

## 第十六届“华中杯”大学生数学建模挑战赛题目

### C 题 基于光纤传感器的平面曲线重建算法建模

光纤传感技术是伴随着光纤及光通信技术发展起来的一种新型传感器技术。它是以光波为传感信号、光纤为传输载体来感知外界环境中的信号，其基本原理是当外界环境参数发生变化时，会引起光纤传感器中光波参量（如波长、相位、强度等）的变化，即外界信号变化会对光信号产生调制。

光纤传感器具有质地轻、体积小、弯曲性能好，抗电磁干扰能力强，灵敏度高，易于安装使用等优点。光纤传感技术最重要的是实时获得结构实时应变信息，再通过解调出来的应变参数来重构得到结构的形变或位移。

光纤传感器已在许多领域有实际应用，比如能够对结肠部位进行形状重建等。通过光纤传感器解调系统解调出来的应变信息，间接求出曲率等信息，并基于离散曲率信息对曲线进行重构。



图 1. 光纤初始状态示意图



图 2. 光纤在平面内受外力作用变形后示意图

为了便于波长测量，在生产光纤时，已在等间距位置布设好传感器，本次传感器间距为 0.6 米。在测量时，先在光纤水平状态（即初始状态如图 1 所示）测量各个传感器位置处信号的波长，然后在受到外力后（如图 2 所示）测量各个传感器位置处信号的波长。波长 $\lambda$ 与曲线曲率 $k$ 之间的关系近似为

$k = \frac{c(\lambda - \lambda_0)}{\lambda_0}$ , 其中 $\lambda_0$ 是水平光纤在初始状态下测量的波长， $\lambda$ 是光纤在受到外力后测量的波长， $c$ 为某个常数，这里假设为 4200。本次实验分别测量了两组不同初始状态下受力前后的波长值，具体数据见表 1，并请解决如下问题。

表 1. 波长(纳米)测量数据

| 测量点  | 初始状态 1 | 测试 1     | 初始状态 2 | 测试 2     |
|------|--------|----------|--------|----------|
| FBG1 | 1529   | 1529.808 | 1540   | 1541.095 |
| FBG2 | 1529   | 1529.807 | 1540   | 1541.092 |
| FBG3 | 1529   | 1529.813 | 1540   | 1541.090 |
| FBG4 | 1529   | 1529.812 | 1540   | 1541.093 |
| FBG5 | 1529   | 1529.814 | 1540   | 1541.094 |
| FBG6 | 1529   | 1529.809 | 1540   | 1541.091 |

问题 1. 请根据表 1 给出的波长测量数据，构建数学模型，估算平面光栅各个传感点(FBG1-FBG6)的曲率。进一步，假设初始点坐标为原点，初始的水平光纤方向为 $x$ 轴，垂直方向为 $y$ 轴，光纤在平面内受力后在初始位置的切线与水平方向的夹角为  $45^\circ$ ，请建立模型估算下列表格中横坐标 $x$ 轴相应位置处的曲率。

| 横坐标 $x$ (米) | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 |
|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 测试 1 曲率 $k$ |     |     |     |     |     |
| 测试 2 曲率 $k$ |     |     |     |     |     |

问题 2. 请根据表 1 波长测量数据和问题 1 求出的曲率，构建数学模型，分别重构平面曲线，并分析曲线的特点。

问题 3. 请根据平面曲线方程 $y = x^3 + x(0 \leq x \leq 1)$ ，以适当的等间距弧长采样，计算这些采样点的曲率。然后以采样的曲率为基础，构建数学模型，重构平面曲线，并分析重构曲线与原始曲线出现误差的原因。

### 参考文献

[1]田金容. 基于多芯光纤和光频域反射的三维曲线重构方法研究[D]. 华中科技大学, 2022.

[2]Shuyang C, Fengze T, Weimin L, et al. Deep learning-based ballistocardiography reconstruction algorithm on the optical fiber sensor[J]. Optics express, 2022, 30 (8): 13121-13133.

[3]吕安强, 黄崇武, 乐彦杰, 等. 基于分布式应变的三芯光纤形态重构算法研究[J]. 光电子·激光, 2021, 32 (07): 784-790.

[4]程文胜. 基于超弱光纤光栅的曲线重构方法研究[D]. 三峡大学, 2021.

[5]冯荻. 基于光纤光栅应变传感的结构变形重构技术研究[D]. 大连理工大学, 2020.

[6]陈世凯. 光纤光栅重构方法研究及实验[D]. 国防科学技术大学, 2016.

[7]章亚男, 肖海, 沈林勇. 用于光纤光栅曲线重建算法的坐标点拟合[J]. 光学精密工程, 2016, 24(09):2149-2157.

[8]肖海, 章亚男, 沈林勇, 等. 光纤光栅曲线重建算法中的曲率连续化研究[J]. 仪器仪表学报, 2016,37(05):993-999.