浙江工业大学 2021/2022 学年第二学期
概率论与数理统计期末考试试卷

一. 填空题（每空 2 分，共 28 分）

1. $\frac{11}{12}$， $\frac{1}{2}$

2. $\frac{1}{5}$， $\frac{4}{25}$

3. 3, 65

4. $\sqrt{10}$, 10

5. $\frac{3}{4}$

6. $P(2\lambda)$ (参数为 2λ 的泊松分布)

7. $\frac{4}{3}$

8. 1

9. 3

10. $F(5,15)$ (自由度为 $(5,15)$ 的 F 分布)

二. 选择题（每题 3 分，共 12 分）

1. B

2. A

3. C

4. B

三. 解答题（共 60 分）

1. (10 分)某地区男女比例是 $2:1$. 已知该地区男人中有5%是色盲, 女人中有0.25%是色盲. 从该地区任选一人.

   (1) 问此人是色盲的概率为多少?

   (2) 若此人恰好是色盲, 则是男性的概率为多大?

解：(1) 设 B_1 表示男性，B_2 表示女性， A 表示色盲，则

$$P(B_1)=\frac{2}{3},\quad P(B_2)=\frac{1}{3},\quad P(A\mid B_1)=5\%,\quad P(A\mid B_2)=0.25\%.$$

由全概率公式,

$$P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)=\frac{2}{3}\times\frac{5}{100}+\frac{1}{3}\times\frac{0.25}{100}=\frac{41}{1200}.$$

⋯⋯⋯6 分

(2)

$$P(B_1\mid A)=\frac{P(B_1)P(A\mid B_1)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{5}{100}}{\frac{41}{1200}}=\frac{40}{41}.$$

⋯⋯⋯10 分

2. (10 分) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & 若x<0;\\ x^2, & 若0\leq x\leq 1;\\ 1, & 若x\geq 1.\end{cases}$ 若$Y=2X^2+3$, 求 Y 的概率密度函数.

解：(解法一) 随机变量 X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 若\ 0\leq x\leq 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

⋯⋯⋯2 分

$Y=2X^2+3$ 的取值范围是 $[3,5]$, 且反函数 $x=h(y)=\sqrt{\frac{y-3}{2}}$, 则当 $3\leq y\leq 5$ 时，

$$f_Y(y)=f_X(h(y))\cdot\mid h'(y)\mid=2\sqrt{\frac{y-3}{2}}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{y-3}{2}}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

因此，

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 3\leq y\leq 5;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

⋯⋯⋯10 分

(解法二) 随机变量 Y 的分布函数为 $F_Y(y)=P(2X^2+3\leq y)$。

当 $y<3$ 时, $F_Y(y)=0$; ⋯⋯⋯1 分

当 $3\leq y\leq 5$ 时,
$F_Y(y)=P(2X^2+3\leq y)=P(-\sqrt{\frac{y-3}{2}}\leq y\leq\sqrt{\frac{y-3}{2}})=F(\sqrt{\frac{y-3}{2}})-F(-\sqrt{\frac{y-3}{2}})=\frac{y-3}{2}$;

当 $y>5$ 时, $F_Y(y)=1$. ⋯⋯⋯8 分

因此， Y 的概率密度函数

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 3\le y\le 5;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$\cdots\cdots\cdots$10 分

3. (12 分) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & x^2+y^2\le c,\\ 0, & 其他.\end{cases}.$$

(1) 求常数 c ; (2) 计算 X 的边缘密度函数; (3) 求 $Cov(X,Y)$.

解：(1) 因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dxdy=\int\int_{x^2+y^2\le c}2\,dxdy=1,$$

所以 $C=\frac{1}{2\pi}$. $\cdots\cdots\cdots$2 分

(2) 当 $-\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\le x\le\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$ 时,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\int_{-\sqrt{\frac{1}{2\pi}-x^2}}^{\sqrt{\frac{1}{2\pi}-x^2}}2\,dy=4\sqrt{\frac{1}{2\pi}-x^2}.$$

因此,

$$f_X(x)=\begin{cases}4\sqrt{\frac{1}{2\pi}-x^2}, & -\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\le x\le\sqrt{\frac{1}{2\pi}},\\ 0, & 其他.\end{cases}.$$

$\cdots\cdots\cdots$8 分

(3)$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\,dxdy=\int\int_{x^2+y^2\le c}2x\,dxdy=0,$
$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\,dxdy=\int\int_{x^2+y^2\le c}2y\,dxdy=0,$
$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\,dxdy=\int\int_{x^2+y^2\le c}2xy\,dxdy=0.$
因此, $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.$ $\cdots\cdots\cdots$12分

4. (8 分) 有一大批建筑房屋用的木柱, 其中 80% 的长度不小于 3 米. 现从这批木柱中任选 100 根. 请利用中心极限定理给出至少有 28 根短于 3 米的概率.

解： 木柱的长度 X 小于 3 米的概率 $P(X<3)=1-0.8=0.2$ 米. 随机变量 Y 表示 100 根木柱中短于 3 米的个数， 则 $Y\sim B(100,0.2)\approx N(20,16)$, $\cdots\cdots\cdots$4分

$$P(Y\ge 28)=1-P(Y<28)=1-\Phi\left(\frac{28-20}{4}\right)=1-\Phi(2)=1-0.9772=0.0228.$$

$\cdots\cdots\cdots$8分

5. (10 分) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是从服从参数为 λ 的指数分布总体中抽出的样本, 求参数λ的矩估计和极大似然估计.

解：指数分布的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$.

(1) $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \overline{X}$. 因此，参数 λ 的矩估计 $\widehat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}$. ·········5分

(2) 极大似然函数为

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i},$$

取对数

$$\ln L(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

关于 λ 求导，

$$\frac{d \ln L(\lambda)}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0.$$

则参数λ的极大似然估计为 $\widehat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\overline{X}}$. ·········10分

6. (10 分) 设某电子元件的寿命(以小时计)服从 $N(\mu, \sigma^2)$ ，σ^2未知. 现任选 9 个电子元件, 测得寿命的样本均值为 $\bar{x} = 255$, 样本方差为 $s^2 = 16$. 问是否有充分的理由认为元件的平均寿命大于 250 小时? (显著性水平为 0.05)

解： $H_0 : \mu \le 250, \quad H_1 : \mu > 250.$ ·········2分

统计量

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{255 - 250}{4/\sqrt{9}} = 3.75,$$

·········6分

拒绝域为 $(t_{0.05}(8), +\infty) = (1.86, +\infty)$，在拒绝域内，故拒绝 H_0，即可以认为元件的平均寿命大于 250 小时。 ·········10分