工程硕士数学实验二-六

请认真阅读以下要求：

1、实验提交：**请从如下 5 个实验中选择 4 个实验完成**，要求在网络学堂截止时间前提交 4 份实验报告（pdf 格式）及对应的程序代码，并将每一个实验报告及其对应代码放在一个压缩包内，命名为“实验 x_姓名_学号”，x 为实验编号。最后将四个压缩包打包一起上传。

2、报告格式：请严格按照如下格式要求写实验报告：

实验报告内容要求

一、实验题目名称

二、专业、班级、姓名

三、目的和意义

方法的理论意义和实用价值，如 Neville 插值算法利用逐次线性插值产生一个从低到高次的 Langrange 插值多项式序列，避免了当增加新节点时从头开始计算的问题。又如改进牛顿法，它适用于任意连续函数在大范围中求解，并且避免计算导数值，使其更具有实用性。

四、计算公式（算法）

五、结构程序设计

六、结果讨论和分析

如初值对结果的影响；不同方法的比较；该方法的特点和改进；整个实验过程中（包括程序编写，上机调试等）出现的问题及其处理等广泛的问题，以此扩大知识面和对实验环节的认识。

3、每个实验迟交总评扣 2 分，不交总评扣 5 分。

4、禁止抄袭，实验报告会上传至学校作业查重系统，一旦发现抄袭情况，抄袭者与被抄袭者均得 0 分，且上报培养处。

实验二

一、问题提出：

（1）已知函数

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

假定插值节点为$x_0 = 0.5, x_1 = 2, x_2 = 2.5, x_3 = 4, x_4 = 5$

① 任选 4 个插值节点构造三次 Lagrange 插值函数；

② 任选两点构造三次 Hermite 插值多项式 H3(x)

分别检验$f(3)$的近似值，并检验插值误差。

（2）已知插值节点

xi	1	2	3	4	5	6	7
yi	0.368	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001

(1) 试构造 Newton 多项式$N_6(x)$；

(2) 试构造 6 次 Lagrange 多项式。

分别检验$f(1.8)$的值，并检验插值误差。

二、要求

1、利用 Lagrange 插值公式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n}\frac{x - x_i}{x_k - x_i}\right)y_k$$

编写插值多项式表达式；

2、给出 Newton 多项式和三次 Hermite 插值多项式的表达式；

3、对比、分析插值误差。

三、目的和意义

1、通过该课题的实验，熟悉常见的函数插值方法；

2、学习运用多种插值方法进行函数插值，比较不同方法；

3、提高分析和解决问题的能力，做到学以致用；

实验三 函数逼近与曲线拟合

一、问题提出

从随机的数据中找出其规律性，给出其近似表达式的问题，在生产实践和科学实验中大量存在，通常利用数据的最小二乘法求得拟合曲线。在某冶炼过程中，根据统计数据的含碳量与时间关系，试求含碳量 y 与时间 t 的拟合曲线。

t(分)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
$y\left(\times 10^{-4}\right)$	0	1.27	2.16	2.86	3.44	3.87	4.15	4.37	4.51	4.58	4.02	4.64

二、要求

1、用最小二乘法进行曲线拟合

2、近似解析表达式为 $\phi(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+a_4t^4$

3、画出拟合函数 $\phi(t)$，并画出 $\phi\left(t_j\right)$ 与 $y\left(t_j\right)$ 的误差，$j=1,2,\cdots\cdots,12$;

4、另外选取一个非多项式近似表达式，尝试拟合效果的比较;

5、* 绘制出曲线拟合图。

三、目的和意义

1、掌握曲线拟合的最小二乘法;

2、了解用最小二乘法解超定线代数方程组;

3、探索拟合函数的选择与拟合精度间的关系。

实验四

一、问题提出：

选用复合梯形公式，复合 Simpson 公式，Romberg 算法，计算

（1） $\mathrm{I}=\int_0^{\pi/4}\sqrt{4-\sin^2 x}dx\ \ (I\approx 1.5343916)$

（2） $\mathrm{I}\ =\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx\ \ (f(0)=1,\ I\approx 0.9460831)$

