矩阵分析

学习指导

魏丰 史荣昌 闫晓霞 编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书为史荣昌，魏丰编著的教材《矩阵分析》一书的学习指导书。每章均有对相应章节内容的基本要求、典型例题、题解评注、练习题和自测题，最后对每章的练习题和自测题给出了详细的解题过程，对学生的学习给予了很大的启迪和帮助。

图书在版编目(CIP)数据

矩阵分析学习指导/魏丰，史荣昌，闫晓霞编著.—北京：北京理工大学出版社，2005.9

ISBN 7-5640-0474-6

Ⅰ.矩… Ⅱ.①魏…②史…③闫… Ⅲ.矩阵分析-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O151.21

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第066939号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68914990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
电子邮箱 / chiefedit@bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京地质印刷厂
开　　本 / 850毫米×1168毫米　1/32
印　　张 / 9.125
字　　数 / 220千字
版　　次 / 2005年9月第1版　2005年9月第1次印刷
印　　数 / 1～4000册
定　　价 / 14.00元

责任校对 / 张　宏
责任印制 / 刘京凤

前　言

本书是作者编著的教材《矩阵分析》一书的学习辅导书，书中给出了教材中所有习题详细的解答，其目的在于帮助读者学习矩阵理论、掌握解题的方法、提高解题的技巧。

本书由相应章节内容的基本要求、典型例题、习题、自测题、习题与自测题解答五部分组成。基本要求部分是从需要读者掌握的解题方法的角度而编写的，篇幅很小；习题是《矩阵分析》教材中每一章后的习题，为了使读者可以独立使用本书，书中抄录了教材中的全部习题；自测题部分是希望读者阅读完例题、习题以后，检查个人是否掌握了基本解题方法而选编的，其解答相对比较简单。

为便于读者自学，在编写例题、习题解答时做到简单明了，不累赘，但是叙述又不能过于精炼、省略，力求做到阅读时易懂、易理解。

考虑到不同类型、不同层次读者的需要，例题、习题的编写既有简单的基础题，又有偏理科的难题，对于一些有难度的题，我们标有 * 号。读者可根据个人情况进行选择，不必全部阅读。

书中个别例题、习题有多种解法，但没有把多种解法作为本书的要求。本书介绍的解题方法并不一定是最好的方法，读者完全可能会找到更好的解题方法。

由于时间仓促，书中难免存在错漏之处，敬请读者批评指正。

编著者

2005 年 6 月

目　　录

第一章 线性空间和线性变换

一、基本要求

(1) 充分理解抽象线性空间的概念，掌握向量的线性表出、线性相关、线性无关的判断与性质．

(2) 掌握线性空间的基、维数、坐标的定义与求法；掌握基变换与坐标变换．

(3) 理解线性子空间的概念，重点掌握齐次线性方程组的解空间与生成子空间，理解线性子空间的交与和以及维数公式，了解子空间的直和与补子空间．

(4) 掌握线性映射(变换)的概念，线性映射(变换)的矩阵表示以及一个线性变换在不同基下矩阵之间的关系．

(5) 会求线性映射的核与值域，理解秩与零度定理．

(6) 理解线性变换不变子空间的定义与性质．

(7) 会求矩阵(线性变换)的特征值与特征向量，理解矩阵(线性变换)的特征值与特征向量的性质．

(8) 掌握矩阵可对角化的条件，理解矩阵簇同时可对角化的含义．

二、典型例题

例 1.1 试证：所有 n 阶对称矩阵组成 $\frac{n(n+1)}{2}$ 维线性空间；所有 n 阶反对称矩阵组成 $\frac{n(n-1)}{2}$ 维线性空间．

证明：用 E_{ii} 表示 n 阶矩阵中除第 i 行，第 i 列的元素为 1 外，其余元素全为 0 的矩阵．用 $E_{ij}(i<j, i=1,2,\cdots,n-1)$ 表示 n 阶矩阵中除第 i 行第 j 列元素与第 j 行第 i 列元素为 1 外，其于元素

全为 0 的矩阵．

显然，E_{ii}，E_{ij}都是对称矩阵，E_{ii}有 n 个，E_{ij}有$\frac{n(n-1)}{2}$个．不难证明 E_{ii}，E_{ij}是线性无关的，且任何一个对称矩阵都可用这 $n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$个矩阵线性表示，此即对称矩阵组成$\frac{n(n+1)}{2}$维线性空间．

同样可证所有 n 阶反对称矩阵组成的线性空间的维数为$\frac{n(n-1)}{2}$.

评注：欲证一个集合在加法与数乘两种运算下是一个$\frac{n(n+1)}{2}$维线性空间，只需找出$\frac{n(n+1)}{2}$个向量线性无关，并且集合中任何一个向量都可用这$\frac{n(n+1)}{2}$个向量线性表示即可．

例 1.2 设非齐次线性方程组 $AX=b$ 有解，其通解表达式为

$$\xi+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$为任意数．试证：向量组ξ，$\xi+\alpha_1$，$\xi+\alpha_2$，$\cdots$，$\xi+\alpha_{n-r}$是方程组 $AX=b$ 所有解的极大线性无关组，但是 $AX=b$ 的所有解集合不构成线性空间．

证明：首先证明ξ，$\xi+\alpha_1$，$\xi+\alpha_2$，$\cdots$，$\xi+\alpha_{n-r}$线性无关．设

$$l_0\xi+l_1(\alpha_1+\xi)+\cdots+l_{n-r}(\xi+\alpha_{n-r})=0$$

即

$$(l_0+l_1+\cdots+l_{n-r})\xi+l_1\alpha_1+\cdots+l_{n-r}\alpha_{n-r}=0 \qquad ①$$

用矩阵 A 左乘上式两端，并根据 $A\alpha_i=0$，$A\xi=b$ 可得

$$(l_0+l_1+\cdots+l_{n-r})b=0$$

因 $b\neq 0$，所以

$$l_0+l_1+\cdots+l_{n-r}=0 \qquad ②$$

将②式代入①式得

$$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_{n-r}\alpha_{n-r}=0$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$是 $AX=0$ 的基础解系，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$线性无关，故

$$l_1=l_2=\cdots=l_{n-r}=0$$

代入②式可得 $l_0=0$，所以$\xi,\xi+\alpha_1,\xi+\alpha_2,\cdots,\xi+\alpha_{n-r}$线性无关．

设 β 为 $AX=b$ 的某一个解，则

$$\begin{aligned}\beta&=\xi+k_1(\xi+\alpha_1)+k_2(\xi+\alpha_2)+\cdots+k_{n-r}(\xi+\alpha_{n-r})\\&=(1-k_1-\cdots-k_{n-r})\xi+k_1(\alpha_1+\xi)+\\&\quad\cdots+k_{n-r}(\xi+\alpha_{n-r})\end{aligned}$$

这表明 β 可由$\xi,\xi+\alpha_1,\xi+\alpha_2,\cdots,\xi+\alpha_{n-r}$线性表示，因此$\xi,\xi+\alpha_1,\xi+\alpha_2,\cdots,\xi+\alpha_{n-r}$是 $AX=b$ 解集合的极大线性无关组．

由于 $AX=b$ 的解之和，解的常数倍都不是 $AX=b$ 的解，这说明 $AX=b$ 的解集合对加法与数乘不封闭，所以它不是线性空间．

评注：本题按照定义证明并不困难，本题结论说明一个无穷多个向量集合可以有极大线性无关组，但此集合并不一定构成线性空间．线性空间的基一定是极大线性无关组，但一个极大线性无关组（即使是无穷多个向量集合）并不一定是基．

***例 1.3** 判断实数域 R 上的线性空间 R^R 中的下列函数是否线性无关？

(1) $e^{\lambda_1x},e^{\lambda_2x},\cdots,e^{\lambda_nx}$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是互不相同的实数；

(2) $x^{\alpha_1},x^{\alpha_2},\cdots,x^{\alpha_n}$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是互不相同的实数；

(3) $1,\cos x,\cos 2x,\cos 3x$；

(4) $\sin^4x,\cos^4x,\sin^2x,\cos^2x$．

解：(1) 设 $k_1e^{\lambda_1x}+k_2e^{\lambda_2x}+\cdots+k_ne^{\lambda_nx}=0$，对此式两端求 n 阶导数可得

$$\begin{cases}k_1\lambda_1e^{\lambda_1x}+k_2\lambda_2e^{\lambda_2x}+\cdots+k_n\lambda_ne^{\lambda_nx}=0\\k_1\lambda_1^2e^{\lambda_1x}+k_2\lambda_2^2e^{\lambda_2x}+\cdots+k_n\lambda_n^2e^{\lambda_nx}=0\\\quad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\\k_1\lambda_1^ne^{\lambda_1x}+k_2\lambda_2^ne^{\lambda_2x}+\cdots+k_n\lambda_n^ne^{\lambda_nx}=0\end{cases}$$

将上式中的 x 以数 1 代替得到一个关于 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 的齐次线性方程组

$$\begin{cases} k_1\lambda_1 e^{\lambda_1} + k_2\lambda_2 e^{\lambda_2} + \cdots + k_n\lambda_n e^{\lambda_n} = 0 \\ k_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1} + k_2\lambda_2^2 e^{\lambda_2} + \cdots + k_n\lambda_n^2 e^{\lambda_n} = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ k_1\lambda_1^n e^{\lambda_1} + k_2\lambda_2^n e^{\lambda_2} + \cdots + k_n\lambda_n^n e^{\lambda_n} = 0 \end{cases}$$

由于其系数矩阵

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_1} & \lambda_2 e^{\lambda_2} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2} & \cdots & \lambda_n^2 e^{\lambda_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^n e^{\lambda_1} & \lambda_2^n e^{\lambda_2} & \cdots & \lambda_n^n e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

为可逆矩阵，所以

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$$

这表明 $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \cdots, e^{\lambda_n x}$ 是线性无关的.

(2) 设 $k_1 x^{a_1} + k_2 x^{a_2} + \cdots + k_n x^{a_n} = 0$，将此式中的 x 分别以不同的值 $1, 2, 2^2, \cdots, 2^{n-1}$ 代入得到一个关于 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 的齐次线性方程组

$$\begin{cases} k_1 \cdot 1^{a_1} + k_2 \cdot 1^{a_2} + \cdots + k_n \cdot 1^{a_n} = 0 \\ k_1 \cdot 2^{a_1} + k_2 \cdot 2^{a_2} + \cdots + k_n \cdot 2^{a_n} = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ k_1 \cdot 2^{(n-1)a_1} + k_2 \cdot 2^{(n-1)a_2} + \cdots + k_n \cdot 2^{(n-1)a_n} = 0 \end{cases}$$

解此方程组得到 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$，从而 $x^{a_1}, x^{a_2}, \cdots, x^{a_n}$ 是线性无关的.

(3) 设 $k_0 \cdot 1 + k_1 \cos x + k_2 \cos 2x + k_3 \cos 3x = 0$，将此式中的 x 分别取不同的值 $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{3}$ 代入得到一个关于 k_0, k_1, k_2, k_3 的齐次线性方程组

$$\begin{cases} k_0\cdot 1+k_1\cdot 1 \quad +k_2\cdot 1 \quad +k_3\cdot 1 = 0 \\ k_0\cdot 1+k_1\cdot 0 \quad +k_2\cdot(-1)+k_3\cdot(-1)=0 \\ k_0\cdot 1+k_1\cdot(-1)+k_2\cdot 1 \quad +k_3\cdot(-1)=0 \\ k_0\cdot 1+k_1\cdot(\frac{1}{2})+k_2\cdot(-\frac{1}{2})+k_3\cdot(-1)=0 \end{cases}$$

解得 $k_0=k_1=k_2=k_3=0$，于是 $1,\cos x,\cos 2x,\cos 3x$ 是线性无关的．

(4) 由关系式 $\sin^2x+\cos^2x=1$，可得 $(\sin^2x+\cos^2x)^2=1=\sin^2x+\cos^2x$.

这样有

$$\sin^4x+\cos^4x+2\sin^2x\cos^2x=\sin^2x+\cos^2x$$

$$\sin^4x+\cos^4x+2(1-\cos^2x)\cos^2x=\sin^2x+\cos^2x$$

整理可得 $\sin^4x-\cos^4x=\sin^2x-\cos^2x$，这表明 $\sin^4x,\cos^4x,\sin^2x,\cos^2x$ 是线性相关的．

* **例 1.4** 已知全体正实数集合 $\mathbf{R}^+$ 关于如下定义的加法与数量乘法构成线性空间

$$a\oplus b:=ab,\ a,b\in\mathbf{R}^+$$

$$k\cdot a:=a^k,\ a\in\mathbf{R}^+,\ k\in\mathbf{R}$$

试求此线性空间的一个基与维数．

解：首先注意到 $\mathbf{R}^+$ 中的单位元为 1，任取 $r\in\mathbf{R}^+$，且 $r\neq 0$. 设 $k\cdot a:=1$，那么 $a^k=1$，于是 $k=0$. 再任取 $s\in\mathbf{R}^+$，设 $s=l\cdot r:=r^l$，可得 $l=\log_r s$. 这表明 $\mathbf{R}^+$ 中任何一个非零数都可以作为 $\mathbf{R}^+$ 的基，从而其维数为 1.

例 1.5 在 $R^{2\times2}$ 中求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}$$

在基 $\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_4=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ 下的坐标．

解：**方法一**　设 $A=x_1E_1+x_2E_2+x_3E_3+x_4E_4$

即

$$\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$$

故

$$\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2+x_3+x_4&x_1+x_2+x_3\\x_1+x_2&x_1\end{bmatrix}$$

于是

$$x_1+x_2+x_3+x_4=1,\ x_1+x_2+x_3=2$$
$$x_1+x_2=0,\ x_1=3$$

解之得

$$x_1=3,\ x_2=-3,\ x_3=2,\ x_4=-1$$

即 A 在 E_1,E_2,E_3,E_4 下的坐标为 $(3,-3,2,-1)^{\mathrm{T}}$.

方法二　应用同构的概念，$R^{2\times2}$是一个四维空间，并且可将矩阵 A 看作 $(1,2,0,3)^{\mathrm{T}}$，E_1,E_2,E_3,E_4 可看作 $(1,1,1,1)^{\mathrm{T}},(1,1,1,0)^{\mathrm{T}},(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$. 于是有

$$\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\1&1&1&0&2\\1&1&0&0&0\\1&0&0&0&3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&0&0&3\\0&1&0&0&-3\\0&0&1&0&2\\0&0&0&1&-1\end{array}\right]$$

因此 A 在 E_1,E_2,E_3,E_4 下的坐标为 $[3,-3,2,-1]^{\mathrm{T}}$.

评注：只需按照向量坐标定义计算.

例 1.6　试证：在 $R^{2\times2}$中矩阵

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$$

线性无关，并求 $\alpha=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标.

解：设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$

即

$$k_1\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}+k_4\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}k_1+k_2+k_3+k_4 & k_1+k_2+k_3\\ k_1+k_3+k_4 & k_1+k_2+k_4\end{bmatrix}=0$$

于是

$$k_1+k_2+k_3+k_4=0,\ k_1+k_2+k_3=0$$
$$k_1+k_3+k_4=0,\ k_1+k_2+k_4=0$$

解之得

$$k_1=k_2=k_3=k_4=0$$

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关.

设

$$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}x_1+x_2+x_3+x_4 & x_1+x_2+x_3\\ x_1+x_3+x_4 & x_1+x_2+x_4\end{bmatrix}$$

于是

$$x_1+x_2+x_3+x_4=a,\ x_1+x_2+x_3=b$$
$$x_1+x_3+x_4=c,\ x_1+x_2+x_4=d$$

解之得

$$x_1=b+c+d-2a,\ x_2=a-c$$
$$x_3=a-d,\ x_4=a-b$$

x_1,x_2,x_3,x_4 即为所求之坐标.

例 1.7 设 $R[x]_4$ 是所有次数小于 4 的实系数多项式组成的线性空间,求多项式 $p(x)=1+2x^3$ 在基 $1,x-1,(x-1)^2,(x-1)^3$ 下的坐标.

解:方法一 (用线性空间理论计算)

$$p(x)=1+2x^3=[1,x,x^2,x^3]\begin{bmatrix}1\\0\\0\\2\end{bmatrix}$$

$$=[1,x-1,(x-1)^2,(x-1)^3]\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}$$

又由于

$$[1,x-1,(x-1)^2,(x-1)^3]$$
$$=[1,x,x^2,x^3]\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&-2&3\\0&0&1&-3\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

于是 $p(x)$ 在基 $1,x-1,(x-1)^2,(x-1)^3$ 下的坐标为

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&-2&3\\0&0&1&-3\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\\6\\2\end{bmatrix}$$

方法二 将 $p(x)=1+2x^3$ 根据幂级数公式按 $x-1$ 展开可得

$$p(x)=1+2x^3$$
$$=p(1)+p(1)(x-1)+\frac{p''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{p'''(1)}{3!}(x-1)^3$$
$$=3+6(x-1)+6(x-1)^2+2(x-1)^3$$

因此 $p(x)$ 在基 $1,x-1,(x-1)^2,(x-1)^3$ 下的坐标为 $[3,6,6,2]^T$.

评注：按照向量坐标定义计算，第二种方法比第一种方法更简单一些．

***例 1.8** 设 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是实数域 R 中 n 个不同的数，令

$$g_i(x)=\prod_{j\neq i}(x-c_j)(c_i-c_j)^{-1},\ i=1,2,\cdots,n$$

证明：$g_1(x),g_2(x),\cdots,g_n(x)$ 为 $R[x]_n$ 中的一个基．

证明：设 $k_1g_1(x)+k_2g_2(x)+\cdots+k_ng_n(x)=0$

依次取 $x=c_1, x=c_2, \cdots, x=c_n$ 代入上式可得

$$\begin{cases}k_1g_1(c_1)+k_2g_2(c_1)+\cdots+k_ng_n(c_1)=0\\ k_1g_1(c_2)+k_2g_2(c_2)+\cdots+k_ng_n(c_2)=0\\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\ k_1g_1(c_n)+k_2g_2(c_n)+\cdots+k_ng_n(c_n)=0\end{cases}$$

注意到 $g_i(c_i)=1, g_i(c_j)=0(i\neq j)$，于是 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$.

这表明 $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_n(x)$ 为 $R[x]_n$ 中一组线性无关的向量，从而是 $R[x]_n$ 的一个基.

* **例 1.9** 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，求实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间 R^X 的一个基和维数，并且求出函数 f 在这个基下的坐标.

解：任取 $f\in R^X$，f 被其所有函数值 $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$ 所决定，构造 n 个函数

$$f_i(x_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}，其中 1\leqslant j\leqslant n,\quad i=1,2,\cdots,n$$

容易证明 f 可由 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 线性表出，而且 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是线性无关的，从而 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是 R^X 的一个基. 所以 $\dim R^X=n$. 设函数 f 在此基下的坐标为 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]^T$，那么有

$$f(x)=a_1f_1(x)+a_2f_2(x)+\cdots+a_nf_n(x)$$

将此式中的 x 分别用 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 代入可得

$$a_1=f(x_1),\ a_2=f(x_2),\ \cdots,\ a_n=f(x_n)$$

评注：按照线性无关定义证明，也可参照第一章函数向量线性无关定义.

例 1.10 已知 R^4 中的两组基

$$\alpha_1=[1,-1,0,0]^T,\ \alpha_2=[0,1,-1,0]^T,$$
$$\alpha_3=[0,0,1,-1]^T,\ \alpha_4=[1,0,0,1]^T$$

与

$$\beta_1=[2,1,-1,1]^T,\ \beta_2=[0,3,1,0]^T,$$
$$\beta_3=[5,3,2,1]^T,\ \beta_4=[6,6,1,3]^T.$$

求：(1) 由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵．

(2) 求向量 $\xi=[1,0,1,0]^T$ 在基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 下的坐标．

解：(1) 设

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]P$$

将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 与 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 代入上式得

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}P$$

故过渡矩阵

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 & -\frac{1}{2} & -2 \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{5}{2} & 4 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{9}{2} & 5 \\ \frac{3}{2} & 2 & \frac{11}{2} & 8 \end{bmatrix}$$

(2) 设

$$\xi=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

将 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 坐标代入上式后整理得

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{9} \\ -\frac{8}{27} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{27} \end{bmatrix}$$

评注：只需将 α_i，β_i 代入过渡矩阵的定义 $[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]P$ 计算出 P.

例 1.11 已知 V_1 是线性方程组

$$(\text{I})\qquad \begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0 \\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0 \end{cases}$$

的解空间，V_2 是线性方程组

$$(\text{II})\qquad \begin{cases} 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0 \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0 \end{cases}$$

的解空间．求(1) $V_1\cap V_2$ 的基与维数．(2) V_1+V_2 的基与维数．

解：(1) 不难求得方程组

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0 \\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0 \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0 \end{cases}$$

的基础解系是 $\xi_1=(3,19,17,0)^{\mathrm{T}}$，$\xi_2=(-13,-20,0,17)^{\mathrm{T}}$，它就是 $V_1\cap V_2$ 的基，维数为 2.

(2) 不难求得线性方程组(Ⅰ)的基础解系是 $\alpha_1=[3,19,17,0]^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=[-13,-20,0,17]^{\mathrm{T}}$. 方程组(Ⅱ)的基础解系是 $\beta_1=[3,19,17,0]^{\mathrm{T}}=\alpha_1$，$\beta_2=[-13,-20,0,17]^{\mathrm{T}}=\alpha_2$，于是 $V_1=V_2$，所以 V_1+V_2 的基是 α_1,α_2，维数为 2.

由此可见本题 V_1 与 V_2 是相同的，所以 $V_1+V_2=V_1=V_2$，$V_1\cap V_2=V_1=V_2$.

评注：根据齐次线性方程组解的含义可知，将两个方程合在一起的方程组的解就是方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）解的交，于是求交空间变成求解．

而求（Ⅰ）与（Ⅱ）解空间的和空间，就必须先求出（Ⅰ）的基础解系 α_i 与（Ⅱ）的基础解系 β_j，则和空间便是 $\mathrm{span}\{\alpha_i,\beta_j\}$.

例 1.12 已知

$$\alpha_1=[1,2,1,0]^T,\ \alpha_2=[-1,1,1,1]^T,$$
$$\beta_1=[2,-1,0,1]^T,\ \beta_2=[1,-1,3,7]^T$$

求 $\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 与 $\mathrm{span}\{\beta_1,\beta_2\}$ 的和与交的基和维数．

解：因为

$$\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2\}+\mathrm{span}\{\beta_1,\beta_2\}=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\}$$

由于秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\}=3$，且 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 是向量 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 的一个极大线性无关组，所以和空间的维数是 3，基为 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$.

