这个问题来自作业中的一个证明环节。数论已经很久很久没有碰过了。

Proposition 1.

$$\forall a,b\in\mathbb{N},\quad a^2-10b^2\neq 2\quad and\quad a^2-10b^2\neq 3$$

1

观察到

$$\begin{aligned}1\times1=&1\\2\times2=&4\\3\times3=&9\\4\times4=&16\\5\times5=&25\\6\times6=&36\\7\times7=&49\\8\times8=&64\\9\times9=&81\end{aligned}$$

的个位数有1,4,9,6,5,6,9,4,1的回文规律.
首先说明，个位数相同的数的平方数的个位数相等.

Proposition 2.

$$\forall a\equiv b\pmod{10},\quad a^2\equiv b^2\pmod{10}$$

证明. 使用同余等价的性质$a\sim b,c\sim d\Rightarrow ac\sim bd$得. ∎

然后说明为什么会有这样的回文规律.

Proposition 3.

$$\forall a,b\in\mathbb{N},s.t.\,10\mid a+b,\quad a^2\equiv b^2\pmod{10}$$

证明. 不妨设$a+b=10t\quad,t\in\mathbb{N}$,重排得到等式

$$\begin{aligned}5t-b=&a-5t\\(5t-b)^2=&(a-5t)^2\\25t^2-10bt+b^2=&25t^2-10at+a^2\end{aligned}$$

由于$10\mid 10bt,10\mid 10at$,所以$a^2\equiv b^2\pmod{10}$ ∎

现在再来解决prop.1.

证明. 将命题加强到

$$a^2 \not\equiv 2 \pmod{10}, \quad a^2 \not\equiv 3 \pmod{10}$$

而a^2的个位数只能在1,4,9,6,5,6,9,4,1中取出一个，没有2和3，命题得证. ∎