浙江工业大学 2022/2023 学年第二学期 概率论与数理统计A(48学时)期末考试试卷参考答案

分位点数据：

$$t_{0.025}(9)=2.2622,\quad t_{0.025}(8)=2.3060,\quad t_{0.05}(9)=1.8331,\quad t_{0.05}(8)=1.8595$$

一. 选择题（每题 3 分，共 24 分）

1. C
2. C
3. C
4. A
5. B
6. D
7. B
8. C

二. 填空题（每空 2 分，共 16 分）

9. $5\mathrm{e}^{-2}$

10. 1, $\ -1$

11. 6, 3

12. 3, 13

13. $\dfrac{2}{3}$

三. 解答题（共 60 分）

14. (8 分) 设一游戏分为两关，甲通过这两个关卡的概率分别为 0.6,0.5，乙通过这两个关卡的概率分别为 0.5,0.4. 从甲、乙两人中随机选取一人首先上场，通过一关卡后可继续下一关游戏，直到某关卡通关失败或完全通关为止；若其在某关卡失败，则另一人上场从当前关卡继续游戏。

(1) 求两个关卡全部通关的概率；(2) 若两个关卡全部通关，求甲先上场的概率.

解: (1) $p_1=\dfrac{1}{2}\times(0.6\times0.5+0.6\times0.5\times0.4+0.4\times0.5\times0.4)$

$+\dfrac{1}{2}\times(0.5\times0.4+0.5\times0.6\times0.5+0.5\times0.6\times0.5)=0.5;$

(2) $p_2=\dfrac{\dfrac{1}{2}\times(0.6\times0.5+0.6\times0.5\times0.4+0.4\times0.5\times0.4)}{0.5}=0.5.$

15. (8 分) 设随机变量 X 的密度函数

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+b, & -1<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

且 $EX=1$. (1) 求常数 a,b；(2) 计算 $E(X^3)$.

解: (1)由正则性 $\int_{-1}^{2}(ax^2+b)\mathrm{d}x=1$, 得 $a+b=\frac{1}{3}$.

由$EX=1$, 得 $\int_{-1}^{2}x(ax^2+b)\mathrm{d}x=1$, 即 $\frac{15}{4}a+\frac{3}{2}b=1$,

所以 $a=\frac{2}{9},\quad b=\frac{1}{9}$;

(2) $E(X^3)=\int_{-1}^{2}x^3(\frac{2}{9}x^2+\frac{1}{9})\mathrm{d}x=\frac{11}{4}$.

16. (8 分) 设 X,Y 的联合分布表为

Y \ X	1	2	3
-1	1/3	1/6	1/4
1	a	b	c

(1) 若 X,Y 独立，求 a,b,c；(2) 若 X,Y 不相关，且 $P(X+Y\geq 3)=\frac{1}{6}$，求 a,b,c.

解: (1) 由题意, 得

$a+b+c=\frac{1}{4},\quad a=2b,\quad 3b=2c,$

所以 $a=\frac{1}{9},\quad b=\frac{1}{18},\quad c=\frac{1}{12}$;

(2) 由X,Y 不相关, 得 $a+2b+3c=\frac{17}{36}$,

由$P(X+Y\geq 3)=\frac{1}{6}$, 得 $b+c=\frac{1}{6}$, 又 $a+b+c=\frac{1}{4}$,

所以 $a=\frac{1}{12},\quad b=\frac{1}{9},\quad c=\frac{1}{18}$.

17. (16 分) 设随机变量 (X,Y) 的密度函数是

$$f(x,y)=\begin{cases}C(x+y)\mathrm{e}^{-y}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 验证 $C=\frac{1}{3}$；(2) 计算 $P(Y>2X)$；(3) 求 $Z=X+Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$；

(4) 求条件密度 $f_{X|Y}(x|y)$，并求 $P(X>\frac{1}{2}|Y=1)$.

解: (1) 由题意, 得

$1=\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}y\int_{0}^{y}c(x+y)\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x=3c,$

所以 $c=\dfrac{1}{3}$;

(2) $P(Y>2X)=\dfrac{1}{3}\int_0^{\infty}\mathrm{d}y\int_0^{y/2}(x+y)\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x=\dfrac{5}{12}$;

(3) $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^{z/2}\frac{1}{3}z\mathrm{e}^{x-z}\mathrm{d}x=\frac{z}{3}(\mathrm{e}^{-z/2}-\mathrm{e}^{-z}), & z\geq 0,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

(4) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^{y}\frac{1}{3}(x+y)\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}y^2\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{2(x+y)}{3y^2}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

$P(X>\frac{1}{2}|Y=1)=\int_{1/2}^{1}\frac{2}{3}(x+1)\mathrm{d}x=\dfrac{7}{12}$.

18. (10 分)设总体 X 的分布列为

X	1	2	3
P	θ	$\theta-\theta^2$	$(1-\theta)^2$

其中未知参数 $\theta\in(0,1)$. 根据 X 的样本 $1,1,3,2,3$，求: (1) θ 的矩估计值；(2) θ 的最大似然估计值.

解: (1) 由 $EX=\theta^2-2\theta+3$, 得 $\quad\theta=\dfrac{3\pm\sqrt{4EX-3}}{2}$,

所以 $\hat{\theta}=\dfrac{3-\sqrt{4\overline{X}-3}}{2}$, 将$\overline{X}=2$代入上式, 得 θ的矩估计值是$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

解: (2) 极大似然函数 $L=\theta^2(1-\theta)^4(\theta-\theta^2)=\theta^3(1-\theta)^5$,

关于θ求导, 得

$\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}=3\theta^2(1-\theta)^5-5\theta^3(1-\theta)^4=0$,

得θ的极大似然估计值是 $\dfrac{3}{8}$.

19. (10 分) 设某种饮料的维 C 含量（单位：mg/l）服从正态分布. 现抽取该种饮料 9 瓶，测量维 C 含量（单位：mg/l）的样本均值 $\overline{x}=21.5$，样本标准差 $s=2$. 取显著性水平 $\alpha=0.05$，能否认为该种饮料的维 C 含量的平均值为 20 mg/l?

解: $\quad H_0:\ \mu=20\ \ vs\ \ H_1:\ \ \mu\neq 20$

检验统计量 $\quad t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$,

拒绝域 $W=\{|t|>t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(8)=2.306\}$,

$t_0=\dfrac{21.5-20}{2/\sqrt{9}}=2.25<2.306$,

不在拒绝域内, 所以接受原假设.