方法一 设 $\xi\in\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2\}\cap\mathrm{span}\{\beta_1,\beta_2\}$，于是由交空间定义可知

$$\xi=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=l_1\beta_1+l_2\beta_2$$

此即

$$k_1\begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}+k_4\begin{bmatrix}1\\-1\\3\\7\end{bmatrix}=0$$

解之得

$$k_1=-l_1,\ k_2=4l_2,\ l_1=-3l_2(l_2\text{ 为任意数})$$

于是

$$\xi=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=l_2[-5,2,3,4]^T(\text{很显然 }\xi=l_1\beta_1+l_2\beta_2)$$

所以交空间的维数为 1，基为$[-5,2,3,4]^T$.

方法二 不难知

$$\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2\}=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2'\},\ \mathrm{span}\{\beta_1,\beta_2\}=\mathrm{span}\{\beta_1,\beta_2'\}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_2'=[-2,-2,0,1]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2'=[-\frac{13}{3},2,1,0]^{\mathrm{T}}$. 又 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2'\}$ 也是线性方程组

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 2x_4 \\ x_2 = 2x_3 - x_4 \end{cases}$$

的解空间. $\mathrm{span}\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2'\}$ 是线性方程组

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{13}{3}x_3 + 2x_4 \\ x_2 = 2x_3 - x_4 \end{cases}$$

的解空间,所以所求的交空间就是线性方程组

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 2x_4 \\ x_2 = 2x_3 - x_4 \\ x_1 = -\frac{13}{3}x_3 + 2x_4 \\ x_2 = 2x_3 - x_4 \end{cases}$$

的解空间,容易求出其基础解系为 $[-5,2,3,4]^{\mathrm{T}}$,所以交空间的维数为 1,基为 $[-5,2,3,4]^{\mathrm{T}}$.

评注:本题有几个知识点是很重要的. (1) $\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$ 的基底就是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的极大线性无关组. 维数等于秩 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$. (2) $\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}+\mathrm{span}\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\}=\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\}$. (3) 方法一的思路,求交 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}\cap\mathrm{span}\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\}$ 就是求向量 $\boldsymbol{\xi}$,既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示,又可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示的那部分向量. (4) 方法二是借用"两个齐次线性方程组解空间的交空间就是联立方程组的解空间",将本题已知条件改造为齐次线性方程组来求解.

例 1.13 已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

记 $V_1=\text{span}\{\alpha_1,\alpha_2\}$，$V_2=\text{span}\{\beta_1,\beta_2\}$，试求：

(1) V_1+V_2 的基和维数．

(2) $V_1\cap V_2$ 的基和维数．

解：方法一 容易证明 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 线性无关，且 $\beta_2=\alpha_1-\alpha_2+\beta_1$ 所以 $V_1+V_2=\text{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1\}$，$V_1+V_2$ 的基为 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$，维数为 3. 设

$$\xi = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = l_1\beta_1 + l_2\beta_2$$

将 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 代入上式解得

$$k_1 = l_2,\ k_2 = -l_2,\ l_1 = -l_2 \quad (l_2\text{ 为任意数})$$

故

$$\xi = l_2(\alpha_1 - \alpha_2) = l_2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

所以 $V_1\cap V_2$ 的维数为 1，基为 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

方法二 若记

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \varepsilon_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \varepsilon_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$\alpha_1 = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\alpha_2 = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta_1 = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\beta_2 = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

容易证明 $[1,1,0,0]^T,[1,0,1,1]^T,[0,0,1,1]^T$ 线性无关，且

$$[0,1,0,0]^T = [1,1,0,0]^T - [1,0,1,1]^T + [0,0,1,1]^T$$

故 $V_1+V_2=\text{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1\}$，$V_1+V_2$ 的基为 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$，维数为 3.

设

$$\begin{aligned}\xi &= k_1[1,1,0,0]^{\mathrm{T}} + k_2[1,0,1,1]^{\mathrm{T}}\\ &= l_1[0,0,1,1]^{\mathrm{T}} + l_2[0,1,0,0]^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

可求得$\xi = l_2[0,1,-1,-1]^{\mathrm{T}}$,即 $V_1 \cap V_2 = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right\}$的维数为 1,基为$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

评注：方法一是常规办法．从线性空间的角度看 $R^{2\times 2}$与 R^4 是同构的,这是方法二的根据．

例 1.14 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换,对某个 $\xi \in V$ 有 $\mathscr{A}^{k-1}(\xi) \neq 0$, $\mathscr{A}^{k}(\xi) = 0$,试证：ξ, $\mathscr{A}(\xi)$, $\mathscr{A}^2(\xi)$, $\cdots$, $\mathscr{A}^{k-1}(\xi)$线性无关．

证明：设

$$l_0\xi + l_1\mathscr{A}(\xi) + l_2\mathscr{A}^2(\xi) + \cdots + l_{k-1}\mathscr{A}^{k-1}(\xi) = 0 \quad ①$$

用 $\mathscr{A}^{k-1}$从左侧乘①式两端,由 $\mathscr{A}^{k}(\xi)=0$ 可得

$$l_0\mathscr{A}^{k-1}(\xi) = 0$$

因为 $\mathscr{A}^{k-1}(\xi)\neq 0$,所以 $l_0=0$,代入①式可得

$$l_1\mathscr{A}(\xi) + l_2\mathscr{A}^2(\xi) + \cdots + l_{k-1}\mathscr{A}^{k-1}(\xi) = 0 \quad ②$$

用 $\mathscr{A}^{k-2}$从左侧乘②式两端,由 $\mathscr{A}^{k}(\xi)=0$ 可得 $l_1=0$,继续下去,可得 $l_2=\cdots=l_{k-1}=0$,于是 ξ, $\mathscr{A}(\xi)$, $\mathscr{A}^2(\xi)$, $\cdots$, $\mathscr{A}^{k-1}(\xi)$线性无关．

例 1.15 若 n 维线性空间中线性变换 $\mathscr{A}$ 使得对于 V 中的任何向量ξ都有 $\mathscr{A}^{n-1}(\xi\neq 0)$, $\mathscr{A}^{n}(\xi)\neq 0$,求 $\mathscr{A}$ 在某一基下的矩阵表示．

解：由 例 1.14 可知,n 个向量$\xi\neq 0$, $\mathscr{A}(\xi)$, $\mathscr{A}^2(\xi)$, $\cdots$, $\mathscr{A}^{n-1}(\xi)$线性无关,它是 V 的一个基．又由

$$\begin{aligned}&\mathscr{A}[\xi, \mathscr{A}(\xi), \mathscr{A}^2(\xi), \cdots, \mathscr{A}^{n-1}(\xi)]\\ =&[\mathscr{A}(\xi), \mathscr{A}^2(\xi), \cdots, \mathscr{A}^{n}(\xi)]\\ =&[\mathscr{A}(\xi), \mathscr{A}^2(\xi), \cdots, \mathscr{A}^{n-1}(\xi), 0]\end{aligned}$$

$$=[\xi,\mathscr{A}(\xi),\mathscr{A}^2(\xi),\cdots,\mathscr{A}^{n-1}(\xi)]\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix}_{n\times n}$$

所以 $\mathscr{A}$ 在$\xi,\mathscr{A}(\xi),\mathscr{A}^2(\xi),\cdots,\mathscr{A}^{n-1}(\xi)$下矩阵表示为 n 阶矩阵

$$\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix}$$

评注：n 维线性空间 V 中任何一组 n 个线性无关的向量组都可以构成 V 的一个基，因此$\xi,\mathscr{A}(\xi),\mathscr{A}^2(\xi),\cdots,\mathscr{A}^{n-1}(\xi)$是 V 的一个基．

例 1.16 在 $R[x]_3$ 中，试求在基 $\alpha_1=1,\alpha_2=x,\alpha_3=x^2$ 下的矩阵为

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

的线性变换 $\mathscr{A}$，求 $g=2+4x-7x^2$ 的像．

解：$\forall\ f=a\alpha_1+b\alpha_2+c\alpha_3\in R[x]_3$

$$\mathscr{A}(f)=\mathscr{A}(a\alpha_1+b\alpha_2+c\alpha_3)$$

$$=\mathscr{A}[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

$$=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

$$=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}a+b+c\\b+c\\c\end{bmatrix}$$

于是

$$\mathscr{A}(g)=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}2+4-7\\4-7\\-7\end{bmatrix}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}-1\\-3\\-7\end{bmatrix}$$

$$=-1-3x-7x^2$$

例 1.17 在 $R[x]_4$ 中,已知线性变换

$$\mathscr{D}f(x)=\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x},\ f(x)\in R[x]_4$$

求 $\mathscr{D}$ 在下列基下的矩阵:

(1) $1,x-2,(x-2)^2,(x-2)^3$;

(2) $1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3$.

解:(1) $\mathscr{D}(1)=0$, $\mathscr{D}(x-2)=1$

$$\mathscr{D}(x-2)^2=2(x-2),\ \mathscr{D}(x-2)^3=3(x-2)^2$$

于是

$$\mathscr{D}[1,x-2,(x-2)^2,(x-2)^3]$$
$$=[0,1,2(x-2),3(x-2)^2]$$
$$=[1,x-2,(x-2)^2,(x-2)^3]\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以 $\mathscr{D}$ 在基 $1,x-2,(x-2)^2,(x-2)^3$ 下的矩阵为

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 3\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

(2) $\mathscr{D}(1)=0$, $\mathscr{D}(1+x)=1$,

$\mathscr{D}(1+x+x^2)=1+2x$,

$\mathscr{D}(1+x+x^2+x^3)=1+2x+3x^2$

于是

$$\begin{aligned}&\mathscr{D}(1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3)\\&=[0,1,1+2x,1+2x+3x^2]\\&=[1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3]\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 2 & 2\\0 & 0 & 0 & 3\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

所以 $\mathscr{D}$ 在基 $1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3$ 下的矩阵为

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & -1 & -1\\0 & 0 & 2 & -1\\0 & 0 & 0 & 3\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

评注：根据线性变换 $\mathscr{A}$ 的矩阵表示定义式

$$\mathscr{A}[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]A$$

中可知，矩阵 A 的第 i 个列向量实际上就是基的像 $\mathscr{A}(\alpha_i)$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标．

***例 1.18** 在 R^R 中，由下面六个函数

$$f_1(x)=e^{ax}\cos bx,\ f_2(x)=e^{ax}\sin bx,$$

$$f_3(x)=xe^{ax}\cos bx,\ f_4(x)=xe^{ax}\sin bx,$$

$$f_5(x)=\frac{1}{2}x^2e^{ax}\cos bx,\ f_6(x)=\frac{1}{2}x^2e^{ax}\sin bx,$$

生成的六维线性子空间记作

$$\mathrm{span}\{f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x),f_5(x),f_6(x)\}$$

(1) 证明：微分 $\mathscr{D}$ 为 $\mathrm{span}\{f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x),f_5(x),f_6(x)\}$上的一个线性变换．

(2) 求 $\mathscr{D}$ 在基 $f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x),f_5(x),f_6(x)$下的矩阵．

解：(1)

$$\mathscr{D}(f_1(x))=a\mathrm{e}^{ax}\cos bx-b\mathrm{e}^{ax}\sin bx=af_1(x)-bf_2(x)$$

$$\mathscr{D}(f_2(x))=a\mathrm{e}^{ax}\sin bx+b\mathrm{e}^{ax}\cos bx=af_2(x)+bf_1(x)$$

$$\begin{aligned}\mathscr{D}(f_3(x))&=\mathrm{e}^{ax}\cos bx+ax\mathrm{e}^{ax}\cos bx-bx\mathrm{e}^{ax}\sin bx\\&=f_1(x)+af_3(x)-bf_4(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{D}(f_4(x))&=\mathrm{e}^{ax}\sin bx+ax\mathrm{e}^{ax}\sin bx+bx\mathrm{e}^{ax}\cos bx\\&=f_2(x)+af_4(x)+bf_3(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{D}(f_5(x))&=x\mathrm{e}^{ax}\cos bx+\frac{a}{2}x^2\mathrm{e}^{ax}\cos bx-\frac{b}{2}x^2\mathrm{e}^{ax}\sin bx\\&=f_3(x)+af_5(x)-bf_6(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{D}(f_6(x))&=x\mathrm{e}^{ax}\sin bx+\frac{a}{2}x^2\mathrm{e}^{ax}\sin bx+\frac{b}{2}x^2\mathrm{e}^{ax}\cos bx\\&=f_4(x)+af_6(x)+bf_5(x)\end{aligned}$$

由此可知 $\mathscr{D}$ 的确为 $\mathrm{span}\{f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x),f_5(x),f_6(x)\}$ 上的一个线性变换．

(2) 将上面的式子整理成矩阵的形式如下

$$\begin{aligned}&\mathscr{D}[f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x),f_5(x),f_6(x)]\\&=[f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x),f_5(x),f_6(x)]\times\\&\begin{bmatrix}a&b&1&0&0&0\\-b&a&0&1&0&0\\0&0&a&b&1&0\\0&0&-b&a&0&1\\0&0&0&0&a&b\\0&0&0&0&-b&a\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$=[f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x),f_5(x),f_6(x)]A$$

那么 A 即为 $\mathscr{D}$ 在基 $f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x),f_5(x),f_6(x)$ 下的矩阵.

例 1.19 在 $R^{2\times 2}$ 空间中,线性变换 $\mathscr{A}$:

$$\mathscr{A}(X)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix},X\in R^{2\times 2}$$

求 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $\alpha_4=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$下的矩阵表示.

解:由题意知

$$\beta_1=\mathscr{A}(\alpha_1)=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ -8 & 0\end{bmatrix},\ \beta_2=\mathscr{A}(\alpha_2)=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ -6 & 8\end{bmatrix}$$

$$\beta_3=\mathscr{A}(\alpha_3)=\begin{bmatrix}-11 & 4\\ -10 & 8\end{bmatrix},\ \beta_4=\mathscr{A}(\alpha_4)=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & 3\end{bmatrix}$$

将 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 表示,并写成下式

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{bmatrix}-4 & -7 & -15 & 0\\ 8 & 10 & 14 & 0\\ -8 & -14 & -18 & 0\\ 0 & 8 & 8 & 3\end{bmatrix}$$

所以 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的矩阵表示为

$$\begin{bmatrix}-4 & -7 & -15 & 0\\ 8 & 10 & 14 & 0\\ -8 & -14 & -18 & 0\\ 0 & 8 & 8 & 3\end{bmatrix}$$

例 1.20 在实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间 $R^{2\times 2}$上定义映射

$$\mathscr{A}:R^{2\times 2}\to R^{2\times 2},\ X\mapsto AX-XA$$

其中 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$

(1) 证明：$\mathscr{A}$ 是 $R^{2\times2}$的一个线性变换．

(2) 证明：对于任意的 $X,Y\in R^{2\times2}$都有 $\mathscr{A}(XY)=\mathscr{A}(X)Y+X\mathscr{A}(Y)$.

(3) 求 $\mathscr{A}$ 在基

$$E_{11}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ E_{12}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ E_{21}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ E_{22}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

下的矩阵表示．

(4) 设

$$E'_{11}=E_{11},E'_{12}=E_{11}+E_{12}$$

$$E'_{21}=E_{11}+E_{12}+E_{21},\ E'_{22}=E_{11}+E_{12}+E_{21}+E_{22}$$

试证：$E'_{11},E'_{12},E'_{21},E'_{22}$也是 $R^{2\times2}$的一个基，并求 $\mathscr{A}$ 在基 $E'_{11},E'_{12},E'_{21},E'_{22}$下的矩阵表示．

证明：(1) 对任意的 $X,Y\in R^{2\times2},k,l\in\mathbf{R}$，根据 $\mathscr{A}$ 的定义有

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(kX+lY)&=A(kX+lY)-(kX+lY)A\\&=k(AX-XA)+l(AY-YA)\\&=k\mathscr{A}(X)+l\mathscr{A}(Y)\end{aligned}$$

所以 $\mathscr{A}$ 是 $R^{2\times2}$上的一个线性变换．

(2) 对任意的 $X,Y\in R^{2\times2}$，有

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(XY)&=AXY-XYA=AXY-XAY+XAY-XYA\\&=(AX-XA)Y+X(AY-YA)=\mathscr{A}(X)Y+X\mathscr{A}(Y)\end{aligned}$$

(3) 根据 $\mathscr{A}$ 的定义知

$$\mathscr{A}(E_{11})=AE_{11}-E_{11}A=\begin{bmatrix}0 & -b\\ c & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathscr{A}(E_{12})=AE_{12}-E_{12}A=\begin{bmatrix}-c & a-d\\ 0 & c\end{bmatrix}$$

$$\mathscr{A}(E_{21})=AE_{21}-E_{21}A=\begin{bmatrix}b & 0\\ d-a & -b\end{bmatrix}$$

$$\mathscr{A}(E_{22}) = AE_{22} - E_{22}A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{bmatrix}$$

于是

$$\mathscr{A}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) = [E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}] \times \begin{bmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}]A$$

其中 $A = \begin{bmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{bmatrix}$ 便是 $\mathscr{A}$ 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵.

(4) 由已知条件可知

$$[E'_{11}, E'_{12}, E'_{21}, E'_{22}] = [E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是可逆矩阵，所以 $E'_{11}, E'_{12}, E'_{21}, E'_{32}$ 也是 $R^{2\times 2}$ 的一个基. $\mathscr{A}$ 在基 $E'_{11}, E'_{12}, E'_{21}, E'_{22}$ 下的矩阵表示为

$B = P^{-1}AP$

$$= \begin{bmatrix} b & b+d-a-c & 2b+d-a-a & b+d-a-c \\ -b-c & a-b-c-d & 2a-2d-b-c & 2a-2d \\ c & 0 & b+c-a & b+d-a-c \\ 0 & c & c-d & c-b \end{bmatrix}$$

例 1.21 求矩阵 A 的列空间 $R(A)$ 与核空间 $N(A)$.

(1) $A=\begin{bmatrix}1&1&6\\0&4&2\\1&2&6\end{bmatrix}$ (2) $A=\begin{bmatrix}0&2&-4\\-1&-4&5\\3&1&7\\0&5&-10\end{bmatrix}$

解：A 的列空间 $R(A)$ 为

$$\begin{aligned}R(A)&=\text{span}\{[1,0,1]^T,[1,4,1]^T,[6,2,6]^T\}\\&=\text{span}\{[1,0,1]^T,[1,4,1]^T\}\\&=\text{span}\{[1,0,1]^T,[0,1,0]^T\}\end{aligned}$$

又由于 A 的核空间为 $AX=0$ 的解空间，其基础解系为 $[11,1,-2]^T$

所以

$$N(A)=\text{span}\{[11,1,-2]^T\}$$

(2) A 的列空间 $R(A)$ 为

$$\begin{aligned}R(A)&=\text{span}\{[0,-1,3,0]^T,[2,-4,1,5]^T,[-4,5,7,-10]^T\}\\&=\text{span}\{[0,-1,3,0]^T,[2,-4,1,5]^T\}\end{aligned}$$

A 的核空间为 $AX=0$ 的解空间，其基础解系为 $(-3,2,1)^T$

所以

$$N(A)=\text{span}\{[-3,2,1]^T\}$$

例 1.22 已 $B=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&1&2\\2&0&2\\0&1&1\end{bmatrix}$，映射 $\mathscr{A}:R^3\to R^4$ 由下式确定

$$\mathscr{A}(\alpha)=B\alpha,\ \alpha\in R^3$$

试求：(1) $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1=[1,1,0]^T,\alpha_2=[0,1,1]^T,\alpha_3=[1,0,1]^T$ 与 $\beta_1=[1,1,0,0]^T,\beta_2=[1,0,1,0]^T,\beta_3=[1,0,0,1]^T,\beta_4=[0,1,1,0]^T$ 下的矩阵表示 A.

(2) $\mathscr{A}$ 的核子空间 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 与值域 $\mathscr{A}(V)$.

解：(1) 由 $\mathscr{A}$ 的定义可知

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_1=[3,2,2,1]^{\mathrm{T}},$$
$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_2=[5,3,2,2]^{\mathrm{T}},$$
$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_3=[4,3,4,1]^{\mathrm{T}}$$

于是

$$\mathscr{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=[\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_3)]=\begin{bmatrix}3&5&4\\2&3&3\\2&2&4\\1&2&1\end{bmatrix}$$

根据 $\mathscr{A}$ 的矩阵表示定义可知

$$\mathscr{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4]\boldsymbol{A}$$

此即

$$\begin{bmatrix}3&5&4\\2&3&3\\2&2&4\\1&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{A}$$

故

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3&5&4\\2&3&3\\2&2&4\\1&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4&5\\1&1&3\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$$

(2) 由于秩$(\boldsymbol{A})=3$,所以齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=0$ 只有零解,故线性变换的核子空间 $\mathscr{A}^{-1}(0)$为零空间,维数为 0. 根据维数定理可知 $\mathscr{A}$ 的值域 $\mathscr{A}(V)$的维数为 3. 又

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(V)&=\mathrm{span}\{\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_3)\}\\&=\mathrm{span}\{3\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3+\boldsymbol{\beta}_4,4\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+2\boldsymbol{\beta}_3+\boldsymbol{\beta}_4,\\&\qquad 5\boldsymbol{\beta}_1+3\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3+2\boldsymbol{\beta}_4\}\\&=\mathrm{span}\{[5,4,2,1]^{\mathrm{T}},[10,7,5,2]^{\mathrm{T}},[9,7,5,1]^{\mathrm{T}}\}\end{aligned}$$

所以 $\mathscr{A}(V)$的基为$[5,4,2,1]^{\mathrm{T}},[10,7,5,2]^{\mathrm{T}},[9,7,5,1]^{\mathrm{T}}$.

