东北大学研究生院考试试卷

2009 —2010 学年第 一 学期

课程名称： 数值分析(A)

总分	一（1—8）	一（9-10）	二	三	四	五	六

一、解答下列各题：（每题 5 分，共 50 分）

1．设近似值 $x=321.235$ 近似 x^* 具有 5 位有效数字，求 x 的相对误差限。

2．用 LU 分解法求方程组 $\begin{pmatrix}2&1&3\\4&5&1\\6&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$ 的解。

3．解线性方程组的迭代格式 $x^{(k+1)}=Mx^{(k)}+g$，$k=0,1,2,\ldots$ 是否收敛，为什么？其中 $M=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&4&1\\0&2&3\end{pmatrix}$。

4．求简单迭代法 $x_{k+1}=\dfrac{x_k}{2}+\dfrac{1}{x_k}$，$(k=0,1,2,\ldots)$ 的收敛阶。

5．求满足条件 $f(0)=0, f(1)=1, f(2)=0, f'(1)=0$ 的三次插值多项式 $H_3(x)$ 的表达式。

6. 设求积公式 $\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$ 是插值型求积公式，求 $\sum_{k=0}^{n}A_k$.

7．求区间[－1，1]上权函数为 $\rho(x)=x^2$ 的二次正交多项式 $P_2(x)$。

8．设 $f(x)=5x^3-x^2+3$，求差商 $f[0,1], f[7,6,3,5], f[3,1,2,6,4]$。

密 封 线

9. 给定离散数据

x_i	-1	0	1	2
y_i	3	1	2	4

试求形如 $y=a+bx^2$ 的拟合曲线。

10. 求解初值问题 $\begin{cases} y'=ye^x & 1\le x\le 2 \\ y(1)=2 \end{cases}$ 的改进 Euler 方法是否收敛？为什么？

二、(11 分) 用 Jacobi 法解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1+3x_2+x_3=2 \\ 2x_1+x_2+4x_3=3 \end{cases}$，取 $x^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，若使 $\|x^{(k)}-x^*\|_1<10^{-5}$，问应迭代多少步？

三、(11 分) 说明方程 $x=x^3-5$ 在区间[1, 2]内有唯一根，并建立一个收敛的迭代格式，使对任意初值 $x_0\in[1,2]$ 都收敛，说明收敛理由。

四、(11 分) 利用复化 Simpson 公式 S_n 计算定积分 $I=\int_0^1 \sin x dx$ 若使 $|I-S_n|<10^{-5}$，问应取 n 为多少？并求此近似值。

密 封 线

五、（11 分）已知求解常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \quad x \in [a,b] \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

的差分公式：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{3}(k_1 + 2k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \dfrac{3}{4}h, y_n + \dfrac{3}{4}hk_1) \\ y_0 = \alpha \end{cases}$$

求此差分公式的阶。

六、(6 分)利用 Lagrange 基函数性质，证明：$\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{i^k}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (i-j)} = 0$，$k = 1,2,\dots,n-2$。