浙江工业大学 2021/2022 学年第一学期
概率论与数理统计期末考试试卷

学号：________________ 姓名：________________

班级：________________ 任课教师：________________

题号	一	二	三	总分
得分				

分位点数据：

$\Phi(0.125)=0.5500,\quad \Phi(0.25)=0.5987,\quad \Phi(0.5)=0.6915,\quad \Phi(1)=0.8413$

$\Phi(1.5)=0.9332,\quad \Phi(1.645)=0.9500,\quad \Phi(1.96)=0.9750,\quad \Phi(2)=0.9772$

$t_{0.05}(24)=1.711,\quad t_{0.05}(25)=1.708,\quad t_{0.025}(24)=2.064,\quad t_{0.025}(25)=2.060$

一. 填空题（每空 2 分，共 28 分）

1. 设 A,B 是随机事件，$P(A)=P(B)=0.4$, $P(A|B)=0.2$, 则 $P(A|A\cup B)=$__________.

2. 独立重复投掷一颗均匀的骰子 2 次. 令 X 表示这二次点数之和, 令 Y 表示这二次最大点数，Z 表示出现 6 点的次数. 则 $E(X)=$__________，$P(Y=3)=$__________，$P(Z=1)=$__________.

3. 某人在等公交车. 他等待的时间为 X 分钟. 假设 X 服从均值为 10 的指数分布. 如果他等了 10 分钟还没等到公交车, 问他至少还需再等待 10 分钟的概率是__________.

4. 设 X 和 Y 相互独立，X 服从参数为 3 的泊松分布，Y 服从参数为 1 的泊松分布. 则 $P(X\ge 2)=$__________，$P(X=1|X+Y=2)=$__________.

5. 设 X 和 Y 相互独立, $P(X=0)=P(X=1)=P(X=2)=1/3$, Y 服从 $[0,2]$ 上的均匀分布, 则 $P(X+Y\le 2)=$__________, $P(\min(X,Y)\ge 1)=$__________.

6. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 独立同分布, $P(X_1=-1)=P(X_1=1)=0.125$，$P(X_1=0)=0.75$. 令 $Y=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_{100}}{100}$. 则根据切比雪夫不等式, $P(|Y|\ge 0.1)\le$__________. 根据中心极限定理, $P(|Y|\ge 0.1)$约为__________.

7. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本. 令 $Y = \frac{X_1+X_2}{2}$. 则 X_1 和 Y 的相关系数为 $\rho_{X_1,Y} =$ __________. 若 $\frac{a(X_3-X_4)^2}{(X_1-Y)^2+(X_2-Y)^2}$ 服从 F 分布, 则常数 $a =$ __________. 若 $b[(X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2]$ 是 σ^2 的无偏估计, 则常数 $b =$ __________.

二. 选择题（每题 3 分，共 12 分）

1. 设 (X, Y) 的联合分布律如下表.

X \ Y	0	1	2
-1	x	$1/3$	0
1	y	0	$1/6$

则以下说法正确的是 (　　)

(A) 当 $x = \frac{1}{6}, y = \frac{1}{3}$ 时, X 和 Y 不相关

(B) 当 $x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{6}$ 时, X 和 Y 不相关

(C) 当 $x = \frac{1}{6}, y = \frac{1}{3}$ 时, X 和 Y 独立

(D) 当 $x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{2}$ 时, X 和 Y 独立

2. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} a, & x < 0; \\ bx^2, & 0 \le x < 1; \\ c, & x \ge 1. \end{cases}$

设 $P(X = 1) = 0.2$. 则 (　　)

(A) $a = 0,\ b = 3,\ c = 0$　　(B) $a = 0,\ b = 1,\ c = 1$

(C) $a = 0,\ b = 0.2,\ c = 1$　　(D) $a = 0,\ b = 0.8,\ c = 1$

3. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X \sim U(2, 4)$ 的简单随机样本. 令 Y_n 表示 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 中大于 3.5 的个数. 当 $n \to \infty$ 时, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 依概率收敛到 a , $\frac{Y_n}{n}$ 依概率收敛到 b . 则 (　　)

(A) $a = 9,\ b = \frac{1}{2}$　　(B) $a = 9,\ b = \frac{1}{4}$

(C) $a = \frac{28}{3},\ b = \frac{1}{2}$　　(D) $a = \frac{28}{3},\ b = \frac{1}{4}$

4. 设 X_1, X_2, X_3 是来自总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 样本方差为 S^2. 对于估计 σ^2, 最有效的估计量是 (　　)

(A) $\frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2)$　　(B) S^2

(C) $\frac{1}{3}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)$　　(D) $\frac{1}{4}(X_1^2 + 2X_2^2 + X_3^2)$

三. 解答题（共 60 分）

1. (8 分) 有一个象棋俱乐部, 其中 20% 为一类棋手, 50% 为二类棋手, 30% 为三类棋手. 小李赢一类棋手、二类棋手、三类棋手的概率分别为 0.4、 0.5、 0.6. 从这俱乐部中任选一人与小李比赛.

   (1) 求小李获胜的概率;

   (2) 若小李获胜, 则对手是三类棋手的概率是多少?

2. (12 分)设随机变量 X 的概率密度函数为: $f(x)=\begin{cases} c(x+1), & -1\le x\le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

   (1) 求常数 c; (2) 计算 X 的分布函数 $F(x)$;

   (3) 令 $Y=X^2$, 计算 Y 的概率密度函数.

3. (10 分) 设二维随机向量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} 9\mathrm{e}^{-3y}, & 0<x<y, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

计算 (1) $P(Y\le 3X)$; (2) X 的边缘密度函数$f_X(x)$; (3) EY.

4. (10 分) 已知某车间生产的瓶装饮料重量 X (单位：克) 服从正态分布 $N(\mu,16)$. 现从中随机抽取 25 瓶饮料, 测得样本均值 $\overline{x}=499$.

(1) 求总体均值 μ 置信水平为 0.95 的置信区间;

(2) 在显著水平为 0.05 下, 检验假设 $H_0:\mu\ge 500$, $H_1:\mu\le 500$.

5. (10 分) 设 (X,Y) 服从二维正态分布, $EX = EY = 1$, $Var(X) = 4$, $Var(Y) = 16$, $Cov(X,Y) = 2$.

(1) 计算 $P(X > Y + 2)$; (2) 计算 $E[X(X+Y)]$;

(3) $Y - aX$ 与 Y 独立当且仅当常数 a 为何值? 为什么?

6. (10 分) 设总体 X 具有分布律

X	0	1	2
P	$1-\theta$	$\frac{\theta}{2}$	$\frac{\theta}{2}$

这里$0 \le \theta \le 1$未知. 设来自总体 X 的容量为 10 的简单随机样本的样本观察值 为 $0,0,0,0,0,0,1,1,1,2$.

求(1) θ 的矩估计值; (2) θ 的极大似然估计值.