评注:求线性映射 $\mathscr{A}$ 的核 $\mathscr{A}^{-1}(0)$与值域 $\mathscr{A}(V)$经常需要

先求出 $\mathscr{A}$ 在某一对基下的矩阵表示 A，然后求出 A 的核的空间(即 $AX=0$ 的解空间)与列空间(以 A 的列向量为生成元的生成子空间)，要注意的是由 A 求出的核向量是定义域 R^3 上的坐标．还需转化为 R^3 上的向量．由 A 求出 A 的列向量生成子空间的基向量还需转化为 R^4 上的向量．

例 1.23 设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 R^3 上的线性变换，它在 R^3 中基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵表示是

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&0&3\\2&1&5\end{bmatrix}$$

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 下的矩阵表示．

(2) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的核与值域．

解：(1) 由题意知

$$\mathscr{A}[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\boldsymbol{A}$$

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

设 $\mathscr{A}$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的矩阵表示是 $\boldsymbol{B}$，则

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&0&3\\2&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4&4&4\\-3&-4&-6\\2&3&8\end{bmatrix}$$

(2) 由于 $|\boldsymbol{A}|\neq0$，故 $\boldsymbol{AX}=0$ 只有零解，所以 $\mathscr{A}$ 的核是零空间．由维数定理可知 $\mathscr{A}$ 的值域是线性空间 R^3．

例 1.24 设 R^3 中的线性变换 $\mathscr{A}$

$$\mathscr{A}[x,y,z]^{\mathrm{T}}=[x+y-z,y+z,x+2y]^{\mathrm{T}}$$

(1) 求 $\mathscr{A}$ 的值域 $\mathscr{A}(V)$ 的维数及一组基.

(2) 求 $\mathscr{A}$ 的核 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 的维数及一组基.

分析：求线性变换的值域、核经常先确定线性空间的某组基，然后找到线性变换在该基下的矩阵，之后求出矩阵的列空间与核空间，最后再转化到线性空间中去.

解：(1)取 R^3 的自然基

$$\varepsilon_1=[1,0,0]^T,\varepsilon_2=[0,1,0]^T,\varepsilon_3=[0,0,1]^T$$

由题意知

$$\mathscr{A}(\varepsilon_1)=[1,0,1]^T,\ \mathscr{A}(\varepsilon_2)=[1,1,2]^T,$$
$$\mathscr{A}(\varepsilon_3)=[-1,1,0]^T$$

于是

$$\mathscr{A}[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\1&2&0\end{bmatrix}$$

故 $\mathscr{A}$ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\1&2&0\end{bmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列空间为

$$\begin{aligned}R(\boldsymbol{A})&=\mathrm{span}\{[1,0,1]^T,[1,1,2]^T,[-1,1,0]^T\}\\&=\mathrm{span}\{[1,0,1]^T,[1,1,2]^T\}\end{aligned}$$

线性变换 $\mathscr{A}$ 的值域为

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(V)&=\mathrm{span}\{\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_1+\varepsilon_2+2\varepsilon_3\}\\&=\mathrm{span}\{[1,0,1]^T,[1,1,2]^T\}\end{aligned}$$

所以 $\mathscr{A}(V)$ 的维数为 2，基为 $[1,0,1]^T,[1,1,2]^T$.

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的核是 $\boldsymbol{AX}=0$ 的解空间. 不难求得 $\boldsymbol{AX}=0$ 的基础解系是 $[2,-1,1]^T$，因此 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 的维数为 1，基为 $2\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3=[2,-1,1]^T$.

评注：若取 R^3 的基为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = [1,1,0]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2 = [0,1,1]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_3 = [1,0,1]^{\mathrm{T}}$$

按题意知

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1) = [2,1,3]^{\mathrm{T}},\ \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2) = [0,2,2]^{\mathrm{T}},\ \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_3) = [0,1,1]^{\mathrm{T}}$$

于是

$$\mathscr{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3] = [\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_3)] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵表示为

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列空间为

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{B}) &= \mathrm{span}\{[0,1,2]^{\mathrm{T}},[0,2,0]^{\mathrm{T}},[0,1,0]^{\mathrm{T}}\} \\ &= \mathrm{span}\{[0,1,2]^{\mathrm{T}},[0,1,0]^{\mathrm{T}}\} \end{aligned}$$

线性变换 $\mathscr{A}$ 的值域为

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(V) &= \mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2\} \\ &= \mathrm{span}\{[2,1,3]^{\mathrm{T}},[0,1,1]^{\mathrm{T}}\} \end{aligned}$$

由线性代数的知识可知，向量组 $[1,0,1]^{\mathrm{T}}$, $[1,1,2]^{\mathrm{T}}$ 与 $[2,1,3]^{\mathrm{T}}$, $[0,1,1]^{\mathrm{T}}$ 是等价的，因此 $\mathrm{span}\{[1,0,1]^{\mathrm{T}},[1,1,2]^{\mathrm{T}}\} = \mathrm{span}\{[2,1,3]^{\mathrm{T}},[0,1,1]^{\mathrm{T}}\}$，这说明线性变换 $\mathscr{A}$ 的值域 $\mathscr{A}V$ 可用 $\mathscr{A}$ 的任何一种矩阵表示，计算结果是相同的.

类似可得核子空间 $\mathscr{A}^{-1}(0)$，可用 $\mathscr{A}$ 的任何一种矩阵表示，计算结果也是相同的.

例 1.25 设 V 是复数域 C 上的线性空间，$\mathscr{A}$ 是 V 的一个线性变换. 已知 $\mathscr{A}$ 在基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{bmatrix}$$

求 $\mathscr{A}$ 的全部特征值与特征向量.

解：首先求出 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 2 & 4 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

于是线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=10$.

对于特征值 1，解齐次线性方程组 $(E-A)X=0$，得到一个基础解系 $[-2,1,0]^T$，$[2,0,1]^T$.

令 $Y_1=-2\eta_1+\eta_2$，$Y_2=2\eta_1+\eta_3$，那么 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 1 的全部特征向量是

$$\{k_1Y_1+k_2Y_2\,|\,k_1,k_2\in \mathbf{C},\ k_1,k_2 \text{ 为不同时为零的任意数}\}$$

对于特征值 10，解齐次线性方程组 $(10E-A)X=0$，得到一个基础解系 $[1,2,-2]^T$.

令 $Y_3=\eta_1+\eta_2-2\eta_3$，那么 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 10 的全部特征向量是

$$\{k_3Y_3\,|\,k_3\in \mathbf{C},k_3\neq 0\}$$

例 1.26 设 $\mathscr{A}$ 是数域 F 上的线性空间 V 的线性变换，X_1，X_2，X_3 分别为 $\mathscr{A}$ 的三个互不相同特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征向量.

(1) 证明：X_1,X_2,X_3 是线性无关的.

(2) 证明：$X_1+X_2+X_3$ 不是 A 的特征向量.

证明：(1) 设

$$k_1X_1+k_2X_2+k_3X_3=0 \qquad ①$$

用 $\mathscr{A}$ 作用式①两端有

$$k_1\lambda_1X_1+k_2\lambda_2X_2+k_3\lambda_3X_3=0 \qquad ②$$

由式①又有

$$k_1\lambda_1X_1+k_2\lambda_1X_2+k_3\lambda_1X_3=0 \qquad ③$$

用式②减去式③得

$$k_2(\lambda_2-\lambda_1)X_2+k_3(\lambda_3-\lambda_1)X_3=0 \quad ④$$

再用 $\mathscr{A}$ 作用式④两端有

$$k_2(\lambda_2-\lambda_1)\lambda_2X_2+k_3(\lambda_3-\lambda_1)\lambda_3X_3=0 \quad ⑤$$

又由式①可得

$$k_2(\lambda_2-\lambda_1)\lambda_2X_2+k_3(\lambda_3-\lambda_1)\lambda_2X_3=0 \quad ⑥$$

式⑤减去式⑥可得

$$k_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)X_3=0$$

由于 $X_3\neq0,\lambda_3-\lambda_1\neq0,\lambda_3-\lambda_2\neq0$，故 $k_3=0$. 将其代入式①中可得

$$k_1X_1+k_2X_2=0$$

类似用前面的方法可证 $k_2=0,k_1=0$，因此 X_1,X_2,X_3 是线性无关的.

(2) 用反证法　假设 $X_1+X_2+X_3$ 是 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量. 于是有

$$\mathscr{A}(X_1+X_2+X_3)=\lambda(X_1+X_2+X_3)$$

此即

$$\lambda_1X_1+\lambda_2X_2+\lambda_3X_3=\lambda(X_1+X_2+X_3)$$

移项可得

$$(\lambda_1-\lambda)X_1+(\lambda_2-\lambda)X_2+(\lambda_3-\lambda)X_3=0$$

由结论(1)可知

$$\lambda_1-\lambda=0,\ \lambda_2-\lambda=0,\ \lambda_3-\lambda=0$$

从而 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda$，这与 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为互不相同特征值矛盾，所以 $X_1+X_2+X_3$ 不是 $\mathscr{A}$ 的特征向量.

评注：本题(2)实际上告诉我们属于不同特征值所对应的特征向量之和一定不是特征向量.

例 1.27　求矩阵 A 的特征值与特征向量.

(1) $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{bmatrix}$, (2) $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$

(3) $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，　(4) $A=\begin{bmatrix}0&2&1\\-2&0&3\\-1&-3&0\end{bmatrix}$

解：(1) A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\4&\lambda-4&0\\2&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3$$

A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$.

当 $\lambda=2$ 时，特征矩阵

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\4&-2&0\\2&-1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$x_2=2x_1$$

对应于特征值 $\lambda=2$ 的线性无关特征向量为：$\alpha_1=[1,2,0]^T$，$\alpha_2=[0,0,1]^T$，于是属于特征值 $\lambda=2$ 的全部特征向量为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，其中 k_1,k_2 不全为零.

(2) A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$$

A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=2$.

当 $\lambda=-1$ 时，特征矩阵

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$x_1=-x_2-x_3$$

对应于特征值 $\lambda=-1$ 的线性无关特征向量为：$\alpha_1=[-1,1,0]^T$，$\alpha_2=[-1,0,1]^T$，于是属于特征值 $\lambda=-1$ 的全部特征向量为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，其中 k_1,k_2 不全为零.

当 $\lambda=2$ 时，特征矩阵

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x_3,\ x_2 = x_3$$

对应于特征值 $\lambda=2$ 的线性无关特征向量为：$\alpha_3=[1,1,1]^{T}$，于是属于特征值 $\lambda=2$ 的全部特征向量为 $k_3\alpha_3$，其中 k_3 不为零．

(3) A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)^2$$

A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$.

当 $\lambda=1$ 时，特征矩阵

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x_3$$

对应于特征值 $\lambda=1$ 的线性无关特征向量为：$\alpha_1=[0,1,0]^{T}$，$\alpha_2=[1,0,1]^{T}$，于是属于特征值 $\lambda=1$ 的全部特征向量为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，其中 k_1，k_2 不全为零．

当 $\lambda=-1$ 时，特征矩阵

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -x_3,\ x_2 = 0$$

对应于特征值 $\lambda=-1$ 的线性无关特征向量为：$\alpha_3=[-1,0,1]^{T}$，于是属于特征值 $\lambda=-1$ 的全部特征向量为 $k_3\alpha_3$，其中 k_3 不为零．

(4) A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & -1 \\ 2 & \lambda & -3 \\ 1 & 3 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + \mathrm{i}\sqrt{14})(\lambda - \mathrm{i}\sqrt{14})$$

A 的特征值 $\lambda_1=0, \lambda_2=\mathrm{i}\sqrt{14}$，$\lambda_3=-\mathrm{i}\sqrt{14}$，这里 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$.

当 $\lambda=0$ 时，特征矩阵

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -3x_2,\ x_3 = -2x_2$$

对应于特征值 $\lambda=0$ 的线性无关特征向量为：$\alpha_1=[-3,1,-2]^{\mathrm{T}}$，于是属于特征值 $\lambda=0$ 的全部特征向量为 $k_1\alpha_1$，其中 k_1 不为零．

当 $\lambda=\mathrm{i}\sqrt{14}$ 时，特征矩阵

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} \mathrm{i}\sqrt{14} & -2 & -1 \\ 2 & \mathrm{i}\sqrt{14} & -3 \\ 1 & 3 & \mathrm{i}\sqrt{14} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 10 & 0 & 6+\mathrm{i}\sqrt{14} \\ 0 & 10 & -2+3\mathrm{i}\sqrt{14} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$10x_1 = -(6+\mathrm{i}\sqrt{14})x_3,\ 10x_2 = -(-2+3\mathrm{i}\sqrt{14})x_3$$

对应于特征值 $\lambda=\mathrm{i}\sqrt{14}$ 的线性无关特征向量为：$\alpha_2=[6+\mathrm{i}\sqrt{14},\ -2+3\mathrm{i}\sqrt{14},\ -10]^{\mathrm{T}}$，于是属于特征值 $\lambda=\mathrm{i}\sqrt{14}$ 的全部特征向量为 $k_2\alpha_2$，其中 k_2 不为零．

同样容易计算出 $\lambda=-\mathrm{i}\sqrt{14}$ 的线性无关特征向量为：$\alpha_3=[6-\mathrm{i}\sqrt{14},\ -2-3\mathrm{i}\sqrt{14}, -10]^{\mathrm{T}}$，于是属于特征值 $\lambda=-\mathrm{i}\sqrt{14}$ 的所有特征向量为 $k_3\alpha_3$，其中 k_3 不为零．

例 1.28 已知三阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

试求 A 的伴随矩阵 A^* 的特征值与特征向量．

解：设 $A\alpha=\lambda\alpha$，由于 $|A|\neq 0$，从而 $\lambda\neq 0$，两端左乘 A^* 可得

$$A^*A\alpha=\lambda A^*\alpha$$

此即

$$A^*\alpha=\frac{|A|}{\lambda}\alpha$$

从而当 A 的特征值为 λ，其对应的特征向量为 α 时，A^* 的特征值就是 $\frac{|A|}{\lambda}$，其对应的特征向量仍然为 α. 对于此题首先求出 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

于是 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$.

对于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，其全部特征向量为 $k_1\alpha_1$，其中 $\alpha_1=[1,-1,1]^T$，$k_1\neq 0$. 对于特征值 $\lambda_3=2$，其全部特征向量为 $k_2\alpha_2$，其中 $\alpha_2=[0,0,1]^T$，$k_2\neq 0$.

因此 A^* 的特征值为

$$\gamma_1=\gamma_2=\frac{|A|}{\lambda_1}=2,\ \gamma_3=\frac{|A|}{\lambda_3}=1$$

A^* 的属于特征值 2 的全部特征向量为 $k_1\alpha_1$，$k_1\neq 0$；属于特征值 1 的全部特征向量为 $k_2\alpha_2$，$k_2\neq 0$.

评注：当 A 是可逆矩阵时，A 与 A^* 的特征值与特征向量有如下关系：若 A 的特征值为 λ，它所对应的特征向量是 α，则 $\frac{|A|}{\lambda}$ 是 A^* 的特征值，它所对应的特征向量为 α.

例 1.29　求例 1.24 的 $\mathscr{A}$ 的特征值与特征向量.

解：由例 1.24 可知，$\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1=[1,0,0]^T$，$\varepsilon_2=[0,1,0]^T$，$\varepsilon_3=[0,0,1]^T$ 下的矩阵表示为

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\1&2&0\end{bmatrix}$$

A 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 2)$$

A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0, \lambda_3=2$.

当 $\lambda=0$ 时,特征矩阵

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 2x_3,\ x_2 = -x_3$$

对应于特征值 $\lambda=0$ 的线性无关特征向量为 $\alpha_1=[2,-1,1]^T$,那么 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 $\lambda=0$ 的线性无关特征向量:$\eta_1=2\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3=[2,-1,1]^T$,于是属于特征值 $\lambda=0$ 的全部特征向量为 $k_1\eta_1, k_1\neq 0$.

当 $\lambda=2$ 时,特征矩阵

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = x_3$$

对应于特征值 $\lambda=2$ 的线性无关特征向量为:$\alpha_1=[0,1,1]^T$,那么 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 $\lambda=2$ 的线性无关特征向量:$\eta_2=\varepsilon_2+\varepsilon_3=[0,1,1]^T$,于是属于特征值 $\lambda=2$ 的全部特征向量为 $k_2\eta_2, k_2\neq 0$.

评注:参照典型例题 1.24 评注,若取 $\beta_1=[1,1,0]^T, \beta_2=[0,1,1]^T, \beta_3=[1,0,1]^T$,则 $\mathscr{A}$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

不难求得 $|\lambda E - B| = \lambda^2(\lambda-2)$,所以其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_3=2$.

当 $\lambda=0$ 时,B 的线性无关特征向量为 $\xi_1=[0,-1,2]^T$,所以 $\mathscr{A}$ 属于特征值 $\lambda=0$ 的特征向量:$-\beta_2+2\beta_3=(2,-1,1)^T$.

当 $\lambda=2$ 时,B 的线性无关特征向量为 $\xi_2=[0,1,0]^T$,所以 $\mathscr{A}$

属于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量：$\beta_2=[0,1,1]^T$.

显然，两种方法计算的结果是相同的．

求线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征值与特征向量，经常借助于 $\mathscr{A}$ 在某基下矩阵表示 A，先求出 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，再求出 λ_i 所对应的特征向量 α_i，这时 $\mathscr{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，而特征向量只要注意到将 α_i 转化为在主基上的表示即可．

例 1.30 设 n 阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$$

求 A 的特征值与特征向量．

解：A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{bmatrix} \lambda-2 & -2 & \cdots & -2 \\ -2 & \lambda-2 & \cdots & -2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -2 & -2 & \cdots & \lambda-2 \end{bmatrix}=(\lambda-2n)\lambda^{n-1}$$

于是 A 的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\ \lambda_n=2n$$

当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$ 时，解齐次线性方程组$(0E-A)X=0$，可得一个基础解系为

$$\alpha_1=[-1,1,0,\cdots,0]^T,$$
$$\alpha_2=[-1,0,1,\cdots,0]^T,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\alpha_{n-1}=[-1,0,0,\cdots,1]^T$$

一共有 $n-1$ 个线性无关特征向量．于是 A 的属于 0 的全部特征向量为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$是不全为零的任意数．

当 $\lambda_n=2n$ 时，解齐次线性方程组$(2nE-A)X=0$，可得一个基

础解系为

$$\alpha_n = [1 \quad 1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]^T$$

于是 A 的属于特征值 $2n$ 的全部特征向量为 $k_n\alpha_n$，其中 $k_n\neq 0$.

评注：A 的 n 个特征值也可用下法求之：因 $|A|=0$，故 A 必有零特征值，由于秩$(0E-A)=1$，故 A 的属于零特征值线性无关的特征向量为 $n-1$ 个，因此，A 的属于零的特征值的代数重数$\geqslant n-1$，又由 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1}=2n\neq 0$，所以 A 有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$，$\lambda_n=\mathrm{tr}(A)=2n$.

例 1.31 已知两个 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T$，$\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^T$ 都是非零列向量，且 $\alpha^T\beta=0$. 若 $A=\alpha\beta^T$，求 A 的特征值与特征向量.

解：方法一

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_1b_1 & -a_1b_2 & \cdots & -a_1b_n \\ -a_2b_1 & \lambda - a_2b_2 & \cdots & -a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_nb_1 & -a_nb_2 & \cdots & \lambda - a_nb_n \end{vmatrix}$$

将上式右端行列式的第 1 行乘 $-\dfrac{a_i}{a_1}$ 加到第 i 行上$(i=2,3,\cdots,n)$可得

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - \sum_{i=1}^{n} a_ib_i & -a_1b_2 & \cdots & -a_1b_{n-1} & -a_1b_n \\ -\dfrac{a_2}{a_1}\lambda & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\dfrac{a_{n-1}}{a_1}\lambda & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ -\dfrac{a_n}{a_1}\lambda & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

由于 $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \alpha^{\mathrm{T}}\beta = 0$，故 $|\lambda E - A| = \lambda^n$. 所以 A 的 n 个特征值全为零，其对应的特征矩阵为

$$-A = \begin{bmatrix} -a_1b_1 & -a_1b_2 & \cdots & -a_1b_n \\ -a_2b_1 & -a_2b_2 & \cdots & -a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_nb_1 & -a_nb_2 & \cdots & -a_nb_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

于是 $b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0$，所以 A 的属于特征值 $\lambda = 0$ 的线性无关特征向量为

$$\alpha_1 = [-b_2, b_1, 0, 0, \cdots, 0]^{\mathrm{T}},$$
$$\alpha_2 = [-b_3, 0, b_1, 0, \cdots, 0]^{\mathrm{T}},$$
$$\cdots\cdots$$
$$\alpha_{n-1} = [-b_n, 0, 0, 0, \cdots, b_1]^{\mathrm{T}}$$

方法二 因为 $A^2 = 0$，所以 A 的 n 个特征值全为零.

方法三 因为 $|A| = 0$，故 A 必有零特征值且秩$(0E - A) = 1$，于是 A 的属于零特征值线性无关的特征向量有 $n-1$ 个，因此 A 至少有 $n-1$ 个零特征值，又由于 $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$，这说明 A 的第 n 个特征值 $\lambda = 0$，所以 A 的 n 个特征值全为零.

例 1.32 设 V 是数域 $\mathbf{C}$ 上的 n 维线性空间，$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 是 V 上的线性变换，并且 $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A}$. 证明：$\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 至少有一个公共的特征向量.

证明： 首先证明 $\mathscr{A}$ 的每一个特征子空间也是 $\mathscr{B}$ 的不变子空间. 在 $\mathscr{A}$ 的特征子空间 V_{λ_0} 中任取一个向量 α，那么有 $\mathscr{A}\alpha = \lambda_0\alpha$. 从而

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(\mathscr{B}\alpha) &= (\mathscr{A}\mathscr{B})\alpha = (\mathscr{B}\mathscr{A})\alpha \\ &= \mathscr{B}(\mathscr{A}\alpha) = \mathscr{B}(\lambda_0\alpha) = \lambda_0(\mathscr{B}\alpha), \end{aligned}$$

这表明 $\mathscr{B}\alpha \in V_{\lambda_0}$，故 V_{λ_0} 是 $\mathscr{B}$ 的不变子空间.

由于 V_{λ_0} 也是 $\mathscr{B}$ 的不变子空间，那么可以定义另外一个线性

变换 $\mathscr{B}_0=\mathscr{B}|_{V_{\lambda_0}}$. 在复数域 C 内，$\mathscr{B}_0$ 必有特征值 η 并且存在非零向量 $\alpha\in V_{\lambda_0}$ 使得 $\mathscr{B}_0(\alpha)=\eta\alpha$，从而有 $\mathscr{B}(\alpha)=\mathscr{B}_0(\alpha)=\eta\alpha$，又 $\mathscr{A}(\alpha)=\lambda_0\alpha$，所以 α 即为 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 的公共特征向量.

