浙江工业大学 2020/2021 学年
第二学期概率论与数理统计期末考试参考答案

分位点数据：

$$\Phi(1)=0.8413,\quad \Phi(1.65)=0.9505,\quad \Phi(1.96)=0.9750,\quad \Phi(2)=0.9772$$

$$t_{0.05}(15)=1.753,\quad t_{0.05}(16)=1.746,\quad t_{0.025}(15)=2.132,\quad t_{0.025}(16)=2.120$$

一、填空题.(每空2分, 共 28 分)

1. $\frac{3}{4}$

2. $\frac{1}{6}$

3. $\frac{1}{3}$ $\quad\frac{1}{3}$

4. $\frac{1}{9}$

5. 0.1

6. $\frac{1}{2}$ $\quad 1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

7. $\frac{1}{4}$ $\quad\frac{7}{144}$

8. $\frac{2}{9}$ $\quad\frac{1}{6}$

9. $(3,1)$ $\quad\frac{5}{3}$

二、选择题.(每小题3 分, 共 12 分)

1. D

2. B

3. B

4. D

三. 解答题（共 60　分）

1.(10 分) 某厂有甲, 乙, 丙三个车间生产同一种产品, 各车间的产量分别占全厂总产量的 20%, 30%, 50%. 根据过去产品质量检验记录知道甲, 乙, 丙车间的次品率分别为 4%, 3%, 2%.

(1) 从该厂产品中任取一件, 求其为次品的概率;

(2) 若从该厂的产品中任取一件, 发现其为次品, 问该产品为乙车间生产的概率是多少？

解: 设$A_i(i=1,2,3)$分别表示甲、乙、丙车间生产的产品, B表示产品为次品.

(1) $P(B)=\sum\limits_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=0.2\times 0.04+0.3\times 0.03+0.5\times 0.02=0.027;$

…… 5 分

(2) $P(A_2|B)=\dfrac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\dfrac{0.3\times 0.03}{0.027}=\dfrac{1}{3}.$

…… 10分

2. (10 分)设连续型随机变量 X 的概率密度函数为:

$$f(x)=\begin{cases} Ax, & 0\le x\le 1, \\ A(2-x), & 1<x\le 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求: (1) 常数 A；　(2) $F(1.5)$, 其中 $F(x)$ 为 X 的分布函数.

解: (1) 由规范性, 得

$\int_0^1 Ax\mathrm{d}x+\int_1^2 A(2-x)\mathrm{d}x=1,$

所以$A=1$.

…… 5 分

(2)$F(1.5)=\int_{-\infty}^{1.5}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_1^{1.5}(2-x)\mathrm{d}x=\dfrac{7}{8}.$

…… 10 分

3. (12 分) 设二维随机向量 (X,Y) 在矩形 $G=\{(x,y):0\le x\le 2,\ \ 0\le y\le 1\}$ 上服从均匀分布, 定义

$$U=\begin{cases}0, & 若\ X\le Y,\\ 1, & 若\ X>Y,\end{cases}\qquad V=\begin{cases}0, & 若\ X\le 2Y,\\ 1, & 若\ X>2Y,\end{cases}$$

(1) 求(U,V)的联合分布律和边缘分布律;

(2) 判断U,V是否独立?

(3) 求U和V的相关系数ρ.

解: (1) $P(U=0,V=0)=P(X\le Y,X\le 2Y)=P(X\le Y)=\dfrac{1}{4}$

$P(U=0,V=1)=P(X\le Y,X>2Y)=P(\emptyset)=0$

$P(U=1,V=0)=P(X>Y,X\le 2Y)=P(Y<X\le 2Y)=\dfrac{1}{4}$

$P(U=1,V=1)=P(X>Y,X>2Y)=P(X>2Y)=\dfrac{1}{2}$

$U \backslash V$	0	1
0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

U	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

V	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$\cdots\cdots$ 6 分

(2) $P(U=0,V=0)=\dfrac{1}{4}\neq P(U=0)P(V=0)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}$,

所以U,V 不独立.

