学院________ 班级________ 姓名________ 学号________ 教师姓名________

浙江工业大学 2023/2024 学年

第　二　学期试卷

课程______线性代数 B______

题序	一	二	三	四	总评
计分					

一. 选择题(每小题 2 分,共 10 分)

1. （　B　）是 $n(n>2)$ 阶行列式为 0 的充分条件.

（A）行列式零元素个数大于 n；　　（B）行列式各列元素之和为 0；

（C）行列式主对角元素全为 0；　　（D）行列式非零元素个数不超过 n.

2. 设 $A\in R^{m\times n}$， $B\in R^{n\times k}$，且满足 $AB=0$，则必有（　A　）

（A） A 的列向量组线性相关， B 的行向量组线性相关;

（B） A 的行向量组线性相关， B 的行向量组线性相关;

（C） A 的列向量组线性相关， B 的列向量组线性相关;

（D） A 的行向量组线性相关， B 的列向量组线性相关.

3. 设 x_1 是方程 $Ax=b$ 的解， x_2 是方程 $Ax=0$ 的解，则（　B　）是 $Ax=b$ 的解（c 是给定常数）.

（A） cx_1-x_2　　（B） x_1+cx_2　　（C） cx_1+cx_2　　（D） cx_1-cx_2

4. 设 A 为 3 阶方阵，且 $|A|=\frac{1}{2}$，则 $|-2A^*|=$（　A　）.

（A） -2　　（B） 2　　（C） $\frac{1}{2}$　　（D） -1

5. 设矩阵 A 的秩为 r，则 A 中必有（　C　）.

（A）所有 r 阶子式都不为 0;　　（B）所有 $r-1$ 阶子式都为 0;

（C）存在一个 r 阶子式不为 0;　　（D）存在一个 $r-1$ 阶子式为 0.

二．填空题(每空 3 分，共 30 分)

1. 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 2x & -x & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 7 \\ 9 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 99 \end{vmatrix}$ 的常数项是__3__.

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \alpha=\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，若 $A\alpha$ 和 α 线性相关，则 $a=$__-1__.

3. 已知 $f(x)=x^2+4x-1$，$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，则 $f(A)=\begin{pmatrix} 0 & -12 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$. .

4. 设 A 是为3阶方阵，特征值分别为$1,2,-2$，则$|4A^{-1}-E|=$ -9.

5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & b & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，若 A 和 B 相似，则 $a+b=$__3__.

6. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为 3 阶矩阵，若 α_1,α_2 线性无关，且 $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$，则线性方程组 $Ax=0$ 的通解为__$k(1,-2,1)^T$，__k 为任意常数__.

7. 设行向量组 $(2,1,1,1)$，$(2,1,a,a)$，$(3,2,1,a)$，$(4,3,2,1)$ 线性相关, 且 $a\neq 1$, 则 $a=$ 1/2 .

8. 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的非零特征值是 __4__，从属于该特征值的一个特征向量是 $(1, 1, 1, 1)^T$.

9. 设 $A=\begin{pmatrix} k & -1 & -1 \\ -1 & k & -1 \\ -1 & -1 & k \end{pmatrix}$ 的秩为2，则 $k=$__2__.

三、计算题（每题 10 分,共 50 分）

1. 已知向量组 $\alpha_1=(1,0,0,1)^T$， $\alpha_2=(0,1,0,-1)^T$， $\alpha_3=(0,0,1,-1)^T$， $\alpha_4=(2,-1,3,0)^T$，求该向量组的一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

解：令 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&3\\1&-1&-1&0\end{pmatrix}$， （2 分）

对其进行初等变换可得 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&3\\1&-1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$， （6 分）

可得极大无关组为 α_1， α_2， α_3 （8 分）

$\alpha_4=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3$. （10 分）

2. 已知四阶行列式 D 中第 3 列元素依次为 $-1,2,0,1$，它们的余子式依次分别为 $5,3,-7,4$，求 D.