例 1.33 设 A,B 为两个 n 阶矩阵，试证 AB 与 BA 有相同的特征多项式.

证明：分块矩阵

$$\begin{bmatrix} E & -A \\ 0 & \lambda E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \lambda E \\ E & B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \lambda E-AB \\ \lambda E & \lambda B \end{bmatrix}$$

上式两边取行列式得

$$\begin{vmatrix} E & -A \\ 0 & \lambda E \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & \lambda E \\ E & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \lambda E-AB \\ \lambda E & \lambda B \end{vmatrix}$$

$$|E||\lambda E|\begin{vmatrix} A & \lambda E \\ E & B \end{vmatrix}=(-1)^n|\lambda E||\lambda E-AB|$$

$$\lambda^n\begin{vmatrix} A & \lambda E \\ E & B \end{vmatrix}=(-1)^n\lambda^n|\lambda E-AB|$$

$$\begin{vmatrix} A & \lambda E \\ E & B \end{vmatrix}=(-1)^n|\lambda E-AB|$$

另一方面

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ -B & \lambda E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \lambda E \\ E & B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & \lambda E \\ -BA+\lambda E & 0 \end{bmatrix}$$

两边取行列式且类似上面整理得

$$\begin{vmatrix} A & \lambda E \\ E & B \end{vmatrix}=(-1)^n|\lambda E-AB|$$

因此 $|\lambda E-AB|=|\lambda E-BA|$.

例 1.34 设 n 维线性空间 V 的一个线性变换 $\mathscr{A}$ 有 n 个不同的特征值，证明 $\mathscr{A}$ 共有 2^n 个不变子空间.

解：$\mathscr{A}$ 有 n 个一维特征子空间 $V_{\lambda_1},V_{\lambda_2},\cdots,V_{\lambda_n}$，它们都是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间. 根据不变子空间的交与和空间也是不变子空间，可知 $\mathscr{A}$ 的不变子空间有 1 个零维的，n 个 1 维的，C_n^2 个 2 维的，

C_n^3 个 3 维的，…，C_n^n 个 n 维的．因此 $\mathscr{A}$ 共有

$$1 + C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

个不变子空间．

例 1.35 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间，$\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换，$\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 下的矩阵是

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) 证明：如果 α_n 属于 $\mathscr{A}$ 的不变子空间 W，那么 $W=V$；

(2) 证明：α_1 属于 $\mathscr{A}$ 的任意一个非零不变子空间；

(3) 证明：V 不能分解成 $\mathscr{A}$ 的两个非平凡不变子空间的直和；

(4) 求出 $\mathscr{A}$ 的所有不变子空间．

证明：(1) 如果 $\alpha_n \in W$，那么由 W 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间可知 $\mathscr{A}(\alpha_n) \in W$，即 $\alpha_{n-1}+3\alpha_n \in W$，于是 $\alpha_{n-1} \in W$. 同样有 $\mathscr{A}(\alpha_{n-1}) \in W$，依次继续下去，可以证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 都属于 W，从而 $W=V$.

(2) 设 W 是 $\mathscr{A}$ 的一个非零不变子空间，任取 $\eta \in W, \eta \neq 0$，设 $\eta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_t\alpha_t$，其中 $k_t \neq 0$，由 $\mathscr{A}(\eta) \in W$ 可得

$$k_2\alpha_1 + k_3\alpha_2 + \cdots + k_t\alpha_{t-1} \in W,$$

用 A 继续作用，即可得 $\alpha_1 \in W$.

(3) 假设 $V=W_1 \oplus W_2$，其中 W_1,W_2 是 $\mathscr{A}$ 的非平凡不变子空间，那么由(2)可知 $\alpha_1 \in W_1 \cap W_2$，但是 $W_1 \cap W_2 = 0$，矛盾．

(4) 设 W 是 $\mathscr{A}$ 的一个非零不变子空间，那么 $\alpha_1 \in W$，再设 $\dim W = m$，在 W 中取一个基 $\alpha_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$. 设

$$\eta_2 = k_{21}\alpha_1 + k_{22}\alpha_2 + \cdots + k_{2t}\alpha_t$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\eta_m = k_{m1}\alpha_1 + k_{m2}\alpha_2 + \cdots + k_{mt}\alpha_t$$

其中 $k_{2t},k_{3t},\cdots,k_{mt}$不全为零．不妨设 $k_{2t}\neq 0$，由于 $\alpha_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性表示，于是有 $m\leqslant t$．又 $\mathscr{A}(\eta_2)\in W$，从而

$$k_{21}\mathscr{A}(\alpha_1) + k_{22}\mathscr{A}(\alpha_2) + \cdots + k_{2t}\mathscr{A}(\alpha_t) \in W$$

此即

$$3k_{21}\alpha_1 + k_{22}(\alpha_1 + 3\alpha_2) + \cdots + k_{2t}(\alpha_{t-1} + 3\alpha_t) \in W$$

由此可推出

$$k_{23}\alpha_2 + \cdots + k_{2t}\alpha_{t-1} \in W$$

用 $\mathscr{A}$ 继续作用下去可得 $k_{2t}\alpha_2\in W$，那么 $\alpha_2\in W$．同样可以证明

$$\alpha_3 \in W,\cdots,\alpha_t \in W$$

于是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 可由 $\alpha_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$ 线性表示，故 $t\leqslant m$，这说明 $t=m$，即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为 W 的一个基．从而

$$W = \mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$$

这样立即可得 $\mathscr{A}$ 的所有不变子空间共有 $n+1$ 个．分别是

$$\{0\},\ \mathrm{span}\{\alpha_1\},\ \mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2\},\ \mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}.$$

例 1.36 设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$$

求 $\boldsymbol{B}+4\boldsymbol{E}$ 的特征值与特征向量，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵．

解：首先求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 7)$$

由此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=7$．

对于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，解齐次线性方程组 $(1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0$，求得两个线性无关的特征向量为

$$\alpha_1=[-1,1,0]^T,\ \alpha_2=[-1,0,1]^T$$

对于特征值 $\lambda_3=7$,解齐次线性方程组$(7E-A)X=0$,求得一个线性无关的特征向量为

$$\alpha_3=[1,1,1]^T$$

根据关系式 $A^*=|A|A^{-1}$,可知 A^* 的特征值为 7,7,1,其对应的特征向量分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. 由于 $P^{-1}A^*P=B$,所以 B 的特征值为 7,7,1. 下面来求 B 的特征向量.

设 α_i 是 A^* 的对应于特征值 μ_i 的特征向量,即 $A^*\alpha_i=\mu_i\alpha_i$. 那么

$$BP^{-1}=P^{-1}A^*,\ BP^{-1}\alpha_i=P^{-1}A^*\alpha_i=\mu_iP^{-1}\alpha_i$$

这表明 B 的特征值为 μ_i(μ_i 也是 A^* 的特征值),其对应的特征向量为 $P^{-1}\alpha_i$(α_i 是 A^* 的对应于特征值 μ_i 的特征向量),于是求得

$$P^{-1}\alpha_1=[1,-1,0]^T,\ P^{-1}\alpha_2=[-1,-1,1]^T,$$
$$P^{-1}\alpha_3=[0,1,1]^T$$

从而 B 的特征值为 7,7,1,其对应的特征向量分别为 $P^{-1}\alpha_1$, $P^{-1}\alpha_2$, $P^{-1}\alpha_3$. $B+4E$ 的特征值为 11,11,5,它们所对应的特征向量分别为

$$P^{-1}\alpha_1=[1,-1,0]^T,\ P^{-1}\alpha_2=[-1,-1,1]^T,$$
$$P^{-1}\alpha_3=[0,1,1]^T$$

所以 $B+4E$ 的特征值为 11(二重根),其对应的全部特征向量为 $k_1[1,-1,0]^T+k_2[-1,-1,1]^T$,其中 k_1,k_2 不全为零,$B+4E$ 的特征值为 5(单根),其对应的全部特征向量为 $k_3[-1,-1,1]^T$,其中 k_3 为任意的非零数.

评注:设 A 的特征值为 λ,属于 λ 的特征向量分别为 α,则当 $|A|\neq0$ 时,A^* 的特征值为$\dfrac{|A|}{\lambda}$,其对应的特征向量为 α,矩阵 B 与 A^* 相似,所以 B 的特征值也为$\dfrac{|A|}{\lambda}$,其对应的特征向量为 $P^{-1}\alpha$.

例 1.37 已知 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=kA(k\neq0)$,试证:A 相似

于对角矩阵．

证明：由 $A^2=kA(k\neq 0)$ 可知，A 的特征值满足 $\lambda^2=k\lambda$，所以 $\lambda=0,k$. 即 A 的特征值只能是 $0,k$. 又由 $A^2=kA\,(k\neq 0)$ 知 $A(kE-A)=0$，所以

$$秩(A)+秩(kE-A)\leqslant n$$

又

$$秩(A)+秩(kE-A)\geqslant 秩(A+kE-A)=秩(kE)=n$$

因此

$$秩(A)+秩(kE-A)=n$$

若设秩$(A)=r$，秩$(kE-A)=n-r$. 特征值 $\lambda=0$ 的特征矩阵 $(-A)$ 的秩为 r，它所对应的线性无关的特征向量有 $n-r$ 个．特征值 $\lambda=k$ 的特征矩阵 $kE-A$ 的秩为 $n-r$，它所对应的线性无关的特征向量有 r 个．因此 A 共有 n 个线性无关的特征向量，故 A 与对角矩阵相似．

评注：由 $A^2=kA(k\neq 0)$ 知 A 只可能有特征值 $0,k$，然后证明 A 有 n 个线性无关的特征向量．

例 1.38 设矩阵 A 和 B 相似，其中

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & x & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ -1 & y & 0\\ -2 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

(1) 求 x,y 的值．

(2) 证明：A 和 B 均可相似对角化．

(3) 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$.

解：(1) 根据相似矩阵有相同的迹，有相同的行列式值可得

$$\mathrm{tr}(A)=3+x,\ \mathrm{tr}(B)=4+y\Rightarrow x=y+1,$$

$$|A|=2x,\ |B|=3y+2\Rightarrow 2x=3y+2$$

解之得

$$x=1,\ y=0$$

于是

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&1&0\\1&-1&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3&2&0\\-1&0&0\\-2&-2&1\end{bmatrix}$$

(2) A 的特征多项式 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$，从而 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$，对于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，解齐次线性方程组 $(1E-A)X=0$，求得两个线性无关的特征向量为

$$\alpha_1=[1,1,0]^T,\ \alpha_2=[0,0,1]^T$$

对于特征值 $\lambda_3=2$，解齐次线性方程组 $(2E-A)X=0$，求得一个线性无关的特征向量为

$$\alpha_3=[1,0,1]^T$$

由此可知 A 可对角化．令

$$P_1=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

于是有

$$P_1^{-1}AP_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

用同样方式可求得

$$P_2=\begin{bmatrix}-1&0&-2\\1&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}$$

且有

$$P_2^{-1}BP_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

(3) 由上可知 $P_2^{-1}BP_2=P_1^{-1}AP_1$，这样有

$$(P_1P_2^{-1})^{-1}A(P_1P_2^{-1})=B$$

记 $P=P_1P_2^{-1}$，容易计算出

$$P=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&2&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

且 $P^{-1}AP=B$.

评注：若矩阵 A 与 B 相似，则 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$，所以可确定变量 x,y 的值．又若矩阵 A 和 B 都相似于同一个对角矩阵 Λ，于是 $(P_1P_2^{-1})^{-1}A(P_1P_2^{-1})=B$.

例 1.39　设 A 为一个 n 阶矩阵且满足 $A^2-5A+6E=0$，证明：A 相似于一个对角矩阵．

证明：设 λ 是 A 的任意一个特征值，X 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，即 $AX=\lambda X$，那么由

$$(A^2-5A+6E)X=0$$

可得

$$\lambda^2-5\lambda+6=0$$

于是 A 的特征值为 2 和 3.

注意到 $A^2-5A+6E=(A-2E)(A-3E)=0$，所以

$$r(A-2E)+r(A-3E)\leqslant n$$

另一方面

$$\begin{aligned}r(A-2E)+r(A-3E)&=r(A-2E)+\\r(3E-A)\geqslant r(A-2E+3E-A)&\geqslant r(E)=n\end{aligned}$$

从而有

$$r(A-2E)+r(A-3E)=n$$

设 $r(A-2E)=t$，那么 $r(A-3E)=n-t$. 于是 $(2E-A)X=0$ 的基础解系有 $n-t$ 个解向量，即 $\lambda=2$ 有 $n-t$ 个线性无关的特征向量．

再看 $(3E-A)X=0$，它的基础解系有 $n-(n-t)=t$ 个解向量，即 $\lambda=3$ 有 t 个线性无关的特征向量．

属于特征值 2 的 $n-t$ 个线性无关的特征向量与属于特征值 3 的 t 个线性无关的特征向量放在一起仍然是线性无关的．从而 A

有 n 个线性无关的特征向量，于是 A 可对角化．

三、习　题

1－1　试证：所有 n 阶对称矩阵组成 $\frac{n(n+1)}{2}$ 维线性空间；所有的 n 阶反对称矩阵组成 $\frac{n(n-1)}{2}$ 维线性空间．

1－2　在 R^4 中，求向量 $\boldsymbol{\alpha}=[1,2,1,1]^{\mathrm{T}}$ 在基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,1,1]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,-1,-1]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,-1,1,-1]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_4=[1,-1,-1,1]^{\mathrm{T}}$$

下的坐标．

1－3　在 $R^{2\times 2}$ 中求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

在基 $\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}_4=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 下的坐标．

1－4　试证：在 $R^{2\times 2}$ 中矩阵

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

线性无关，并求 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的坐标．

1－5　设 $R[x]_4$ 是所有次数小于 4 的实系数多项式组成的线性空间，求多项式 $p(x)=1+2x^3$ 在基 $1,x-1,(x-1)^2,(x-1)^3$ 下的坐标．

1－6　已知 R^4 中的两组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-1,0,0]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=[0,1,-1,0]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3=[0,0,1,-1]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_4=[1,0,0,1]^{\mathrm{T}}$$

与

$$\boldsymbol{\beta}_1=[2,1,-1,1]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}_2=[0,3,1,0]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=[5,3,2,1]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}_4=[6,6,1,3]^{\mathrm{T}}$$

求：由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的过渡矩阵，并求向量 $\boldsymbol{\xi}=[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 下的坐标．

1－7　已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,1,0]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=[-1,1,1,1]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=[2,-1,0,1]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}_2=[1,-1,3,7]^{\mathrm{T}}$$

求 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$ 与 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\}$ 的和与交的基和维数．

1－8　设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换，对某个 $\boldsymbol{\xi}\in V$ 有 $\mathscr{A}^{k-1}(\boldsymbol{\xi})\neq 0$，$\mathscr{A}^{k}(\boldsymbol{\xi})=0$．试证：$\boldsymbol{\xi}$，$\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})$，$\mathscr{A}^2(\boldsymbol{\xi})$，$\cdots$，$\mathscr{A}^{k-1}(\boldsymbol{\xi})$ 线性无关．

1－9　若 n 维线性空间中线性变换 $\mathscr{A}$ 使得对 V 中的任何向量 $\boldsymbol{\xi}$ 都有 $\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\xi})\neq 0$，$\mathscr{A}^{n}(\boldsymbol{\xi})\neq 0$，求 $\mathscr{A}$ 在某一基下的矩阵表示．

1－10　设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关，且

$$\boldsymbol{\xi}_i=a_{1i}\boldsymbol{\beta}_1+a_{2i}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{mi}\boldsymbol{\beta}_m$$
$$=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)\begin{bmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{mi}\end{bmatrix}\ (i=1,2,\cdots,s)$$

试证：向量组 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 的秩＝矩阵 $(a_{ij})_{m\times s}$ 的秩．

1－11　设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 R^3 的线性变换，它在 R^3 中基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&0&3\\2&1&5\end{bmatrix}$$

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵表示．

(2) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的核与值域．

1－12　设线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=[-1,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,0,-1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[0,1,1]^{\mathrm{T}}$ 下的矩阵表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\-1&2&3\end{bmatrix}$$

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=[1,0,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_2=[0,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_3=[0,0,1]^{\mathrm{T}}$ 下的矩阵表示．

(2) 求 $\mathscr{A}$ 的核与值域．

1－13　求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列空间 $R(\boldsymbol{A})$ 与核空间 $N(\boldsymbol{A})$．

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&6\\0&4&2\\1&2&6\end{bmatrix}$　　(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&-4\\-1&-4&5\\3&1&7\\6&5&-10\end{bmatrix}$

1－14　试证：$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})^k=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})^k,k=1,2,\cdots$，其中 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩．

1－15　试证：$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^k)=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i^k$，$\lambda_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值．

1－16　设 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，试证：$\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 $+1$ 或 -1．

1－17　设 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，试证：$\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 0 或 1．

1－18　已知可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量，试求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值和特征向量．

1－19　已知 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，试证：$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$．

1－20　求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量．

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{bmatrix}$，　(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，　(4) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&1\\-2&0&3\\-1&-3&0\end{bmatrix}$

四、自测题

1.1 试证：在 $R^{2\times 2}$ 中矩阵

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\ \alpha_2=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\ \alpha_3=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\ \alpha_4=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$$

线性无关，并求 $\alpha=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标．

1.2 在 R^4 中，求由基

$$\alpha_1=[1,2,-1,0]^T,\ \alpha_2=[2,1,0,1]^T$$
$$\alpha_3=[0,1,2,2]^T,\ \alpha_4=[0,-3,-1,0]^T$$

到基

$$\beta_1=[1,3,1,2]^T,\ \beta_2=[-3,-2,0,0]^T$$
$$\beta_3=[2,0,1,0]^T,\ \beta_4=[2,0,-2,-1]^T$$

的过渡矩阵，并求向量 $\xi=[1,1,1,1]^T$ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标．

1.3 在 R^4 中，求由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 生成的子空间的基与维数，其中

$$\alpha_1=[3,3,3,2]^T,\ \alpha_2=[0,3,-3,1]^T$$
$$\alpha_3=[0,2,-2,1]^T,\ \alpha_4=[3,2,4,2]^T$$

1.4 设

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}$$

求全体与 A 乘法可交换的矩阵组成 $R^{4\times 4}$ 的子空间的基与维数．

1.5 在 R^4 中，求由齐次线性方程组

$$\begin{cases}3x_1-x_2+3x_3-3x_4=0\\6x_1+x_2-2x_3+x_4=0\\6x_2-10x_3+14x_4=0\end{cases}$$

确定的解空间的基与维数．

1.6 在线性空间 R^4 中，已知

$$\alpha_1=[0,3,2,1]^T,\ \alpha_2=[2,1,0,-1]^T$$
$$\beta_1=[1,0,-3,-6]^T,\ \beta_2=[3,-2,3,8]^T$$

试求 $\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 与 $\mathrm{span}\{\beta_1,\beta_2\}$ 的交空间与和空间的基与维数．

1.7 求齐次线性方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）的解空间的交空间与和空间的基与维数，其中

$$(\mathrm{I})\begin{cases} x_1-2x_2-x_3-x_4=0 \\ 5x_1-10x_2+9x_3+5x_4=0 \end{cases}$$
$$(\mathrm{II})\{\ x_1-2x_2+13x_3+5x_4=0$$

1.8 在向量空间 R^3 中取两个基

$$\alpha_1=[2,4,7]^T,\ \alpha_2=[3,6,8]^T,\alpha_3=[4,7,10]^T$$
$$\beta_1=[1,0,0]^T,\ \beta_2=[1,1,0]^T,\beta_3=[1,1,1]^T$$

令 $W=\{v\in R^3\mid v$ 关于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β_1,β_2,β_3 有相同的坐标$\}$．证明：W 是 R^3 的子空间．

1.9 在 R^3 中，线性变换 $\mathscr{A}$ 对于基

$$\alpha_1=[-1,0,2]^T,\ \alpha_2=[0,1,1]^T,\alpha_3=[3,-1,0]^T$$

的像为

$$\mathscr{A}(\alpha_1)=[1,2,0]^T,\ \mathscr{A}(\alpha_2)=[1,0,-1]^T,$$
$$\mathscr{A}(\alpha_3)=[5,-1,3]^T.$$

求：$\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵表示．

1.10 试证：在 R^3 中变换

$$\mathscr{A}([x,y,z]^T)=[2x-3y+4z,5x-y+2z,4x+7y]^T$$
$$\mathscr{B}([x,y,z]^T)=[2y+z,x-4y,3x]^T$$

都是线性变换，求 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 在基 $e_1=[1,0,0]^T,e_2=[0,1,0]^T,e_3=[0,0,1]^T$ 下的矩阵表示 A 和 B.

1.11 设实数域 R 上的三维线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_1$ 下的矩阵．

(2) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,k\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的矩阵，其中 $0\neq k\in\mathbf{R}$.

(3) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的矩阵．

1.12　设 $\mathscr{A}$ 是 R^3 的线性变换，它在 R^3 基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\eta_1=2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$，$\eta_2=2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3$，$\eta_3=3\alpha_1+\alpha_3$ 下的矩阵表示 $\boldsymbol{B}$.

