

实验二：用FFT对信号作频谱分析

1. 实验目的

学习用 FFT 对连续信号和时域离散周期信号进行谱分析的方法，了解可能出现的分析误差及其原因，以便正确应用 FFT。

用 FFT 对信号作频谱分析是学习数字信号处理的重要内容。经常需要进行谱分析的信号是模拟信号和时域离散信号。对信号进行谱分析的重要问题是频谱分辨率和分析误差。

2. 实验原理

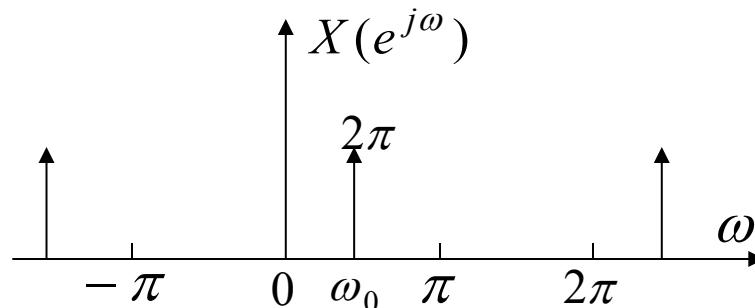
- 频谱分辨率直接和 FFT 的变换区间 N 有关，因为 FFT 能够实现的频率分辨率是 $2\pi / N$ 。误差主要来自于用 FFT 作频谱分析时，得到的是离散谱，而信号（周期信号除外）是连续谱，只有当 N 较大时离散谱的包络才能逼近于连续谱，因此 N 要适当选择大一些。
- 周期信号的频谱也是离散谱，并不是将 N 设置越高才能获得代表周期信号的频谱，而是需要将 N 设置整数倍周期的长度作 FFT 变换。

时域离散信号：

$$x(n) = e^{j\omega_0 n}$$

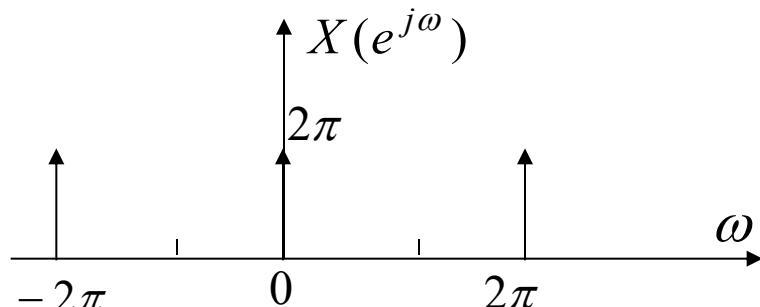
← 复指数序列

$$X(e^{j\omega}) = FT [e^{j\omega_0 n}] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r)$$



$e^{j\omega_0 n}$ 的FT

$$x(n) = 1 \quad (\text{直流信号})$$



上式表示复指数序列的FT
是在 $\omega_0 + 2\pi r$ 处的单位
冲激函数，强度为 2π 。

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi r)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega) e^{j\omega n} d\omega \\ & = 1 \end{aligned}$$

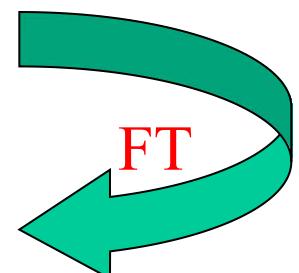
一般周期序列: $\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$

类似于复指
数序列的FT

第 k 次谐波为 $\tilde{x}_k(n) = (\tilde{X}(k)/N) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$



$$FT[\tilde{x}_k(n)] = \left[2\pi \tilde{X}(k) / N \right] \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k - 2\pi r)$$



$$\therefore X(e^{j\omega}) = FT[\tilde{x}(n)]$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2\pi \tilde{X}(k)}{N} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k - 2\pi r)$$

式中 $k=0, 1, 2, \dots, N-1$,
让 k 在 $\pm\infty$ 之间变化, 上式简化成

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(k) \delta(\omega - \frac{2\pi}{N} k)$$

上式就是周期序列的傅立叶变换表达式, 式中

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

周期信号的频谱是离散谱，并不是将 N 设置越高才能获得代表周期信号的频谱，而是需要将 N 设置整数倍周期的长度作FFT变换。

证明过程：

对周期为N的序列 $\tilde{x}(n)$ ，其频谱函数为

$$X(e^{j\omega}) = FT[\tilde{x}(n)] = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(k) \delta(\omega - \frac{2\pi}{N} k)$$

$$\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

$X(e^{j\omega})$ ：以 N 为周期的离散谱，每个周期有 N 条谱线，第 k 条谱线位于 $\omega = (2\pi / N)k$ 处，代表 $\tilde{x}(n)$ 的第 k 次谐波分量。周期序列的频谱结构可以由DFS系数 $\tilde{X}(k)$ 表示。

