浙江工业大学 2023/2024 学年第一学期
概率论与数理统计A(48学时)期末考试参考答案

一、选择题.(每题3分，共 24 分)

1. A
2. A
3. D
4. C
5. D
6. A
7. B
8. A

二、填空题.(每小题2 分，共 16 分)

9. $\frac{3}{29}$
10. $\frac{1}{4}$
11. $\frac{\pi}{4}$
12. $\frac{1}{2}$
13. $f_Z(z)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2z}(\mathrm{e}^z-1), & z\geq 0;\\ 0, & z<0;\end{cases}$
14. $4-\sqrt{3}$
15. 500
16. $\chi^2(10)$

三. 解答题（共 60 分）

17. (8 分) 某人下午 $5:00$ 下班, 根据以往的经验, 乘坐不同交通工具到家的概率如下:

到家时间	早于 $5:40$	$5:40-5:45$	$5:45-5:50$	晚于 $5:50$
乘地铁到家的概率	0.20	0.30	0.40	0.10
开车到家的概率	0.3	0.35	0.20	0.15

某天, 他抛一枚均匀硬币决定乘地铁还是开车回家, 求:

(1) 他在 $5:45-5:50$ 到家的概率;

(2) 如果他是在 $5:45-5:50$ 到家的, 则他乘坐地铁回家的概率是多少?

解：A: 他在 $5:45-5:50$ 到家, B_1：乘地铁回家, B_2：开车回家

(1) 由全概率公式： $P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=\frac{1}{2}\times 0.4+\frac{1}{2}\times 0.2=0.3.$

(2) 由贝叶斯公式： $P(B_1|A)=\dfrac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\dfrac{2}{3}.$

18. (10 分) 一个盒子中有 4 个小球, 球上分别标有号码 $0,1,1,2$, 有放回地取 2 个球, 以 X 表示两次抽到球上的号码数的乘积, 求：(1) X 的分布律; (2) 方差 DX.

解： (1) X_1, X_2 分别表示两次抽取的号码数, X 所有可能取值：$0,1,2,4,$

$P(X=4)=P(X_1=2,X_2=2)=\frac{1}{16},$

$P(X=2)=P(X_1=1,X_2=2)+P(X_1=2,X_2=1)=\frac{1}{4},$

$P(X=1)=P(X_1=1,X_2=1)=\frac{1}{4},\quad P(X=0)=1-\frac{1}{16}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{7}{16}$

从而 X 的分布律为：

X	0	1	2	4
P	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

(2) $EX=1,\quad E(X^2)=\frac{9}{4},\quad DX=E(X^2)-(EX)^2=\frac{5}{4}.$

19. (12 分) 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} a(x+1), & -1\le x<0; \\ 1-x, & 0\le x<1 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求: (1) 常数 a ; (2) $P(-0.5<X<0.5)$; (3) $Y=X^2$ 的概率密度函数.

解：(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-1}^{0}a(x+1)dx+\int_0^1(1-x)dx=1$, 所以 $a=1$;

(2) $P(-0.5<X<0.5)=\int_{-0.5}^{0}(x+1)dx+\int_0^{0.5}(1-x)dx=\frac{3}{4}$;

(3) $Y=X^2$ 的分布函数 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$

当 $y\le 0$ 时, $F_Y(y)=0$; 当 $y\ge 1$ 时, $F_Y(y)=1$;

当 $0<y<1$ 时, $F_Y(y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{0}(x+1)dx+\int_0^{\sqrt{y}}(1-x)dx=2\sqrt{y}-y$, 从而 $Y=X^2$ 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{y}}-1, & 0<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

20. (12 分) 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & 0<x<y;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求：(1) $P(Y<4|X>2)$; (2) Y 的边缘概率密度函数; (3) $P(X>2|Y=4)$.

解：(1) X 的边缘概率密度函数

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}dy, & x>0;\\ 0, & x\le 0;\end{cases}=\begin{cases}e^{-x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

所以

$$P(Y<4|X>2)=\frac{P(X>2,Y<4)}{P(X>2)}=\frac{\int_2^4 dx\int_x^4\mathrm{e}^{-y}dy}{\int_2^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}dx}=\frac{e^{-2}-3\mathrm{e}^{-4}}{\mathrm{e}^{-2}}=1-3\mathrm{e}^{-2}$$

(2) Y 的边缘概率密度函数

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{y}\mathrm{e}^{-y}dx, & y>0;\\ 0, & y\le 0;\end{cases}=\begin{cases}y\mathrm{e}^{-y}, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

(3) 给定 $y>0$, 在 $Y=y$ 条件下, X 的条件概率密度函数:

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & 0<x<y;\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$

在 $Y=4$ 条件下, X 的条件概率密度函数:

$$f_{X|Y}(x|4)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & 0<x<4;\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$

所以 $P(X>2|Y=4)=\int_2^{+\infty} f_{X|Y}(x|4)dx=\dfrac{1}{2}$.

21. (10 分) 设总体 X 服从 $[\theta-1,3\theta+1]$ 上的均匀分布, 其中 θ 为未知参数, 且 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$, 并比较估计量 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2=\dfrac{1}{2(n-1)}\sum\limits_{j=2}^{n}X_j$ 的有效性;

(2)求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$.

解：(1) $EX=2\theta$, $\theta=\frac{EX}{2}$, 从而 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1=\dfrac{\overline{X}}{2}$.

$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 均为 θ 的无偏估计量, 总体 X 的方差 $\sigma^2=\dfrac{(\theta+1)^2}{3}$, 计算 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 的方差

$$D\hat{\theta}_1=\frac{1}{4n}\sigma^2,\qquad D\hat{\theta}_2=\frac{1}{4(n-1)}\sigma^2$$

所以 $\hat{\theta}_1$ 更有效.

(2) 样本的似然函数为：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{(2\theta+2)^n}, & \theta-1\le x_1,x_2\ldots,x_n\le 3\theta+1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则有 $\dfrac{\max\{x_1,x_2\ldots,x_n\}-1}{3}\le\theta\le\min\{x_1,x_2\ldots,x_n\}+1$,

从而 θ 的最大似然估计量 $\widehat{\theta}=\dfrac{\max\{X_1,X_2\ldots,X_n\}-1}{3}$.

22. (8 分) 某厂生产的一种产品的长度(单位: cm) $X\sim N(12,1)$, 改革加工工艺后, 从新生产的产品中随机抽取了 100 件, 测得样本均值 $\overline{x}=12.5$. 设方差没有改变, 问在显著性水平 $\alpha=0.1$ 下, 改革工艺后该产品的平均长度是否有明显变化?

解：$H_0:\mu=12$, $H_1:\mu\neq 12$,

枢变量$U=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$,

拒绝域 $W=\{|U|>z_{0.05}=1.64\}$

$U_0=\frac{12.5-12}{1/10}=5>1.64\in W$, 故拒绝 H_0, 即认为改革工艺后该产品的平均长度有明显变化.