(2) 求 $\mathscr{A}$ 的特征值与特征向量．

第二章 λ-矩阵与矩阵的Jordan标准形

一、基本要求

(1) 会求 λ-矩阵的 Smith 标准形．

(2) 会求 λ-矩阵的不变因子，行列式因子和初等因子．

(3) 理解 λ-矩阵等价的几个充分必要条件．

(4) 掌握矩阵 Jordan 标准形的定义，会求矩阵的 Jordan 标准形及其相似变换矩阵．

(5) 会用矩阵秩的方法讨论矩阵 Jordan 标准形的结构．

二、典型例题

例 2.1 求下列 λ-矩阵的 Smith 标准形．

(1) $\begin{bmatrix} -\lambda+1 & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} \lambda^2-1 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^3 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \lambda+4 \\ 0 & 1 & \lambda+4 & 0 \\ 1 & \lambda+4 & 0 & 0 \\ \lambda+4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

解：(1) 用初等变换方法求解．

$$\begin{bmatrix} -\lambda+1 & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -\lambda+1 & 2\lambda-1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2\lambda-1 & -\lambda+1 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda \\ 1 & \lambda^2+\lambda-1 & \lambda^2+1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2\lambda-1 & -\lambda+1 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda^2&\lambda\\0&\lambda^2-\lambda&\lambda^2+\lambda\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda&\lambda^2\\0&\lambda^2+\lambda&\lambda^2-\lambda\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&\lambda^2+\lambda&-\lambda^3-\lambda\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda+\lambda^3\end{bmatrix}$$

(2) 利用行列式因子方法求解．首先求出

$$\boldsymbol{D}_1(\lambda)=\lambda-1,\ \boldsymbol{D}_2(\lambda)=(\lambda-1)^4(\lambda+1)$$

于是

$$d_1(x)=\boldsymbol{D}_1(\lambda)=\lambda-1,\ d_2(x)=\frac{\boldsymbol{D}_2(\lambda)}{\boldsymbol{D}_1(\lambda)}=(\lambda-1)^3(\lambda+1)$$

从而其 Smith 标准形为

$$\begin{bmatrix}\lambda-1&0\\0&(\lambda-1)^3(\lambda+1)\end{bmatrix}$$

(3) 利用行列式因子方法求解．首先求出

$$\boldsymbol{D}_4(\lambda)=(\lambda+4)^4,\ \boldsymbol{D}_3(\lambda)=\boldsymbol{D}_2(\lambda)=\boldsymbol{D}_1(\lambda)=1$$

于是

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1,\ d_4(\lambda)=(\lambda+4)^4$$

从而其 Smith 标准形为

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&(\lambda+4)^4\end{bmatrix}$$

评注：求 λ-矩阵的 Smith 标准形常用的方法有两种：初等变换法与行列式因子、不变因子法．根据所给题目不同，第一个题目采用初等变换法较好，而后两个题目用行列式因子法求解更方便些．

例 2.2 设

$$A_1=\begin{bmatrix}3 & 2 & -5\\2 & 6 & -10\\1 & 2 & -3\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}6 & 20 & -34\\6 & 32 & -51\\4 & 20 & -32\end{bmatrix}$$

分别求 $\lambda E-A_1$ 与 $\lambda E-A_2$ 的 Smith 标准形以及 A_1 与 A_2 的不变因子、行列式因子.

解：首先求出 $\lambda E-A_1$ 的 Smith 标准形为

$$\begin{bmatrix}1 & & \\ & \lambda-2 & \\ & & (\lambda-2)^2\end{bmatrix}$$

再求出 $\lambda E-A_2$ 的 Smith 标准形为

$$\begin{bmatrix}1 & & \\ & \lambda-2 & \\ & & (\lambda-2)^2\end{bmatrix}$$

于是 A_1 的不变因子为 $1,\lambda-2,(\lambda-2)^2$，$A_2$ 的不变因子与 A_1 的相同. A_1 的行列式因子为 $1,\lambda-2,(\lambda-2)^2$，$A_2$ 的行列式因子与 A_1 的相同.

评注：由此题目可知不同矩阵的 Smith 标准形、不变因子以及行列式因子可能相同.

例 2.3 证明：Jordan 块

$$J(a)=\begin{bmatrix}a & 1 & 0\\0 & a & 1\\0 & 0 & a\end{bmatrix}$$

相似于矩阵

$$\begin{bmatrix}a & \varepsilon & 0\\0 & a & \varepsilon\\0 & 0 & a\end{bmatrix}$$

这里 $\varepsilon\neq 0$ 为任意实数.

证明：利用教材中的定理 2.2.7 考虑此题，即判断下面的两

个 λ-矩阵

$$\begin{bmatrix}\lambda-a & -1 & 0\\ 0 & \lambda-a & -1\\ 0 & 0 & \lambda-a\end{bmatrix} 与 \begin{bmatrix}\lambda-a & -\varepsilon & 0\\ 0 & \lambda-a & -\varepsilon\\ 0 & 0 & \lambda-a\end{bmatrix}$$

是否等价．容易求出这两个 λ-矩阵的不变因子均为

$$1,\quad 1,\quad (\lambda-a)^3$$

从而这两个 λ-矩阵,从而

$$\begin{bmatrix}a & 1 & 0\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix} 与 \begin{bmatrix}a & \varepsilon & 0\\ 0 & a & \varepsilon\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}$$

相似．

评注：数字矩阵的相似问题完全可以转化为 λ-矩阵的等价问题．

例 2.4 已知 10 阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1\\ & & & & a\end{bmatrix}_{10\times 10},\quad B=\begin{bmatrix}a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & \ddots & 1\\ \varepsilon & & & & a\end{bmatrix}_{10\times 10}$$

其中 $\varepsilon=10^{-10}$,证明 A 不相似于 B.

证明：只需判断 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 是否等价．对于 λ-矩阵

$$\begin{bmatrix}\lambda-a & -1 & & & \\ & \lambda-a & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1\\ & & & & \lambda-a\end{bmatrix}_{10\times 10}$$

其不变因子为 $1,1,\cdots,(\lambda-a)^{10}$;对于 λ-矩阵

$$\begin{bmatrix} \lambda - a & -1 & & & \\ & \lambda - a & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 \\ -\varepsilon & & & & \lambda - a \end{bmatrix}_{10\times 10}$$

其不变因子为 $1,1,\cdots,(\lambda-a)^{10}-\varepsilon$. 显然 A 与 B 不具有相同的不变因子，从而 A 不相似于 B.

例 2.5 设 $A(\lambda)$为一个 5 阶 λ-矩阵，其秩为 4，初等因子为 $\lambda,\lambda^2,\lambda^2,\lambda-1,\lambda-1,\lambda+1,(\lambda+1)^3$，试求 $A(\lambda)$的不变因子及其 Smith 标准形.

解：因为 $A(\lambda)$的秩为 4，所以可知其有四个不变因子

$$d_4(\lambda) = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1)^3,$$

$$d_3(\lambda) = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1),$$

$$d_2(\lambda) = \lambda, d_1(\lambda) = 1$$

于是立即得到其 Smith 标准形

$$J = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1) & \\ & & & \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1)^3 \end{bmatrix}$$

例 2.6 设矩阵 A 的特征值互不相同，且有 $AB=BA$. 证明：$\lambda E-B$ 的初等因子均为一次因式.

证明：因为 A 的特征值互不相同，所以存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} r_1 & & & \\ & r_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & r_n \end{bmatrix}, \text{且 } r_i \neq r_j (i \neq j)$$

于是有

$$P^{-1}ABP = P^{-1}APP^{-1}BP = \begin{bmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_n \end{bmatrix} P^{-1}BP$$

又

$$\begin{aligned} P^{-1}ABP &= P^{-1}BAP = P^{-1}BPP^{-1}AP \\ &= P^{-1}BP\begin{bmatrix} r_1 & & & \\ & r_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & r_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & & & \\ & r_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & r_n \end{bmatrix} P^{-1}BP \end{aligned}$$

但是，可与对角线元素均不相等的对角矩阵可交换的矩阵只有对角矩阵，即 $P^{-1}BP$ 为对角矩阵．由于 B 与对角矩阵 $P^{-1}BP$ 相似，故 B 的初等因子都是一次因式．

例 2.7 设 $A \neq 0, A^k = 0 (k \geqslant 2)$．证明：$A$ 不能与对角矩阵相似．

证明：用反证法．假设 A 可以对角化，于是存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

由于 $A^k = 0$，所以

$$A^k = \left(P\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}P^{-1}\right)^k = 0$$

即

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix} = 0$$

由此可知 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$，故

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{bmatrix}$$

这表明 $A=0$,这与 $A\neq 0$ 矛盾.

例 2.8 已知 $A^k=E$(k 为正整数). 证明:A 与对角矩阵相似.

证明:只要证明 A 的每一个 Jordan 块都是一阶的,那么 A 必与对角矩阵相似. 设 A 的 Jordan 标准形为

$$J=\begin{bmatrix}J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s\end{bmatrix},\quad J_i=\begin{bmatrix}a_i & 1 & & & \\ & a_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & a_i\end{bmatrix}_{n_i\times n_i}.$$

那么存在相似变换矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=J$. 因此

$$J^k=P^{-1}A^kP=E$$

于是有

$$J_i^k=\begin{bmatrix}a_i^k & ka_i^{k-1} & & & \\ & a_i^k & ka_i^{k-1} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & ka_i^{k-1} \\ & & & & a_i^k\end{bmatrix}_{n_i\times n_i}=E_{k_i}$$

故 J_i 必为一阶子块,即 $s=n$. 所以 A 与对角矩阵相似.

例 2.9 求下列矩阵的 Jordan 标准形及其相似变换矩阵 P.

(1) $\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -2\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

解:(1) 记

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -2\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

首先求出 A 的 Jordan 标准形

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda-2 & 1 & 1\\ -2 & \lambda+1 & 2\\ 1 & -1 & \lambda-2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & & \\ & \lambda-1 & \\ & & (\lambda-1)^2\end{bmatrix}$$

那么,A 的初等因子为$(\lambda-1)$,$(\lambda-1)^2$,故 A 的 Jordan 标准形为

$$J=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & 1 & 1\end{bmatrix}$$

再设 $P=[X_1,X_2,X_3]$,由 $P^{-1}AP=J$ 得

$$A[X_1,X_2,X_3]=[X_1,X_2,X_3]J$$

由此可得方程组

$$\begin{cases}(E-A)X_1=0\\ (E-A)X_2=-X_3\\ (E-A)X_3=0\end{cases}$$

首先解第一个方程,可得基础解系为$\xi_1=[1,1,0]^T$,$\eta_2=[1,0,1]^T$,不妨选取 $X_1=[1,1,0]^T$,但是不能简单选取 $X_3=[1,0,1]^T$,因为 X_3 还要保证非齐次线性方程组$(E-A)X_2=-X_3$ 有解. 又由于第三个方程与第一个方程是同解方程组,所以其的任意解具有形式 $X_3=(c_1\xi_1+c_2\eta_2)=(c_1+c_2,\ c_1,c_2)^T$.

为了使第二个方程有解,可选 c_1,c_2 的值使下面的两个矩阵的秩相等

$$E-A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & c_1+c_2\\ -2 & 2 & 2 & c_1\\ 1 & -1 & -1 & c_2\end{bmatrix}$$

只要选取 $c_1=2$, $c_2=-1$ 即可. 于是 $X_3=[1,2,-1]^T$,将其代入

第二个方程，并解之得 $X_2=[1,1,1]^T$. 容易验证 X_1,X_2,X_3 线性无关，所以取

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

且有 $P^{-1}AP=J$.

(2) 记

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

首先求出 A 的 Jordan 标准形

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda-2 & -1 & 0 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \lambda-2 & \\ & & & (\lambda-2)^3\end{bmatrix}$$

那么 A 的初等因子为 $\lambda-2,(\lambda-2)^3$，从而 A 的 Jordan 标准形为

$$J=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

再求相似变换矩阵 P，设 $P=[X_1,X_2,X_3,X_4]$且有 $P^{-1}AP=J$，即

$$A[X_1,X_2,X_3,X_4]=[X_1,X_2,X_3,X_4]\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}$$

于是可得方程组

$$AX_1=2X_1,\ AX_2=X_1+2X_2,$$
$$AX_3=X_2+2X_3,\ AX_4=2X_4$$

先求解线性方程组 $AX_1=2X_1$ 和 $AX_4=2X_4$，这是同解线性方程组，可得其全部解为$k_1[1,0,0,0]^T+k_2[0,0,1,0]^T$，$k_1,k_2$ 不全为零．为使 $AX_2=X_1+2X_2$ 有解，取 $X_1=[1,0,0,0]^T$，求出$(A-2E)X_2=X_1$ 的全部解为$[l_1,1,l_2,0]^T$，为了使 $AX_3=X_2+2X_3$ 有解，取 $l_1=0,l_2=1$，再求解$(A-2E)X_3=X_2=[0,1,1,0]^T$，其全部解为$[0,m_1,0,m_2]^T$.

于是取 $X_1=[1,0,0,0]^T$，$X_2=[0,1,1,0]^T$，$X_3=[0,1,0,1]^T$，$X_4=[0,0,1,0]^T$. 从而

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

且有 $P^{-1}AP=J$.

例 2.10 求证：n 阶非零矩阵 A 可对角化的充要条件是对于任意的常数 k 都有 $r(kE-A)=r(kE-A)^2$.

解：必要性 设存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}$$

于是有

$$kE - A = kE - P\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$= P(kE - P^{-1}AP)P^{-1} = P\begin{bmatrix}k-\lambda_1 & & & \\ & k-\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k-\lambda_n\end{bmatrix}P^{-1}$$

显然有

$$(kE - A)^2 = P\begin{bmatrix}(k-\lambda_1)^2 & & & \\ & (k-\lambda_2)^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (k-\lambda_n)^2\end{bmatrix}P^{-1}$$

因此 $r(kE-A)=r(kE-A)^2$.

充分性 设 A 的 Jordan 标准形为 J，于是存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=J$. 即

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix}J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s\end{bmatrix},\ J_i = \begin{bmatrix}a_i & 1 & & & \\ & a_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & a_i\end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$$

下面证明对于每个 $1\leqslant i\leqslant s$ 都有 $n_i=1$. 用反证法，假设 $n_1>1$，由于 k 具有任意性．于是取 $k=a_1$，有 $r(a_1E-A)=r(a_1E-A)^2$，即

$$r(a_iE - J_i) = r(a_iE - J_i)^2,\ i = 1,2,\cdots,s$$

但是

$$a_1E-J_1=\begin{bmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&&\ddots&\\&&&\ddots&1\\&&&&0\end{bmatrix}$$

$$(a_1E-J_1)^2=\begin{bmatrix}0&0&1&&\\&0&0&\ddots&\\&&&\ddots&1\\&&&\ddots&0\\&&&&0\end{bmatrix}$$

由此可见 $r(a_1E-J_1)\neq r(a_1E-J_1)^2$. 同样可以证明 $n_2=n_3=\cdots=n_t=1$，即 A 相似于对角矩阵.

例 2.11 试写出 Jordan 标准形均为

$$J=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$$

的两个矩阵 A,B.

解：用两种方法求解此题.

方法一 相似变换矩阵的方法. 对于任意一个可逆矩阵 P，矩阵 PJP^{-1} 均与矩阵 J 相似，从而其 Jordan 标准形必为 J，于是任取两个不同的可逆矩阵 P，即可得到两个矩阵 A,B.

方法二 矩阵秩的方法. 设 A(或 B)的 Jordan 标准形为

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$$

从而 A(或 B)的 Smith 标准形为

$$\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&(\lambda-2)^2(\lambda-1)\end{bmatrix}$$

由此可知 $\boldsymbol{A}$(或 $\boldsymbol{B}$)的行列式因子为

$$D_1(\lambda) = 1,\ D_2(\lambda) = 1,\ D_3(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

这样的矩阵 $\boldsymbol{A}$(或 $\boldsymbol{B}$)有很多,取表达式较为简单的矩阵,下列任何一种矩阵都可以

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & 2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 2 & 0 \\ * & * & 2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ * & 2 & 0 \\ * & * & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 2 & * & * \\ 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

下面分析“*”处元素取何值时才能保证以 1 为主对角元的 Jordan 块只有一个,以 2 为主对角元的 Jordan 块也只有一个. 根据求矩阵 Jordan 标准形的第二种方法(矩阵秩的方法),只要使

$$r(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}) = 2 \text{ 或 } r(\boldsymbol{B} - 2\boldsymbol{E}) = 2$$

即可. 例如

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

均可以. 但

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

都不可以.

例 2.12 已知矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ a & 3 & 0 \\ c & b & 2 \end{bmatrix}$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有可能的 Jordan 标准形.

(2) 给出 $\boldsymbol{A}$ 可对角化条件.

解：首先计算特征多项式 $|\lambda E-A|=(\lambda-3)^2(\lambda-2)$.

当 $\lambda=3$ 时，

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ -c & -b & 1 \end{bmatrix}$$

若 $a=0$，则 $\lambda E-A$ 的秩为 1. A 的属于 $\lambda=3$ 的线性无关特征向量有两个，因此 A 的 Jordan 标准形为

$$J = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

若 $a\neq 0$，则 $\lambda E-A$ 的秩为 2. A 的属于 $\lambda=3$ 的线性无关特征向量有一个，因此 A 的 Jordan 标准形为

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

因此当 $a=0$ 时，A 可对角化.

例 2.13 用矩阵的 Jordan 标准形求解线性微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -x_1 + x_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -4x_1 + 3x_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = -8x_1 + 8x_2 - x_3 \end{cases}$$

这里 x_1,x_2,x_3 都是 t 的函数.

解：对方程组的系数矩阵 A 求出其 Jordan 标准形 J 以及相似变换矩阵 P，且 $P^{-1}AP=J$，其中 $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ -8 & 8 & -1 \end{bmatrix}$，$J=$

$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\4 & 2 & 1\end{bmatrix}$，作变量替换 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$，那么原方程组可化成

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y'_1\\y'_2\\y'_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{J}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1+y_2\\y_2\\-y_3\end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=y_1+y_2\\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=y_2\\ \dfrac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}t}=-y_3\end{cases}$$

可求得 $y_1=k_1\mathrm{e}^t+k_2t\mathrm{e}^t$，$y_2=k_2\mathrm{e}^t$、$y_3=k_3\mathrm{e}^{-t}$. 于是

$$\begin{cases}x_1(t)=k_1\mathrm{e}^t+k_2t\mathrm{e}^t\\ x_2(t)=2k_1\mathrm{e}^t+k_2(2t+1)\mathrm{e}^t\\ x_3(t)=4k_1\mathrm{e}^t+k_2(4t+2)\mathrm{e}^t+k_3\mathrm{e}^{-t}\end{cases}$$

其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

三、习　题

2－1　用初等变换把下列 λ-矩阵化为标准形

(1) $\begin{bmatrix}\lambda^3-\lambda & 2\lambda^2\\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda\end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix}\lambda^2-1 & 0\\ 0 & (\lambda-1)^3\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda\\ \lambda & \lambda & -\lambda\\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{bmatrix}$　　(4) $\begin{bmatrix}\lambda(\lambda+1) & & \\ & \lambda & \\ & & (\lambda+1)^2\end{bmatrix}$

2－2　试证：Jordan 块

$$J(a)=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

相似于矩阵

$$\begin{bmatrix} a & \varepsilon & 0 \\ 0 & a & \varepsilon \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

这里 $\varepsilon\neq 0$ 为任意实数．

2－3　已知 10 阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & a \end{bmatrix}_{10\times 10},\quad B=\begin{bmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 \\ \varepsilon & & & & a \end{bmatrix}_{10\times 10}$$

其中 $\varepsilon=10^{-10}$，证明 A 不相似于 B.

2－4　设 $A\neq 0, A^k=0(k\geqslant 2)$．证明：$A$ 不能与对角矩阵相似．

2－5　已知 $A^k=E$（k 为正整数）．证明：A 与对角矩阵相似．

2－6　已知 $A^2=A$．证明：A 相似于矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

2－7　求下列矩阵的 Jordan 标准形及其相似变换矩阵 P.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$　　(4) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

2－8　用求矩阵秩的方法求矩阵的 Jordan 标准形．

(1) $\begin{bmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix} 8 & -3 & 6 \\ 3 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

2－9　试写出 Jordan 标准形均为

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

的两个矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$.

四、自测题

2.1　求下列 λ-矩阵的 Smith 标准形

(1) $\begin{bmatrix} 3\lambda^2+2\lambda-3 & 2\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-3 \\ 4\lambda^2+3\lambda-5 & 3\lambda-2 & \lambda^2+3\lambda-4 \\ \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-3\lambda & 0 \\ 0 & (\lambda-3)^2 & 0 & 0 \\ \lambda^2-3\lambda & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2.2 求下列 λ-矩阵的不变因子

(1) $\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 5 & 4 & 3 & \lambda+2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} \lambda+\alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \lambda+\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+\alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \lambda+\alpha \end{bmatrix}$

2.3 求下列矩阵的初等因子组

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2.4 已知

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

求 A^{100}.

2.5 已知 $A^2=E$. 证明：A 相似于矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}$$

2.6 求下列矩阵的 Jordan 标准形及其相似变换矩阵 P.

(1) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

第三章　内积空间、正规矩阵、Hermite 矩阵

一、基本要求

（1）掌握欧氏空间和酉空间的定义与性质，掌握（反）Hermite 矩阵定义，理解（酉）欧氏空间中度量的概念．

（2）掌握线性无关向量组的 Schmidt 正交化与单位化方法．

（3）掌握酉矩阵和正交矩阵定义与性质，从几何与物理角度深刻理解酉变换和正交变换的定义及性质．

（4）了解幂等矩阵与投影变换的关系，理解次酉矩阵定义．

（5）掌握 Schur 引理的定义及其实现过程．掌握正规矩阵的定义与性质，能够灵活运用正规矩阵的结构定理证明问题．

（6）掌握（反）Hermite 矩阵的性质以及 Hermite 矩阵的结构定理，理解 Hermite 二次型的含义，会判断 Hermite 二次型的定性，重点理解（半）正定 Hermite 二次型的等价命题．

（7）理解 Hermite 矩阵偶在复相合下的标准形及其实现过程．了解广义特征值与广义特征向量的概念．

（8）了解 Rayleigh 商的概念．

二、典型例题

例 3.1　已知 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶正定 Hermite 矩阵，在 n 维线性空间 C^n 中向量 $\alpha=[x_1,x_2,\cdots,x_n]$，$\beta=[y_1,y_2,\cdots,y_n]$，定义内积 $(\alpha,\beta)=\alpha A\beta^H$．

（1）证明在上述定义下，C^n 是酉空间；

（2）写出 C^n 中的 Cauchy - Schwarz 不等式．

证明：首先证明 C^n 在上述定义下构成酉空间

① $$(\alpha,\beta)=\alpha A\beta^{H}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]A\begin{bmatrix}\bar{y}_1\\\bar{y}_2\\\vdots\\\bar{y}_n\end{bmatrix}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}[\bar{y}_j(\sum_{i=1}^{n}x_ia_{ij})]$$

$$(\beta,\alpha)=\beta A\alpha^{H}=[y_1,y_2,\cdots,y_n]A\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\\bar{x}_2\\\vdots\\\bar{x}_n\end{bmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[\bar{x}_i(\sum_{j=1}^{n}y_ja_{ji})]$$

从而 $(\overline{\beta,\alpha})=\overline{\beta A\alpha^{H}}=\sum_{i=1}^{n}[x_i(\sum_{j=1}^{n}\bar{y}_j\bar{a}_{ji})]$，又由 A 为 Hermite 矩阵，即 $A^{H}=A$，故 $a_{ij}=\bar{a}_{ji}$. 因此$(\overline{\beta,\alpha})=(\alpha,\beta)$；

② $$(k\alpha,\beta)=\sum_{j=1}^{n}[\bar{y}_j(\sum_{i=1}^{n}kx_ia_{ij})]$$
$$=k\sum_{j=1}^{n}[\bar{y}_j(\sum_{i=1}^{n}x_ia_{ij})]=k(\alpha,\beta)$$

③ $$(\alpha+\beta,\gamma)=\sum_{j=1}^{n}[\bar{z}_j(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)a_{ij})]$$
$$=\sum_{j=1}^{n}[\bar{z}_j(\sum_{i=1}^{n}x_ia_{ij})]+\sum_{j=1}^{n}[\bar{z}_j(\sum_{i=1}^{n}y_ia_{ij})]$$
$$=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma);$$

④ 因为 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶正定 Hermite 矩阵，故$(\alpha,\alpha)=\alpha A\alpha^{H}\geqslant 0$，当且仅当 $\alpha=0$ 时，$(\alpha,\alpha)=0$.

