浙江工业大学 2023/2024 学年第二学期
概率论与数理统计A(48学时)期末考试试卷

学号： ___________ **姓名：** ___________ **班级：** ___________ **任课教师：** ___________

分位点数据：

$\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(2) = 0.9772$, $\Phi(1.65) = 0.95$, $\Phi(1.96) = 0.975$,

$t_{0.025}(8) = 2.306$, $t_{0.025}(9) = 2.262$, $t_{0.05}(8) = 1.86$, $t_{0.05}(9) = 1.833$.

一. 选择题（每题 3 分，共 24 分）

1. 已知随机事件 A, B, C, 则随机事件“A, B 中至少有一个发生且 B, C 中至少有一个发生”可表示为 ( )

   (A) $A \cup BC$ (B) $B \cup AC$

   (C) $C \cup AB$ (D) $A \cup B \cup C$

2. 已知 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$. 设 $P(B|A) = 2P(B|\overline{A})$，$P(\overline{B}|A) = \frac{1}{2}P(\overline{B}|\overline{A})$, 则 ( )

   (A) $P(B|A) = \frac{1}{3}$ (B) $P(B|A) = \frac{2}{3}$

   (C) $P(A|B) = \frac{1}{3}$ (D) $P(A|B) = \frac{2}{3}$

3. 设连续型随机变量 X 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{B\sin x}{1+\sin x}, & 0 \leqslant x \leqslant A, \\ 1, & x > A. \end{cases}$ 则下列选项中可能的是 ( )

   (A) $A = \frac{\pi}{2}, B = 1$ (B) $A = \frac{3\pi}{2}, B = 1$

   (C) $A = \frac{\pi}{2}, B = 2$ (D) $A = \frac{3\pi}{2}, B = 2$

4. 设 X 服从指数分布，若 $P\{X > 2|X > 1\} = \frac{1}{3}$，则 $P\{X < 1|X < 2\} =$ ( )

   (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$

5. 设 (X, Y) 的联合密度函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x+y) + \frac{1}{2}\sin(x-y), & 0 < x < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < y < 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

   则 ( )

   (A) $P\{X + Y > 0\} = \frac{1}{2}$ (B) $P\{X - Y > 0\} = \frac{1}{2}$

   (C) X, Y 独立 (D) X, Y 不独立

6. 设 (X,Y) 服从二维正态分布. 若 $DY = 3DX$ 且 $X+Y$ 与 $2X-Y$ 独立，则 X,Y 的相关系数 $\rho(X,Y) =$ ( )

(A) $-\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$

(C) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

7. 设随机变量 X,Y 独立，标准差分别为 $\sigma(X)=3, \sigma(Y)=4$，则 $\sigma(Y-X)=$ ( )

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7

8. 设总体 $X \sim U(0,\theta)$，X_1,X_2,X_3 是其样本，则下列选项中 θ 的最有效的无偏估计是 ( )

(A) $X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{2}X_3$ (B) $\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3$

(C) $\frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3$ (D) $X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{2}{3}X_3$

二. 填空题（每空 2 分，共 16 分）

9. 设 $P(A)=0.6, P(B)=0.5$, $P(AB)=0.2$, 则 $P(A\overline{B}|A\cup B) =$ __________.

10. 设随机变量 X 的分布列为 $P\{X=n\} = An+B, n=1,2,3,4,5$, 满足 $P\{X \geqslant 3\} = \frac{3}{4}$，则 $A =$ __________, $B =$ __________.

11. 设 $X \sim P(\lambda)$, 若 $E(X^2)=12$，则 $P\{X \leqslant 1\} =$ __________.

12. 设 $X_1,X_2,X_3,\cdots$ 是独立同分布随机变量序列, 共同的分布为均匀分布 $U(-2,4)$. 若

$$\frac{1}{n}(X_1X_2 + X_3X_4 + \cdots + X_{2n-1}X_{2n}) \xrightarrow{P} A,$$

则 $A =$ __________.

13. 设随机变量 $X_i \sim N(0,i^2), i=1,2,3,4$ 相互独立, 若

$$\frac{AX_1^2 + BX_2^2}{(X_3+X_4)^2} \sim F(2,1),$$

则 $A =$ __________, $B =$ __________.

14. 设总体 $X \sim N(\mu, 3^2)$, 其中参数 μ 未知, 样本观测值为 11,14,9,10,11,12,10,13,9, 则 μ 的置信水平为 0.95 的双侧置信上限是 __________.

三. 解答题（共 60 分）

15. (12 分) 设连续型随机变量 X 的概率密度函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{1}{2x^2}, & 1 < x < 3, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

    求: (1) $P\{X < 2\}$; (2) $E(\frac{1}{X})$; (3) $Y = |X - 2|$ 的概率密度函数.

16. (14 分)设有红色卡片 3 张, 分别写有数字 1,1,2, 蓝色卡片 2 张, 分别写有数字 1,3. 从这 5 张卡片中随机抽取 3 张, 记 X 为抽到的红色卡片的数字之和, Y 为抽到的蓝色卡片的数字之和.

    求: (1) X, Y 的联合分布列; (2) X, Y 的边缘分布列; (3) $Z = X + Y$ 的分布列和 EZ.

17. (16 分)设随机变量 (X, Y) 的概率密度函数

$$f(x, y) = \begin{cases} C(1 + x^2), & 0 < y < x < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

    (1) 验证常数 $C = \frac{1}{6}$;

    (2) 计算 $P\{X > 1, X + Y < 2\}$;

    (3) 求条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$ 并计算 $P\{Y < 1|X = \frac{3}{2}\}$.

18. (10 分)设总体 X 的密度函数

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2}, & 0 \leqslant x \leqslant \theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

    其中未知参数 $\theta > 0$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是其样本. 求 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

19. (8 分) 假设子弹的初速率（单位：m/s）服从正态分布. 从一批子弹中随机抽取 9 发，测得初速率的样本均值为 870，样本标准差为 24，取显著水平 0.05，问能否认为这批子弹初速率的均值不低于 900？