一、选择题

1. C　　2. A　　3. D　　4. B　　5. B

二、填空题

1. 跳跃　　2. 48　　3. 3　　4. $\frac{3\pi}{10}$　　5. $3\ln|x-2|-\ln|x-1|+C$

三、1. 解 $\lim\limits_{x\to0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{2x}}$　　【2 分】

$$=\lim_{x\to0}\left[(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}\right]^{\frac{\sin 2x}{2x}}=\mathrm{e}$$　　【4 分】

2. 解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\ln(1+t^2)$　　【2 分】

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\ln(1+t^2)}{-\mathrm{e}^{-t}}$，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=0$　　【4 分】

3. 解 $\int x\sqrt[3]{1-2x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\int\sqrt[3]{1-2x^2}\,\mathrm{d}(1-2x^2)$　　【3 分】

$=-\frac{3}{16}(1-2x^2)^{\frac{4}{3}}+C$　　【3 分】

4. 解 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+x\sin x\right)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,\mathrm{d}x$　　【3 分】

$=-2\left[x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=2$　　【3 分】

四、1. 解 $x_n\le y_n\le z_n$

$$x_n=\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3+n^2+n}=\frac{1}{6}\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3+n^2+n}$$

$$z_n=\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3+n^2+1}=\frac{1}{6}\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3+n^2+1}$$　　【4 分】

$$y_n=\frac{1^2}{n^3+n^2+1}+\frac{2^2}{n^3+n^2+2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^2+n},$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\frac{1}{3}$　　得 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\frac{1}{3}$　　【4 分】

2. 解　函数可到必连续，得　$a=0$　【2 分】

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\arctan\frac{1}{x^2}=\frac{\pi}{2}$$　【2 分】

$$f'(x)=\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4}$$　【2 分】

所以，$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4}\right)=\frac{\pi}{2}$，

即导函数在点 $x=0$ 处的连续.　【2 分】

3. 解　$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}(x-\pi)$　【2 分】

$$=\left[(x-\pi)f(x)\right]_0^\pi-\int_0^\pi(x-\pi)\frac{\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x$$　【4 分】

$$=\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x=2$$　【2 分】

五、1. 解　函数在区间 $(0,3)$ 连续

$$f'(x)=\begin{cases}(1-x)\mathrm{e}^x,0\le x<2,\\(x-1)\mathrm{e}^x,2<x\le 3,\end{cases}$$　【3 分】

$$f''(x)=\begin{cases}-x\mathrm{e}^x,0\le x<2,\\x\mathrm{e}^x,\ 2<x\le 3,\end{cases}$$　【2 分】

凸区间 $(0,2)$　　凹区间 $(2,3)$　　拐点 $(2,0)$　【3 分】

2. 解　$A(t)=\int_0^{t^{\frac{1}{3}}}(t-x^3)\mathrm{d}x+\int_{t^{\frac{1}{3}}}^1(x^3-t)\mathrm{d}x$　【2 分】

$$=t^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{4}t^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{4}-t-\frac{1}{4}t^{\frac{4}{3}}+t^{\frac{4}{3}}=\frac{3}{2}t^{\frac{4}{3}}-t+1/4$$　【2 分】

$A'(t)=0$，得 $t=\frac{1}{2^3}$　【2 分】

因 $A''(t)>0$，所以该点为最小值点　【2 分】

六、证明题

证　设 $f(x_0)=-1$，则 $f'(x_0)=0$

在该点作一阶泰勒展开，　$f(x)=-1+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$　【2 分】

取 $x=0, x=1$，则

$$0=-1+\frac{f''(\xi_1)}{2}x_0^2\left(\xi_1\in(0,x_0)\right)$$

$$0=-1+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2\left(\xi_2\in(x_0,1)\right)$$

$$2=f''(\xi_1)x_0^2, 2=f''(\xi_2)(1-x_0)^2$$ 【3 分】

所以　$\max\{f''(\xi_1), f''(\xi_2)\}\geq 8$ 【1 分】