浙江工业大学 2020/2021 学年 第二学期概率论与数理统计期末考试试卷参考答案

题号	一	二	三	总分
得分				

分位点数据：

$$\Phi(1) = 0.8413, \quad \Phi(1.65) = 0.9505, \quad \Phi(1.96) = 0.9750, \quad \Phi(2) = 0.9772$$

$$t_{0.05}(16) = 1.746, \quad t_{0.025}(16) = 2.120, \quad t_{0.05}(15) = 1.753, \quad t_{0.025}(15) = 2.132$$

一、填空题. (每空 2 分, 共 28 分)

1. 0.9
2. $\frac{2}{9}$
3. 2;
4. 4,　5;
5. $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$,　$\frac{\sqrt{2}}{2}$,　$\frac{\sqrt{2}}{2}$;
6. 3,　$\frac{1}{2}$,　$\frac{3}{8}$;
7. $\frac{1}{3}$,　$\frac{2}{3}$;
8. $(4.412, 5.588)$.

二、选择题.(每小题3 分, 共 12 分)

1. C;
2. D;
3. C;
4. D;

三. 解答题（共 60 分）

1. (10 分) 两台车床加工同样的零件, 第一台出现不合格品的概率是 0.03 , 第二台出现不合格品的概率是 0.06 , 加工出来的零件放在一起, 并且已知第一台加工的零件数比第二台加工的零件数多一倍.

(1) 求任取一个零件是合格品的概率;

(2) 如果取出的零件是不合格品, 求它是由第二台车床加工的概率.

解：记事件 A 为“取到第一台车床加工的零件”,则 $P(A)=\frac{2}{3}$,又记事件 B 为“取到合格品”.

(1) 由全概率公式, 得

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})=\frac{2}{3}\times 0.97+\frac{1}{3}\times 0.94=0.96$$

$\cdots\cdots$5分

(2) 由贝叶斯公式, 得

$$P(\bar{A}\mid \bar{B})=\frac{P(\bar{A})P(\bar{B}\mid \bar{A})}{P(\bar{B})}=\frac{\frac{1}{3}\times 0.06}{0.04}=0.5.$$

$\cdots\cdots$10分

2. (10 分)设随机变量 X 与 Y 相互独立, 分布律分别为

X	-2	0	1
p	0.3	0.2	0.5

Y	-1	0
p	0.2	0.8

试求: (1) (X,Y) 的联合分布律; (2) $P(X>Y)$; (3)$E(XY)$.

解：

(1) (X,Y) 的联合分布律为:

$Y\backslash X$	-2	0	1
-1	0.06	0.04	0.1
0	0.24	0.16	0.4

$\cdots\cdots$4分

(2)

$$\begin{aligned}P\{X>Y\}&=P\{X=0,Y=-1\}+P\{X=1,Y=-1\}+P\{X=1,Y=0\}\\&=0.04+0.1+0.4=0.54\end{aligned}$$

$\cdots\cdots$7分

(3)

$$E(XY)=(-2)\cdot(-1)\cdot 0.06+1\cdot(-1)\cdot 0.1=0.02.$$

$\cdots\cdots$10分

3. (12 分) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases} cx\mathrm{e}^{-y}, & 0<x<y<\infty, \\ 0, & \text{其他}\ , \end{cases}$$

其中 c 为未知常数.试求： (1) 常数 c; (2)判断 X 与 Y 是否相互独立; (3) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数.

解：

(1) 由概率密度的性质有

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\int_0^{\infty}\int_x^{\infty}cx\mathrm{e}^{-y}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x=c\int_0^{\infty}x\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x=c$$

故常数 $c=1$.

$\cdots\cdots$4分

(2) (X,Y) 的边缘分布为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases} \int_x^{\infty}x\mathrm{e}^{-y}\ \mathrm{d}y, & x>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}=\begin{cases} x\mathrm{e}^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases} \int_0^{y}x\mathrm{e}^{-y}\ \mathrm{d}x, & y>0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}=\begin{cases} \frac{1}{2}y^2\mathrm{e}^{-y}, & y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

显然 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$, 故 X 与 Y 不独立.

