浙江工业大学 2022/2023 学年第二学期
概率论与数理统计A(48学时)期末考试试卷

学号：________________ 姓名：________________

班级：________________ 任课教师：________________

分位点数据：

$$\chi^2_{0.025}(9)=19.022,\ \ \chi^2_{0.025}(10)=20.483,\ \ \chi^2_{0.05}(9)=16.919,\ \ \chi^2_{0.05}(10)=18.307$$
$$\chi^2_{0.975}(9)=2.700,\ \ \chi^2_{0.975}(10)=3.247,\ \ \chi^2_{0.95}(9)=3.325,\ \ \chi^2_{0.95}(10)=3.940$$

一. 选择题 (共 24 分，每题 3 分)

1. 随机投掷 2 枚骰子. 用 A 表示“第 1 枚骰子点数为 2”，B 表示“第 2 枚骰子点数为 5”，C 表示“两枚骰子点数之和为 7”，则 ( )

   (A) A,B 不独立，A,C 不独立　　(B) A,C 独立，B,C 不独立

   (C) A,B,C 两两独立，但不相互独立　　(D) A,B,C 相互独立

2. 从 5 个数 $1,2,3,4,5$ 中任取 3 个数再按从小到大排列, 设 X 是中间那个数, 则 ( )

   (A) $P(X=2)=\frac{1}{5}, EX=\frac{5}{2}$　　(B) $P(X=2)=\frac{1}{5}, EX=3$

   (C) $P(X=2)=\frac{3}{10}, EX=\frac{5}{2}$　　(D) $P(X=2)=\frac{3}{10}, EX=3$

3. 已知某机器按设计要求使用寿命超过 20 年的概率为 0.8，超过 30 年的概率为 0.6, 设 X 表示该机器的使用寿命, 则 $P(X\le 30|X>20)=$ ( )

   (A) $\frac{1}{4}$　　(B) $\frac{3}{4}$　　(C) 0.4　　(D) 0.6

4. 设随机变量$X\sim N(0,2)$, 则 $Y=2X$ 的概率密度函数为 ( )

   (A) $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{16}}$　　(B) $\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{16}}$　　(C) $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{8}}$　　(D) $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{8}}$

5. 设总体 $X\sim B(m,p)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自该总体的简单随机样本, 则$E[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2]=$ ( )

   (A) $(m-1)np(1-p)$　　(B) $m(n-1)p(1-p)$

   (C) $(m-1)(n-1)p(1-p)$　　(D) $mnp(1-p)$

6. 设随机变量 X 服从指数分布, 均值为 $\frac{1}{2}$, 则 ( )

   (A) $E(X^2)=\frac{1}{2},\ Cov(X^2,X-2)=\frac{1}{2}$　　(B) $E(X^2)=\frac{1}{2},\ Cov(X^2,X-2)=32$

   (C) $E(X^2)=8,\ Cov(X^2,X-2)=\frac{1}{2}$　　(D) $E(X^2)=8,\ Cov(X^2,X-2)=32$

7. 已知随机变量X,Y的联合分布律为:

$P(X=1,Y=-1)=0.3, P(X=2,Y=5)=0.3,$

$P(X=1,Y=5)=0.2, P(X=2,Y=-1)=0.2,$

则以下结论正确的是 (　　)

(A) $\min\{X,Y\}$与$\min\{X,Y-1\}$同分布 (B) $\min\{X,Y\}$与$\min\{X,\frac{Y-1}{2}\}$同分布

(C) $\max\{X,Y\}$与$\max\{X,Y-1\}$同分布 (D) $\max\{X,Y\}$与$\max\{X,\frac{Y-1}{2}\}$ 同分布

8. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本, $\overline{X}$ 和S^2分别是样本均值和样本方差, 若方差 σ^2 已知, 则总体均值 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限为 (　　)

(A) $\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}$　　(B) $\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha}$

(C) $\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)$　　(D) $\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)$

二. 填空题 (共 16 分，每空 2 分)

9. 设随机事件 A,B 互斥, 且满足$P(A)=0.2$, $P(B|A\bigcup B)=0.6$, 则$P(B)=$__________.

10. 设随机变量 X 服从泊松分布 $P(\lambda)$，若 $P(X=2)=P(X=3)$, 则$\lambda=$__________, $P(X\geq 1)=$__________.

11. 设随机变量 X,Y 不相关, $DX=2, DY=7$, 则 $3X-Y$ 和 $X+Y$ 的相关系数为__________.

12. 设随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布于$U(-1,1)$, 令 $Y=X_1+X_2+\cdots+X_{100}$. 则根据切比雪夫不等式, $P(|Y|\leq 10)\geq$__________. 根据大数定律,有 $\frac{1}{n}(X_1X_2+X_3X_4+\cdots+X_{2n-1}X_{2n})$ 依概率收敛到__________.

13. 设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立, 且 $X_1\sim N(0,4)$, $X_2\sim N(0,4)$, $X_3\sim N(0,\sigma^2)$. 若 $\frac{1}{4}(X_1^2+X_2^2)+2X_3^2\sim\chi^2(3)$, 则$\sigma^2=$__________.

14. 设总体$X\sim B(10,p)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体的样本, $\overline{X}$ 是样本均值, 则 p 的矩估计量是__________.

三. 解答题 (共 6 题，60 分)

15. (8 分) 设第一只盒子中装有 3 只蓝色球，2 只绿色球，2 只白色球，第二只盒子中装有 2 只蓝色球，3 只绿色球，4 只白色球. 独立地在两只盒子中分别随机取一只球.

(1) 求至少有一只蓝色球的概率;　(2) 已知至少有一只蓝色球，求有一只蓝色球，一只白色球的概率.

16. (8 分) 设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

求：(1) X 的分布函数$F(x)$；(2) $P(F(X)>\frac{1}{3})$.

17. (10 分) 设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	-1	0	1
-1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.2
1	0	0.1	c

其中a,b,c为常数, 且满足$E(X)=-0.2$, $P(Y\le 0|X\le 0)=0.5$.

求：(1) a,b,c 的值；(2) $X+Y$ 的分布列.

18. (12 分)设(X,Y)是二维连续型随机变量, X 的边缘密度函数

$$f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

在给定 $X=x(0<x<1)$ 的条件下, Y 的条件概率密度函数为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{3y^2}{x^3}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求: (1) (X,Y) 的概率密度函数 $f(x,y)$; (2) Y 的边缘密度函数$f_Y(y)$; (3) $P(X+Y>1)$.

19. (12 分) 设总体 $X\sim U(0,\theta)$ ， $X_1,X_2,\cdots,X_5$ 是 X 的样本, $\overline{X}$ 是样本均值. 设

$$\widehat{\theta}_1=2\overline{X},\quad \widehat{\theta}_2=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_5\}$$

是 θ 的两个估计量.

(1) 判断 $\widehat{\theta}_1,\widehat{\theta}_2$ 是否为无偏估计？ 求常数 C_i, 使得 $\widetilde{\theta}_i=C_i\widehat{\theta}_i(i=1,2)$ 是无偏估计;

(2) 在无偏-有效性准则下, 分析 $\widetilde{\theta}_1,\widetilde{\theta}_2$ 这两个估计的优劣, 并说明理由.

20. (10 分) 从一批保险丝中抽取 10 根, 试验其熔化时间(单位: 秒), 结果为

43, 65, 75, 70, 59, 57, 69, 55, 57, 72.

假设熔化时间服从正态分布, 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下, 能否认为熔化时间的方差为 100?