$\cdots\cdots$ 8分

(3) $EU=\dfrac{3}{4}$, $\ EU^2=\dfrac{3}{4}$, 所以$Var(U)=\dfrac{3}{16}$,

$EV=\dfrac{1}{2}$, $\ EV^2=\dfrac{1}{2}$, 所以$Var(V)=\dfrac{1}{4}$,

$E(UV)=\dfrac{1}{2}$, $Cov(U,V)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$,

所以$\rho=\dfrac{Cov(U,V)}{\sqrt{Var(U)}\sqrt{VarV}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\cdots\cdots$ 12分

4. (8 分) 设二维随机向量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x+y)}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求: (1) X的边缘密度函数; (2) (X,Y)的联合分布函数.

解:(1) $x\le 0,\quad f_X(x)=0;$

$x>0,\quad f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x+y)}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x},$

所以 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

…… 4分

(2) $x>0,y>0,$

$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\int_0^x\int_0^y\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(s+t)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t=(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x})(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y}),$

所以 $F(x,y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x})(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y}), & x>0,y>0\\ 0, & 其他.\end{cases}$

…… 8分

5.(10 分) 已知某机器生产出的零件长度 X (单位：cm) 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 现抽取容量为 16 的样本, 测得样本均值 $\bar{x}=10$, 样本方差 $s^2=0.16$.

(1) 求总体均值 μ 置信水平为 0.95 双侧置信区间;

(2) 在显著水平为 0.05 下, 检验假设 $H_0:\mu=9.7,\quad H_1:\mu\neq 9.7$.

解：(1) 因为$\bar{x}=10,\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=2.132,$

所以双侧置信区间是$(\bar{x}-\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\bar{x}+\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))=(9.7868,10.2132);$

…… 5分

(2) $H_0:\mu=9.7\quad H_1:\mu\neq 9.7$

拒绝域是$(-\infty,\mu_0-\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)]\bigcup[\mu_0+\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),+\infty)=(-\infty,9.4868]\bigcup[9.9132,+\infty)$

而$\bar{x}=10$落入拒绝域, 所以拒绝原假设.

…… 10分

6. (10 分) 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}1-\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta}, & x>\alpha,\\ 0, & x\le\alpha,\end{cases}$$

其中 $\alpha>0$, $\beta>1$, $X_1,X_2,\cdots X_n$ 为 总体 X 的简单样本.

(1) 当 $\alpha=1$ 时, 求 β 的矩估计量;

(2) 当 $\beta=2$ 时, 求 α 的极大似然估计量.

解: $f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\alpha^{\beta}\beta x^{-\beta-1}, & x>\alpha,\\ 0, & x\le\alpha,\end{cases}$

$\cdots\cdots$ 2分

(1) $\alpha=1$, $f(x;\beta)=\begin{cases}\beta x^{-\beta-1}, & x>1,\\ 0, & x\le 1,\end{cases}$

$EX=\int_1^{+\infty}x\beta x^{-\beta-1}\mathrm{d}x=\dfrac{\beta}{\beta-1}$,

令$\dfrac{\beta}{\beta-1}=\bar{X}$, 得

$\widehat{\beta}=\dfrac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$.

$\cdots\cdots$ 6分

(2) $\beta=2$, $f(x;\alpha)=\begin{cases}2\alpha^{2}x^{-3}, & x>\alpha,\\ 0, & x\le\alpha,\end{cases}$

极大似然函数 $L(\alpha)=\begin{cases}2^{n}\alpha^{2n}(x_1x_2\cdots x_n)^{-3}, & x_i>\alpha,\\ 0, & x_i\le\alpha,\end{cases}$

当$X_i>\alpha$时, $L(\alpha)$是α的单调减函数, 所以α的极大似然估计是$\widehat{\alpha}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

$\cdots\cdots$ 10分