浙江工业大学 2022/2023 学年第一学期
概率论与数理统计(48学时)期末考试试卷

学号：________________ 姓名：________________

班级：________________ 任课教师：________________

题号	一	二	三	总分
得分				

分位点数据：

$$t_{0.025}(9)=2.2622,\quad t_{0.025}(8)=2.3060,\quad t_{0.05}(9)=1.8331,\quad t_{0.05}(8)=1.8595$$

一. 填空题 (共 28 分，每空 2 分)

1. 设 A,B,C 相互独立，且 $P(A)=P(B)=P(C)=0.5$，则 $P(A\cup B)=$ ________________，$P(A\cup B|A\cup C)=$ ________________.

2. 现有 3 种卡片，分别有 2,3,4 张，从这 9 张卡片中随机选取 3 张，恰好取到 3 种卡片的概率是 ________________.

3. 投掷一枚质地不均匀的硬币 3 次，至少有 1 次正面朝上的概率为 $\frac{37}{64}$，则恰有 2 次正面朝上的概率是 ________________.

4. 已知 X 服从指数分布. 若 $P(X>a)=\frac{2}{3}$，则 $P(X>2a)=$ ________________，$P(X>2a|X>a)=$ ________________.

5. 设 X 的密度函数 $f(x)=Ce^{-2x^2-x}$（C 为常数），则 $E(X)=$ ________________.

6. 设随机变量 X 满足 $EX=1$，$E[(X+1)^2]=\frac{13}{3}$，$E[(X-1)^3]=0$，则 $DX=$ ________________，$E(X^3)=$ ________________.

7. 设 $D(X)=2,D(Y)=8$，相关系数 $\rho(X,Y)=-\frac{1}{2}$，则 $Cov(X,Y)=$ ________________，$D(X-\frac{1}{4}Y)=$ ________________.

8. 设某台机器生产的每件产品是一、二、三等品的概率分别为 0.2,0.5,0.3，一、二、三等品每件产品的利润（单位：元）分别为 10,7,5. 现生产 300 件产品，根据中心极限定理，可

得总利润不少于 2070 元的概率约为 ________(用标准正态分布的分布函数$\Phi(\cdot)$表示).

9. 设 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本. 令 $\overline{X} = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$，若

$$C\frac{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+(X_3-\overline{X})^2}{(X_4-X_5)^2}$$

服从 F 分布，其两个自由度为 ________，$C=$ ________.

二. 选择题 (共 12 分，每题 3 分)

1. 设 A, B, C 为随机事件，$0 < P(A) < 1$. ( )
   (A) 若 $A \subseteq B \cup C$，则 $P(B|A) + P(C|A) = 1$
   (B) 若 $P(B|A) + P(C|A) = 1$，则 $A \subseteq B \cup C$
   (C) 若 $ABC = \varnothing$，则 $P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A)$
   (D) 若 $P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A)$，则 $ABC = \varnothing$

2. 设 $X \sim B(n, p)$，$Y \sim B(m, p)$，F_X, F_Y 分别是 X, Y 的分布函数. 若 $n > m$，则 ( )
   (A) $X \geq Y$　　(B) $X \leq Y$
   (C) 对任意 z，$F_X(z) \geq F_Y(z)$　　(D) 对任意 z，$F_X(z) \leq F_Y(z)$

3. 设 (X, Y) 的密度函数 $f(x,y) = \begin{cases} xy + Ax + \frac{1}{6}y + B, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ 若 X, Y 独立，则 ( )
   (A) $A = 1, B = \frac{1}{6}$　　(B) $A = \frac{1}{6}, B = \frac{1}{36}$
   (C) $A = \frac{1}{6}, B = \frac{7}{12}$　　(D) $A = \frac{1}{3}, B = \frac{1}{2}$

4. 设总体 X 的分布列为 $P(X=1) = p$，$P(X=0) = 1-p$，其中未知参数 $p \in (0,1)$. 考虑假设检验问题：$H_0 : p = \frac{1}{3}$　$H_1 : p = \frac{2}{3}$. 给定 X 的样本 X_1, X_2，取拒绝域 $W = \{X_1 + X_2 < 1\}$，则犯第二类错误的概率是 ( )
   (A) $\frac{1}{9}$　　(B) $\frac{2}{9}$　　(C) $\frac{4}{9}$　　(D) $\frac{8}{9}$

三. **解答题 (共 6 题，60 分)**

1. (10 分) 设离散型随机变量 X 的分布列为 $P(X=k)=C(k^2+k+1)$，$k=1,2,3$. 求：(1) 常数 C；(2) $P(X$ 是奇数$)$；(3) $E(\frac{1}{X(X+1)})$.

2. (8 分)设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} Ax^2, & -1<x\le 1, \\ Bx, & 1<x\le 3, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

   且 $P(X<2)=\frac{1}{2}$. 求：(1) 常数 A,B；(2) X 的期望、方差.

3. (12 分)把两个相同的球等可能地放入编号为 $1,2$ 的两个盒子中, 记落入第 1 号盒子中球的个数为 X, 落入第 2 号盒子中球的个数为 Y.

求：(1) X,Y 的联合分布；(2) $P(2X+Y=4)$；(3) X 的分布列.

4. (12 分)设连续型随机变量 (X,Y) 的密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{Ay}{x^2}, & 1<x<2, 1<y<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(1) 求常数 A；(2) 求 $P(X<Y)$；(3) 判断 X 与 Y 是否独立, 并写明原因.

5. (10 分)设总体 X 的概率分布是

X	0	1	2
P	θ^2	$\theta(1-\theta)$	$1-\theta$

其中 $\theta(0<\theta<1)$ 是未知参数, 现从该总体中抽取容量为 5 的样本, 样本值为: 2, 1, 0, 1, 0.

求： θ 的矩估计值和极大似然估计值.

6. (8 分) 设某种仪器附近的磁场强度（单位：T）服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，要求其均值不高于 50. 现有一台新仪器，对其附近磁场强度测量 9 次，测得其样本均值 $\overline{x} = 51$ T，样本标准差 $s = 5$ T. (1) 求该仪器附近的磁场强度的均值 μ 的置信水平 0.95 的单侧置信上限；(2) 取显著水平 $\alpha = 0.05$， 能否认为该仪器附近的磁场强度的均值不高于 50 T?