$\cdots\cdots$8分

(3) 当$z\leq 0$时， $f_Z(z)=0$;

当$z>0$时，

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z-y,y)\ \mathrm{d}y=\int_{\frac{z}{2}}^{z}(z-y)\mathrm{e}^{-y}\ \mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-z}+(\frac{z}{2}-1)\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}.$$

$\cdots\cdots$12分

4. (8 分) 某车间有同型号的机床 200 台, 在一小时内每台机床约有 70% 的时间是工作的. 假定各机床工作是相互独立的, 工作时每台机床要消耗电能 15 kW. 利用中心极限定理计算至少要多少电能, 才可以有 95% 的可能性保证此车间正常生产.

解：对每台车床的观察作为一次试验， X_i 表示第i台车床正常工作, $X_i \sim B(1,0.7)$. 共进行200次独立重复试验. 用X表示在某时刻工作着的车床数，依题意，

$$X \sim B(200,0.7).$$

由德莫佛-拉普拉斯极限定理

$$\frac{X-140}{\sqrt{42}} \text{ 近似服从 } N(\mathbf{0},1).$$

求满足 $P(X \leq N/15) \geq 0.95$最小的$N/15$. 于是

$$P(X \leq N/15) \approx \Phi\left(\frac{N/15-140}{\sqrt{42}}\right) \geq 0.95.$$

由于 $\Phi(1.65)=0.95$, 故 $\frac{N/15-140}{\sqrt{42}} \geq 1.65$,　从中解得 $N/15 \geq 150.7$, 即所求 $N=151\times 15=2265$ 至少供应2265 千瓦电力就能以95%的概率保证此车间正常生产.

$\cdots\cdots$ 8 分

5. (10 分) 已知某企业生产的某种电子器件的质量(单位: 克) $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$, 现从生产的电子器件中随机抽取了 16 件, 测得样本均值 $\bar{x}=10.1$克, 样本标准差 $s=0.12$克, 试问是否可以认为该机器生产的电子器件的均值为 10 克?（显著性水平 $\alpha=0.05$）

解： 由题意,检验如下假设

$$H_0: \mu=\mu_0=10, \quad H_1: \mu \neq 10.$$

取检验统计量 $t=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$, 由于 $\alpha=0.05$, 检验的拒绝域为: $|t| \geq t_{0.025}(15)=2.132$. 由 $n=16, \mu_0=10, s=0.12$, 计算得 $t_0=3.33>2.132$, 故拒绝 H_0, 则认为当天生产的电子器件的质量有显著变化.

$\cdots\cdots$ 10 分

6. (10 分) 总体 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

其中 $\theta(\theta>-1)$ 为未知参数, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自该总体的简单样本. 求 θ 的矩估计与极大似然估计.

解: 由题意,

$$\mu=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}\,\mathrm{d}x=\frac{\theta+1}{\theta+2},$$

整理得 $\theta=\frac{1-2\mu}{\mu-1}$, 故 θ 的矩估计

$$\hat{\theta}=\frac{1-2\bar{X}}{\bar{X}-1},$$

其中 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$.

$\cdots\cdots$5 分

设样本值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 则极大似然函数为

$$L\left(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta\right)=\prod_{i=1}^{n}f\left(x_i;\theta\right)=(\theta+1)^n\left(x_1x_2\cdots x_n\right)^{\theta},\quad 0<x_1,x_2,\cdots,x_n<1.$$

对数似然函数为

$$\ln L\left(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta\right)=n\ln(\theta+1)+\theta\ln\left(x_1x_2,\cdots x_n\right).$$

由

$$\frac{\mathrm{d}\ln L\left(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta\right)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\ln\left(x_1x_2,\cdots x_n\right)=0.$$

解得 θ 的极大似然估计为

$$\hat{\theta}=-\frac{n}{\ln\left(x_1x_2,\cdots x_n\right)}-1.$$

$\cdots\cdots$10 分