浙江工业大学 2023/2024 学年第二学期
概率论与数理统计A(48学时)期末考试试卷

学号：__________ 姓名：__________ 班级：__________ 任课教师：__________

分位点数据：

$\Phi(1)=0.8413,\quad \Phi(2)=0.9772,\quad \Phi(1.65)=0.95,\quad \Phi(1.96)=0.975,$

$t_{0.01}(15)=2.6025,\quad t_{0.01}(16)=2.5835,\quad t_{0.005}(15)=2.9467,\quad t_{0.005}(16)=2.9468$

一. 选择题（每题 3 分，共 24 分）

1. 已知随机事件 A, B, 且 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$, 则下列结论正确的是 ( )

   (A) A 和 B 互不相容 (B) $A\cup B$ 是必然事件

   (C) $P(A)+P(B)=1$ (D) 以上三个选项均不正确

2. 袋中装有标记编号为 1 到 10 的 10 个球, 现随机地取出来 4 个并按照标记的编号从小到大排列, 则排在第二的球编号为 6 的概率是 ( )

   (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{7}$ (D) $\frac{1}{8}$

3. 若随机变量 $X\sim B(2,0.4)$, 其分布函数是 $F(x)$, 则 $F(1.5)=$ ( )

   (A) 1 (B) 0.84 (C) 0.16 (D) 0

4. 设 $f(x)$ 为某一连续型随机变量 X 的概率密度函数, 且 $f(1+x)=f(1-x)$, $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$, 则 $P\{X<0\}=$ ( )

   (A) 0.2 (B) 0.4 (C) 0.6 (D) 0.8

5. 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(-1,-1,2,5,0)$, 则 $E(XY^2)=$ ( )

   (A) 6 (B) -6 (C) 9 (D) -9

6. 设随机变量 $X\sim N(0,1), Y\sim N(1,4)$, 且相关系数 $\rho_{XY}=1$, 则 ( )

   (A) $P\{Y=-2X-1\}=1$ (B) $P\{Y=2X-1\}=1$

   (C) $P\{Y=-2X+1\}=1$ (D) $P\{Y=2X+1\}=1$

7. 设总体 $X\sim N(3,16)$, $X_1,X_2,\cdots,X_{16}$ 是来自该总体的样本, $\overline{X}$ 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差, 则下列结论中不正确的是 (　　)

(A) $\dfrac{15S^2}{16}\sim\chi^2(15)$　　(B) $\dfrac{1}{16}\sum\limits_{i=1}^{16}(X_i-3)^2\sim\chi^2(16)$

(C) $Cov(\overline{X},S^2)=0$　　(D) $\dfrac{\overline{X}-3}{4}\sim N(0,1)$

8. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 $N(1,\sigma^2)$ 的简单样本, 则统计量 $\dfrac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}$ 服从的分布是 (　　)

(A) $t(1)$　　(B) $N(0,1)$　　(C) $\chi^2(1)$　　(D) $F(1,1)$

二. 填空题（每空 2 分，共 16 分）

9. 设随机事件 A,B 独立, 且 $P(A)=0.5,P(B)=0.4$, 则 $P(A-B)=$__________.

10. 设某地区位于甲、乙两河流的汇合处, 当任一河流泛滥时, 该地区即遭受水灾. 设某时期内甲河流泛滥的概率为 0.1, 乙河流泛滥的概率为 0.2, 当甲河流泛滥时, 乙河流泛滥的概率为 0.3, 则该时期内这个地区遭受水灾的概率是__________.

11. 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布, 则 $Y=\max\{X,\frac{1}{X}\}$ 的分布函数 $F_Y(y)=$ __________.

12. 设随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布, $Y\sim U(0,4)$, $E(XY)=5$, 则 $D(X-Y)=$ __________, 应用切比雪夫不等式估计 $P\{|X-Y|<4\}\geqslant$ __________.

13. 已知某厂生产的晶体管寿命服从均值为 100h 的指数分布, 现从该厂的产品中随机抽取 64 只, 假设这些晶体管的寿命是相互独立的. 利用中心极限定理计算这 64 只晶体管的寿命总和超过 7200h 的概率为 __________.

14. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单样本, 参数 μ,σ^2 未知, 样本均值 $\bar{x}=8$. 若参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间上限为 9.6, 则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间下限为 __________.

15. 设总体 $X\sim N(\mu,1)$, 其中 $\mu\in\mathbf{R}$ 未知, $x_1,x_2,\cdots,x_{16}$ 是总体 X 的样本值, 对假设检验问题 $H_0:\mu=2$, $H_1:\mu\neq 2$, 取拒绝域 $W=\{\bar{x}\geqslant 2.5\}$, 则该检验犯第一类错误的概率是__________.

三. 解答题（共 60 分）

16. (12 分) 设连续型随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \frac{1}{2}(1+x^3), & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$

求: (1) $P\{-\frac{1}{3}<X<\frac{2}{3}\}$; (2) X 的概率密度函数 $f(x)$; (3) $E(X^2)$.

17. (14 分) 设离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布表为

$X \backslash Y$	0	2	4
0	a	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
1	$\frac{1}{3}$	0	b

$F(x,y)$ 是(X,Y) 的联合分布函数, 且$F(1,3)=\frac{11}{18}$.

求: (1) a,b 的值; (2) X,Y 的边缘分布列; (3) $Z=XY$ 的分布列和 EZ.

18. (16 分)设随机变量 (X,Y) 的概率密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}axy, & x>0,y>0,2x+y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求常数 a;

(2) 求边缘密度函数 $f_X(x)$;

(3) 求 $P\{Y<\frac{1}{2}|X=\frac{1}{2}\}$.

19. (10 分)设总体 X 的分布列为

X	-1	1	2
P	$1-\theta$	$\frac{1}{3}\theta$	$\frac{2}{3}\theta$

其中未知参数 $\theta>0$, 若 $2,-1,1,1,2$ 是来自该总体的简单样本.

求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

20. (8 分) 设尼龙钓鱼绳平均拉力(单位: kN)服从正态分布. 产品说明书称普通 6 号尼龙钓鱼绳平均拉力不小于 12. 现在随机抽查了 16 根, 测得平均拉力为 11.8, 标准差为 0.4. 在显著性水平 $\alpha=0.01$ 下检验产品是否与说明书有显著差别.