利用DFT的隐含周期性, $x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n)$

$$X(k) = DFT[x(n)] = DFT[\tilde{x}(n)R_N(n)] = \tilde{X}(k)R_N(n)$$

所以可用 $X(k)$ 表示 $\tilde{x}(n)$ 的频谱结构。

如果截取长度 M 等于 $\tilde{x}(n)$ 的整数个周期进行DFT, 即 $M = mN$, 则

$$x_M(n) = \tilde{x}(n) \cdot R_M(n)$$

$$X_M(k) = DFT[x_M(n)] = \sum_{n=0}^{M-1} \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi}{M} kn} = \sum_{n=0}^{mN-1} \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi}{mN} kn}$$

$$0 \leq k \leq mN - 1$$

令 $n = n' + rN; \quad r = 0, 1, \dots, m-1;$

$$n' = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$\begin{aligned} X_M(k) &= \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}(n' + rN) e^{-j \frac{2\pi(n' + rN)}{mN} k} \\ &= \sum_{r=0}^{m-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi n}{mN} k} \right] e^{-j \frac{2\pi}{m} rk} \\ &= \sum_{r=0}^{m-1} X\left(\frac{k}{m}\right) e^{-j \frac{2\pi}{m} rk} = X\left(\frac{k}{m}\right) \sum_{r=0}^{m-1} e^{-j \frac{2\pi}{m} rk} \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{r=0}^{m-1} e^{-j \frac{2\pi}{m} rk} = \begin{cases} m, & k/m = \text{整数} \\ 0, & k/m \neq \text{整数} \end{cases} \quad \therefore X_M(k) = \begin{cases} mX\left(\frac{k}{m}\right), & k/m = \text{整数} \\ 0, & k/m \neq \text{整数} \end{cases}$$

可见， $X_M(k)$ 也可以表示 $\tilde{x}(n)$ 的频谱结构，

当 $k=rm$ 时， $X_M(rm) = mX(r)$

当 k 为其它值时， $X_M(rm) = 0$

$X_M(rm)$ 和 $X(r)$ 对应的点频率相等：

$$\left(\frac{2\pi}{N} r = \frac{2\pi}{mN} m r \right)$$

所以，只要截取 $\tilde{x}(n)$ 的整数个周期进行DFT，就可以得到它的谱结构，达到谱分析的目的。

- 对模拟信号进行谱分析时，首先要按照采样定理将其变成时域离散信号。如果是模拟周期信号，也应该选取整数倍周期的长度，经过采样后形成周期序列，按照周期序列的谱分析进行。

3. 实验内容

(1) 对以下非周期序列进行谱分析:

$$x_1(n) = R_4(n)$$

$$x_2(n) = \begin{cases} n+1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 8-n, & 4 \leq n \leq 7 \\ 0, & \text{其它 } n \end{cases}$$

$$x_3(n) = \begin{cases} 4-n, & 0 \leq n \leq 3 \\ n-3, & 4 \leq n \leq 7 \\ 0, & \text{其它 } n \end{cases}$$

x₂(n)和x₃(n)之间的关系? 对应频谱之间有什么关系?

选择FFT的变换区间N为8和16 两种情况进行频谱分析。
分别绘制其幅频特性曲线，并进行对比、分析和讨论。

步骤：

1. 生成时域非周期离散信号
2. 利用matlab的**fft**函数做**FFT**变换
3. 利用matlab的**stem**函数做频谱图（针状图）

(2) 对以下周期序列进行谱分析:

$$x_4(n) = \cos \frac{\pi}{4} n$$

$$x_5(n) = \cos \frac{\pi}{4} n + \cos \frac{\pi}{8} n$$

选择FFT的变换区间N为8和16 两种情况分别对以上序列进行频谱分析。分别画出其幅频特性曲线，并进行对比、分析和讨论。

(3) 对模拟周期信号进行谱分析:

$$x_8(t) = \cos 8\pi t + \cos 16\pi t + \cos 20\pi t$$

选择采样频率 $F_s=64$ Hz, 对变换区间 $N=16, 32, 64$ 三种情况进行谱分析。分别画出其幅频特性，并进行分析和讨论。

5. 思考题

(1) 对于周期序列，如果周期不知道，如何用FFT进行谱分析？

6. 实验报告要求

(1) 完成各个实验任务和要求，附上程序清单和有关曲线。

(2) 简要回答思考题。

