浙江工业大学 2021/2022 学年第一学期
概率论与数理统计期末考试试卷

学号：________________ 姓名：________________

班级：________________ 任课教师：________________

题号	一	二	三	总分
得分				

分位点数据：

$\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(1.645) = 0.9500$, $\Phi(1.96) = 0.9750$, $\Phi(2) = 0.9772$

$t_{0.05}(8) = 1.860$, $t_{0.05}(9) = 1.833$, $t_{0.025}(8) = 2.306$, $t_{0.025}(9) = 2.262$

$\chi^2_{0.025}(8) = 17.535$, $\chi^2_{0.025}(9) = 19.023$, $\chi^2_{0.05}(8) = 15.507$, $\chi^2_{0.05}(9) = 16.919$

$\chi^2_{0.975}(8) = 2.180$, $\chi^2_{0.975}(9) = 2.700$, $\chi^2_{0.95}(8) = 2.733$, $\chi^2_{0.95}(9) = 3.325$

一. 填空题（每空 2 分，共 28 分）

1. 设 A, B 是随机事件, $P(B) = 2P(A) > 0$, $P(A|B) = 0.3$, 则 $P(\overline{A}|B) =$ __________, $P(B|A) =$ __________.

2. 独立重复投掷一颗均匀的骰子, 一直到出现偶数点为止. 设抛掷次数为 X, 最后一次抛掷出的点数为 Y. 则$P(X = 5, Y = 6) =$ __________, $P(Y = 6) =$ __________.

3. 独立重复地抛一枚均匀的硬币, 用 X 表示前两次出现正面的次数, 用 Y 表示前三次出现正面的次数. 那么 $P(X = 1, Y = 2) =$ __________, $Cov(X, Y) =$ __________.

4. 设 X 服从参数为 2 的泊松分布. 则 $E(X^2) =$ __________.

5. 设 X 服从 $[5, 10]$ 上的均匀分布, 则 $E[\max(X, 8)] =$ __________.

6. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 相互独立, 并且它们都服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布. 令 $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$. 则根据切比雪夫不等式, $P(|Y - 50| \le 10) \ge$ __________. 根据中心极限定理, $P(Y - 50 < \frac{10}{\sqrt{3}})$ 约为__________.

7. 设 $X_1, X_2, \cdots$ 相互独立, 并且它们都服从参数为 2 的泊松分布. 令 Y_n 表示 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 中大于 1 的个数. 则当 $n \to \infty$ 时, $\frac{Y_n}{n}$ 依概率收敛到__________.

8. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 设 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 是来自总体 X 的简单随机样本. 令 $Y = \frac{X_1+X_2+X_3}{3}$. 则 $Var(X_1 - Y) =$ __________, $\frac{X_4 - X_5}{\sqrt{(X_1-Y)^2+(X_2-Y)^2+(X_3-Y)^2}}$ 服从__________分布.(请标明参数). 若$a[(X_1 - Y)^2 + (X_2 - Y)^2 + (X_3 - Y)^2]$是 σ^2 的无偏估计, 则常数 $a =$ __________.

二. 选择题（每题 3 分，共 12 分）

1. 设 (X, Y) 服从二维正态分布, $EX = 1$, $EY = 0$, $Var(X) = 4$, $Var(Y) = 16$, $\rho_{XY} = 0.5$. 则 $P(X > Y) =$ ( )

   (A) $\Phi(\frac{1}{\sqrt{20}})$ (B) $\Phi(\frac{1}{\sqrt{12}})$ (C) $1 - \Phi(\frac{1}{\sqrt{20}})$ (D) $1 - \Phi(\frac{1}{\sqrt{12}})$

2. 设 $Z = XY$, 这里 X和 Y相互独立, $P(X = 1) = P(X = 2) = 0.5$, $Y \sim U(1, 3)$. 则 $P(2 \le Z \le 3) =$ ( )

   (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5}{8}$

3. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 是来自总体 X 的容量为 100 的简单随机样本, 总体 X 服从参数为 1 的泊松分布. 下面说法**错误**的是 ( )

   (A) $\sum\limits_{i=1}^{100} X_i$ 服从参数为 100 的泊松分布
   (B) $\sum\limits_{i=1}^{100} X_i$ 近似服从 $N(100, 100)$ 分布
   (C) $\frac{1}{100}\sum\limits_{i=1}^{100} X_i$ 服从参数为 1 的泊松分布
   (D) $\frac{1}{100}\sum\limits_{i=1}^{100} X_i$ 近似服从 $N(1, \frac{1}{100})$ 分布

4. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 未知. 对来自总体 X 的容量为 9 的简单随机样本, 设其样本均值为$\overline{X}$, 样本标准差为 S. 对于检验假设 $H_0 : \mu = 5$, $H_1 : \mu \neq 5$, 在显著水平 0.1 下, 拒绝域为: ( )

   (A) $\frac{|3(\overline{X}-5)|}{S} \ge t_{0.1}(9)$ (B) $\frac{|3(\overline{X}-5)|}{S} \ge t_{0.05}(9)$
   (C) $\frac{|3(\overline{X}-5)|}{S} \ge t_{0.1}(8)$ (D) $\frac{|3(\overline{X}-5)|}{S} \ge t_{0.05}(8)$

三. 解答题（共 60 分）

1. (10 分)设连续型随机变量 X 的概率密度函数为： $f(x)=\begin{cases} cx^3, & 0\le x\le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$.

   (1) 求常数 c；(2) 计算 X 的分布函数 $F(x)$；(3) 计算 $P\left(|X-0.5|\le 0.3\right)$.

2. (10 分) 盒中有 10 个乒乓球, 其中 2 个旧球, 8 个新球, 第一次比赛时从盒中任取 2 个球用, 用后放回盒中; 第二次比赛时再从盒中任取 2 个球用, 求

   (1) 第二次比赛用球都是新球的概率;

   (2) 已知第二次比赛用球都是新球的条件下, 第一次比赛用球都是新球的概率.

3. (12 分) 设二维随机向量 (X, Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3(3-x)}, & 0 < x < 3, 0 < y < 3 - x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

计算: (1) X的边缘密度函数 $f_X(x)$; (2) $P(Y < 0.5 | X = 1)$; (3) $E(XY)$.

4. (8 分) 设二维随机向量 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	-1	0	1
0	x	$1/6$	y
1	$1/6$	0	$1/3$

(1) 求 $Cov(X,Y)$;　(2)若 X 与 Y 不相关, 求 x 和 y .

5. (10 分) 已知某流水线生产的袋装食品重量 X (单位：克) 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 现从中随机抽取 9 袋食品, 测得样本均值 $\overline{x}=105$, 样本方差 $s^2=25$.

(1) 求总体均值 μ 置信水平为 0.95 的单侧置信下限;

(2) 在显著水平为 0.05 下, 检验假设 $H_0:\sigma^2=20$,　$H_1:\sigma^2\neq 20$.

6. (10 分) 设总体 X 具有分布律

X	0	1	2
P	$1-\theta$	$\theta(1-\theta)$	θ^2

这里 $0 \le \theta \le 1$ 未知. 设来自总体 X 的容量为 10 的简单随机样本的样本观察值为

$0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2.$

求(1) θ 的矩估计值; (2) θ 的极大似然估计值.