浙江工业大学 2023/2024 学年第一学期
概率论与数理统计A(48学时)期末考试参考答案

一. 选择题（每题 3 分，共 24 分）

1. B
2. D
3. D
4. A
5. C
6. C
7. B
8. B

二. 填空题（每空 2 分，共 16 分）

9. $\frac{4}{27}$
10. 0.9
11. $\frac{1}{4}$
12. 2
13. 6
14. $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{12}$
15. $2-2\Phi(3)=0.0026$

三. 解答题（共 60 分）

16. (8分) 第一袋中有 2 个白球 4 个黑球，第二袋中有 6 个白球 2 个黑球，现从这两袋中各任取一球，再从取出的两球中任取一球.

求: (1) 这球是白球的概率是多少?

(2) 如发现这球是白球, 问原先从两个袋子中取出的是相同颜色球的概率是多少?

解: 设 A_i 表示 “从第 i 个袋子取出白球”, $i=1,2$, B 表示 “从两个球中最后取出一球为白球”.

(1) 构造完备事件组 $A_1A_2, \bar{A}_1A_2, A_1\bar{A}_2, \bar{A}_1\bar{A}_2$, 由全概率公式

$$\begin{aligned}P(B)=&P\left(A_1A_2\right)P\left(B \mid A_1A_2\right)+P\left(\bar{A}_1A_2\right)P\left(B \mid \bar{A}_1A_2\right)+\\&P\left(A_1\bar{A}_2\right)P\left(B \mid A_1\bar{A}_2\right)+P\left(\bar{A}_1\bar{A}_2\right)P\left(B \mid \bar{A}_1\bar{A}_2\right)\\=&\frac{2}{6}\times\frac{6}{8}\times 1+\frac{4}{6}\times\frac{6}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{6}\times\frac{2}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{6}\times\frac{2}{8}\times 0=\frac{13}{24};\end{aligned}$$

(2) 所求为 $P\left(A_1A_2 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2 \mid B\right)$, 由条件概率的加法公式及贝叶斯公式

$$\begin{aligned}P\left(A_1A_2 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2 \mid B\right)&=P\left(A_1A_2 \mid B\right)+P\left(\bar{A}_1\bar{A}_2 \mid B\right)\\&=\frac{\frac{2}{6}\times\frac{6}{8}\times 1}{\frac{13}{24}}+0=\frac{6}{13}\end{aligned}$$

17. (12分)设连续型随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}ax, & 1\le x<2,\\ b, & 2\le x<3,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 且满足 $P(1\le X<2)=2P(2\le X<3)$.

求: (1) 常数 a 与 b 的值; (2) X 的分布函数; (3)随机变量 $Y=9X^2+1$ 的数学期望.

解: (1) 由于

$$P(1\le X<2)=\int_1^2 ax\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}a,\quad P(2\le X<3)=\int_2^3 b\,\mathrm{d}x=b,$$

因此 $\frac{3}{2}a=2b$, 即 $a=\frac{4b}{3}$. 又因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=P(1\le X<2)+P(2\le X<3)=1,$$

因此 $\frac{3}{2}a+b=1$, 解得 $a=\frac{4}{9}, b=\frac{1}{3}$.

(2) X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \int_1^x \frac{4}{9}t\ \mathrm{d}t, & 1\le x<2,\\ \int_1^2 \frac{4}{9}t\ \mathrm{d}t+\int_2^x \frac{1}{3}\ \mathrm{d}t, & 2\le x<3,\\ 1, & x\ge 3\end{cases}=\begin{cases}0, & x<1,\\ \frac{2}{9}\left(x^2-1\right) & 1\le x<2,\\ \frac{1}{3}x, & 2\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$$

(3)

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_1^2\frac{4}{9}x^3dx+\int_2^3\frac{1}{3}x^2dx=\frac{34}{9}$$

$$E(Y)=E(9X^2+1)=9E(X^2)+1=35.$$

18. (10分) 设随机变量 (X,Y) 服从分布律

$X\backslash Y$	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知事件 $\{X+Y=1\}$ 与 $\{X=0\}$ 相互独立.

求: (1) 常数a,b 的值; (2) $Cov(X+Y,X-Y)$.

解: (1) 由题意, 得

$$\begin{cases}a+b=0.5,\\ a=(a+b)(0.4+a),\end{cases}$$

解此方程组, 得 $a=0.4,b=0.1$.

