浙江工业大学 2020/2021 学年
第一学期概率论与数理统计期末考试试卷参考答案与评分标准

分位点数据：

$$t_{0.05}(8) = 1.8595,\quad t_{0.05}(9) = 1.8331,\quad t_{0.025}(8) = 2.306,\quad t_{0.025}(9) = 2.2622$$

一、填空题.(每空2分, 共 28 分)

1. 0.2, 2/7;
2. 10/19;
3. 0.5
4. 1/3, 19/27
5. 0
6. 1, 1
7. 2/3
8. 0.2, 0.04
9. 21, 9.56

二、选择题.(每小题 3 分，共 12 分)

1. C
2. B
3. B
4. A

三. 解答题.（共 60 分）

1.(10 分) 甲、乙、丙三门炮各发射一枚炮弹, 同时射击一个目标, 各炮命中率分别为$0.4, 0.5, 0.6$.

(1) 求目标被击中的概率;

(2) 已知目标被击中, 求甲击中目标的概率是多少?

解: 设A_1, A_2, A_3分别表示甲、乙、丙三门炮发射的炮弹击中目标；B 表示目标被击中.

(1) $P(B) = 1 - P(\overline{A_1 A_2 A_3}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})(\overline{A_3})$

$= 1 - (1 - 0.4)(1 - 0.5)(1 - 0.6)$

$= 0.88;$ ······6分

(2) $P(A_1|B) = \dfrac{0.4}{0.88} = \dfrac{5}{11}.$

······10分

2. (10 分)设随机变量 X 的分布律为：

X	-4	-1	0	2	4
p	0.35	a	$2a$	0.05	0.15

求: (1) 常数 a;　(2) $Y = 2X^2 + 1$的分布律.

解: (1)由随机变量的规范性, 得

$$0.35 + a + 2a + 0.05 + 0.15 = 1,$$

解之, 得

$$a = 0.15.$$ ······2分

(2) 因为

X	-4	-1	0	2	4
$Y = 2X^2 + 1$	33	3	1	9	33
p	0.35	a	$2a$	0.05	0.15

······7分

所以随机变量Y的分布律为

Y	1	3	9	33
p	0.3	0.15	0.05	0.5

······10分

3. (12 分) 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}Ax, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求常数A; (2) 求$P\left(|X|<\dfrac{1}{2}\right)$; (3)若随机变量$Y$与$X$独立同分布, 求$P(X+Y<1)$.

解: (1) 由规范性, 得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1,$$

即
$$\int_0^1 Ax\mathrm{d}x=1,$$

解之, 得

$$A=2;$$
$\cdots\cdots 2$分

(2) $P(|X|<\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}} 2x\mathrm{d}x=0.25;$ $\cdots\cdots 6$分

(3)因为随机变量X与Y相互独立, 所以它们的联合密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}4xy, & 0<x,y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$\cdots\cdots 8$分

于是

$$\begin{aligned}P(X+Y<1) &= \iint\limits_{x+y<1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} 4xy\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

$\cdots\cdots 12$分

4. (8 分) 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1, |y|\le x;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求 X,Y 的边缘密度函数, 并判断它们之间的独立性.

解: X的边缘密度函数为$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$, 则

当$x<0$或$x>1$时, $f_X(x)=0$;

当$0\le x\le 1$时, $f_X(x)=\int_{-x}^{x}\mathrm{d}y=2x$;

所以X的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

类似, 可得Y的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}1-|y|, & -1\le y\le 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$\cdots\cdots$6分

显然, $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$, 所以随机变量X和Y不相互独立.

$\cdots\cdots$8分

5.(10 分) 化肥厂用自动包装机包装化肥, 每包的质量服从正态分布, 其平均质量为100公斤. 某日开工后, 从中随意抽取容量为9的一个样本, 测得样本均值 $\overline{x}=99.97$公斤, 样本标准差 $s=1.2$公斤. 试在显著性水平$\alpha=0.05$下, 检验该化肥厂包装的化肥的平均质量是否为100公斤?

解: 原假设$H_0:\mu=\mu_0=100$, 备择假设$H_1:\mu\ne 100$

检验统计量 $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$; $\cdots\cdots$4分

检验统计量的值为

$$\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{s/\sqrt{n}}=\frac{|99.97-100|}{1.2/\sqrt{9}}=0.075<t_{0.025}(8)=2.306,$$

$\cdots\cdots$8分

接受原假设. 所以, 该化肥厂包装的化肥的平均质量为100公斤.

$\cdots\cdots$10分

6. (10 分) 设总体X的概率密度函数为:

$$f(x)=\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{\frac{-|x|}{\sigma}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

其中$\sigma>0$是未知参数, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是从该总体中随机抽出的样本. 设$\widetilde{\sigma}$是σ的极大似然估计.
(1)求$\widetilde{\sigma}$; (2) 判断$\widetilde{\sigma}$是否是σ的无偏估计, 请说明理由.

解: (1)似然函数为

$$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x_i|}{\sigma}}=(2\sigma)^{-n}\mathrm{e}^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}},$$

取对数, 得

$$\ln L(\sigma)=-n\ln(2\sigma)-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma},$$

令$\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}=0$, 得

$$-\frac{n}{\sigma}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma^2}=0,$$

解之, 得

$$\overline{\sigma}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|}{n}.$$

$\cdots\cdots$5分

(2) 因为

$$\begin{aligned}E(\overline{\sigma}) &= E\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|}{n}\right)=E(|X_1|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x_1|\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x_1|}{\sigma}}\mathrm{d}x_1\\ &= 2\int_{0}^{+\infty}x_1\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x_1|}{\sigma}}\mathrm{d}x_1\\ &= \sigma,\end{aligned}$$

所以, $\widetilde{\sigma}$是σ的无偏估计.

$\cdots\cdots$10分