综上证明可知 C^n 是酉空间 .

(2) 解：Cauchy – Schwarz 不等式$|(\alpha,\beta)|\leqslant\|\alpha\|\|\beta\|$，即

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_i\bar{y}_j\right|\leqslant\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_i\bar{x}_j}\cdot\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}y_i\bar{y}_j}$$

例 3.2 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots,\alpha'_n$ 为 n 维欧氏空间 V 的两个基，A,B 分别为其度量矩阵，从旧基到新基的过渡矩阵为 P，即

$$[\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots,\alpha'_n]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]P$$

证明：$B=P^{\mathrm{T}}AP$.

证明：任取 $\alpha,\beta\in V$，设

$$\alpha=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]X=[\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots,\alpha'_n]X'$$
$$\beta=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]Y=[\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots,\alpha'_n]Y'$$

则 $X=PX',Y=PY'$，于是有

$$(\alpha,\beta)=X^{\mathrm{T}}AY=(PX')^{\mathrm{T}}A(PY')=X'^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}APY'=X'^{\mathrm{T}}BY'$$

对于任意的 X',Y' 都成立，故有 $B=P^{\mathrm{T}}AP$.

评注：这是欧氏空间中的一个重要结论，即欧氏空间不同基的度量矩阵是合同的.

例 3.3 在线性空间 $R[x]_3$ 中定义内积

$$(f(x),\ g(x))=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

那么 $R[x]_3$ 便构成欧氏空间.

(1) 求基 $1,x,x^2$ 的度量矩阵；

(2) 求 $f(x)=1-x+x^2$ 与 $g(x)=1-4x-5x^2$ 的内积.

解：设基 $1,x,x^2$ 的度量矩阵为 $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$，由于 A 为实对称矩阵，所以只需要计算 $a_{ij}(i\leqslant j)$ 即可.

$$a_{11}=(1,1)=\int_{-1}^{1}1\cdot 1\mathrm{d}x=2,\ a_{12}=(1,x)=\int_{-1}^{1}1\cdot x\mathrm{d}x=0$$

$$a_{13}=(1,x^2)=\int_{-1}^{1}1\cdot x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3},\ a_{22}=(x,x)=\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$$

$$a_{23}=(x,x^2)=\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x=0,\ a_{33}=(x^2,x^2)=\int_{-1}^{1}x^4\mathrm{d}x=\frac{2}{5}$$

于是

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$$

(2) 因为 $f(x),g(x)$在基下 $1,x,x^2$ 下的坐标分别为 $\boldsymbol{X}=[1,-1,1]^T$,$\boldsymbol{Y}=[1,-4,-5]^T$,所以

$$(f(x),g(x))=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}=[1,-1,1]\begin{bmatrix}2 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -4\\ 5\end{bmatrix}=0$$

例 3.4 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$,求 $N(\boldsymbol{A})$的标准正交基.

解: 根据核空间的定义可知 $N(\boldsymbol{A})$ 是方程组 $\begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}=0$ 的解空间,解得它的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[0,1,1,0,0]^T,\ \boldsymbol{\alpha}_2=[-1,1,0,1,0]^T,$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3=[4,-5,0,0,1]^T$$

从而 $N(\boldsymbol{A})=\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$.

首先应用 Schmidt 正交化方法得到

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,1,0,0]^T,$$
$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1$$

$$=[-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0]^T,$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$=\alpha_3-\frac{-5}{2}\beta_1+\frac{13}{5}\beta_2=[\frac{7}{5},-\frac{6}{5},\frac{6}{5},\frac{13}{5},1]^T,$$

然后再将 β_1,β_2,β_3 单位化后,可得一个标准正交基

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=[0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0]^T,$$

$$\gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=[-\frac{\sqrt{10}}{5},\frac{\sqrt{10}}{10},-\frac{\sqrt{10}}{10},\frac{\sqrt{10}}{5},0]^T,$$

$$\gamma_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=[\frac{7}{\sqrt{315}},-\frac{6}{\sqrt{315}},\frac{6}{\sqrt{315}},\frac{13}{\sqrt{315}},\frac{5}{\sqrt{315}}]^T,$$

所以 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 即为 $N(A)$的标准正交基.

例 3.5 已知 C^3 中三个线性无关的向量

$$\alpha_1=[1,i,0]^T,\ \alpha_2=[1,0,i]^T,\ \alpha_3=[0,0,1]^T$$

用 Schmidt 正交化方法将其标准正交化.

解:(1) 正交化

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\overline{(\alpha_2,\beta_1)}}{(\beta_1,\beta_1)}=\frac{1}{2}[1,-i,2i]^T$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{\overline{(\alpha_3,\beta_1)}}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{\overline{(\alpha_3,\beta_2)}}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\frac{1}{3}[-i,1,1]^T$$

(2) 单位化

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,i,0]^T$$

$$\gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}[1,-i,2i]^T$$

$$\gamma_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}[-i,1,1]^T$$

评注：这里一定要注意复向量的正交化过程，设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为 C^n 中 r 个线性无关的向量，那么其正交化一般公式应为

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\overline{(\alpha_2,\beta_1)}}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

……

$$\beta_r=\alpha_r-\frac{\overline{(\alpha_r,\beta_1)}}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{\overline{(\alpha_r,\beta_2)}}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{\overline{(\alpha_r,\beta_{r-1})}}{(\beta_{r-1},\beta_{r-1})}\beta_{r-1}$$

例 3.6 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三维欧氏空间的一组标准正交基，试证

$$\beta_1=\frac{1}{3}(2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3)$$

$$\beta_2=\frac{1}{3}(2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3)$$

$$\beta_3=\frac{1}{3}(\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3)$$

也是一组标准正交基．

证明：将上述表达式写成如下形式

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

$$=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]Q$$

注意到这里 Q 为一个正交矩阵，容易验证

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]^{\mathrm T}[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=Q^{\mathrm T}\begin{bmatrix}\alpha_1^{\mathrm T}\\ \alpha_2^{\mathrm T}\\ \alpha_3^{\mathrm T}\end{bmatrix}[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]Q$$

$$=Q^{\mathrm T}EQ=E$$

由此可知 β_1,β_2,β_3 也是此欧氏空间的一组标准正交基．

评注：这里蕴涵着一个重要的结论：设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 均为 n 维欧氏空间 V 的标准正交基，那么从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵必为正交矩阵；反之，如果已知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 n 维欧氏空间 V 的一组标准正交基，Q 为一个正交矩阵，且有

$$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]Q$$

那么 β_1,β_2,β_3 也是欧氏空间 V 的一组标准正交基．

例 3.7 已知 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$是一个 n 阶正交矩阵，那么方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\quad\vdots\qquad\ \vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的解是

$$\begin{cases}x_1=a_{11}b_1+a_{21}b_2+\cdots+a_{n1}b_n\\x_2=a_{12}b_1+a_{22}b_2+\cdots+a_{n2}b_n\\\vdots\qquad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\quad\vdots\\x_n=a_{1n}b_1+a_{2n}b_2+\cdots+a_{nn}b_n\end{cases}$$

解：由于 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$为正交矩阵，因此有 $A^{-1}=A^{T}$. 此时方程组存在唯一解

$$X=A^{-1}b=A^{T}b=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$$

即有

$$\begin{cases}x_1=a_{11}b_1+a_{21}b_2+\cdots+a_{n1}b_n\\x_2=a_{12}b_1+a_{22}b_2+\cdots+a_{n2}b_n\\\vdots\qquad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\quad\vdots\\x_n=a_{1n}b_1+a_{2n}b_2+\cdots+a_{nn}b_n\end{cases}$$

例 3.8 证明：(1)如果$|A|=1$，并且 A 中的每一个元素都等于其本身的代数余子式，那么 A 是一个正交矩阵；

(2) 如果$|A|=-1$，并且 A 的每一个元素都等于其本身的代数余子式乘以-1，那么 A 是一个正交矩阵．

证明：(1) 设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

由题意可知

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

其中 A_{ij}为元素 a_{ij}的代数余子式，于是

$$AA^{T}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}=|A|E$$

由于$|A|=1$，所以 $AA^{T}=E$. 这表明 A 是一个正交矩阵．

同理可以证明(2).

例 3.9 设 A 为可逆的实对称矩阵，B 为实反对称矩阵且 $AB=BA$. 证明：

(1) $A-B$ 与 $A+B$ 均可逆．

(2) $(A+B)(A-B)^{-1}$与$(A+B)^{-1}(A-B)$都是正交矩阵．

证明：(1) 由于 A 可逆，所以有

$$|A-B|=|A||E-A^{-1}B|$$

又 A 为实对称矩阵，B 为实反对称矩阵，且 $AB=BA$，从而有

$$(A^{-1}B)^{T}=B^{T}(A^{T})^{-1}=-BA^{-1}=-A^{-1}B$$

即 $A^{-1}B$ 为实反对称矩阵，实反对称矩阵的特征值为零或纯虚数，从而 1 不是 $A^{-1}B$ 的特征值，所以，

$$|A-B| = |A||E-A^{-1}B| \neq 0$$

这表明 $A-B$ 是可逆的．又 $(A-B)^{\mathrm{T}}=A+B$，故 $A+B$ 也是可逆矩阵．

(2) 记 $Q=(A+B)(A-B)^{-1}$，那么

$$Q^{\mathrm{T}} = (A+B)^{-1}(A-B)$$

又 $AB=BA$，所以有 $(A+B)(A-B)=(A-B)(A+B)$，于是

$$\begin{aligned} Q^{\mathrm{T}}Q &= (A+B)^{-1}(A-B)(A+B)(A+B)^{-1} \\ &= (A+B)^{-1}(A+B)(A-B)(A-B)^{-1} \\ &= E \end{aligned}$$

这表明 $Q=(A+B)(A-B)^{-1}$ 是一个正交矩阵．

同理可证 $(A+B)^{-1}(A-B)$ 也是正交矩阵．

例 3.10 设 n 阶酉矩阵 U 的特征值不等于 1，试证：矩阵 $E+U$ 满秩，而且 $W=\mathrm{i}(E-U)(E+U)^{-1}$ 是 Hermite 矩阵，反之，如果 W 是 Hermite 矩阵，那么而且 $V=(E+\mathrm{i}W)(E-\mathrm{i}W)^{-1}$ 是酉矩阵．

证明：由于 n 阶酉矩阵 U 的特征值不等于 1，所以

$$|-1\cdot E-U| \neq 0$$

由此可知 $|E+U|\neq 0$，即 $E+U$ 为满秩矩阵．

记 $W=\mathrm{i}(E-U)(E+U)^{-1}$，于是

$$\begin{aligned} W^{\mathrm{H}} &= -\mathrm{i}(E+U^{\mathrm{H}})^{-1}(E-U^{\mathrm{H}}) \\ &= -\mathrm{i}(U^{\mathrm{H}}U+U^{\mathrm{H}})^{-1}(U^{\mathrm{H}}U-U^{\mathrm{H}}) \\ &= -\mathrm{i}(U+E)^{-1}(U^{\mathrm{H}})^{-1}U^{\mathrm{H}}(U-E) \\ &= -\mathrm{i}(U+E)^{-1}(U-E) \\ &= -\mathrm{i}(E+U)^{-1}(U-E) \\ &= \mathrm{i}(E+U)^{-1}(E-U) \end{aligned}$$

注意到

$$(E+U)^{-1}(E-U) = (E-U)(E+U)^{-1}$$

从而 $W^{\mathrm{H}}=W$，即 W 是一个 Hermite 矩阵．

由于已证 W 是一个 Hermite 矩阵，所以 W 的特征值全为实数，因此

$$|\mathrm{i}E - W| \neq 0$$

由此可知 $|E-\mathrm{i}W|\neq 0$，即 $E-\mathrm{i}W$ 也是一个满秩矩阵．进一步

$$\begin{aligned}V^{\mathrm{H}}V &= [(E+\mathrm{i}W)(E-\mathrm{i}W)^{-1}]^{\mathrm{H}}[(E+\mathrm{i}W)(E-\mathrm{i}W)^{-1}] \\ &= [(E+\mathrm{i}W)^{-1}(E-\mathrm{i}W)][(E+\mathrm{i}W)(E-\mathrm{i}W)^{-1}] \\ &= (E+\mathrm{i}W)^{-1}(E-\mathrm{i}W)(E+\mathrm{i}W)(E-\mathrm{i}W)^{-1} \\ &= (E+\mathrm{i}W)^{-1}(E+\mathrm{i}W)(E-\mathrm{i}W)(E-\mathrm{i}W)^{-1} \\ &= E\end{aligned}$$

这表明 V 是一个酉矩阵．

例 3.11 设 $\mathscr{A}$ 为 n 维欧氏空间 V 的一个线性变换，试证：$\mathscr{A}$ 为正交变换的充分必要条件是

$$\|\mathscr{A}(\alpha)-\mathscr{A}(\beta)\| = \|\alpha-\beta\|$$

证明：必要性

$$\begin{aligned}\|\mathscr{A}(\alpha)-\mathscr{A}(\beta)\| &= \sqrt{(\mathscr{A}(\alpha)-\mathscr{A}(\beta),\mathscr{A}(\alpha)-\mathscr{A}(\beta))} \\ &= \sqrt{(\alpha,\alpha)-(\beta,\alpha)-(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)} \\ &= \sqrt{(\alpha-\beta,\alpha-\beta)} = \|\alpha-\beta\|\end{aligned}$$

充分性 取 $\beta=0$，于是有 $\|\mathscr{A}(\alpha)\| = \|\alpha\|$，即 $\mathscr{A}$ 保持 V 中的向量长度不变，所以 $\mathscr{A}$ 是正交变换．

例 3.12 (1) 设 $A\in C^{n\times n}$，则 $A\in U^{n\times n}$ 的充要条件是 A 的 n 个列(或者行)向量是标准的正交向量组．

(2) $U_1\in U_r^{n\times r}$ 的充要条件是 $U_1^{\mathrm{H}}U_1=E$.

证明：(1) **必要性** 设

$$A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n],\ A^{\mathrm{H}}=\begin{bmatrix}\alpha_1^{\mathrm{H}}\\ \alpha_2^{\mathrm{H}}\\ \vdots\\ \alpha_n^{\mathrm{H}}\end{bmatrix}$$

由于 $A^{\mathrm{H}}A=E$，所以有

$$\begin{bmatrix}\alpha_1^H\\\alpha_2^H\\\vdots\\\alpha_n^H\end{bmatrix}[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=\begin{bmatrix}\alpha_1^H\alpha_1 & \alpha_1^H\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^H\alpha_n\\\alpha_2^H\alpha_1 & \alpha_2^H\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^H\alpha_n\\\vdots & \vdots & & \vdots\\\alpha_n^H\alpha_1 & \alpha_n^H\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^H\alpha_n\end{bmatrix}=E$$

于是可得

$$\begin{cases}\alpha_i^H\alpha_j=0,\ i\neq j\\\alpha_i^H\alpha_j=1,\ i=j\end{cases}$$

这表明矩阵 A 的 n 个列向量是一个标准的正交向量组．同样可以证明 A 的 n 个行向量也是一个标准的正交向量组．

充分性 设矩阵 A 的 n 个列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一个标准的正交向量组，那么有

$$\begin{cases}\alpha_i^H\alpha_j=0,\ i\neq j\\\alpha_i^H\alpha_j=1,\ i=j\end{cases}$$

从而可知

$$\begin{bmatrix}\alpha_1^H\\\alpha_2^H\\\vdots\\\alpha_n^H\end{bmatrix}[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=\begin{bmatrix}\alpha_1^H\alpha_1 & \alpha_1^H\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^H\alpha_n\\\alpha_2^H\alpha_1 & \alpha_2^H\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^H\alpha_n\\\vdots & \vdots & & \vdots\\\alpha_n^H\alpha_1 & \alpha_n^H\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^H\alpha_n\end{bmatrix}=E$$

此即 $A^HA=E$，进一步也有 $AA^H=E$，这表明 A 为一个酉矩阵．类似地可以证明行的情况．

(2) **必要性** 设矩阵 U_1 的 r 个列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是一个标准的正交向量组，那么有

$$\begin{cases}\alpha_i^H\alpha_j=0,\ i\neq j\\\alpha_i^H\alpha_j=1,\ i=j\end{cases}$$

由此可得

$$U_1^HU_1=\begin{bmatrix}\alpha_1^H\\\alpha_2^H\\\vdots\\\alpha_r^H\end{bmatrix}[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r]$$

$$=\begin{bmatrix}\alpha_1^H\alpha_1 & \alpha_1^H\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^H\alpha_r\\ \alpha_2^H\alpha_1 & \alpha_2^H\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^H\alpha_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_r^H\alpha_1 & \alpha_n^H\alpha_2 & \cdots & \alpha_r^H\alpha_r\end{bmatrix}=E_r$$

充分性 设

$$U_1=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r],\ U_1^H=\begin{bmatrix}\alpha_1^H\\ \alpha_2^H\\ \vdots\\ \alpha_r^H\end{bmatrix}$$

由于 $U_1^HU_1=E_r$,所以有

$$\begin{bmatrix}\alpha_1^H\\ \alpha_2^H\\ \vdots\\ \alpha_r^H\end{bmatrix}[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r]=\begin{bmatrix}\alpha_1^H\alpha_1 & \alpha_1^H\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^H\alpha_r\\ \alpha_2^H\alpha_1 & \alpha_2^H\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^H\alpha_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_r^H\alpha_1 & \alpha_n^H\alpha_2 & \cdots & \alpha_r^H\alpha_r\end{bmatrix}=E_r$$

于是可得

$$\begin{cases}\alpha_i^H\alpha_j=0,\ i\neq j\\ \alpha_i^H\alpha_j=1,\ i=j\end{cases}$$

这表明矩阵 U_1 的 r 个列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是一个标准正交向量组.

例 3.13 已知

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 8\\ 3 & -1 & 6\\ -2 & 0 & -5\end{bmatrix}$$

试求酉矩阵 U,使得 U^HAU 是上三角矩阵.

解:首先求出其特征多项式 $|\lambda E-A|=(\lambda+1)^3$.

当 $\lambda=-1$ 时,求出属于特征值 -1 的一个单位特征向量,

$$\eta_1=\left[-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right]^T$$

解与 η_1 内积为零的方程

$$-2x_1+x_2+x_3=0$$

求得一个单位解向量

$$\eta_2=\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]^T$$

解与 η_1,η_2 内积为零的方程

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$$

又求得其一个单位解向量

$$\eta_3=\left[0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^T$$

于是取

$$U_1=\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

经过计算可得

$$U_1^HAU_1=\begin{bmatrix}-1 & -\frac{7\sqrt{2}}{2} & -\frac{7\sqrt{3}}{3}\\ 0 & 4 & \frac{5\sqrt{6}}{3}\\ 0 & -\frac{5\sqrt{6}}{2} & -6\end{bmatrix}$$

记

$$A_1=\begin{bmatrix}4 & \frac{5\sqrt{6}}{3}\\ -\frac{5\sqrt{6}}{2} & -6\end{bmatrix}$$

可得

$$|\lambda E - A_1| = (\lambda + 1)^2$$

对于 $\lambda=-1$ 时,求得一个单位特征向量

$$Y_1 = \left[-\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right]^T$$

再求得一个与 Y_1 正交的向量 Y_2

$$Y_2 = \left[\frac{\sqrt{15}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{5}\right]^T$$

令

$$V_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{5} & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ \frac{\sqrt{15}}{5} & \frac{\sqrt{10}}{5} \end{bmatrix}$$

经计算可得

$$V_1^H A_1 V_1 = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{25\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

令

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{10}}{5} & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{5} & \frac{\sqrt{10}}{5} \end{bmatrix}$$

记

$$U = U_1U_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{30}}{6} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{30}}{30} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

则

$$U^{H}AU=\begin{bmatrix}-1 & \frac{\sqrt{30}}{15} & -\frac{7\sqrt{15}}{20}\\ 0 & -1 & -\frac{25\sqrt{6}}{6}\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

评注：此题的求解过程即为 Schur 引理的证明过程，计算量较大而且由求解过程可知这里的 U 不唯一．

例 3.14 设 A，B 均为 n 阶正规矩阵，试证：A 与 B 相似的充要条件是 A 与 B 酉相似．

证明：必要性 由于 A 与 B 均为正规矩阵，所以分别存在正规矩阵 U_1，U_2，使得

$$U_1^{H}AU_1=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$$U_2^{H}BU_2=\begin{bmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 为 A 的特征值．$\mu_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 为 B 的特征值．又 A 与 B 相似，于是有 $\lambda_i=\mu_i$，$U_1^{H}AU_1=U_2^{H}BU_2$，此即 $(U_1U_2^{-1})^{H}AU_1U_2^{-1}=B$，这表明 A 与 B 相似．

充分性 显然．

例 3.15 设 A 为 n 阶正规矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值，试证：$A^{H}A$ 特征值为 $|\lambda_1|^2,|\lambda_2|^2,\cdots,|\lambda_n|^2$.

证明：由正规矩阵结构定理(即教材定理 3.6.3)可知，存在酉矩阵 U 使得

$$U^{H}AU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

于是

$$A=U\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)U^{H}$$

$$A^{H}=U\text{diag}(\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2,\cdots,\bar{\lambda}_n)U^{H}$$

这样有

$$\begin{aligned}A^{H}A&=U\text{diag}(\bar{\lambda}_1\lambda_1,\bar{\lambda}_2\lambda_2,\cdots,\bar{\lambda}_n\lambda_n)U^{H}\\&=U\text{diag}(|\lambda_1|^2,|\lambda_2|^2,\cdots,|\lambda_n|^2)U^{H}\end{aligned}$$

由于相似矩阵有相同的特征值，所以 $A^{H}A$ 特征值为 $|\lambda_1|^2,|\lambda_2|^2,$ $\cdots,|\lambda_n|^2$.

