浙江工业大学 2022/2023 学年第一学期
概率论与数理统计(48学时)期末考试试卷参考答案与评分标准

一. 填空题 (共 28 分，每空 2 分)

1. $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$.
2. $\frac{2}{7}$.
3. $\frac{9}{64}$.
4. $\frac{4}{9}$, $\frac{2}{3}$.
5. $-\frac{1}{4}$.
6. $\frac{1}{3}$, 2.
7. -2, $\frac{7}{2}$.
8. $\Phi(1)$.
9. $(2,1)$, 1.

二. 选择题 (共 12 分，每题 3 分)

1. C
2. D
3. A
4. D

三. 解答题 (共 6 题，60 分)

1. (10 分) (1) $\sum_{k=1}^{3} P(X=k) = C(3+7+13) = 1$, 则 $C = \frac{1}{23}$.

$\cdots\cdots$ 3 分

(2) $P(X奇数) = P(X=1,3) = 16C = \frac{16}{23}$.

$\cdots\cdots$ 6 分

(3) $E(\frac{1}{X(X+1)}) = C\sum_{k=1}^{3} \frac{k^2+k+1}{k(k+1)} = C(3+1-\frac{1}{3+1}) = \frac{15}{92}$.

$\cdots\cdots$ 10 分

2. (8 分) (1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{1} Ax^2dx + \int_{1}^{3} Bxdx = A\frac{2}{3} + B\frac{8}{2} = \frac{2}{3}A + 4B = 1$;

$P(X<2) = \int_{-1}^{1} Ax^2dx + \int_{1}^{2} Bxdx = A\frac{2}{3} + B\frac{3}{2} = \frac{2}{3}A + \frac{3}{2}B = \frac{1}{2}$;

得到 $A = \frac{3}{10}$, $B = \frac{1}{5}$.

$\cdots\cdots$ 4 分

(2) $E(X) = \int_{-1}^{1} Ax^3dx + \int_{1}^{3} Bx^2dx = \frac{26}{3}B = \frac{26}{15}$;

$E(X^2) = \int_{-1}^{1} Ax^4dx + \int_{1}^{3} Bx^3dx = \frac{2}{5}A + 20B = \frac{103}{25}$;

$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{251}{225}$.

$\cdots\cdots$ 8 分

3. (12 分) (1) $X+Y=2$, X,Y可取值 0, 1, 2. 联合分布律如下,

$Y \setminus X$	0	1	2
0			$\frac{1}{4}$
1		$\frac{1}{2}$	
2	$\frac{1}{4}$		

$\cdots\cdots$ 6 分

(2) $P(2X+Y=4) = P(Y=0) = \frac{1}{4}$.

$\cdots\cdots$ 8 分

(3) X的边缘分布律 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

$\cdots\cdots$ 12 分

4. (12 分) (1) $A\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2}dx \int_{1}^{2} ydy = A\frac{1}{2}\frac{3}{2} = 1$, 得到 $A = \frac{4}{3}$.

$\cdots\cdots$ 4 分

(2) $P(X<Y)=\int_1^2\left(\int_1^y \frac{Ay}{x^2}dx\right)dy=\int_1^2 Ay(1-\frac{1}{y})dy=\frac{A}{2}=\frac{2}{3}$.

……8 分

(3) X 与 Y 独立,

因为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{x^2}, & 1<x<2\\ 0, & 其他.\end{cases}$, $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{3}y, & 1<y<2\\ 0, & 其他.\end{cases}$

满足 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$.

……12 分

5. (10 分) θ 的矩估计:

$E(X)=\theta(1-\theta)+2(1-\theta)=\bar{X}=\frac{4}{5}$, 得到非负的矩估计值 $\hat{\theta}=\sqrt{\frac{29}{20}}-\frac{1}{2}$ (舍掉 $-\sqrt{\frac{29}{20}}-\frac{1}{2}$);

……5 分

θ 的极大似然估计:

似然函数 $L(\theta)=(\theta^2)^2[\theta(1-\theta)]^2(1-\theta)=\theta^6(1-\theta)^3$;

$\ln L(\theta)=6\ln\theta+3\ln(1-\theta)$; $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{3}{1-\theta}=0$,

得到极大似然估计值 $\hat{\theta}=\frac{2}{3}$.

……10 分

6. (8 分) (1) μ 的置信水平 0.95 的单侧置信上限 $\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)=51+\frac{5}{3}t_{0.05}(8)=54.0992$;

……4 分

(2) $H_0:\mu\le 50$; $H_1:\mu>50$;

检验统计量 $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$,

拒绝域 $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}>t_{0.05}(8)$, 经计算 $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\frac{51-50}{5/3}=\frac{3}{5}<t_{0.05}(8)$, 不在拒绝域, 不能拒绝 H_0, 可以认为均值不高于 50T.

……8 分