浙江工业大学 2023/2024 学年第一学期
概率论与数理统计A(48学时)期末考试试卷

学号：________________ 姓名：________________

班级：________________ 任课教师：________________

分位点数据：

$\Phi(1)=0.8413,\quad \Phi(1.64)=0.9500,\quad \Phi(1.96)=0.9750,\quad \Phi(2)=0.9772$

$t_{0.025}(35)=2.0301,\quad t_{0.025}(36)=2.0281\quad t_{0.05}(35)=1.6896,\quad t_{0.05}(36)=1.6883,$

一. 选择题（每题 3 分，共 24 分）

1. 设随机变量 X 服从泊松分布 $P(\lambda)$, Y 服从泊松分布 $P(2\lambda)$, 且 $P(X<1)=\frac{1}{3}$, 则 $P(Y\geq 1)$ 等于 ( )

   (A) $\frac{8}{9}$ (B) $\frac{1}{9}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$

2. 设随机变量 $X_1\sim N(0,1)$, $X_2\sim N(0,2^2)$, $X_3\sim N(5,3^2)$, 且 $p_i=P(-2\leq X_i\leq 2)$, $i=1,2,3$, 则 ( )

   (A) $p_1>p_2>p_3$ (B) $p_2>p_1>p_3$

   (C) $p_3>p_2>p_1$ (D) $p_3>p_1>p_2$

3. 设随机变量 X,Y 相互独立且都服从两点分布 $B(1,p)$, 则下面各式中：

   ① $X^2\sim B(1,p)$; ② $XY\sim B(1,p^2)$; ③ $X-Y\sim B(1,2p)$; ④ $X+Y\sim B(2,p)$ 正确的结论有 ( )

   (A) ①②③ (B) ②③④ (C) ①③④ (D) ①②④

4. 设随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)$ 满足 $f(2+x)=f(2-x)$, 其分布函数为 $F(x)$, 则 $F(0)+F(4)$ 等于 ( )

   (A) 0 (B) 0.5 (C) 1 (D) 2

5. 设 $X_1,X_2,X_3,\cdots$ 是独立同分布的随机变量序列, X_1 服从指数分布 $Exp(\frac{2}{3})$ 且对任意 $\varepsilon>0$，

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\left(2X_1-X_2+2X_3-X_4+\cdots+2X_{2n-1}-X_{2n}\right)-A\right|>\varepsilon\right)=0,$$

则 $A=$ ( )

(A) $\frac{2}{3}$ (B) 1 (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{3}{2}$

6. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 μ 已知, σ^2 未知, 则下列随机变量中不能作为统计量的是 ( )

(A) $\sum_{i=1}^{4}\frac{X_i^2}{\sigma^2}$ (B) $\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}X_i$ (C) $\min\{X_2,X_3\}$ (D) $X_1+X_4-2\mu$

7. 设随机变量 $X\sim F(n,n)$, $p_1=P(X\geq 1)$, $p_2=P(X\leq 1)$, 则 ( )

(A) $p_1<p_2$ (B) $p_1=p_2$ (C) $p_1>p_2$ (D) 无法比较

8. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, σ^2 未知, 从总体中抽取容量为 36 的样本, 样本均值 $\overline{x}=3.5$, 样本方差 $s^2=4$, 则 μ 置信水平为 0.95 的单侧置信下限是 ( )

(A) 2.9368 (B) 2.8233 (C) 4.1767 (D) 4.0632

二. 填空题（每空 2 分，共 16 分）

9. 设事件 A,B 相互独立, A,C 互不相容, $P(A)=0.4$, $P(B)=0.3$, $P(C|B)=0.2$, 则 $P(C|A\cup B)=$______.

10. 设随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=3\lambda^k$ $(k=1,2,\ldots)$, 则 $\lambda=$______.

11. 设随机变量 X,Y 相互独立, 且都服从 $[0,1]$ 上的均匀分布, 则 $P(X^2+Y^2\leq 1)=$______.

12. 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(0,0,2^2,2^2,0)$, 则 $P(X<Y)=$______.

13. 设随机变量 X,Y 独立且 X 服从指数分布 $Exp(1)$, Y 服从指数分布 $Exp(2)$, 则 $X+Y$ 的概率密度函数是______.

14. 设随机变量 $X\sim N(1,4^2)$, $Y\sim U(0,6)$, 且 X,Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-0.25$, 令 $Z=\frac{X}{4}+Y$, 则 $Cov(X,Z)=$______.

15. 一公寓有 400 户住户, 一户住户拥有汽车辆数 X 的分布律为

X	0	1	2
p_k	0.1	0.6	0.3

根据中心极限定理，则至少需要______个车位, 才能使每辆汽车都具有一个车位的概率不低于 0.95.

16. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_{10}$ 为来自总体 $X\sim N(1,1)$ 的简单随机样本, 其均值和方差分别为 $\overline{X},S^2$, 则统计量 $10(\overline{X}-1)^2+9S^2$ 服从 ______ 分布(标明参数).

三. 解答题（共 60 分）

17. (8 分) 某人下午 $5:00$ 下班, 根据以往的经验, 乘坐不同交通工具到家的概率如下:

到家时间	早于 $5:40$	$5:40-5:45$	$5:45-5:50$	晚于 $5:50$
乘地铁到家的概率	0.20	0.30	0.40	0.10
开车到家的概率	0.3	0.35	0.20	0.15

某天, 他抛一枚均匀硬币决定乘地铁还是开车回家, 求:

(1) 他在 $5:45-5:50$ 到家的概率;

(2) 如果他是在 $5:45-5:50$ 到家的, 则他乘坐地铁回家的概率是多少?

18. (10 分) 一个盒子中有 4 个小球, 球上分别标有号码 $0,1,1,2$, 有放回地取 2 个球, 以 X 表示两次抽到球上的号码数的乘积, 求：(1) X 的分布律; (2) 方差 DX.

19. (12 分) 设随机变量 X 的概率密度函数

$$f(x)=\begin{cases} a(x+1), & -1\le x<0; \\ 1-x, & 0\le x<1 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求: (1) 常数 a ; (2) $P(-0.5<X<0.5)$; (3) $Y=X^2$ 的概率密度函数.

20. (12 分) 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-y}, & 0<x<y; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求：(1) $P(Y<4|X>2)$; (2) Y 的边缘概率密度函数; (3) $P(X>2|Y=4)$.

21. (10 分) 设总体 X 服从 $[\theta-1,3\theta+1]$ 上的均匀分布, 其中 θ 为未知参数, 且 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$, 并比较估计量 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2=\dfrac{1}{2(n-1)}\displaystyle\sum_{j=2}^{n}X_j$ 的有效性;

(2)求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$.

22. (8 分) 某厂生产的一种产品的长度(单位: cm) $X\sim N(12,1)$, 改革加工工艺后, 从新生产的产品中随机抽取了 100 件, 测得样本均值 $\overline{x}=12.5$. 设方差没有改变, 问在显著性水平 $\alpha=0.1$ 下, 改革工艺后该产品的平均长度是否有明显变化?