浙江工业大学 2022/2023 学年第二学期
概率论与数理统计A(48学时)期末考试试卷

学号：________________ 姓名：________________

班级：________________ 任课教师：________________

分位点数据：

$$t_{0.025}(9)=2.2622,\quad t_{0.025}(8)=2.3060,\quad t_{0.05}(9)=1.8331,\quad t_{0.05}(8)=1.8595$$

一. 选择题（每题 3 分，共 24 分）

1. 随机事件 A 和 B 恰有一个发生的概率为 (　　)

   (A) $P(A)+P(B)-P(AB)$　　(B) $P(A)+P(B)$

   (C) $P(A)+P(B)-2P(AB)$　　(D) $P(A)-P(B)$

2. 设 $P(A)=\frac{1}{2},P(B)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=2P(A|\overline{B})$，则 $P(B|A)=$ (　　)

   (A) $\frac{1}{3}$　　(B) $2/5$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{2}{3}$

3. 设盒中有 3 种颜色的卡片各 2 张. 从中随机抽取卡片，每次 1 张，不放回，直到每种颜色的卡片至少被被抽出 1 张为止. 记 X 为抽出的卡片数，则 (　　)

   (A) $P(X=3)=\frac{1}{3},EX=\frac{19}{5}$　　(B) $P(X=3)=\frac{1}{3},EX=4$

   (C) $P(X=3)=\frac{2}{5},EX=\frac{19}{5}$　　(D) $P(X=3)=\frac{2}{5},EX=4$

4. 设 X 的密度函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}+\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2}}],-\infty<x<\infty$，则 (　　)

   (A) $\sigma^2=\frac{1}{4},EX=\frac{1}{2}$　　(B) $\sigma^2=\frac{1}{4},EX=1$

   (C) $\sigma^2=\frac{1}{2},EX=\frac{1}{2}$　　(D) $\sigma^2=\frac{1}{2},EX=1$

5. 设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_5$ 是 X 的样本. 若

$$\frac{B(X_4-X_5)}{\sqrt{AX_1^2+(X_2+X_3)^2}}\sim t(2),$$

   则 (　　)

   (A) $A=2,\ B=1$　　(B) $A=2,\ B=\sqrt{2}$

   (C) $A=1,\ B=\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(D) $A=1,\ B=\frac{1}{2}$

6. 设 X_1,X_2,X_3 相互独立，且 $X_1\sim N(\mu,1),X_2\sim N(\mu,2),X_3\sim N(\mu,3)$，则下列选项中 μ 的最有效的无偏估计是 (　　)

(A) $\frac{1}{6}X_1+\frac{1}{6}X_2+\frac{1}{6}X_3$　　(B) $\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{6}X_2+\frac{1}{9}X_3$

(C) $\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3$　　(D) $\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{6}X_3$

7. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是其样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限为 (　　)

(A) $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$　　(B) $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}$　　(C) $\frac{S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$　　(D) $\frac{S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}$

8. 设总体 $X\sim U(-\theta,\theta)$，根据 X 的样本 x_1 作显著性假设检验：$H_0:\theta=1$ vs $H_1:\theta=2$. 若取拒绝域 $W=\{|x_1|>c\}$，显著水平为 0.1，则常数 $c=$ (　　)

(A) 0.1　　(B) 0.2　　(C) 0.9　　(D) 1.8

二. 填空题（每空 2 分，共 16 分）

9. 设某地区一年内发生火灾事故的次数服从泊松分布 $P(2)$，则该地区一年内发生的火灾事故次数不超过 2 次的概率是 ____________.

10. 设连续型变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}1, & x>\frac{\pi}{2},\\ A+B\cos x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2},\\ 0, & x<0,\end{cases}$ 则 $A=$ ____________, $B=$ ____________.

11. 设 $X\sim U(0,1)$，$Y=aX+b$，且 $EY=a,DY=b$，则 $a=$ ____________，$b=$ ____________.

12. 设 $EX=1,EY=2,DX=3,DY=1$，且 X 与 Y 独立. 若 $Z=2X+Y-1$，则 $EZ=$ ____________，$DZ=$ ____________.

13. 设 $EX=3,E(X^2)=12$，则根据切比雪夫不等式，$P(0<X<6)\ge$ ____________.

三. 解答题（共 60 分）

14. (8 分) 设一游戏分为两关，甲通过这两个关卡的概率分别为 0.6,0.5，乙通过这两个关卡的概率分别为 0.5,0.4. 从甲、乙两人中随机选取一人首先上场，通过一关卡后可继续下一关游戏，直到某关卡通关失败或完全通关为止；若其在某关卡失败，则另一人上场从当前关卡继续游戏。

(1) 求两个关卡全部通关的概率；(2) 若两个关卡全部通关，求甲先上场的概率.

15. (8 分) 设随机变量 X 的密度函数

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+b, & -1<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

且 $EX=1$. (1) 求常数 a,b；(2) 计算 $E(X^3)$.

16. (8 分) 设 X,Y 的联合分布表为

$Y \backslash X$	1	2	3
-1	$1/3$	$1/6$	$1/4$
1	a	b	c

(1) 若 X,Y 独立，求 a,b,c；(2) 若 X,Y 不相关，且 $P(X+Y\geq 3)=\frac{1}{6}$，求 a,b,c.

17. (16 分) 设随机变量 (X,Y) 的密度函数是

$$f(x,y)=\begin{cases}C(x+y)\mathrm{e}^{-y}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 验证 $C=\frac{1}{3}$；(2) 计算 $P(Y>2X)$；(3) 求 $Z=X+Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$；

(4) 求条件密度 $f_{X|Y}(x|y)$，并求 $P(X>\frac{1}{2}|Y=1)$.

18. (10 分)设总体 X 的分布列为

X	1	2	3
P	θ	$\theta-\theta^2$	$(1-\theta)^2$

其中未知参数 $\theta\in(0,1)$. 根据 X 的样本 $1,1,3,2,3$，求: (1) θ 的矩估计值；(2) θ 的最大似然估计值.

19. (10 分) 设某种饮料的维 C 含量（单位：mg/l）服从正态分布. 现抽取该种饮料 9 瓶，测量维 C 含量（单位：mg/l）的样本均值 $\overline{x}=21.5$，样本标准差 $s=2$. 取显著性水平 $\alpha=0.05$，能否认为该种饮料的维 C 含量的平均值为 20 mg/l?