

长三角工程教育联盟高校高等数学 A1 联考试卷二

2023~2024 学年第 1 学期

(满分 100 分, 考试时间 120 分钟)

一、单项选择题 (每题 3 分, 共 15 分) 请将正确答案填在答题纸上。

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有定义, 则下列结论正确的是()。

- A、若 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 内均连续, 则 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续
B、若 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 内均可导, 则 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内可导
C、若 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 内均可积, 则 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内可积
D、若 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 内均单增, 则 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内单增

2. 函数 $f(x) = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{x} - \frac{\sin x}{|x|}$ ()。

- A、有跳跃间断点
B、有可去间断点
C、有无穷间断点
D、没有间断点

3. 下列结论正确的是()。

- A、 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = 0$
B、 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -2$
C、 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \sin x dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} 0 = 0$
D、 $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a xe^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} 0 = 0$

4. 下列函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上满足罗尔定理条件的是()。

- A、 $f(x) = e^x$ B、 $f(x) = |x|$ C、 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ \sin 1, & x \leq 0 \end{cases}$ D、 $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

5. 如果 $f'(\ln x) = 1 + 2x$, C 为任意常数, 则下列结论中不正确的是()。

- A、 $f(\ln x) = x + x^2 + C$
B、 $f(x) = x + 2e^x + C$
C、 $f'(-\ln x) = 1 + \frac{2}{x}$
D、 $(f(\ln x))' = 2 + \frac{1}{x}$

二、填空题 (每题 3 分, 共 15 分) 请将正确答案填在答题纸上。

1. 若 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+ax^2)^{\frac{1}{2}} - 1$ 与 $x \sin x$ 是等价无穷小, 则常数 $a =$ _____。

2. 若 $f(x)$ 为可导的奇函数, 且 $f'(x_0) = 5$, 则 $f'(-x_0) =$ _____。

3. 设 $y = \ln \sec x$, 则 $y''' =$ _____。

4. 曲线 $x^2 - xy + y^2 = 1$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为_____。

5. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 曲线 $y = f(x)$ 既关于 y 轴对称, 也关于直线 $x=1$ 对称, 则

$$\int_{-2}^2 (x-2023)f''(x)dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

三、解答题 (共 70 分) 请将正确的答案填在答题纸上。

1. (7 分) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)$ 。

2. (7 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)}$ 。

3. (7 分) 设 $y = y(x)$ 是由方程 $\begin{cases} x = t \ln t, \\ y + e^y = t \end{cases}$ 确定的函数, 求 $\frac{dy}{dx}$ 。

4. (7 分) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin(t^2) dt}{x^k} = c \neq 0$, 求常数 k, c 。

5. (7 分) 求不定积分 $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$ 。

6. (7 分) 计算定积分 $\int_0^1 \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ 。

7. (7 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有连续的二阶导数, $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ f'(0), & x = 0, \end{cases}$ 问 $g'(x)$ 在点

$x=0$ 处是否连续性?

8. (7 分) 求方程 $\int_{-1}^x te^{\cos t} dt = 0$ 的实根。

9. (7 分) 求函数 $f(x) = \int_0^x \min\{t^2 - 1, 9 - 3t\} dt, x \in [0, 4]$ 的最大值和最小值。

10. (7 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)f(1) > 0, f(0)f(\frac{1}{2}) < 0$ 。

证明: (1) 在 $(0,1)$ 内存在两个不同的点 ξ, η , 使得 $f(\xi) = f(\eta) = 0$ 成立;

(2) $\exists \zeta \in (0,1)$ 使得 $\zeta f'(\zeta) - f(\zeta) = 0$ 成立。

线

订

装