+1} &= \frac{1}{24}h^4y^{(4)}(x_n) + \frac{1}{6}h^4(\beta_1 + 8\beta_2)y^{(4)}(x_n) + O(h^5) \\ &= \frac{3}{8}h^4y^{(4)}(x_n) + O(h^5). \end{aligned}$$

因此**局部截断误差主项**为:  $(3/8)h^4y^{(4)}(x_n)$ .