浙江工业大学 2022/2023 学年第一学期
概率论与数理统计(48学时)期末考试试卷参考答案与评分标准

一. 填空题 (共 28 分，每空 2 分)

1. 0.6
2. 0.38; $\frac{15}{38}$
3. $\sqrt{2}$; $6-3\sqrt{2}$
4. $\frac{3}{4}$
5. 1
6. 1; 6
7. 20; 4
8. 2; $\frac{\sqrt{10}}{5}$
9. 6

二. 选择题 (共 12 分，每题 3 分)

1. A
2. C
3. B
4. A

三. 解答题 (共 6 题，60 分)

1. X的所有可能取值为 $3,4,5$, 其分布列为

$P(X=3)=\dfrac{C_2^1C_2^1C_1^1A_3^3}{A_5^3}=\dfrac{2}{5}$.

$P(X=5)=\dfrac{A_4^4}{A_5^5}=\dfrac{1}{5}$.

$P(X=4)=1-\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{2}{5}$.

$E(X)=\dfrac{19}{5}$;

$E(X^2)=15$; $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\dfrac{14}{25}$.

2. (1) $F(+\infty)=\dfrac{\pi}{2}(A+B)+C=1$;

$F(-\infty)=\dfrac{\pi}{2}(A+B)+C=0$;

$P(X>0)=1-F(0)=1-B\arctan 1-C=\dfrac{1}{3}$;

则 $A=\dfrac{1}{3\pi}$, $B=\dfrac{2}{3\pi}$, $C=\dfrac{1}{2}$.

(2) $f(x)=F'(x)=\dfrac{1}{3\pi}\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{2}{3\pi}\dfrac{1}{1+(1+x)^2}$.

3. (1) $a+b+0.6=1$;

X,Y 不相关，即 $E(XY)=EX\cdot EY$,

$E(XY)=a$, $EX=b-a$, $EY=-a$, 则 $a=(b-a)(-a)$;

$a=0, b=0.4$ (舍掉 $a=0.7, b=-0.3$)

(2)

$$X+Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 0.3 & 0.1 & 0.5 & 0.1\end{pmatrix}.$$

(3) $E(X)=0.4$; $E(X+Y)=0.4$; $E(X^2)=a+b+0.4=0.8$; $E((X+Y)^2)=1.2$;

$D(X)=0.64$; $D(X+Y)=1.04$;

$Cov(X,X+Y)=D(X)+Cov(X,Y)=D(X)=0.64$;

$\rho(X,X+Y)=\dfrac{0.64}{\sqrt{0.64}\sqrt{1.04}}=\dfrac{2}{13}\sqrt{26}$.

4. (1) $\displaystyle\int_0^1\int_x^{2x}Cx\mathrm{d}y\mathrm{d}x=1$, 得到 $C=3$;

(2) $P(X+2Y>3)=\displaystyle\int_{\frac{3}{5}}^1\int_{\frac{3}{2}-\frac{x}{2}}^{2x}3x\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\dfrac{13}{25}$.

(3) $f_X(x)=\begin{cases}\int_x^{2x}3x\mathrm{d}y=3x^2, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

当 $0<x<1$ 时， $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x<y<2x\\ 0, & 其他.\end{cases}$

5. 矩估计

$E(X)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\theta}x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\theta}}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi\theta}{2}}$,

所以$\theta=\dfrac{2(EX)^2}{\pi}$, 则 $\hat{\theta}=\dfrac{2\overline{X}^2}{\pi}$.

极大似然估计

$L(\theta)=\frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^{n}x_i\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\theta}}$; $\ln L(\theta)=-n\ln\theta+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\theta}$;

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\theta^2}$,

则 $\hat{\theta}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2n}$.

6. $H_0:\sigma\le 0.05$; $H_1:\sigma>0.05$,

检验统计量 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$,

拒绝域： $\dfrac{(n-1)S^2}{0.05^2}>\chi^2_{0.05}(4)=9.488$,

经计算 $\dfrac{(n-1)S^2}{0.05^2}=7.84<9.488$， 没有落在拒绝域，

故不能认为导线标准差显著过高.