例 3.16 已知 A 为实矩阵，且有 $A^{T}A=AA^{T}$，证明：A 必为对称矩阵．

证明：由 $A^{T}A=AA^{T}$ 可知，A 为正规矩阵，那么存在酉矩阵 U 使得

$$U^{H}AU=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix},\ U^{H}A^{H}U=\begin{bmatrix}\bar{\lambda}_1&&\\&\ddots&\\&&\bar{\lambda}_n\end{bmatrix}$$

从而有

$$U^{H}A^{T}AU=\begin{bmatrix}|\lambda_1|^2&&\\&\ddots&\\&&|\lambda_n|^2\end{bmatrix}$$

又 $A^{T}A$ 为实矩阵，由上式可知其特征值也为实数，从而矩阵 U 是一个正交矩阵，即 $U^{H}=U^{T}=U^{-1}$. 从而有

$$U^{-1}AU=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 一定为实数．同样也有

$$U^{-1}A^{T}U=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}$$

由此可得 $A^{T}=A$，即 A 为实对称矩阵．

例 3.17 设 A,B 均为正规矩阵，且有 $AB=BA$，证明：

(1) A,B 至少有一个公共的特征向量；

(2) A,B 可同时酉相似于上三角矩阵．即存在酉矩阵 W，使得 W^HAW 以及 W^HBW 均为上三角阵；

(3) A,B 可同时酉相似于对角矩阵；

(4) AB 与 BA 均为正规矩阵．

证明：(1) 设 V_λ 是矩阵 A 的属于特征值 λ 的特征子空间．若 $\alpha\in V_\lambda$，即 $A\alpha=\lambda\alpha$，则 $BA\alpha=\lambda B\alpha$，由于 $AB=BA$，所以有 $A(B\alpha)=\lambda(B\alpha)$，这表明 $B\alpha\in V_\lambda$，从而 V_λ 是 B 的不变子空间，故在 V_λ 中存在 B 的特征向量 β，它也是 A 的特征向量．

(2) 对 A,B 的阶数用归纳法证明．当 A,B 的阶数均为 1 时，结论显然成立．设单位向量 α_1 是 A,B 的一个公共特征向量，再适当选取 $n-1$ 个单位向量 $\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，使得 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 为标准正交基，于是 $U=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$ 为酉矩阵，且有

$$B\alpha_1 = b\alpha_1, BU = [b\alpha_1, B\alpha_2,\cdots,B\alpha_n]$$

进一步可得 $U^HBU=\begin{bmatrix} b & \beta \\ 0 & B_1\end{bmatrix}=B$，这里 β 是 $1\times(n-1)$ 矩阵，B_1 是一个 $n-1$ 阶矩阵．另外也有 $U^HAU=\begin{bmatrix} a & \eta \\ 0 & A_1\end{bmatrix}=A$，这里 η 是 $1\times(n-1)$ 矩阵，A_1 是一个 $n-1$ 阶矩阵．

由 $AB=BA$ 又有 $(UAU^H)\cdot(UBU^H)=(UBU^H)\cdot(UAU^H)$，于是可得 $AB=BA$. 由此可推得 $A_1B_1=B_1A_1$. 故由归纳法假设，存在 $n-1$ 阶酉矩阵 V_1，使得 $V_1^HB_1V_1=\Delta$，这里 Δ 为一个上三角矩阵，记 $V=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1\end{bmatrix}$，$W=UV$，于是有

$$\begin{aligned} W^HBW &= V^H(U^HBU)V \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1^H\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & \beta \\ 0 & B_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & \beta V_1 \\ 0 & \Delta\end{bmatrix},\end{aligned}$$

显然 W^HBW 是一个上三角矩阵．容易验证 W 是酉矩阵．同样可得，W^HAW 也是一个上三角矩阵．

(3) 由(2)可设 $W^HAW=R$，这里 R 是一个上三角矩阵，那么 $W^HA^HW=R^H$，从而可得 $AA^H=WRW^H\cdot WR^HW^H=W(RR^H)W^H$.

$$AA^H = WRW^H \cdot WR^HW^H = W(RR^H)W^H$$
$$A^HA = WR^HW^H \cdot WRW^H = W(R^HR)W^H$$
又 $AA^H=A^HA$，所以可得 $RR^H=R^HR$，从而知 R 为一个对角矩阵．同样可证 W^HBW 也是一个对角矩阵．

(4) 由(3)可设

$$W^HAW = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}, \ W^HBW = \begin{bmatrix} u_1 & & \\ & \ddots & \\ & & u_n \end{bmatrix},$$

于是有

$$W^HABW = \begin{bmatrix} \lambda_1 u_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n u_n \end{bmatrix}$$

由正规矩阵结构定理(即教材定理 3.6.3)可知 AB 为正规矩阵，那么 BA 也为正规矩阵．

评注：教材中已给出一种证明方法，但是与这里的证明方法完全不同，这里主要运用 Schur 引理的证明思想．

例 3.18 已知下列正规矩阵，求酉矩阵 U，使得 U^HAU 为对角矩阵．

(1) $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & i \\ 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}$，(2) $A=\begin{bmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 0 \end{bmatrix}$，

(3) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

解：(1) $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & i \\ 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}$

首先求出矩阵 A 的特征多项式为 $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda^2+2)$，所以 A 的特征值为 $\lambda_1=\sqrt{2}i$，$\lambda_2=-\sqrt{2}i$，$\lambda_3=0$.

对于特征值 $\sqrt{2}i$，求得一个特征向量 $X_1=[\sqrt{2},-i,1]^T$.

对于特征值$-\sqrt{2}\,i$,求得一个特征向量 $X_2=[-\sqrt{2},-i,1]^T$.

对于特征值 0,求得一个特征向量 $X_3=[0,i,1]^T$.

由于 A 为正规矩阵．所以 X_1,X_2,X_3 是彼此正交的,只需分别将 X_1,X_2,X_3 单位化即可

$$\alpha_1=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{i}{2},\frac{1}{2}\right]^T,\ \alpha_2=\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{i}{2},\frac{1}{2}\right]^T,$$

$$\alpha_3=\left[0,\frac{\sqrt{2}\,i}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^T$$

于是取

$$U=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ -\frac{i}{2} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2}i\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

而且有

$$U^HAU=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\,i & 0 & 0\\ 0 & -\sqrt{2}\,i & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

(2) $A=\begin{bmatrix}4+3i & 4i & -6-2i\\ -4i & 4-3i & -2-6i\\ 6+2i & -2-6i & 0\end{bmatrix}$

解：首先求出矩阵 A 的特征多项式为 $|\lambda E-A|=(\lambda^2+81)(\lambda-9)$,所以 A 的特征值为 $\lambda_1=-9i,\lambda_2=9i,\lambda_3=9$.

对于特征值 $-9i$,求得一个特征向量 $X_1=\left[-\frac{i}{2},1,1\right]^T$.

对于特征值 $9i$,求得一个特征向量 $X_2=\left[i,-\frac{1}{2},1\right]^T$.

对于特征值 9,求得一个特征向量 $X_3=\left[i,1,-\frac{1}{2}\right]^T$.

由于 A 为正规矩阵．所以 X_1,X_2,X_3 是彼此正交的，只需分别将 X_1,X_2,X_3 单位化即可

$$\alpha_1=\left[-\frac{i}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]^T,\ \alpha_2=\left[\frac{2i}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]^T,$$

$$\alpha_3=\left[\frac{2i}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right]^T$$

于是取

$$U=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}-\frac{i}{3} & \frac{2i}{3} & \frac{2i}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

从而有

$$U^HAU=\begin{bmatrix}-9i & 0 & 0\\ 0 & 9i & 0\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}$$

(3) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

解：首先求出矩阵 A 的特征多项式为 $|\lambda E-A|=\lambda^2-2\lambda+2$，所以 A 的特征值为 $\lambda_1=1+i$，$\lambda_2=1-i$.

对于特征值 $1+i$，求得一个特征向量 $X_1=[i,1]^T$.

对于特征值 $1-i$，求得一个特征向量 $X_2=[-i,1]^T$.

由于 A 为正规矩阵．所以 X_1,X_2 是彼此正交的，只需分别将 X_1,X_2 单位化即可

$$\alpha_1=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]^T,\ \alpha_2=\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]^T$$

于是取

$$U=[\alpha_1,\alpha_2]=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}i & -\frac{\sqrt{2}}{2}i\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

从而有

$$U^{H}AU=\begin{bmatrix}1+i & 0\\ 0 & 1-i\end{bmatrix}$$

评注：这三个题目只需按照教材介绍的正规矩阵可对角化具体过程进行即可．

例 3.19 试举例说明：可对角化矩阵不一定可酉对角化．

解：设 X,Y 是两个线性无关但不正交的向量，记 $P=[X,Y]$

取

$$D=\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix},\ a\neq b$$

那么

$$A=PDP^{-1}$$

就是一个可对角化矩阵，但不是可酉对角化矩阵．

例 3.20 证明：

(1) Hermite 矩阵的特征值为实数；

(2) 反 Hermite 矩阵的特征值为纯虚数实数；

(3) 酉矩阵特征值的模长为 1.

证明：方法一 利用正规矩阵的结构定理证明（即教材定理 3.6.4）.

方法二 利用特征值与特征向量的定义证明．

(1) 设 A 为一个 Hermite 矩阵，λ 是 A 的一个特征值，X 为对应于特征值 λ 的一个特征向量，即有 $AX=\lambda X$，在此式两端取共轭转置可得

$$X^{H}A^{H}=\bar{\lambda}X^{H}$$

$$X^{H}A=\bar{\lambda}X^{H}$$

用 X 从右端乘上式两端有

$$X^{H}AX=\bar{\lambda}X^{H}X$$

于是有

$$\lambda X^{H}X=\lambda X^{H}X$$

由于 $X\neq0$，所以 $X^HX\neq0$，从而有 $\lambda=\bar{\lambda}$，这表明 λ 是实数．

(2) 设 A 为一个反 Hermite 矩阵，λ 是 A 的一个特征值，X 为对应于特征值 λ 的一个特征向量，即有 $AX=\lambda X$，在此式两端取共轭转置可得

$$X^HA^H=\bar{\lambda}X^H$$

$$-X^HA=\bar{\lambda}X^H$$

用 X 从右端乘上式两端有

$$-X^HAX=\bar{\lambda}X^HX$$

于是有

$$-\lambda X^HX=\bar{\lambda}X^HX$$

由于 $X\neq0$，所以 $X^HX\neq0$，从而有 $-\lambda=\bar{\lambda}$，这表明 λ 为零或纯虚数．

(3) 设 A 为一个酉矩阵，λ 是 A 的一个特征值，X 为对应于特征值 λ 的一个特征向量，即有 $AX=\lambda X$，在此式两端取共轭转置可得

$$X^HA^H=\bar{\lambda}X^H$$

用 AX 从右端乘上式两端有

$$X^HEX=\bar{\lambda}\lambda X^HX$$

于是有

$$(1-\bar{\lambda}\lambda)X^HX=0$$

由于 $X\neq0$，所以 $X^HX\neq0$，从而有 $\bar{\lambda}\lambda=1$，这表明 λ 的模长为 1.

例 3.21 求正交矩阵 Q，使 Q^TAQ 为对角矩阵，已知

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\1&1&-1&0\\0&-1&1&1\\-1&0&1&1\end{bmatrix}$$

解：首先求出矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-3)(\lambda+1)$.

当 $\lambda=3$ 时，求得矩阵 A 的属于特征值 $\lambda=3$ 的单位特征向量

为 $\boldsymbol{\xi}_1=\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda=-1$ 时，求得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=-1$ 的单位特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda=1$ 时，求得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=1$ 的单位特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_4=\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^{\mathrm{T}}$.

取

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

于是有

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例 3.22 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为 Hermite 矩阵，试证：$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 酉相似的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值相同.

证明：必要性 由于相似矩阵有相同的特征值，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值相同.

充分性 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为 Hermite 矩阵．所以分别存在酉矩阵 $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$ 使得

$$U_1^{\mathrm{H}}AU_1 = \begin{bmatrix} \delta_1 & & & \\ & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta_n \end{bmatrix}$$

$$U_2^{\mathrm{H}}BU_2 = \begin{bmatrix} \eta_1 & & & \\ & \eta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \eta_n \end{bmatrix}$$

其中 $\delta_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 A 的特征值，$\eta_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 B 的特征值．又 $\delta_i=\eta_i$．从而 $U_1^{\mathrm{H}}AU_1=U_2^{\mathrm{H}}BU_2$，此即 $(U_1U_2^{-1})^{\mathrm{H}}A(U_1U_2^{-1})=B$，这表明 A 与 B 酉相似．

例 3.23 设 A 是 Hermite 矩阵，且 $A^2=A$，则存在酉矩阵 U，使得

$$U^{\mathrm{H}}AU = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

证明：由于 A 为 Hermite 矩阵．所以存在酉矩阵

$$U^{\mathrm{H}}AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 A 的特征值，又 A 为幂等矩阵，于是 $\lambda_i=0$ 或 1. 不妨设 A 的秩为 r，那么 λ_i 中有 r 个 1，$n-r$ 个 0.

记 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_r=1,\lambda_{r+1}=\lambda_{r+2}=\cdots=\lambda_{n-r}=0$. 即

$$U^{\mathrm{H}}AU = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

例 3.24 设 A 为正定 Hermite 矩阵，B 为反 Hermite 矩阵，试证：AB 与 BA 的特征值实部为零．

证明：设 λ 为 AB 的任意一个特征值，于是有 $|\lambda E-AB|=0$，

由于 A 为正定的 Hermite 矩阵，所以存在可逆矩阵 Q，使得 $A=Q^HQ$，将此式代入 $|\lambda E-AB|=0$ 中可得

$$0=|\lambda E-Q^HQB|=|\lambda Q^H(Q^H)^{-1}-Q^HQB|$$
$$=|Q^H||\lambda E-QBQ^H||(Q^H)^{-1}|$$

从而有 $|\lambda E-QBQ^H|=0$，这表明 λ 也是 QBQ^H 的特征值．注意到 QBQ^H 是一个反 Hermite 矩阵，而反 Hermite 矩阵的特征值为零或纯虚数，所以 λ 为零或纯虚数．同样也可以证明 BA 的特征值实部为零．

例 3.25 设 A 是半正定 Hermite 矩阵，$A\neq 0$，试证：$|A+E|>1$.

证明：由于 A 是一个半正定的 Hermite 矩阵，所以 A 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 均为非负实数，又 $A\neq 0$，于是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 不能全为零，那么 $A+E$ 的特征值为 $\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1$ 都是大于等于 1 的数，且至少有一个大于 1，故

$$|A+E|=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)>1$$

例 3.26 设 A 是半正定 Hermite 矩阵，$A\neq 0$，B 是正定 Hermite 矩阵，试证：$|A+B|>|B|$.

证明：因为 B 为正定的 Hermite 矩阵，所以存在可逆矩阵 Q，使得 $B=Q^HQ$，于是

$$|A+B|=|A+Q^HQ|=|Q^H||(Q^H)^{-1}AQ^{-1}+E||Q|$$
$$=|B||(Q^{-1})^HAQ^{-1}+E|=|B||(Q^{-1})^HAQ^{-1}+E|$$

由 A 是一个半正定的 Hermite 矩阵，可知 $(Q^{-1})^HAQ^{-1}$ 也是一个半正定的 Hermite 矩阵．由上题，$|(Q^{-1})^HAQ^{-1}+E|>1$，故 $|A+B|>|B|$.

例 3.27 设 A 是正定 Hermite 矩阵，B 是反 Hermite 矩阵，试证：$A+B$ 为可逆矩阵．

证明：由于 A 是一个正定的 Hermite 矩阵，所以 A 可逆，于是

$$|A+B|=|A+AA^{-1}B|=|A||E+A^{-1}B|$$

其中 $|A|\neq 0$. 又 A^{-1} 也是正定的 Hermite 矩阵，B 是反 Hermite 矩

阵．由例 3.24 结论，可知 $A^{-1}B$ 的特征值实部为 0，于是 $E+A^{-1}B$ 的特征值皆不为零，所以

$$|E+A^{-1}B|\neq 0,$$

进而 $|A+B|\neq 0$，这表明 $A+B$ 是可逆矩阵．

例 3.28 设 A,B 为两个正定矩阵，证明：

$$|A|+|B|\leqslant|A+B|$$

证明：由 Hermite 矩阵偶在复相合下的标准形定理(教材定理 3.10.1)可知，存在可逆矩阵 P，使

$$P^{T}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix},\ P^{T}BP=\begin{bmatrix}u_1 & & \\ & \ddots & \\ & & u_n\end{bmatrix}$$

这里 $\lambda_i>0$，$u_i>0(i=1,\cdots,n)$．将上面的两个矩阵等式分别取行列式可得 $|P|^2\cdot|A|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdots\lambda_n$，$|P|^2\cdot|B|=u_1\cdot u_2\cdots u_n$.

再将矩阵等式

$$P^{T}(A+B)P=P^{T}AP+P^{T}BP=\begin{bmatrix}\lambda_1+u_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n+u_n\end{bmatrix}$$

也取行列式可得

$$|P|^2\cdot|A+B|=(\lambda_1+u_1)(\lambda_2+u_2)\cdots(\lambda_n+u_n)$$

又由

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n+u_1u_2\cdots u_n\leqslant(\lambda_1+u_1)(\lambda_2+u_2)\cdots(\lambda_n+u_n)$$

可知

$$|P|^2(|A|+|B|)\leqslant|P|^2|A+B|,$$

但 $|P|^2>0$，故

$$|A|+|B|\leqslant|A+B|.$$

三、习　题

3－1　已知 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶正定 Hermite 矩阵，在 n 维线性空间 C^n 中，向量 $\alpha=[x_1,x_2,\cdots,x_n]$，$\beta=[y_1,y_2,\cdots,y_n]$，定义内积、

$(\alpha,\beta)=\alpha A\beta^{H}$.

(1) 证明在上述定义下,C^n 是酉空间;

(2) 写出 C^n 中的 Cauchy - Schwarz 不等式.

3－2　已知 $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$,求 $N(A)$的标准正交基.

3－3　已知

(1) $A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 8\\ 3 & -1 & 6\\ -2 & 0 & -5\end{bmatrix}$　(2) $A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}$

试求酉矩阵 U,使得 $U^{H}AU$ 是上三角矩阵.

3－4　试证:在 C^n 上的任何一个正交投影矩阵 P 是半正定的 Hermite 矩阵.

3－5　验证下列矩阵是正规矩阵,并求酉矩阵 U,使得 $U^{H}AU$ 为对角矩阵,已知

(1) $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{6} & \frac{i}{2\sqrt{3}}\\ \frac{i}{\sqrt{6}} & -\frac{i}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$,

(2) $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & i\\ 1 & 0 & 0\\ i & 0 & 0\end{bmatrix}$,

(3) $A=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}4+3i & 4i & -6-2i\\ -4i & 4-3i & -2-6i\\ 6+2i & -2-6i & 0\end{bmatrix}$,

(4) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

3－6　求正交矩阵 Q，使 $Q^{T}AQ$ 为对角矩阵，已知

(1) $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$　(2) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3－7　试求矩阵 P，使得 $P^{H}AP=E$（或 $P^{T}AP=E$），已知

(1) $A=\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 0 & 1 \\ 1-i & 1 & 2 \end{bmatrix}$，　(2) $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

3－8　设 n 阶酉矩阵 U 的特征根不等于－1．试证：矩阵 $E+U$ 满秩．$W=i(E-U)(E+U)^{-1}$ 是 Hermite 矩阵．反之，若 W 是 Hermite 矩阵，则 $E-iW$ 满秩，且 $V=(E+iW)(E-iW)^{-1}$ 是酉矩阵．

3－9　若 S,T 分别是实对称和反实对称矩阵，且 $\det(E-T-iS)\neq 0$，试证：$(E+T+iS)(E-T-iS)^{-1}$ 是酉矩阵．

3－10　设 A,B 均是实对称矩阵，试证：A 与 B 正交相似的充要条件是 A 与 B 的特征值相同．

3－11　设 A,B 均是 Hremite 矩阵，试证：A 与 B 酉相似的充要条件是 A 与 B 的特征值相同．

3－12　设 A,B 均是正规矩阵，试证：A 与 B 酉相似的充要条件是 A 与 B 的特征值相同．

3－13　设 A 是 Hermite 矩阵，且 $A^2=A$，则存在酉矩阵 U，使得

$$U^{H}AU=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3－14　设 A 是 Hermite 矩阵，且 $A^2=E$，则存在酉矩阵 U，使得

$$U^{H}AU=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_{n-r} \end{bmatrix}$$

3－15　设 $\boldsymbol{A}$ 为正定 Hermite 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为反 Hermite 矩阵，试证：$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 的特征值实部为 0.

3－16　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 Hermite 矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 正定，试证：$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 的特征值都是实数.

3－17　设 $\boldsymbol{A}$ 是半正定 Hermite 矩阵，且 $\boldsymbol{A}\neq 0$，试证：$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|>1$.

3－18　设 $\boldsymbol{A}$ 是半正定 Hermite 矩阵，$\boldsymbol{A}\neq 0$，$\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵 Hermite，试证：$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|>|\boldsymbol{B}|$.

3－19　设 $\boldsymbol{A}$ 是正定 Hermite 矩阵，且 $\boldsymbol{A}\in U^{n\times n}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.

3－20　试证：(1) 两个半正定 Hermite 矩阵之和是半正定的；(2) 半正定 Hermite 矩阵与正定 Hermite 矩阵之和是正定的.

3－21　设 $\boldsymbol{A}$ 是正定 Hermite 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是反 Hermite 矩阵，试证：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵.

3－22　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶正规矩阵，试证：$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 酉相似.

3－23　设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}$，试证：总存在 $t>0$，使得 $\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{E}$ 是正定 Hermite 矩阵，$\boldsymbol{A}-t\boldsymbol{E}$ 是负定 Hermite 矩阵.

3－24　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为正规矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 均为正规矩阵.

3－25　设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=-\boldsymbol{A}$，试证：$\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$是酉矩阵.

3－26　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正规矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，试证：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 特征值为 $|\lambda_1|^2,|\lambda_2|^2,\cdots,|\lambda_n|^2$.

