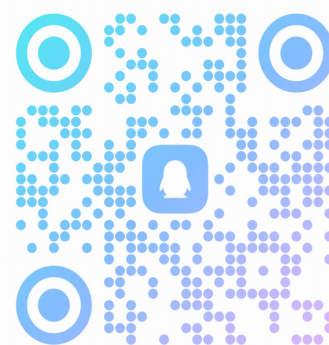


东北大学研究生院考试试卷 (闭卷)

2023-2024学年 秋季学期

课程名称: 数值分析(A)



一、简答题(每题5分, 共30分)

1. 建立一种稳定的递推算法计算定积分 $I_n = \int_0^1 \frac{x^n+1}{4x+1} dx$ 的值, 并说明算法稳定的理由。

2. 利用平方根法求下列线性方程组的解

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

3. 设 $l_0(x), l_1(x), \dots, l_6(x)$ 是以 x_0, x_1, \dots, x_6 为节点的6次Lagrange插值基函数, 求

$$\sum_{j=0}^6 (x_j - x)^4 l_j(x) \text{ 的值.}$$

4. 某旧书一页上印有积分为 $I = \int_{-2}^2 (3x^2 - 4)(ax + b) dx$, 符号a, b处的数字已无法辨认, 试计算积分 I 的值, 并说明理由。

5. 已知 $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 计算 $\text{Cond}_2(A)$ 的值并估计 $\|Ax\|$ 。

6. 设 $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$, 证明: $\frac{d}{dx} f[a, x] = f[a, x, x]$.

二、解答题(10分)

已知 $y=f(x)$ 的函数值表

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	4.9	7.3	11.9	13.4	15.5	20.1	24.3	36.7	41.6

利用如上数据, 请选用至少两种复化求积公式求 $\int_0^8 f(x) dx$ 的近似值。

三、解答题(10分)

试确定 A_0, A_1, x_0, x_1 的值, 使如下公式为高斯型求积公式

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x) dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1).$$

四、解答题(10分)

试确定三次插值多项式 $H_3(x)$, 使其满足 $H_3(1) = f(1) = 1$, $H_3(2) = f(2) = 0$,

$H_3(3) = f(3) = -1$, $H_3'(2) = f'(2) = 2$, 并写出插值余项。

总分	一	二	三	四	五	六	七	八

五、解答题(10分)

设函数 $f(x)$ 在其零点附近充分光滑, 请写出求解 $f(x)=0$ 的 m 重根 α 的含参牛顿迭代格式, 给出此迭代方法是二阶收敛的条件, 并加以证明。

六、解答题(10分)

给定线性方程组 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$, 考虑如下迭代格式

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = (1-\omega)x^{(k)} + \frac{\omega(5-y^{(k)})}{3} \\ y^{(k+1)} = (1-\omega)y^{(k)} + \frac{\omega(-6-x^{(k)})}{3} \end{cases}$$

试确定实参数 ω 的取值范围, 使迭代格式对任意初始向量都收敛。

七、解答题(10分)

已知一组实验数据

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	2	2.5	4	6	6.5
ρ_i	1	2	1	3	2

用最小二乘方法求线性拟合曲线。

八、解答题(10分)

对于一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y(x)), & a \leq x \leq b, \\ y(a) = \alpha. \end{cases}$$

(1)试写出如上方程有解的充分条件。

(2)证明: 求解上述初值问题的差分方法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}h(K_1 + K_2) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hK_1\right) \\ y_0 = \alpha \end{cases}$$

是2阶方法。