

1 | Lemma 1

2 | Lemma 2

3 | Lemma 3

4 | C is real

5 | $C-1$ is real $(E, 1, 4)$

6 | $0 \leq (C-1)^2$ $(E, 2, 5)$

7. | $0 \leq C^2 + 1 - 2C$

8. | $2C \leq C^2 + 1$

9. | C is real $\rightarrow 2C \leq C^2 + 1$ $(I, 4, 8)$

(a)

1		<u>P</u>	
2		<u>q</u>	
3		q	(R 2)
4		q → q	(I, 2, 3)
5		p → (q → q)	(I, 1, 4)

(b) $r \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow p))$

1.		<u>r</u>	
2.		<u>p</u>	
3.		<u>q</u>	
4.		p	(R, 2)
5.		q → p	(I, 3, 4)
6.		p → (q → p)	(I, 2, 5)
7.		r → (p → (q → p))	(I, 1, 6)

(c) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r))$

1. | | p → q

1.	$P \rightarrow q$	
2.	$P \rightarrow (q \rightarrow r)$	
3.	P	
4.	q	(E, 1, 3)
5.	$q \rightarrow r$	(E, 2, 3)
6.	$P \rightarrow r$	(I, 3, 5)
7.	$(P \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (P \rightarrow r)$	(I, 2, 6)
8.	$(p \rightarrow q) \rightarrow ((P \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (P \rightarrow r))$	(I, 1, 7)

(d) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$

1.	$P \rightarrow (q \rightarrow r)$	
2.	q	
3.	P	
4.	$q \rightarrow r$	(E, 1, 3)
5.	r	(E, 2, 4)
6.	$P \rightarrow r$	(I, 3, 5)
7.	$q \rightarrow (P \rightarrow r)$	(I, 2, 6)
8.	$(P \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (P \rightarrow r))$	(I, 1, 7)

$$8. \mid (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r)) \quad (I, 1, 7)$$

$$(e) \quad (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

1.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	
2.	$(p \rightarrow q)$	
3.	p	
4.	q	$(E, 2, 3)$
5.	$q \rightarrow r$	$(E, 1, 3)$
6.	r	$(E, 4, 5)$
7.	$p \rightarrow r$	$(I, 3, 6)$

$$8. \mid (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r) \quad (I, 2, 7)$$

$$9. \mid (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \quad (I, 1, 8)$$