

# 长三角工程教育联盟高校高等数学 A1 联考试卷三

## 2023~2024 学年第 1 学期

(满分 100 分, 考试时间 120 分钟)

### 一、单项选择题 (每题 3 分, 共 15 分)。请将正确答案填在答题纸上。

1. 设函数  $f(x)$  二阶可导,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ ,  $f''(0) \neq 0$ . 当  $x \rightarrow 0$  时,  $e^{f(x)} - 1$  与  $ax^2$  是等价无穷小, 则  $a =$  ( ).  
A、 $\frac{1}{2}f''(0)$       B、 $f''(0)$       C、 $\frac{3}{2}f''(0)$       D、 $2f''(0)$
2. 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处存在左导数和右导数, 则  $f(x)$  在点  $x_0$  处 ( ).  
A、可导      B、连续      C、不可导      D、不连续
3. 设函数  $f(x)$  在点  $x=0$  的某邻域内有二阶连续导数, 且  $f'(0)=0$ , 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$ , 则下列说法正确的是 ( ).  
A、 $x=0$  不是  $f(x)$  的极值点      B、 $x=0$  是  $f(x)$  的极大值点  
C、 $x=0$  是  $f(x)$  的极小值点      D、 $(0, f(0))$  是  $f(x)$  的拐点
4. 设  $a, b$  为实数, 下列关于定积分的说法正确的是 ( ).  
A、设函数  $f(x)$  在区间  $[-a, a]$  ( $a > 0$ ) 上可积, 则存在  $\xi \in [-a, a]$ , 使得  $\int_{-a}^a f(x)dx = 2af(\xi)$   
B、设对任意  $x \in (-\infty, +\infty)$  均有  $f(x) < g(x)$ , 则  $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$   
C、设  $f(x)$  是连续的偶函数, 则  $\int_a^x f(t)dt$  是奇函数  
D、设  $f(x)$  为连续且非负函数, 则  $\int_a^x f(t)dt$  是单调不减函数
5. 设  $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx$  ( $k=1, 2, 3$ ), 则 ( ).  
A、 $I_1 < I_2 < I_3$       B、 $I_3 < I_2 < I_1$       C、 $I_2 < I_3 < I_1$       D、 $I_2 < I_1 < I_3$

### 二、填空题 (每题 3 分, 共 15 分)。请将正确答案填在答题纸上。

1. 函数  $f(x) = \frac{x^2 - x}{|x|(x^2 - 1)}$  的第一类间断点个数为 \_\_\_\_\_.
2. 曲线  $f(x) = xe^x + 2x$  的斜渐近线为 \_\_\_\_\_.
3. 设函数  $u = f(y)$  具有一阶连续导数, 函数  $y = y(x)$  由方程  $y + e^y = x$  确定, 则  $\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=1} =$  \_\_\_\_\_.
4. 设  $\frac{\sin x}{x}$  是  $f(x)$  的一个原函数, 若  $a \neq 0$ , 则  $\int f(ax)dx =$  \_\_\_\_\_.
5. 广义积分  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 1}} dx =$  \_\_\_\_\_.

### 三、解答题 (共 70 分)。请将正确的解答填在答题纸上。

1. (此题满分 6 分) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$ .
2. (此题满分 7 分) 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left[ e \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} - 1 \right]$ .
3. (此题满分 7 分) 求常数  $a, b$ , 使得函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x < 0, \\ ax + b, & x \geq 0 \end{cases}$  可导.
4. (此题满分 6 分) 设  $y = \sqrt[3]{x \sqrt{e^{x+1}} \sqrt{1 + \sin x}}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .
5. (此题满分 7 分) 设  $\begin{cases} x = \cos t^2, \\ y = \int_0^{t^2} e^{-u^2} \sin u du, \end{cases}$  求  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}$ .
6. (此题满分 7 分) 设  $a$  为实数, 讨论方程  $ax = \ln x$  根的情况.
7. (此题满分 6 分) 求不定积分  $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$ .
8. (此题满分 7 分) 设正值函数  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上连续, 且  $f(x)f(-x) = 1$ , 求  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + f(x)} dx$ .
9. (此题满分 10 分) 设区域  $D$  由曲线段  $L: \begin{cases} x = t + t^2, \\ y = t - t^2 \end{cases} (0 \leq t \leq 1)$  以及  $x$  轴围成, 求区域  $D$  的面积  $S$  以及  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积  $V$ .
10. (此题满分 7 分) 设函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内  $f'(x) > 0$ , 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = 1$ , 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .