A卷

一　单选题（每题3分，共15分）

1. C　2. A　3. B　4. D　5. D

二　填空题（每题3分，共15分）

1. 0　2. $\frac{17}{4}$　3. $\frac{3}{4}$　4. -1　5. $f(0)$

三　解答题

1. 本题7分（想到使用夹逼的方法，即可得3分）

一方面，

$$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\geqslant\frac{n+1}{(2n)^2}\to 0\,,\quad 2分$$

另一方面，

$$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\leqslant\frac{n+1}{n^2}\to 0\,,\quad 2分$$

从而由夹逼定理，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=0\,.\quad 3分$$

2. 本题7分（第一步只要会计算导数，第二步只要会使用Taylor展开即可）

$$f'(x) = \frac{3x^2(\sin x - x) - (\cos x - 1)x^3}{(\sin x - x)^2} \quad 3分$$

$$= \frac{3x^2(-\frac{1}{6}x^3 + o(x^4)) + (\frac{1}{2}x^2 + o(x^3))x^3}{(-\frac{1}{6}x^3 + o(x^4))^2} = \frac{o(x^6)}{\frac{1}{36}x^6 + o(x^6)} \quad 3分$$

从而

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0\,. \quad 1分$$

3. 本题7分（直接写出参数曲线二阶导数的公式，至少得4分）

$$\mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t\,,\ \mathrm{d}y = 2\cos 2t\,\mathrm{d}t\,. \quad 2分$$

故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{2\cos 2t}{\sin t}. \quad 1分$$

从而

$$\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{2\cos 2t\cos t + 4\sin 2t\sin t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t\,, \quad 2分$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2\cos 2t\cos t + 4\sin 2t\sin t}{\sin^3 t}\,. \quad 2分$$

4. 本题7分（第一步，只要正确使用分部积分，即可得4分）

$$\int e^{3x}\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x + \frac{2}{3}\int e^{3x}\sin 2x\,\mathrm{d}x \quad 4分$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x + \frac{2}{9}e^{3x}\sin 2x - \frac{4}{9}\int e^{3x}\cos 2x\,\mathrm{d}x\,, \quad 2分$$

从而

$$\int e^{3x}\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{13}e^{3x}\cos 2x + \frac{2}{13}e^{3x}\sin 2x + C\,. \quad 1分$$

5. 本题7分（前两步的要点是变量替换，懂得使用变量替换，即可得4分）

$$\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\sqrt{1-\sin^2 t}\,\mathrm{d}\sin t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t \quad 3分$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t - \sin^5 t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t - \sin^4 t)\,\mathrm{d}\cos t = \int_0^1 [(1-y^2) - (1-y^2)^2]\,\mathrm{d}y\,, \quad 2分$$

$$= \int_0^1 (y^2 - y^4)\,\mathrm{d}y = \left(\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{15}\,. \quad 2分$$

6. 本题7分

首先，对一切 x，$y(x)$ 有定义．这是因为函数 $f(y)=y^3-y$ 严格单调递增，且当 $x\to\pm\infty$ 时，$f(x)\to\pm\infty$．　　2分（如没有证明，只有结论，得1分）

两边求微分，得

$$(3y^2+1)\mathrm{d}y=(2x+3)\mathrm{d}x\,,\qquad 3分$$

故 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2x+3}{3y^2+1}$．从而在 $(-\frac{3}{2},+\infty)$ 上，$y(x)$ 严格单调递增，在 $(-\infty,-\frac{3}{2})$ 上，$y(x)$ 严格单调递减.　　2分

7. 本题14分（连续性部分6分，旋转体体积部分8分）

由函数的连续性，得 $f(1)=1$，从而 $k=-1$，$b=2$．　3个数值每个2分.

此时旋转体的体积为（懂得体积公式3分；定积分的计算，其中之一正确2分，都正确得3分）

$$V=\pi\left[\int_0^1 x^{2a}\mathrm{d}x+\int_1^2(2-x)^2\mathrm{d}x\right]=\pi\left(\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{3}\right).\quad 6分$$

从而 $a=\dfrac{1}{4}$．　2分，知道 $a>0$ 可得1分

8. 本题7分（懂得 Lagrange 使用中值定理即可得4分）

当 $x\neq 0$ 时，若 $|f(x)|\geqslant M|x|$，则

$$|f(x)-f(0)|=|f(x)|\geqslant M|x|\,.\qquad 3分$$

而根据 Lagrange 中值定理，

$$|f(x)-f(0)|=|f'(\theta x)|\cdot|x|<M|x|\,.\qquad 4分$$

矛盾.

9. 本题7分

令 $f(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}$，则 $f(0)=0$，

$$f'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}\,,\ f'(0)=0\,.$$

进而再计算

$$f''(x)=x-\sin x>0\,.$$

从而当 $x>0$ 时 $f'(x)$ 严格单调递增，于是 $f'(x)>0$，从而 $f(x)$ 严格单调递增，于是 $f(x)>0$．

如果没有完全证明，想到通过函数的单调性证明结论，得3分，想到借助导数研究单调性，再得2分.