浙江工业大学 2021/2022 学年第二学期
概率论与数理统计期末考试试卷

学号：________________ 姓名：________________

班级：________________ 任课教师：________________

题号	一	二	三	总分
得分				

分位点数据：

$\Phi(0.5) = 0.6915$, $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(1.5) = 0.9332$, $\Phi(1.645) = 0.9500$

$\Phi(1.96) = 0.9750$, $\Phi(2) = 0.9772$, $t_{0.05}(8) = 1.860$, $t_{0.05}(9) = 1.833$

$t_{0.025}(8) = 2.306$, $t_{0.025}(9) = 2.262$

一. 填空题（每空 2 分，共 28 分）

1. 已知随机事件 A, B 满足 $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B|A) = \frac{1}{4}$, $P(A|B) = \frac{1}{3}$, 则 $P(\bar{A} \cup \bar{B}) =$ __________, $P(\bar{A}\bar{B}) =$ __________.

2. 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P(X = k) = \alpha^k (4\alpha)^{1-k}, k = 0, 1$. 则 $\alpha =$ __________, $Var(X) =$ __________.

3. 设 X 服从参数为 3 的指数分布, $Y \sim N(1, 4)$, 且 X 与 Y 独立, 则 $E(3X + 2Y) =$ __________, $Var(3X + 4Y) =$ __________.

4. 设 $X \sim \chi^2(10)$, $Y \sim N(0, 1)$, 且 X 与 Y 独立.令 $T = \frac{CY}{\sqrt{X}}$, 则 $C =$ __________ 时, T 服从自由度为__________ 的 t 分布.

5. 设 X 服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布, 则 $P(2 - X > \frac{5}{4}) =$ __________ .

6. 设 X_1, X_2 独立同分布, 且均服从参数为 λ 的泊松分布, 那么 $X_1 + X_2$ 服从的分布是 _______________ .(需写出参数)

7. 设 X 服从 $[0,2]$ 上的均匀分布, 那么 $E(X^2)=$ ________.

8. 若随机变量 X,Y 满足 $Y=a+bX$, 这里a,b是常数且$b>0$. 设 $Var(X)>0$, $Var(Y)>0$, 则 $\rho_{XY}=$ ________.

9. 设(X,Y)服从二维正态分布, $X\sim N(0,1)$, $Y\sim N(0,4)$, $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$, 那么 $Var(X+Y)=$ ________.

10. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{20}$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的一个简单样本. 则 $\frac{3(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_5^2)}{X_6^2+X_7^2+\cdots+X_{20}^2}$ 服从的分布是____________.(需写出参数)

二. 选择题（每题 3 分，共 12 分）

1. 三个人分别独立地破译密码. 已知它们破译成功的概率分别为 0.3 , 0.4 , 0.5 . 那么密码被成功破译的概率为: ( )

   (A) 0.94 (B) 0.79 (C) 0.21 (D) 0.06

2. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0, & 若x<0; \\ x^3, & 若0\le x\le 1; \\ 1, & 若x\ge 1. \end{cases}$ 则 $E\big(\sin(X)\big)=$ ( )

   (A) $\int_0^1 3x^2\sin x\mathrm{d}x$ (B) $\int_0^1 x^3\sin x\mathrm{d}x$

   (C) $\int_0^1 3x^2\cos x\mathrm{d}x$ (D) $\int_0^1 x^3\cos x\mathrm{d}x$

3. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$独立同分布, $E(X_1)=\mu$, $Var(X_1)=\sigma^2>0$. 用切比雪夫不等式估计得到, 对$\varepsilon>0$, 有$P\left(|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\mu|\ge\varepsilon\right)\le$ ( )

   (A) $\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ (B) $\frac{\sigma^2}{\sqrt{n}\varepsilon}$

   (C) $\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$ (D) $\frac{\sigma^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$

4. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$, 则下面结论中, **错误**的是 ( )

   (A) $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$

   (B) 对任意实数 a , 都有$F(a^-)<F(a)$

   (C) 对任意实数 a , 都有$0\le F(a)\le 1$

   (D) 对任意实数 $a<b$, 都有$F(a)\le F(b)$

三. 解答题（共 60 分）

1. (10 分)某地区男女比例是 $2:1$. 已知该地区男人中有5%是色盲, 女人中有0.25%是色盲. 从该地区任选一人.

   (1) 问此人是色盲的概率为多少?

   (2) 若此人恰好是色盲, 则是男性的概率为多大?

2. (10 分) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & 若x<0;\\ x^2, & 若0\le x\le 1;\\ 1, & 若x\ge 1.\end{cases}$ 若$Y=2X^2+3$, 求 Y 的概率密度函数.

3. (12 分) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & x^2+y^2\le c,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(1) 求常数 c；(2) 计算 X 的边缘密度函数; (3) 求 $Cov(X,Y)$.

4. (8 分) 有一大批建筑房屋用的木柱, 其中 80% 的长度不小于 3 米. 现从这批木柱中任选 100 根. 请利用中心极限定理给出至少有 28 根短于 3 米的概率.

5. (10 分) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是从服从参数为 λ 的指数分布总体中抽出的样本, 求参数λ的矩估计和极大似然估计.

6. (10 分) 设某电子元件的寿命(以小时计)服从 $N(\mu, \sigma^2)$ ，σ^2未知. 现任选 9 个电子元件, 测得寿命的样本均值为 $\bar{x} = 255$, 样本方差为 $s^2 = 16$. 问是否有充分的理由认为元件的平均寿命大于 250 小时? (显著性水平为 0.05)