浙江工业大学 2021/2022 学年第一学期
概率论与数理统计期末考试参考答案

学号：________________ 姓名：________________

班级：________________ 任课教师：________________

题号	一	二	三	总分
得分				

一. 填空题（每空 2 分，共 28 分）

1. $\frac{5}{9}$
2. 7， $\frac{5}{36}$， $\frac{5}{18}$
3. e^{-1}
4. $1-4e^{-3}$， $\frac{3}{8}$
5. $\frac{1}{2}$， $\frac{1}{3}$
6. $\frac{1}{4}$， 0.0456
7. $\frac{1}{\sqrt{2}}$， $\frac{1}{2}$， $\frac{1}{4}$

二. 选择题（每题 3 分，共 12 分）

1. A
2. D
3. D
4. C

三. 解答题（共 60 分）

1. (8 分) 有一个象棋俱乐部, 其中 20% 为一类棋手, 50% 为二类棋手, 30% 为三类棋手. 小李赢一类棋手、二类棋手、三类棋手的概率分别为 0.4、 0.5、 0.6. 从这俱乐部中任选一人与小李比赛.

(1) 求小李获胜的概率;

(2) 若小李获胜, 则对手是三类棋手的概率是多少?

解: (1) 设A_i表示是第i类棋手, $i=1,2,3$; B表示小李获胜, 则由全概率公式, 得

$P(B)=\sum\limits_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=0.2\cdot0.4+0.5\cdot0.5+0.3\cdot0.6=0.51$;

(2) $P(A_3|B)=\dfrac{P(A_3B)}{P(B)}=\dfrac{0.3\cdot0.6}{0.51}=\dfrac{6}{17}$.

2. (12 分)设随机变量 X 的概率密度函数为: $f(x)=\begin{cases}c(x+1), & -1\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(1) 求常数 c; (2) 计算 X 的分布函数 $F(x)$;

(3) 令 $Y=X^2$, 计算 Y 的概率密度函数.

解: (1) $1=\int_{-1}^{1}c(x+1)dx=2c$, 故$c=\frac{1}{2}$;

(2)

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \int_{-1}^{x}f(t)dt=\frac{1}{4}(1+x)^2, & -1\le x\le 1,\\ 1, & x>1;\end{cases}$$

(3) $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$,

当$y\le 0$时, $F_Y(y)=0$,

当$0<y\le 1$时, $F_Y(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}(x+1)dx$,

当$y>1$时, $F_Y(y)=1$,

所以 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

3. (10 分) 设二维随机向量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}9\mathrm{e}^{-3y}, & 0<x<y,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

计算 (1) $P(Y\le 3X)$; (2) X 的边缘密度函数$f_X(x)$; (3) EY.

解:(1) $P(Y\le 3X)=\int_0^{+\infty}dx\int_x^{3x}9\mathrm{e}^{-3y}dy=\frac{2}{3}$;

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^{+\infty}9\mathrm{e}^{-3y}dy=3\mathrm{e}^{-3x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$

(3) $EY=\int_0^{\infty}dx\int_x^{\infty}y9\mathrm{e}^{-3y}dy=\dfrac{2}{3}$.

4. (10 分) 已知某车间生产的瓶装饮料重量 X (单位：克) 服从正态分布 $N(\mu,16)$. 现从中随机抽取 25 瓶饮料, 测得样本均值 $\overline{x}=499$.

(1) 求总体均值 μ 置信水平为 0.95 的置信区间;

(2) 在显著水平为 0.05 下, 检验假设 $H_0:\mu\ge 500$, $H_1:\mu\le 500$.

解: (1) 置信区间是$(\bar{x}-\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}z_{0.025},\bar{x}+\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}z_{0.025})=(497.432,500.568)$

(2) 拒绝域是$(-\infty,(\bar{x}-\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}z_{0.05})=(-\infty,497.684)$,

$499>497.684$, 故不在拒绝域内, 接受原假设.

或 $\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma)}{\sqrt{n}}}=-1.25$,

拒绝域是 $(-\infty,-z_{0.05})=(-\infty,-1.645)$,

$-1.25>-1.645$, 故不在拒绝域内, 接受原假设.

5. (10 分) 设 (X,Y) 服从二维正态分布, $EX = EY = 1$, $Var(X) = 4$, $Var(Y) = 16$, $Cov(X,Y) = 2$.

(1) 计算 $P(X > Y + 2)$; (2) 计算 $E[X(X+Y)]$;

(3) $Y - aX$ 与 Y 独立当且仅当常数 a 为何值? 为什么?

解:(1) $X - Y \sim N(0, 16)$,

$$P(X > Y+2) = P(X - Y > 2) = P(\frac{X-Y}{4} > \frac{1}{2}) = 1 - \Phi(\frac{1}{2}) = 0.3085;$$

(2) $E[X(X+Y)] = E(X^2) + E(XY) = Var(X) + (EX)^2 + Cov(X,Y) + EX \cdot EY = 8$;

(3) $Y - aX$与Y独立$\Leftrightarrow Cov(Y - aX, Y) = 0$,

$$Cov(Y - aX, Y) = Cov(Y,Y) - aCov(X,Y) = 16 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = 8.$$

6. (10 分) 设总体 X 具有分布律

X	0	1	2
P	$1-\theta$	$\frac{\theta}{2}$	$\frac{\theta}{2}$

这里$0 \le \theta \le 1$未知. 设来自总体 X 的容量为 10 的简单随机样本的样本观察值 为 $0,0,0,0,0,0,1,1,1,2$.

求(1) θ 的矩估计值; (2) θ 的极大似然估计值.

解:(1) $EX = \dfrac{\theta}{2} \cdot 1 + \dfrac{\theta}{2} \cdot 2 = \dfrac{3\theta}{2}$,

得 $\widehat{\theta} = \frac{2}{3}\bar{x}$,

将$\bar{x} = \frac{1}{2}$代入上式, 得 $\widehat{\theta} = \frac{1}{3}$;

(2) $L(\theta) = \left(\dfrac{\theta}{2}\right)^4 (1-\theta)^6$,

$$\frac{dL(\theta)}{d\theta} = 2\left(\frac{\theta}{2}\right)^3 (1-\theta)^6 - 6\left(\frac{\theta}{2}\right)^4 (1-\theta)^5 = 0,$$

解得, $\widehat{\theta} = 0.4$.