浙江工业大学 2020/2021 学年

第一学期概率论与数理统计期末考试 试卷参考答案

分位点数据：

$\Phi(1)=0.841,\quad \Phi(1.645)=0.950,\quad \Phi(1.96)=0.975,\quad \Phi(2)=0.977$

$\chi^2_{0.01}(25)=44.314,\quad \chi^2_{0.01}(26)=45.642,\quad \chi^2_{0.99}(25)=11.524,\quad \chi^2_{0.99}(26)=12.198$

一、填空题.(每空2分，共 28 分)

1. 0.2
2. 1/3
3. 1， 0
4. 105/71
5. 0.7
6. 7， 12
7. 1/9
8. 1/2， 1/2
9. t， 2
10. $[4.412, 5.588]$

二、选择题.(每小题3 分，共 12 分)

1. A
2. C
3. D
4. C

三. 解答题（共 60 分）

1. (8 分) 在解答有 A, B, C, D 四个选项的一道单项选择题时，由于题目较难，全班只有 5% 的学生能正确解答，假设会做该题的学生解答正确的概率为 99%，不会做该题的学生随机猜测答案。试求：

(1) 学生解答正确的概率;

(2) 在学生解答不正确的情况下，他(她)是猜答案的概率是多少？(保留小数点后四位)

解：A: 学生会做该题, $\overline{A}$：学生不会做该题，B: 学生解答正确

则有 $P(A) = 0.05$, $P(\overline{A}) = 0.95$, $P(B|A) = 0.99$, $P(B|\overline{A}) = 0.25$

(1) 由全概率公式，得

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}) = 0.05 \times 0.99 + 0.95 \times 0.25 = 0.287$$

$\cdots\cdots$4分

(2) 由贝叶斯公式，得

$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})}{P(\overline{B})} = \frac{0.95 \times 0.75}{1 - 0.287} = 0.9993$$

$\cdots\cdots$8分

2. (12 分) 设离散型随机变量 X 的分布函数为：

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 0.3, & -1 \le x < 1, \\ 0.7, & 1 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$

求：(1) X 的分布律；(2) $P(X > \frac{1}{2})$；(3)若 $Y = X^2$，求 Y 的分布律。

解：(1) $P(X = -1) = 0.3$, $P(X = 1) = 0.4$, $P(X = 2) = 0.3$

$\cdots\cdots$4 分

(2) $P(X > \frac{1}{2}) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0.7$

$\cdots\cdots$8 分

(3) $P(Y = 1) = 0.7$, $P(Y = 4) = 0.3$

$\cdots\cdots$12 分

3. (8 分) 设二维随机向量 (X,Y) 的概率分布如下表所示：

X \ Y	0	2	5
1	$3a$	0.25	0.35
3	a	0.18	0.02

求：(1) a 的值; (2) 若$Z=X+Y$，求Z的分布律。

解：(1) $3a+0.25+0.35+a+0.18+0.02=1$, 所以 $a=0.05$

$\cdots\cdots 4$ 分

(2)

$Z=X+Y$	1	3	5	6	8
P	0.15	0.3	0.18	0.35	0.02

$\cdots\cdots 8$ 分

4. (12 分) 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases} k(6-x-y), & 0<x<2,\ 2<y<4, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求：(1) 常数 k； (2) $P(X<1,Y<3)$; (3) 判断 X 与 Y 是否相互独立。

解：(1) 由 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$，即 $\int_0^2 dx\int_2^4 k(6-x-y)dy=1$, 得 $k=1/8$

$\cdots\cdots 4$ 分

(2)$P(X<1,Y<3)=\dfrac{1}{8}\displaystyle\int_0^1 dx\int_2^3(6-x-y)dy=\dfrac{3}{8}$

$\cdots\cdots 8$ 分

(3)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\frac{1}{8}\int_2^4(6-x-y)dy=\frac{3-x}{4},\qquad 0<x<2$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\frac{1}{8}\int_0^2(6-x-y)dx=\frac{5-y}{4},\qquad 0<y<4$$

$$f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y),\qquad X,Y\ \text{不相互独立}$$

$\cdots\cdots 12$ 分

5. (8 分) 某厂生产的某种型号的电池，其寿命 (单位：h) 长期以来服从方差 $\sigma^2=5000$ 的正态分布。 现有一批这种电池，从它的生产情况来看，寿命的波动性有所改变。现随机取 26 只电池， 测出其寿命的样本方差 $s^2=9200$。问根据这一数据能否推断这批电池寿命的波动性较以往的有显著的变化？ (取 $\alpha=0.02$)。

解：检验假设 $H_0:\sigma^2=5000, \quad H_1:\sigma^2\neq 5000$

已知 $n=26, \chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.01}(25)=44.314, \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.99}(25)=11.524, \sigma_0^2=5000$

拒绝域:

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\geq 44.314, \quad \text{或} \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\leq 11.524$$

根据 $s^2=9200$, 得 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=46>44.314$, 所以拒绝 H_0, 认为这批电池寿命的波动性较以往的有显著的变化.

$\cdots\cdots$8 分

6. (12 分) 设总体 X 的概率密度函数为:

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\leq x\leq 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ $(0<\theta<1)$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 为 来自该总体的简单随机样本。

(1) 求 θ 的矩估计量 $\widehat{\theta}_1$；

(2) 求 θ 的极大似然估计量 $\widehat{\theta}_2$。

解：(1)

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)dx=\int_\theta^1\frac{x}{1-\theta}dx=\frac{1+\theta}{2}$$

令 $E(X)=\overline{X}$, 即 $\dfrac{1+\theta}{2}=\overline{X}$, 从而 θ 的矩估计量 $\widehat{\theta}_1=2\overline{X}-1$.

$\cdots\cdots$6 分

(2) 样本的似然函数为：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x;\theta)=\frac{1}{(1-\theta)^n}, \qquad \theta\leq x_i\leq 1,\quad i=1,2,\ldots,n$$

$L(\theta)$ 单调递增，故当 $\theta=\min\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ 时, $L(\theta)$ 取得最大值， 因此 θ 的极大似然估计量 $\widehat{\theta}_2=\min\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$.

$\cdots\cdots$12 分