(2) $EX=E(X^2)=0.2,\ EY=E(Y^2)=0.5,$

所以 $D(X)=0.16,\ D(Y)=0.25,$

故 $Cov(X+Y,X-Y)=D(X)-D(Y)=-0.09.$

19. (12分)设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}xy, & 0\le x\le 1,0\le y\le 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

求: (1) $P(X+Y>1)$;

(2) 边缘概率密度 $f_X(x)$ 和条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$, 判断 X 与 Y 是否相互独立, 并说明理由;

(3) $Z=X+Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

解: (1)

$$P(X+Y>1)=\iint_{x+y>1} f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\int_0^1\left[\int_{1-x}^2 xy\ \mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{3}{2}x+x^2-\frac{1}{2}x^3\right)\mathrm{d}x=\frac{23}{24}$$

(2)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^2 xy\ \mathrm{d}y=2x, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^1 xy\ \mathrm{d}x=\frac{y}{2}, & 0\le y\le 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

当 $0<y<2$ 时,

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{xy}{y}=2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

对任意$(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 故 X 与 Y 相互独立.

(3) 根据 $f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y$, 而

$$f(z-y,y)=\begin{cases}(z-y)y, & 0\le z-y\le 1, 0\le y\le 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_z(z)&=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y\\ &=\begin{cases}\int_0^z (z-y)y\ \mathrm{d}y=\frac{1}{6}z^3, & 0<z<1,\\ \int_{z-1}^z (z-y)y\ \mathrm{d}y=\frac{3z-2}{6}, & 1\le z<2,\\ \int_{z-1}^2 (z-y)y\ \mathrm{d}y=\frac{-z^3+15z-18}{6}, & 2\le z<3\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\end{aligned}$$

20. (10分) 已知连续总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)=\begin{cases}1-\frac{1}{x^\theta}, & x\ge 1,\\ 0, & x<1,\end{cases}$ 其中参数 $\theta>1$, 且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

求: (1) 未知参数 θ 的矩估计量; (2) 未知参数 θ 的最大似然估计量.

解 :总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\theta}{x^{\theta+1}}, x>1,\\ 0, \quad x\le 1,\end{cases}$$

(1) 由

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx=\theta \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\theta}} \mathrm{d} x=\frac{\theta}{\theta-1}$,

得 $\theta=\frac{EX}{EX-1}$, 故参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$.

(2) 似然函数为 $L(\theta)=f\left(x_{1}\right) f\left(x_{2}\right) \cdots f\left(x_{n}\right)=\frac{\theta^{n}}{\left(x_{1} x_{2} \cdots x_{n}\right)^{\theta+1}}$, 其中 $x_{i}>1(i=1,2, \cdots, n)$,

$$\ln L(\theta)=n \ln \theta-(\theta+1) \sum_{i=1}^{n} \ln x_{i},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} \theta} \ln L(\theta)=\frac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n} \ln x_{i},$$

由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} \theta} \ln L(\theta)=0$ 得 $\tilde{\theta}=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_{i}}$,

又因为 $\theta>1$, 从而参数 θ 的最大似然估计量为 $\max \{\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \ln X_{i}}, 1\}$.

21. (8分) 某洗衣粉厂用自动包装机进行包装, 正常情况下包装的重量 (单位: g) $X \sim N\left(\mu, \sigma^{2}\right)$. 现随机抽取 25 袋洗衣粉, 测得平均重量 $\bar{x}=501.5$ g, 样本标准差 $s=2.5$ g. 取显著性水平 $\alpha=0.1$, 问可否认为 σ^{2} 显著大于 6 ?

解: $H_{0}: \sigma^{2} \leq 6 ; H_{1}: \sigma^{2}>6$, 取统计量

$$\chi^{2}=\frac{(n-1) S^{2}}{6} \sim \chi^{2}(n-1);$$

由 $\alpha=0.1, n=25$ 得拒绝域为

$$W^{\prime}: \chi^{2} \geq \chi_{\alpha}^{2}(n-1)=\chi_{0.1}^{2}(24)=33.196.$$

又 $s=2.5$, 得 $\chi^{2}=\frac{(25-1) \times 2.5^{2}}{6}=25 \notin W^{\prime}$, 所以接受 $H^{\prime}{ }_{0}$, 即不可认为 $\sigma^{2}>6$.