______________大学　高等数学 A1 评分细则

2021—2022 学年第一学期　使用班级 ______________________

一、选择题

1. A　　2. B　　3. A　　4. C　　5. D

二、填空题

1. $x=0$　　2. 12　　3. $(\mathrm{e},+\infty)$　　4. 1　　5. $x\tan x+\ln|\cos x|-\frac{1}{2}x^2+C$

三、1. 解　$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\cos\sqrt{x}-1\right)^{\frac{1}{x}}$　　【2 分】

$\lim\limits_{x\to0^+}\left[\left(1+\cos\sqrt{x}-1\right)^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}}\right]^{\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$　　【4 分】

2. 解　$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1-2t,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2t,$　　【2 分】

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2t}{1-2t}$　　【2 分】

$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{2}{(1-2t)^3}$　　【2 分】

3. 解　$\int x\arcsin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\arcsin x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$　　【3 分】

$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int\sin^2t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(t-\sin t\cos t)$

$=\frac{1}{2}\left(\arcsin x-x\sqrt{1-x^2}\right)+C$

所以

$\int x\arcsin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\arcsin x-\frac{1}{4}\left(\arcsin x-x\sqrt{1-x^2}\right)+C$　　【3 分】

4. 解　$\int_0^{\ln2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{2t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$　　【3 分】

$=2[t-\arctan t]_0^1=2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$　　【3 分】

四、1. 解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x t\cos t dt}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{x^2}\int_0^x e^{t^2}dt}{x\cos x}$　【4 分】

$=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^{t^2}dt}{x}$　【2 分】

$=2\lim\limits_{x\to 0}e^{x^2}=2$　【2 分】

2. 解　因 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$　【2 分】

$=\lim\limits_{x\to 0}x^{\lambda-1}\sin\dfrac{1}{x^2}$　【3 分】

所以，可导，即极限存在 $\Leftrightarrow \lambda>1$　【3 分】

3. 解　$\int_0^1 xf(x)dx=\dfrac{1}{2}\left[x^2 f(x)\right]\Big|_0^1-\dfrac{1}{2}\int_0^1 x\sin x dx$　【3 分】

$=-\dfrac{1}{2}\int_0^1 x\sin x dx=\dfrac{1}{2}x\cos x\Big|_0^1-\dfrac{1}{2}\int_0^1\cos x dx$　【3 分】

$=\dfrac{1}{2}(\cos 1-\sin 1)$　【2 分】

五、1. 解　$y'=\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$　【2 分】

$(-\infty,0)$ ，$(0,1)$，$(3,+\infty)$ 单增　　$(1,3)$ 单减　【4 分】

极小值 $f(3)=\dfrac{27}{4}$　【2 分】

2. 解　切点 $\left(4,\sqrt{2}\right)$　【2 分】

$V_1=\dfrac{16\sqrt{2}}{3}\pi$　【1 分】

$V_2=2\pi\int_2^4(4-x)\sqrt{x-2}dx=2\pi\int_2^4(2-x+2)\sqrt{x-2}dx$

$=2\pi\left[\dfrac{4}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{2}{5}(x-2)^{\frac{5}{2}}\right]=\dfrac{32\sqrt{2}\pi}{15}$　【3 分】

$V_{x=4}=V_1-V_2=\dfrac{48\sqrt{2}\pi}{15}$　【2 分】

________大学　高等数学 A1 评分细则

2021—2022 学年第一学期　使用班级 ________________

六、证明题（本题满分 6 分）

1. 证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1+x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+x}\mathrm{d}x$　【2 分】

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+x}\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1+\frac{\pi}{2}-x}\mathrm{d}x$　【2 分】

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x-\cos x)\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+\frac{\pi}{2}-x}\right)\mathrm{d}x<0$$

所以，不等式成立　【2 分】