浙江工业大学 2022/2023 学年第二学期
概率论与数理统计A(48学时)期末考试试卷参考答案

一. 选择题 (共 24 分，每题 3 分)

1. C
2. D
3. A
4. B
5. B
6. A
7. B
8. B

二. 填空题 (共 16 分，每空 2 分)

9. 0.3

10. 3, $\quad 1-\mathrm{e}^{-3}$

11. $-\dfrac{1}{15}$

12. $\dfrac{2}{3}$, $\quad 0$

13. $\dfrac{1}{2}$

14. $\dfrac{\overline{X}}{10}$

三. 解答题 (共 6 题，60 分)

15. (8 分) 设第一只盒子中装有 3 只蓝色球，2 只绿色球，2 只白色球，第二只盒子中装有 2 只蓝色球，3 只绿色球，4 只白色球. 独立地在两只盒子中分别随机取一只球.

(1) 求至少有一只蓝色球的概率； (2) 已知至少有一只蓝色球，求有一只蓝色球，一只白色球的概率.

解: (1) $p_1 = \dfrac{3}{7}\times\dfrac{7}{9}+\dfrac{2}{9}\times\dfrac{4}{7}+\dfrac{3}{7}\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{5}{9}$;

(2) $p_2 = \dfrac{\dfrac{2}{9}\times\dfrac{4}{7}+\dfrac{3}{7}\times\dfrac{7}{9}}{\dfrac{5}{9}} = \dfrac{16}{35}$.

16. (8 分) 设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

求：(1) X 的分布函数$F(x)$；(2) $P(F(X)>\frac{1}{3})$.

解: (1)$F(x)=\begin{cases}1, & x\ge 2,\\ \int_0^x \frac{t}{2}\mathrm{d}t=\frac{x^2}{4}, & 0<x<2,\\ 0, & 其他;\end{cases}$

(2) $P(F(X)>\frac{1}{3})=P(\frac{X^2}{4}>\frac{1}{3},X>0)=P(X>\frac{2}{\sqrt{3}})=\int_{2/\sqrt{3}}^{2}\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$.

17. (10 分) 设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	-1	0	1
-1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.2
1	0	0.1	c

其中a,b,c为常数, 且满足$E(X)=-0.2$, $P(Y\le 0|X\le 0)=0.5$.

求：(1) a,b,c 的值；(2) $X+Y$ 的分布列.

解: (1) 由题意, 得

$a+b+c=0.4,\quad a-c=-0.1,\quad a+b=0.3,$

所以 $a=0.2,\quad b=0.1,\quad c=0.1;$

(2)

$X+Y$	-2	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

18. (12 分)设(X,Y)是二维连续型随机变量, X 的边缘密度函数

$$f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

在给定 $X=x(0<x<1)$ 的条件下, Y 的条件概率密度函数为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{3y^2}{x^3}, & 0<y<x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求: (1) (X,Y) 的概率密度函数 $f(x,y)$; (2) Y 的边缘密度函数$f_Y(y)$; (3) $P(X+Y>1)$.

解: (1) 由题意, 得

$f(x,y)=\begin{cases}\frac{9y^2}{x}, & 0<y<x<1,\\ 0, & 其他;\end{cases}$

(2) $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_y^1 \frac{9y^2}{x}\mathrm{d}x = -9y^2\ln y, & 0<y<1, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$

(3) $P(X+Y>1) = \int_{1/2}^{1}\mathrm{d}x\int_{1-x}^{x}\frac{9y^2}{x}\mathrm{d}y = \frac{23}{8} - 3\ln 2.$

19. (12 分) 设总体 $X \sim U(0,\theta)$, $X_1, X_2, \cdots, X_5$ 是 X 的样本, $\overline{X}$ 是样本均值. 设

$$\widehat{\theta}_1 = 2\overline{X}, \quad \widehat{\theta}_2 = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_5\}$$

是 θ 的两个估计量.

(1) 判断 $\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2$ 是否为无偏估计? 求常数 C_i, 使得 $\widetilde{\theta}_i = C_i\widehat{\theta}_i (i=1,2)$ 是无偏估计;

(2) 在无偏-有效性准则下, 分析 $\widetilde{\theta}_1, \widetilde{\theta}_2$ 这两个估计的优劣, 并说明理由.

解: (1) $E(\widehat{\theta}_1) = E(2\overline{X}) = \theta,$

$\widehat{\theta}_2$的密度函数是 $f(x) = \begin{cases} \frac{5x^4}{\theta^5}, & 0<x<\theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$

$E(\widehat{\theta}_2) = \int_0^{\theta} x\cdot\frac{5x^4}{\theta^5}\mathrm{d}x = \frac{5}{6}\theta \neq \theta,$

所以$\widehat{\theta}_1$是无偏估计, $\widehat{\theta}_2$ 不是无偏估计.

$C_1 = 1, \quad C_2 = \frac{6}{5};$

解: (2) $D(\tilde{\theta}_1) = \frac{1}{15}\theta^2 > D(\tilde{\theta}_2) = \frac{1}{35}\theta^2,$

所以$\tilde{\theta}_2$ 更优.

20. (10 分) 从一批保险丝中抽取 10 根, 试验其熔化时间(单位: 秒), 结果为

43, 65, 75, 70, 59, 57, 69, 55, 57, 72.

假设熔化时间服从正态分布, 在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下, 能否认为熔化时间的方差为 100?

解: $H_0:\ \sigma^2 = 100 \ \ vs\ \ H_1:\ \ \sigma^2 \neq 100$

检验统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$

拒绝域 $W = \{\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.025}(9) = 19.022\}\bigcup\{\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.975}(9) = 2.700\},$

又$\bar{x} = 62.2, S^2 = 95.5$, 得 $2.700 < \chi^2 = 8.595 < 19.022,$

不在拒绝域内, 所以接受原假设.