（3） $\mathrm{I}=\int_1^3 e^x\sin x dx$

（4） $\mathrm{I}=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

二、要求

1、编制数值积分算法的程序；

2、分别用上述两种算法计算同一个积分，并分析这两种方法的误差，比较他们的优缺点。

3、分别取不同步长 $h=(b-a)/n$，试比较计算结果（如 $n=10,20$ 等）；

4、给定精度要求 ε，试用变步长算法，确定最佳步长。

三、目的和意义

1、深刻认识数值积分法的意义；

2、明确数值积分精度与步长的关系；

3、根据定积分的计算方法，可以考虑二重积分的计算问题。

实验五

一、问题提出：

给出下列几个不同类型的线性方程组，请用适当算法计算求解。

1. 设线性方程组

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 & 12 & 1 & 5 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 10 & -3 & -4 & 8 & -1 & 0 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -8 & 7 & 29 & 7 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 9 & 11 & 3 & 15 & -2 & 6 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & -3 & 2 & -1 & -9 & 5 & -2 & 12 \\ 4 & 9 & -8 & 11 & 1 & -2 & 5 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 6 & -9 & 23 & 4 & 0 & 9 & 17 \\ -8 & 10 & -4 & 9 & 12 & 15 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 2 & -7 & 1 & 3 & 21 & 0 & 8 & -11 \\ 4 & 0 & -2 & 3 & -13 & 2 & -3 & 32 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -14 \\ 31 \\ 49 \\ -1 \\ 30 \\ 20 \\ 24 \\ 24 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. 设对称正定矩阵线性方程组

方程组：

$$\begin{cases} a_{ii} = 3, & \text{if } i = 1, \cdots, n, \\ a_{i,i-1} = -1, & \text{if } i = 2, \cdots, n \\ a_{i,i+1} = -1, & \text{if } i = 1, \cdots, n-1 \\ a_{i,n+1-i} = \dfrac{1}{2}, & \text{if } i = 1, \cdots, n \text{ 且 } i \neq \dfrac{n}{2}, i \neq \dfrac{n}{2} + 1 \\ a_{ij} = 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

取$b = (2.5, 1.5, \cdots, 1.5, 1.0, 1.0, 1.5, \cdots, 1.5, 2.5)^{\top}$，n=10。

e.g.当 n=10 时：

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

3．三对角线性方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -13 \\ 2 \\ 6 \\ -12 \\ 14 \\ -4 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

二、要求

1、对上述三个方程组分别利用 Gauss 顺序消去法与 Gauss 列主元消去法；平方根法与改进平方根法；追赶法求解（选择其一）；

2、应用结构程序设计编出通用程序；

3、比较计算结果，分析数值解误差的原因；

4、尽可能利用相应模块输出系数矩阵的三角分解式。

5、 对方程组 2，统计算法在 n 取 10，20，30 等不同值求解所需要的 CPU 时间。

三、目的和意义

1、通过该课题的实验，体会模块化结构程序设计方法的优点；

2、运用所学的计算方法，解决各类线性方程组的直接算法；

3、提高分析和解决问题的能力，做到学以致用；

4、通过三对角形线性方程组的解法，体会稀疏线性方程组解法的特点。

实验六

一、问题提出

对实验五方程组 2，取 $n=100$ 。试分别选用 Jacobi 迭代法， Gauss-Seidol 迭代法和 SOR 方法计算其解。

二、要求

1、体会迭代法求解线性方程组，并能与消去法做以比较；

2、分别对不同精度要求，如 $\varepsilon=10^{-3},10^{-4},10^{-5}$ 由迭代次数体会该迭代法的收敛快慢；

3、使用 SOR 方法时， 精度要求 $\varepsilon=10^{-5}$ 时，选取松弛因子 ω =0.8，0.9，1，1.1，1.2，1.4，1.6 等，列出不同松弛因子下的迭代次数及相应的收敛情况，并能找出你所选用的松弛因子的最佳者；

4、给出 Jacobi 方法与 Gauss-Seidel 方法迭代矩阵的谱半径及渐近收敛速度。

5、对方程组 2 求解时计算 Jacobi 迭代法，Gauss-Seidol 迭代法和 SOR 方法在 n=100 和 n=100000 时所需的 CPU 时间及相应的收敛曲线。在实现算法功能的基础上，研究是否能进一步减少 CPU 时间，并给出具体方案。

三、目的和意义

1、通过上机计算体会迭代法求解线性方程组的特点，并能和消去法比较；

2、运用所学的迭代法算法，解决各类线性方程组，编出算法程序；

3、体会上机计算时，终止步骤 $\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_{\infty}<\varepsilon$ 或 k >（予给的迭代次数），对迭代法敛散性的意义；

4、体会初始解 $x^{(0)}$，松弛因子的选取，对计算结果的影响。