浙江工业大学 2021/2022 学年第一学期
概率论与数理统计期末考试参考答案

一. 填空题（每空 2 分，共 28 分）

1. 0.7, 0.6,

2. $\frac{1}{96}$， $\frac{1}{3}$

3. $\frac{1}{4}$， $\frac{1}{2}$

4. 6

5. $\frac{42}{5}$

6. $\frac{11}{12}$， 0.9772

7. $1-3\mathrm{e}^{-2}$

8. $\dfrac{2}{3}\sigma^2$, $t(2)$, $\frac{1}{2}$

二. 选择题（每题 3 分，共 12 分）

1. B

2. B

3. C

4. D

三. **解答题（共 60 分）**

1. (10 分)设连续型随机变量 X 的概率密度函数为： $f(x)=\begin{cases} cx^3, & 0\le x\le 1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$.

(1) 求常数 c ; (2) 计算 X 的分布函数 $F(x)$; (3) 计算 $P\left(|X-0.5|\le 0.3\right)$.

解: (1) 由$\int_0^1 cx^3dx=\frac{c}{4}=1$, 得 $c=4$; ······3分

(2)

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \int_0^x f(t)dt=x^4, & 0\le x\le 1, \\ 1, & x>1; \end{cases}$$

(3) $P(|X-0.5|\le 0.3)=P(0.2\le X\le 0.8)=0.408=\dfrac{51}{125}$. ······10 分

2. (10 分) 盒中有 10 个乒乓球, 其中 2 个旧球(新球用了一次后即为旧球), 8 个新球, 第一次比赛时从盒中任取 2 个球用, 用后放回盒中; 第二次比赛时再从盒中任取 2 个球用, 求

(1) 第二次比赛用球都是新球的概率;

(2) 已知第二次比赛用球都是新球的条件下, 第一次比赛用球都是新球的概率.

解: (1) 记A_i表示第一次取出i个新球, $i=0,1,2$, B表示第二次取出 2 个新球.

$$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{1}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_8^2}{C_{10}^2}+\frac{C_8^1C_2^1}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_7^2}{C_{10}^2}+\frac{C_8^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{784}{2025};$$

(2) $P(A_2|B)=\dfrac{P(A_2B)}{P(B)}=\dfrac{15}{28}$.

3. (12 分) 设二维随机向量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{3(3-x)}, & 0<x<3, 0<y<3-x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

计算: (1) X的边缘密度函数 $f_X(x)$;　(2) $P(Y<0.5|X=1)$;　(3) $E(XY)$.

解: (1)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{3-x}\dfrac{1}{3(3-x)}dy=\dfrac{1}{3}, & 0<x<3,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$

(2) $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$,

当$0<x<3$时,

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{3-x}, & 0<y<3-x,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$P(Y<0.5|X=1)=\int_0^{0.5}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{4}$;

(3) $E(XY)=\int_0^3 dx\int_0^{3-x}xy\frac{1}{3(3-x)}dy=\dfrac{3}{4}$.

4. (8 分) 设二维随机向量 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	-1	0	1
0	x	1/6	y
1	1/6	0	1/3

(1) 求 $Cov(X,Y)$;　(2)若 X 与 Y 不相关, 求 x 和 y .

解: (1) $E(XY)=\frac{1}{6}$,　$EX=\frac{1}{2}$,　$EY=\frac{1}{6}+y-x$,

$Cov(X,Y)=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}(\frac{1}{6}+y-x)=\frac{1}{12}+\frac{1}{2}(x-y)$;

(2) 由 $x+y=\frac{1}{3}$,　$Cov(X,Y)=\frac{1}{12}+\frac{1}{2}(x-y)=0$, 得

$x=\frac{1}{12}$,　$y=\frac{1}{4}$.

5. (10 分) 已知某流水线生产的袋装食品重量 X (单位：克) 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 现从中随机抽取 9 袋食品, 测得样本均值 $\overline{x}=105$, 样本方差 $s^2=25$.

(1) 求总体均值 μ 置信水平为 0.95 的单侧置信下限;

(2) 在显著水平为 0.05 下, 检验假设 $H_0:\sigma^2=20,\ \ H_1:\sigma^2\neq 20$.

解: (1) 单侧置信下限是$\bar{x}-\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{0.05}(8)=105-\dfrac{5}{3}\cdot 1.86=101.9$

$\cdots\cdots$4分

(2) 拒绝域是 $\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\geq\chi^2_{0.025}(n-1)\right\}$或$\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\leq\chi^2_{0.975}(n-1)\right\}$,

$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=10,\quad \chi^2_{0.025}(8)=17.535,\quad \chi^2_{0.975}(8)=2.180,$

不在拒绝域内，故接受原假设.

6. (10 分) 设总体 X 具有分布律

X	0	1	2
P	$1-\theta$	$\theta(1-\theta)$	θ^2

这里 $0\leq\theta\leq 1$ 未知. 设来自总体 X 的容量为 10 的简单随机样本的样本观察值为 $0,0,0,1,1,1,1,2,2,2$.

求(1) θ 的矩估计值; (2) θ 的极大似然估计值.

解:(1) $EX=\theta(1-\theta)+2\theta^2=\theta^2+\theta$,

得 $\widehat{\theta}=\dfrac{-1+\sqrt{4\bar{x}}}{2}$ ($\theta>0$,另一个值小于0，舍掉）

将$\bar{x}=1$代入上式, 得 $\widehat{\theta}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$;

(2) $L(\theta)=\theta^{10}(1-\theta)^7$,

$\dfrac{dL(\theta)}{d\theta}=10\theta^9(1-\theta)^7-7\theta^{10}(1-\theta)^6=0,$

解得, $\widehat{\theta}=\dfrac{10}{17}$.