学院________ 班级________ 姓名________ 学号________ 教师姓名________

长三角工程教育联盟高校高等数学联考

2022/2023 学年第 1 学期

题序	一	二	三(1)	三(2)	三(3)	三(4)	三(5)	三(6)	三(7)	三(8)	三(9)	总评
计分												

命题：

一 单选题 5 小题，每小题 3 分，共 15 分

1. 考虑极限 (1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$，(2) $\lim\limits_{x\to0}g(x)$ 和 (3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}$，则以下表述错误的是（C）

   A 若 (1) 为无穷，(2) 为有限数，则 (3) 为无穷

   B 若 (1) 为有限数，(2) 既非有限数也非无穷，则 (3) ~~不~~可能为有限数

   C 若 (1) 和 (2) 均既非有限数也非无穷，则 (3) 既非有限数也非无穷

   D 若 (1) 和 (2) 均为无穷，则 (3) 可能为有限数也可能为无穷

2. 当 $x\to0$ 时，与 x^{2022} 不是等价无穷小量的是（B）或 C

   A $\sin^{1011}(\tan^2 x)$　　B $1-\cos x^{1011}$　　C $(\ln(1+x^2)-1)^{1011}$　　D $(e^{x^3}-1)^{674}$

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则下列结论中正确的是（$\overset{D}{C}$）.

   A 该函数是不连续的　B 该函数是不可微的　C 该函数的导数连续　D 该函数存在原函数

4. 已知设 $f(x)$ 为连续函数，$g(x)=\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$，则下列结论中错误的是（C）.

   A $g(0)=0$　　B $g'(0)=0$　　C $g'(x)=f(x)$　　D $g''(x)=f(x)$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{k}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\frac{2}{x}$，则 $k=$（B）.

   A $ln2$　　B $-\ln2$　　C 0　　D -2

二 填空题 5 小题，每小题 3 分，共 15 分

1. 极限 $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x})=$ __0__.

2. $\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}\cancel{\mathrm{d}x}=$ __$\frac{\pi}{4}$__.

3. 已知质点受力 F 与位置 x 的关系为 $F(x)=\frac{1}{x^2}$，则该质点由 1 移动到无穷远处，力 F 的做功为 __1__.

4. 不定积分 $\int\arctan x\,\mathrm{d}x=$ __$x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$__

5. 对参数曲线 $(x(t),y(t))=(e^t\cos t,te^t\sin t)$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ __$\frac{\sin t+t\sin t+t\cos t}{\cos t-\sin t}$__.

三 解答题，共 70 分

1. （7 分）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$.

解：$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ ……(2分)

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$ ……(2分)

$\therefore$ 由夹逼准则得：

~~原式~~ $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})=1$ ……(3分)

2. （7 分）设 $ye^x+xe^y=1$ 确定隐函数 $y=f(x)$，求 $y'|_{x=0}$.

解：两边对 x 求导得：

$y'e^x+ye^x+e^y+x\cdot e^y\cdot y'=0$ ……(2分)

$\therefore y'=-\frac{ye^x+e^y}{e^x+xe^y}$ ……(2分)

当 $x=0$ 时，$y=1$ ……(1分)

$\therefore y'|_{x=0}=-1-e$ ……(2分)

3. （7 分）求不定积分 $\int\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解：令 $x=2\sin t$ $(t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}])$ 得： ……(2分)

$\int\sqrt{4-x^2}\,dx=4\int\cos^2t\,dt$

$=2t+\sin2t+C$ ……(3分)

$=2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C$ ……(2分)

4. （7 分）求定积分$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$.

解：令$\sqrt{x}=t$，则 ……（2分）

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx = 2\int_0^1 te^t dt$$
$$= 2[te^t|_0^1 - \int_0^1 e^t dt]$$ ……（3分）
$$= 2$$ ……（2分）

5. （7 分）求$y=\sin x$ $(0\le x\le\pi)$绕x轴旋转一圈所成的旋转体的体积.

解：$V=\pi\int_0^\pi \sin^2 x dx$ ……（3分）

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi(1-\cos 2x)dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi$$ ……（2分）
$$=\frac{\pi^2}{2}$$ ……（2分）

6. （7 分）证明当$x>0$时，不等式$\cos x > 1-\frac{x^2}{2}$成立.

证明：令 $f(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$

则 $f'(x)=-\sin x+x$

$f''(x)=1-\cos x$

$\therefore f'(x)$在$(0,+\infty)$上$\uparrow$ ……（4分）

$\therefore f'(x)>f'(0)=0$ $(x\in(0,+\infty))$

$\therefore f(x)>f(0)=0$ $(x\in(0,+\infty))$ ……（3分）

7. （14 分）已知$y(x)=\int_{-2x}^{x^2}\sin t\,dt$.

（1） （7 分）求$y'(x)$.

（2） （7 分）若$x\to 0^+$时，$y(x)$与x^n为同阶无穷小量，求n的值.

解：(1) $y'(x)=\sin x^2\cdot 2x-(\sin(-2x))\cdot(-2)$ ……（5分）

$=2x\cdot\sin x^2-2\sin 2x$ ……（2分）

(2) $y'(x)=2x(x^2+o(x^2))-2(2x+o(x^2))=-4x+o(x)$ ……（5分）

$\therefore y(x)$与x^2为同阶无穷小量 $\therefore n=2$ ……（2分）

8. （7 分）已知$y(x)=\frac{1}{x^3+x^2+2x+1}$，$y(x)$是否有间断点和极值点？有几条渐近线？

解：令 $f(x)=x^3+x^2+2x+1$，则$f'(x)=3x^2+2x+2>0$.

则分母在$(-\infty,+\infty)$内存在唯一的零点x_0. ……（2分）

则可得$y(x)$有一个第二类间断点. ……（1分）

（无穷）

$y'=-\frac{3x^2+2x+2}{(x^3+x^2+2x+1)^2}<0$，从而不会有极值点. ……（2分）

有1条垂直渐近线$x=x_0$，有1条水平渐近线$y=0$. ……（2分）

9. （7 分）设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$上可微，证明：存在$\xi\in(0,1)$使得$f(1)=f(\xi)+\xi f'(\xi)$.

证明：令：$F(x)=xf(x)-xf(1)$ ……（4分）

则$F(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导

又$\because F(0)=0$，$F(1)=0$

$\therefore$至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使得：$F'(\xi)=0$ ……（3分）

即存在$\xi\in(0,1)$使得 $f(1)=f(\xi)+\xi f'(\xi)$.

学院______ 班级______ 姓名______ 学号______ 教师姓名______