

长三角工程教育联盟高校高等数学联考

2022/2023 学年第 1 学期

一 单选题 5 小题，每小题 3 分，共 15 分

1. 考虑极限 (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ 和 (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x))$, 则以下表述错误的是 ()

- A 若 (1) 为正无穷, (2) 为有限数, 则 (3) 为正无穷
- B 若 (1) 为正无穷, (2) 既非有限数也非无穷, 则 (3) 不可能为有限数
- C 若 (1) 和 (2) 均既非有限数也非无穷, 则 (3) 既非有限数也非无穷
- D 若 (1) 和 (2) 均为正无穷, 则 (3) 可能为有限数也可能为无穷

2. 设 $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1} - \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{x}$, 则 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的 ().

- A 可去型间断点
- B 跳跃型间断点
- C 无穷型间断点
- D 第二类间断点, 但非无穷型间断点

3. 已知 $f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$, 则下列结论中错误的是 ().

- A 该函数存在零点
- B 该函数存在极值点
- C 该函数存在拐点
- D 该函数不存在渐近线

4. 已知当 $a > 0$ 时, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \pi e^{-a}$, 则下列结论中错误的是 ().

- A $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}$
- B $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+4x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{a}{2}}$
- C $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{4+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-2a}$
- D $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+(x+1)^2} dx = \pi e^{-a}$

5. 已知某质点的质量为 m , 该质点作直线运动, 其速度关于时间的函数为 $v(t)$, 该质点运动适合牛顿运动定律, 则下列表述错误的是 ().

- A $v'(t)$ 为该质点的加速度关于时间的函数
- B $\int_0^t v(\tau) d\tau$ 为该质点的位移关于时间的函数
- C $\int_a^b v(\tau) d\tau$ 表示该质点由 a 时刻到 b 时刻的位移
- D 该质点受合外力为 0 当且仅当 $v'(t)$ 为常数

二 填空题 5 小题，每小题 3 分，共 15 分

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[2022]{x} \ln^{2023} x}{\cos^{2021} x} =$ _____.

2. 已知 $e^{-x} + \alpha \cos 3x + \beta \sin 4x$ 与 γx^2 为 $x \rightarrow 0$ 时的等价无穷小量, 则 $\alpha + \beta + \gamma =$ _____.

长三角工程教育联盟高校高等数学联考

3. 已知质点受力 F 与位置 x 的关系为 $F(x) = -\frac{1}{x^2}$, 则该质点由 4 移动到 1, 力 F 的做功为 _____.

4. 反常积分 $\int_0^1 \ln x dx =$ _____.

5. 设 $f(x)$ 为连续函数, $g(x) = \int_0^x e^{x-t} f(t) dt$, 则 $g'(0) =$ _____.

三 解答题，共 70 分

1. (7 分) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2})$.

2. (7 分) 设 $f(x) = \frac{x^3}{\sin x - x}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.

3. (7 分) 对参数曲线 $(x(t), y(t)) = (1 + \cos t, \sin 2t)$, 计算 $\frac{d^2 y}{dx^2}$. (写成关于 t 的表达式即可).

4. (7 分) 求不定积分 $\int e^{3x} \cos 2x dx$.

5. (7 分) 求定积分 $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$.

6. (7 分) 已知 $y = y(x)$ 为由 $y^3 + y = x^2 + 3x + 2$ 确定的连续函数, 求 $y(x)$ 的单调区间.

7. (7 分) 已知函数 $f(x)$ 可导, $|f'(x)| < M$, $f(0) = 0$. 证明: 对一切 $x \neq 0$, $|f(x)| < M|x|$.

8. (7 分) 证明不等式当 $x > 0$ 时, $x - \frac{x^3}{6} < \sin x$.

9. (14 分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^a, & 0 \leq x < 1 \\ kx + b, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$, 在 $[0, 2]$ 上连续, $f(2) = 0$, 且函数曲线绕 x 轴旋转所得旋转体的体积为 π , 求参数 a, b, k 的值.