浙江工业大学 2021/2022 学年第二学期
概率论与数理统计期末考试试卷

一. 填空题（每空 2 分，共 28 分）

1. 0.3, $\frac{3}{8}$

2. 0.32, 0.88

3. $\frac{9}{16}$

4. $\frac{1}{2}$, $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

5. $\frac{16}{3}$, $\frac{80}{9}$

6. 5

7. $(8,4)$, F

8. $(-1.537, 1.537)$

9. $2\overline{X}$

二. 选择题（每题 3 分，共 12 分）

1. D

2. A

3. B

4. C

三. 解答题（共 60 分）

1. (10 分)某工厂有 A, B, C 三个车间生产同一种产品. 它们的产量分别占全厂的30%, 30%和40%. 这三个车间的次品率分别为 3%, 2%和1%.

   (1) 问该厂产品的次品率为多少?

   (2) 任选一件产品, 若发现该产品为次品,问该产品是 A 车间生产的概率为多大?

解：(1) D 表示次品，则

$P(A)=0.3,\ P(B)=0.3,\ P(C)=0.4,\ P(D\mid A)=3\%,\ P(D\mid B)=2\%,\ P(D\mid C)=1\%.$

由全概率公式,

$$P(D)=P(A)P(D\mid A)+P(B)P(D\mid B)+P(C)P(D\mid C)=0.019.$$

(2)

$$P(A\mid D)=\frac{P(A)P(D\mid A)}{P(D)}=\frac{9}{19}.$$

2. (10 分) 假设有 100 个桃子. 它们的重量独立同分布, 均值都为 100 克, 标准差为 3 克. 请利用中心极限定理给出这 100 个桃子重量超过 10060 克的概率?

解：$\Sigma_{i=1}^{100}X_i\sim N(10000,30^2)$, 则

$$\begin{aligned}P(\Sigma_{i=1}^{100}X_i>10060)&=1-P(\Sigma_{i=1}^{100}X_i\le 10060)\\&=1-\Phi\left(\frac{10060-10000}{30}\right)\\&=1-\Phi(2)\\&=1-0.9772=0.0228.\end{aligned}$$

3. (12 分) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-(4x+2y)}, & x>0\ \text{且}\ y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求常数 A；(2) 计算 X 与 Y 的边缘密度函数;

(3) 判断 X 与 Y 是否独立? 并给出理由.

解：(1) $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}Ae^{-(4x+2y)}\,dxdy=1$, 所以 $A=8$.

(2) 当 $x>0$ 时，$f_X(x)=\int_0^{+\infty}8e^{-(4x+2y)}\,dy=4e^{-4x}$, 所以

$$f_X(x)=\begin{cases}4e^{-4x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

当 $y>0$ 时，$f_Y(y)=\int_0^{+\infty} 8e^{-(4x+2y)}\,dx=2e^{-2y}$, 所以

$$f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

(3) $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, 所以 X 与 Y 独立。

4. (8 分) 假设 X 服从参数为 100 的泊松分布. 利用切比雪夫不等式给出 $P(X\le 200)$ 的下界估计, 即说明 $P(X\le 200)$ 至少为多少.

解：$X\sim P(100)$, $E(X)=100, Var(X)=100$.

$$P(X\le 200)=P(0\le X\le 200)=P(\mid X-100\mid\le 100)\ge 1-\frac{100}{100^2}=\frac{99}{100}.$$

5. (10 分)设总体 X 的分布律为 $P(X=1)=p, P(X=0)=1-p$. 从该总体中取容量为 100 的样本, 其具体观测值为 $x_1,x_2,\cdots,x_{100}$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{100}x_i=40$. 请给出 p 的极大似然估计值.

解：$\sum\limits_{i=1}^{100}x_i=40$ 说明 40 个样本为 1，60 个样本为 0. 极大似然函数为

$$L(p)=(1-p)^{60}p^{40}.$$

取对数，

$$\ln L(p)=60\ln(1-p)+40\ln p.$$

关于 p 求导数，

$$\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{-60}{1-p}+\frac{40}{p}=0.$$

所以，p 的极大似然估计值 $\widehat{p}=0.4$.

6. (10 分) 从某批矿砂中任选 9 个样品, 测得镍含量百分比的样本均值为 3.02 , 样本标准差为 0.18 . 假设这批矿砂的镍含量百分比服从正态分布. 问在显著水平 $\alpha=0.05$ 下, 是否有充分的理由认为镍含量平均百分比大于 2.95 ?

解：$H_0:\mu\le 2.95,\quad H_1:\mu>2.95.$

统计量

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\frac{3.02-2.95}{0.18/\sqrt{9}}=1.17,$$

拒绝域为 $(t_{0.05}(8),+\infty)=(1.86,+\infty)$，不在拒绝域内，故接受 H_0，即不能认为镍含量平均百分比大于 2.95 。