浙江工业大学 2023/2024 学年第一学期
概率论与数理统计A(48学时)期末考试试卷

学号：________________ 姓名：________________

班级：________________ 任课教师：________________

分位点数据：

$$\Phi(2) = 0.9772 \quad \Phi(3) = 0.9987 \quad \chi^2_{0.1}(24) = 33.196 \quad \chi^2_{0.1}(25) = 34.382$$

一. 选择题（每题 3 分，共 24 分）

1. 已知 A, B, C 为三个随机事件, 则 随机事件 $A - (B \bigcup C)$ 表示 ( )

   (A) A 发生, B, C 不都发生　　(B) A 发生, B, C 都不发生

   (C) A 不发生, B, C 都发生　　(D) A 不发生, B, C 不都发生

2. 设 X 服从 $[-a, a](a > 0)$ 上的均匀分布, 且 $Y = X^2$, 则 X 与 Y ( )

   (A) 相关且独立　　(B) 相关不独立

   (C) 独立不相关　　(D) 不独立不相关

3. 下列函数中, 可作为某一随机变量的分布函数的是 ( )

   (A) $F(x) = \frac{1}{1+x^2}$　　(B) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

   (C) $F(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x+2} & x > 0, \\ -\frac{1}{x-1}, & x \leq 0 \end{cases}$　　(D) $F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}$

4. 设随机变量 X 和 Y 相互独立且 $X \sim B\left(1, \frac{1}{2}\right), Y \sim U(0,1)$, 则 $P\left(X + Y \leq \frac{1}{3}\right) =$ ( )

   (A) $\frac{1}{6}$　　(B) $\frac{1}{3}$　　(C) $\frac{1}{4}$　　(D) $\frac{1}{2}$

5. 设非负随机变量 X 满足 $E\left(X^2\right) = 1.1, D(X) = 0.1$, 则根据切比雪夫不等式，有$P(0 < X < 2) \geq$ ( )

   (A) 0.1　　(B) 0.5　　(C) 0.9　　(D) 1

6. 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布 $N\left(0, 0; 1, 4; -\frac{1}{2}\right)$, 则下列随机变量中服从标准正态分布且与 X 独立的是 ( )

   (A) $\frac{\sqrt{5}}{5}(X + Y)$　　(B) $\frac{\sqrt{5}}{5}(X - Y)$

   (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}(X + Y)$　　(D) $\frac{\sqrt{3}}{3}(X - Y)$

7. 设总体 X 的数学期望 $E(X)=0$, 方差 $D(X)=\sigma^2$, 而 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 是来自总体 X 的简单随机样本, $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i, S^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$, 则下列属于 σ^2 的无偏估计量的是 (　　)

(A) $n\overline{X}^2+S^2$　　(B) $\frac{1}{2}\left(n\overline{X}^2+S^2\right)$

(C) $\frac{1}{3}\left(n\overline{X}^2+S^2\right)$　　(D) $\frac{1}{4}\left(n\overline{X}^2+S^2\right)$

8. 设总体 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$, 其中 σ^2 未知, $S^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$, 样本容量 n, 则参数 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间为 (　　)

(A) $\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right)$　　(B) $\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$

(C) $\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n),\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right)$　　(D) $\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$

二. 填空题（每空 2 分，共 16 分）

9. 某人向同一目标独立重复射击, 每次射击命中目标的概率为 $\frac{1}{3}$, 则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为________.

10. 已知事件 A,B 恰有一个发生的概率为 0.3 , 且 $P(A)+P(B)=0.5$, 则 A,B 至少有一个不发生的概率为________.

11. 已知随机变量 X 服从指数分布 $Exp(\lambda)$, 若 $P(X\geq 1)=\frac{1}{2}$, 则$P(X\geq 3\mid X\geq 1)=$________.

12. 设随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 对 X 重复观察 4 次, 用 Y 表示 4 次观察中出现 $\{X>\frac{\pi}{3}\}$ 的次数, 则 $E(Y)=$________.

13. 设随机变量列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布于泊松分布 $P(2)$, 当 $n\to\infty$ 时, $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于________.

14. 设总体 $X\sim N(0,4)$, 且 X_1,X_2,X_3,X_4,X_5 为来自总体的简单随机样本, 且满足

$$a(X_1-X_2)^2+b(X_3+X_4+X_5)^2$$

服从$\chi^2(2)$, 则常数 $a=$________, $b=$________.

15. 计算机在进行加法时, 每个加数按四舍五人取最接近它的整数, 设各个加数的取整误差是相互独立的, 它们都服从区间为 $(-0.5,0.5)$ 的均匀分布, 现有 300 个加数相加, 则由中心极限定理, 得误差总和绝对值超过 15 的概率约为________ .

三. 解答题（共 60 分）

16. (8分) 第一袋中有 2 个白球 4 个黑球，第二袋中有 6 个白球 2 个黑球，现从这两袋中各任取一球，再从取出的两球中任取一球.

求: (1) 这球是白球的概率是多少?

(2) 如发现这球是白球, 问原先从两个袋子中取出的是相同颜色球的概率是多少?

17. (12分)设连续型随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases} ax, & 1\le x<2, \\ b, & 2\le x<3, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 且满足 $P(1\le X<2)=2P(2\le X<3)$.

求: (1) 常数 a 与 b 的值; (2) X 的分布函数; (3) 随机变量 $Y=9X^2+1$ 的数学期望.

18. (10分) 设随机变量 (X,Y) 服从分布律

$X \backslash Y$	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知事件 $\{X+Y=1\}$ 与 $\{X=0\}$ 相互独立.

求: (1) 常数a,b 的值; (2) $Cov(X+Y,X-Y)$.

19. (12分)设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

求: (1) $P(X+Y>1)$;

(2) 边缘概率密度 $f_X(x)$ 和条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$, 判断 X 与 Y 是否相互独立, 并说明理由;

(3) $Z=X+Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

20. (10分) 已知总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)=\begin{cases} 1-\frac{1}{x^{\theta}}, & x\ge 1, \\ 0, & x<1, \end{cases}$ 其中参数 $\theta>1$, 且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

求: (1) 未知参数 θ 的矩估计量; (2) 未知参数 θ 的最大似然估计量.

21. (8分) 某洗衣粉厂用自动包装机进行包装, 正常情况下包装的重量(单位: g)$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$. 现随机抽取 25 袋洗衣粉, 测得平均重量 $\bar{x}=501.5$ g, 样本标准差 $s=2.5$ g. 取显著性水平 $\alpha=0.1$, 问可否认为 σ^2 显著大于 6 g^2?