解：由题设知 $a_{13}=-1$， $a_{23}=2$， $a_{33}=0$， $a_{43}=1$，它们的余子式依次为

$M_{13}=5$， $M_{23}=3$， $M_{33}=-7$， $M_{43}=4$，

故第 3 列的第 1，2，3，4 行的元素 $-1,2,0,1$ 的代数余子式依次为：

$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=5$， $A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-3$；

$A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=-7$， $A_{43}=(-1)^{4+3}M_{43}=-4$。 （4 分）

故 $D=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}+a_{43}A_{43}$ （8 分）

$=-15$. （10 分）

3. 设三阶方阵 $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$ 满足 $AB=A+2B$，求矩阵 B.

解：由 $B=(A-2E)^{-1}A$，（4 分）

$$(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix},\qquad \text{（7 分）}$$

故 $B=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}$.（10 分）

4. 当参数 a 取何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3+4x_4=a\\2x_1+4x_2+x_3=a-1\\x_1-x_2-4x_3-12x_4=a-2\end{cases}$ 有解？有解时写出该方程组的通解.

解：方程组的增广矩阵行变换得：

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2&4&a\\2&4&1&0&a-1\\1&-1&-4&-12&a-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&2&4&a\\0&2&3&8&a+1\\0&0&0&0&2a\end{pmatrix},\qquad \text{（3 分）}$$

故 $a=0$ 时方程组有解. 此时，该方程组得一个特解为 $\alpha^*=(-\frac{3}{2},\frac{1}{2},0,0)^T$，（5 分）

该方程的导出组的矩阵形式通过行初等变换得到 $\begin{pmatrix}1&0&-\frac{5}{2}&-8\\0&1&\frac{3}{2}&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

从而导出组的一组基础解系为 $\alpha_1=(5,-3,2,0)^T$，$\alpha_2=(8,-4,0,1)^T$，（8 分）

则该方程在有解时通解为：

$(-\frac{3}{2},\frac{1}{2},0,0)^T+k_1(5,-3,2,0)^T+k_2(8,-4,0,1)^T$，$k_1,k_2\in R$（10 分）

（本题答案形式不唯一）

5. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，求 x 与 y 应满足的条件.

解：因为 A 有三个线性无关的特征向量，故 A 可以被对角化. （2 分）

又因为 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$， （4 分）

得到 $\lambda_1=1$ 为二重特征值，因此 $(\lambda_1 E-A)x=0$ 的基础解系中必须含有两个向量，

即 $n-R(\lambda_1 E-A)=2$，故 $R(\lambda_1 E-A)=1$； （6 分）

因为 $\lambda_1 E-A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 0 & -y \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x+y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$， （8 分）

故 $x+y=0$. （10 分）

四、证明题（每题 5 分，共 10 分）

1. 设 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$，如 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，证明：β_1,β_2,β_3 线性无关.

证明：$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，记此为 $B=AK$， （2 分）

如果 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 是列满秩矩阵， （3 分）

则 $R(B)=R(AK)=R(K)=3$，所以 β_1,β_2,β_3 线性无关. （5 分）

浙 江 工 业 大 学 考 试 命 题 纸

学院＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 教师姓名＿＿＿＿

2. 设α,β分别是A的属于特征值λ_1,λ_2的特征向量，且$\lambda_1\neq\lambda_2$. 证明：$\alpha+\beta$不可能是A的特征向量.

证明：反证之，若$\alpha+\beta$是A的特征向量，则有λ_0存在，使$A(\alpha+\beta)=\lambda_0(\alpha+\beta)$，

又α,β是A的属于特征值λ_1,λ_2的特征向量，所以$A\alpha=\lambda_1\alpha, A\beta=\lambda_2\beta$，则

$A\alpha+A\beta=A(\alpha+\beta)=\lambda_0(\alpha+\beta)$，$\lambda_1\alpha+\lambda_2\beta=\lambda_0(\alpha+\beta)$，（3 分）

即$(\lambda_1-\lambda_0)\alpha+(\lambda_2-\lambda_0)\beta=0$，

因为A的属于不同特征值λ_1,λ_2的特征向量线性无关，

所以$\lambda_1-\lambda_0=0,\lambda_2-\lambda_0=0$，即$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_0$，这与$\lambda_1\neq\lambda_2$矛盾.

故假设不成立，即$\alpha+\beta$不是A的特征向量.（5 分）