3－27　设 $\boldsymbol{A}\in C^{m\times n}$，试证：(1) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}}$ 都是半正定的 Hermite 矩阵；(2) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}}$ 的非零特征值相同.

3－28　设 $\boldsymbol{A}$ 是正规矩阵，试证：(1) 若 $\boldsymbol{A}^r=0$(r 是自然数)，则 $\boldsymbol{A}=0$；(2) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}$；(3) 若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2$，则 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$.

3－29　设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}=-\boldsymbol{B}$，证明以下三个条件等价：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为正规矩阵；(2) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$；(3) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{H}}=-\boldsymbol{AB}$.

3－30　设 $\boldsymbol{A}\in C^{n\times n}$，那么 $\boldsymbol{A}$ 可以唯一的写成 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}+\mathrm{i}\boldsymbol{T}$，其中

S,T 为 Hermite 矩阵，且 A 可以唯一的写成 $A=B+C$，其中 B 是 Hermite 矩阵，C 是反 Hermite 矩阵．

四、自测题

3.1　已知 $\alpha_1=[1,1]^T,\alpha_2=[1,-1]^T$ 与 $\beta_1=[0,2]^T,\beta_2=[6,12]^T$ 为二维向量空间 R^2 中的两个基，在 R^2 中定义内积如下

$$(\alpha_1,\beta_1)=1,\ (\alpha_1,\beta_2)=15$$

$$(\alpha_2,\beta_1)=-1,\ (\alpha_2,\beta_2)=3$$

(1) 求基 α_1,α_2 的度量矩阵 A；

(2) 求基 β_1,β_2 的度量矩阵 B.

3.2　(1) 设 A 是一个 n 阶实矩阵，如果只要求 A 的列向量构成正交向量组，问 A^TA 有何特点？此时，能否找到方阵 B 使得 $Q=AB$ 为正交矩阵．

(2) 设 C 为一个 $m\times n(m\neq n)$ 实矩阵且其列向量组标准正交，求 C^TC.

(3) 解矩阵方程 $AX=X+B$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1-a & -b & c & d\\ b & 1-a & -d & c\\ -c & d & 1-a & b\\ d & c & b & 1+a\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

a,b,c,d 是不全为零的实数．

3.3　设 $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ 是一个行列式为 1 的三阶正交矩阵，试证

$$\begin{cases}a_{11}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\\ a_{21}=a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}\\ a_{31}=a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}\end{cases}$$

3.4　设 A 为实反对称矩阵，

(1) 证明：$B=(E-A)(E+A)^{-1}$ 是正交矩阵．

(2) 如果 Q 为正交矩阵且 $E+Q$ 可逆，那么存在实反对称矩阵 A，使得

$$Q=(E-A)(E+A)^{-1}$$

3.5　设 A 是欧氏空间 V 到其本身的一个变换，且满足

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})) = (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}).\qquad \forall\, \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$$

问 $\mathscr{A}$ 是否必为正交变换？

3.6　设 $\mathscr{A}$ 为 n 维欧氏空间 R^n 到其本身的一个映射，其定义如下

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha} - k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\alpha}\in R^n$$

其中 $\boldsymbol{\beta}$ 是 R^n 中一个单位向量，求 k 取何值时，$\mathscr{A}$ 是正交变换？

3.7　已知

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

试求酉矩阵 $\boldsymbol{U}$ 使得 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$ 为上三角矩阵．

3.8　已知 Hermite 矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

试求一个酉矩阵 $\boldsymbol{U}$，使得 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$ 为对角矩阵．

3.9　设实对称矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix}$$

求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵，并计算 $|\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}|$ 的值．

3.10　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为正规矩阵，那么 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 当且仅当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可同时酉相似于对角矩阵．

3.11　设 $\boldsymbol{A}\in C^{m\times n}$，试证：

(1) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 都是半正定的 Hermite 矩阵．

(2) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 有相同的非零特征值．

3.12　(1) 证明：如果整数 a,b 均可以表示成四个整数的平方和，那么 ab 也可以表示成四个整数的平方和．

(2) 将 1457 表示成四个整数的平方和．

第四章　矩阵分解

一、基本要求

(1) 掌握矩阵满秩分解的定义以及具体分解方法，理解矩阵满秩分解表达式并不唯一．

(2) 掌握矩阵正交三角分解的定义以及具体分解方法，理解矩阵正交三角分解与 Schmidt 正交化、单位化方法之间的关系．

(3) 掌握矩阵奇异值分解的定义及其具体分解方法．

(4) 理解矩阵极分解的定义及其具体分解方法．

(5) 理解矩阵谱分解的含义，掌握单纯矩阵(可对角化矩阵)与正规矩阵谱分解方法．

二、典型例题

例 4.1　求矩阵 A 的满秩分解表达式

(1) $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & -4 & -4 & -19 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & -16 \end{bmatrix}$,

(2) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

解：(1) 对矩阵 A 只作初等行变换得到行简化阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是取

$$
B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

那么 $A=BC$，即为其满秩分解表达式．

（2）对矩阵 A 只作初等行变换得到行简化阶梯形矩阵

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

于是取

$$
B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

那么 $A=BC$，即为其满秩分解表达式．

评注：对此类问题有一种很普通的方法．设 A 为一个 $m\times n$ 形矩阵，其秩为 r，对 A 仅作初等行变换即可得到它的行简化阶梯形矩阵 J，假设主元所在的列为第 i_1 列，第 i_2 列，…，第 i_r 列，那么选取矩阵 A 中的第 i_1 列，第 i_2 列，…，第 i_r 列向量组成矩阵 B，B 是一个 $m\times r$ 形矩阵；然后将 J 中元素全为零的行去掉，剩下的行向量组成矩阵 C，C 是一个 $r\times n$ 形的矩阵．最后得到 $A=BC$，即为所求矩阵 A 的满秩分解表达式．另外，要注意矩阵满秩分解表达式并不唯一．

例 4.2 求下列矩阵的正交三角分解（UR）分解表达式

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

解：记 $\alpha_1=[0,1,1]^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=[1,0,1]^{\mathrm{T}}$．由 Schmidt 正交化方法可得

(1) $\boldsymbol{\beta}_1=[0,1,1]^{\mathrm{T}}$, $\|\boldsymbol{\beta}_1\|=\sqrt{2}$, $\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}[0,1,1]^{\mathrm{T}}$

(2) $(\eta_1,\alpha_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\boldsymbol{\beta}_2=\alpha_2-(\alpha_2,\eta_1)\eta_1=\left[1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right]^{\mathrm{T}}$, $\|\boldsymbol{\beta}_2\|=\frac{\sqrt{6}}{2}$, $\eta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}[2,1,-1]^{\mathrm{T}}$

(3) $(\eta_1,\alpha_3)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $(\eta_2,\alpha_3)=\frac{1}{6}$, $\boldsymbol{\beta}_3=\alpha_3-(\alpha_3,\eta_1)\eta_1-(\alpha_3,\eta_2)\eta_2=\left[\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]^{\mathrm{T}}$, $\|\boldsymbol{\beta}_3\|=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\eta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}[1,-1,1]^{\mathrm{T}}$

于是取

$$\boldsymbol{U}=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]=\begin{bmatrix}0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_1=\begin{bmatrix}\|\boldsymbol{\beta}_1\| & (\alpha_2,\eta_1) & (\alpha_3,\eta_1)\\ 0 & \|\boldsymbol{\beta}_2\| & (\alpha_3,\eta_1)\\ 0 & 0 & \|\boldsymbol{\beta}_3\|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

那么 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{UR}$ 即为所求表达式．

评注：对任意一个 n 阶满秩复矩阵，其正交三角分解过程如下．设 $A\in\mathbb{C}_n^{n\times n}$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为矩阵 A 的 n 个列向量，用 Schmidt 正交化过程将其正交化即可得到 n 个正交的向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，再将 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 单位化得到 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$，那么向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与向量组 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 之间的关系式为

$$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$$

$$= [\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n] \begin{bmatrix} \|\beta_1\| & (\alpha_2, \eta_1) & (\alpha_3, \eta_1) & \cdots & (\alpha_n, \eta_1) \\ 0 & \|\beta_2\| & (\alpha_3, \eta_2) & \cdots & (\alpha_n, \eta_2) \\ 0 & 0 & \|\beta_3\| & \cdots & (\alpha_n, \eta_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \|\beta_n\| \end{bmatrix}$$

此关系式也就是矩阵 A 的正交三角分解表达式(UR).

例 4.3 已知

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

求 A 的奇异值分解表达式.

解: 首先注意到矩阵 A 的秩为 2,并计算出矩阵 AA^H 及其特征值

$$AA^H = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

所以 AA^H 的特征值为 $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 3$,于是 A 的奇异值为 $\delta_1 = \sqrt{7}$, $\delta_2 = \sqrt{3}$. 然后计算出矩阵 AA^H 的分别属于特征值 λ_1, λ_2 的标准正交特征向量

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, 1]^T, \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[-1, 1]^T$$

记 $U = [\eta_1, \eta_2]$, $U_1 = U$. 现在计算

$$V_1 = A^H U_1 \Delta^{-H} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{7}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

取

$$V_2=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{21}}\\-\frac{1}{\sqrt{21}}\\-\frac{4}{\sqrt{21}}\end{bmatrix},V=[V_1,V_2]=\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{14}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{21}}\\\frac{2}{\sqrt{14}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{21}}\\\frac{1}{\sqrt{14}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{4}{\sqrt{21}}\end{bmatrix}$$

于是

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{7}&0&0\\0&\sqrt{3}&0\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{14}}&\frac{2}{\sqrt{14}}&\frac{1}{\sqrt{14}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{21}}&-\frac{1}{\sqrt{21}}&-\frac{4}{\sqrt{21}}\end{bmatrix}$$

或者

$$A=U_r\Delta V_r^{\mathrm{H}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{7}&0\\0&\sqrt{3}\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{14}}&\frac{2}{\sqrt{14}}&\frac{1}{\sqrt{14}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

评注：奇异值分解是矩阵分解这类问题中一种比较复杂的情况，任意一个矩阵的奇异值分解过程可分为以下几步进行．设 $A\in C_r^{m\times n},n>m$.

(1) 首先求出矩阵 AA^{H} 的 m 个特征值以及 r 个非零特征值，

将它们记为 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r > \lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \cdots = \lambda_m = 0$，从而求出矩阵 A 的 r 个奇异值 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_r$ 并得到一个 $m \times n$ 形矩阵 $\begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，这里 $\Delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_r)$.

(2) 求出矩阵 AA^H 的分别属于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r, 0, \cdots, 0$ 的标准正交特征向量 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$，于是得到矩阵 $U = [\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m] = [U_1, U_2]$，其中 U_1 是一个 $m \times r$ 形矩阵，U_2 是一个 $m \times (m-r)$ 形矩阵.

(3) 写出矩阵 $V_1 = A^H U_1 \Delta^{-H}$，它是一个 $n \times r$ 形的次酉矩阵，再构造 V_2，使得 $V = [V_1, V_2]$ 为一个 n 阶酉矩阵.

(4) 写出矩阵 A 的奇异值分解表达式 $A = U \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^H$.

例 4.4 已知

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

求 A 的奇异值分解表达式.

解：首先注意到矩阵 A 的秩为 2，并计算出矩阵 $A^H A$ 及其特征值

$$A^H A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

显然 $A^H A$ 的特征值为 $\mu_1 = 5, \mu_2 = 2$，于是 A 的奇异值为 $\delta_1 = \sqrt{5}$，$\delta_2 = \sqrt{2}$. 然后计算出矩阵 $A^H A$ 的分别属于特征值 μ_1, μ_2 的标准正交特征向量

$$Y_1 = [0, 1]^T, Y_2 = [1, 0]^T$$

记 $V = [Y_1, Y_2]$，$V_1 = V$. 现在计算

$$U_1 = AV_1\Delta^{-1} = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

取

$$U_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

$$U = [U_1, U_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

于是

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{5} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{H}$$

或者

$$A=U_r\Delta V_r^H=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & 0\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{5} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{H}$$

评注：此矩阵的形状与上题中矩阵的形状不同，这种矩阵的奇异值分解过程如下．设 $A\in C_r^{m\times n}$，$m>n$.

(1) 首先求出矩阵 A^HA 的 n 个特征值以及 r 个非零特征值，将它们记为 $\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_r>\mu_{r+1}=\mu_{r+2}=\cdots=\mu_n=0$，从而求出矩阵 A 的 r 个奇异值 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_r$ 并得到一个 $m\times n$ 形矩阵 $\begin{bmatrix}\Delta & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，这里 $\Delta=\mathrm{diag}(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_r)$.

(2) 求出矩阵 A^HA 的分别属于特征值 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r,0,\cdots,0$ 的标准正交特征向量 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$，于是得到矩阵 $V=[\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n]=[V_1,V_2]$，其中 V_1 是一个 $n\times r$ 形矩阵，V_2 是一个 $n\times(n-r)$ 形矩阵．

(3) 写出矩阵 $U_1=AV_1\Delta^{-1}$，它是一个 $m\times r$ 形的次酉矩阵，再

构造 U_2，使得 $U=[U_1,U_2]$ 为一个 m 阶酉矩阵．

(4) 写出矩阵 A 的奇异值分解表达式 $A=U\begin{bmatrix}\Delta & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^{H}$.

例 4.5 已知 $A\in C_r^{m\times n}(r>0)$ 的奇异值分解表达式为

$$A=U\begin{bmatrix}\Delta & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^{H}$$

试求矩阵 $B=\begin{bmatrix}A\\ A\end{bmatrix}$ 的奇异值分解表达式．

解：由 $A=U\begin{bmatrix}\Delta & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^{H}$，$\Delta=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r)$，其中 $\lambda_i(1\leqslant i\leqslant r)$ 均为 A 的奇异值，那么

$$BB^{H}=\begin{bmatrix}A\\ A\end{bmatrix}[A^{H}\quad A^{H}]=\begin{bmatrix}AA^{H} & AA^{H}\\ AA^{H} & AA^{H}\end{bmatrix}$$

于是取

$$\widetilde{U}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}U_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}U_1 & U_2 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}U_1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}U_1 & 0 & U_2\end{bmatrix},\widetilde{V}=V$$

那么

$$B=\widetilde{U}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\Delta & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\widetilde{V}^{H}$$

即为矩阵 $B=\begin{bmatrix}A\\ A\end{bmatrix}$ 的奇异值分解表达式．其中 $U=[U_1,U_2]$，U_1 为 U 的前 r 列向量组成的矩阵，U_2 为 U 的后 $n-r$ 列向量组成的矩阵.

例 4.6 设 $A=UDV^{H}$ 为矩阵 A 的一个奇异值分解．

(1) 证明：U 的列向量为 AA^{H} 的特征向量，称其为矩阵 A 的左奇异向量．

(2) 证明：V 的列向量为 AA^{H} 的特征向量，称其为矩阵 A 的

右奇异向量．

(3) 试举反例说明依据(1)和(2)中确定的酉矩阵 U 和 V 不一定是 A 的奇异值分解．

证明：(1) 由于 $A=UDV^H=U\begin{bmatrix}\Delta & 0\\0 & 0\end{bmatrix}V^H$，那么

$$AA^H=U\begin{bmatrix}\Delta & 0\\0 & 0\end{bmatrix}V^HV\begin{bmatrix}\Delta & 0\\0 & 0\end{bmatrix}U^H=U\begin{bmatrix}\Delta^2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}U^H$$

于是有

$$AA^HU=U\begin{bmatrix}\Delta^2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=U\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)$$

记 $U=[u_1,u_2,\cdots,u_m]$，那么

$$AA^Hu_i=\lambda_iu_i,(i=1,2,\cdots,m)$$

这表明 u_i 是 AA^H 的属于特征值 λ_i 的特征向量，当 $i>r$ 时，$\lambda_i=0$.

(2) 与(1)的证明方法完全类似．

(3) 在奇异值分解表达式中，虽然 U 的列向量是 AA^H 的特征向量，V 的列向量是 AA^H 的特征向量，而且 A^HA 与 AA^H 的非零特征值完全相同，但却不能以此为依据构造矩阵 A 的奇异值分解表达式．下面的反例就说明了这个问题．

设

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$$

首先计算出

$$A^HA=\begin{bmatrix}5 & 4\\4 & 5\end{bmatrix},AA^H=\begin{bmatrix}5 & 4 & 0\\4 & 5 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

显然 A^HA 的特征值为 9，1；AA^H 的特征值为 9，1，0.

现在求 A^HA 的特征向量，对于特征值 9，求得特征向量 $X_1=[1,1]^T$.

对于特征值 1,求得一个特征向量 $X_2=[-1,1]^T$. 然后将 X_1,X_2 单位化,得到

$$\eta_1=\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T,\eta_2=\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T$$

将 η_1,η_2 组成矩阵

$$V=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

再求 AA^H 的特征向量,对于特征值 9,求得特征向量 $X_1=[1,1,0]^T$;对于特征值 1,求得一个特征向量 $X_2=[-1,1,0]^T$;对于特征值 0,求得一个特征向量 $X_2=[0,0,1]^T$. 分别将其单位化,得到

$$Y_1=\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right]^T,$$

$$Y_2=\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right]^T,Y_3=[0,0,1]^T$$

将 Y_1,Y_2,Y_3 组成矩阵

$$U=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

但

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}$$

此即

$$A \neq U\begin{bmatrix}\Delta & 0\\0 & 0\end{bmatrix}V^{H}$$

***例 4.7** 设 $A,B\in C^{m\times n}$，如果存在 m 阶酉矩阵 U 和 n 阶酉矩阵 V，使得，$B=UAV$，那么称 A 与 B 酉相抵．证明：

(1) 酉相抵是一种等价关系；

(2) 若 A 与 B 酉相抵，则 A 与 B 有相同的奇异值．

证明：(1) 容易验证酉相抵的确满足反身性、对称性和传递性，因此酉相抵是一种等价关系．

(2) 因为 $B=UAV$，所以有

$$BB^{H}=UAVV^{H}A^{H}U^{H}=UAA^{H}U^{H}$$

这表明 AA^{H} 与 BB^{H} 酉相似，于是有相同的特征值，从而 A 与 B 有相同的奇异值．

例 4.8 设 $A\in C^{m\times n}$，U 和 V 分别为 m,n 阶酉矩阵，试证：UA 和 AV 的奇异值均与 A 的奇异值相同．

证明：设矩阵 $A^{H}A$ 的正特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$，矩阵 A 的 r 个奇异值为 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_r$，而且有

$$(UA)^{H}UA=A^{H}U^{H}UA=A^{H}A$$

于是 UA 的奇异值也为 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_r$．又

$$(AV)^{H}AV=V^{H}A^{H}AV$$

这表明矩阵 $(AV)^{H}AV$ 与 $A^{H}A$ 酉相似，从而其特征值相同，于是 AV 的奇异值也与 A 的奇异值相同．

例 4.9 设 A 是一个 n 阶正规矩阵，其所有非零的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$，试证：$A$ 的 r 个奇异值为 $\delta_i=|\lambda_i|\ (i=1,2,\cdots,r)$．

证明：因为 A 是一个 n 阶正规矩阵，由正规矩阵的结构定理(即教材定理 3.6.3)可知存在酉矩阵 U，使得

$$U^H AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

那么有

$$U^H A^H U = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \bar{\lambda}_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$U^H A^H AU = \begin{bmatrix} |\bar{\lambda}_1|^2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & |\bar{\lambda}_r|^2 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

由此可知矩阵 $A^H A$ 的正特征值为 $|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, \cdots, |\lambda_r|^2$，于是矩阵 A 的 r 个奇异值为 $\delta_1 = \sqrt{|\lambda_1|^2} = |\lambda_1|, \delta_2 = \sqrt{|\lambda_2|^2} = |\lambda_2|, \cdots, \delta_r = \sqrt{|\lambda_r|^2} = |\lambda_r|$.

例 4.10 已知 A 为一个 n 阶可逆矩阵，试证：A 的行列式值的模长是 A 的所有奇异值之积.

证明：因为 A 是一个 n 阶可逆矩阵，所以 $r(A^H A) = r(A) = n$，于是正定矩阵 $A^H A$ 有 n 个正的特征值，不妨设其为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，同时设 A 的 n 个奇异值为 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$，又

$$\det(A^HA)=\det(A^H)\det(A)=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

于是可得

$$|\det(A)|^2=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,\ |\det(A)|=\delta_1\delta_2\cdots\delta_n.$$

例 4.11 已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 3\end{bmatrix}$$

验证 A 是正规矩阵，并求 A 的谱分解表达式．

解：(1) 容易验证

$$AA^H=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & -5 & 1\\ -5 & 6 & -5\\ 1 & -5 & 10\end{bmatrix}$$

$$=A^HA$$

所以 A 是正规矩阵．

下面求矩阵 A 的谱分解

$$|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-4)$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=4$

当 $\lambda_1=1$ 时，其对应的单位特征向量为

$$\xi_1=\left[\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right]^T$$

当 $\lambda_2=3$ 时，其对应的单位特征向量为

$$\xi_2=\left[\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T$$

当 $\lambda_3=4$ 时，其对应的单位特征向量为

$$\xi_3=\left[\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right]^T$$

于是取

$$G_1 = \xi_1 \xi_1^H = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \xi_2 \xi_2^H = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$G_3 = \xi_3 \xi_3^H = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{G}_1+3\boldsymbol{G}_2+4\boldsymbol{G}_3$ 即为其谱分解表达式．

例 4.12 已知 3 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ x & 4 & y\\ -3 & -3 & 5\end{bmatrix}$$

的二重特征值 $\lambda=2$ 对应两个线性无关的特征向量．

(1) 求 x,y；

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵；

(3) 求 $\boldsymbol{A}$ 的谱分解表达式．

解：(1) 因为 $\lambda=2$ 对应两个线性无关的特征向量，所以线性方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0$ 的系数矩阵

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -x & -2 & -y\\ 3 & 3 & -3\end{bmatrix}$$

的秩应为 1，对矩阵 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 作初等行变换将其化为阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & x-2 & -x-y\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

由此可得 $x=2,y=-2$.

(2) 已经得到

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 5\end{bmatrix}$$

求得 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$，所以其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=6$.

对于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$，其对应的特征向量为 $\alpha_1=[1,-1,0]^T$，$\alpha_2=[1,0,1]^T$；对于特征值 $\lambda_3=6$，其对应的特征向量为 $\alpha_3=[1,-2,3]^T$. 于是

$$P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&0&-2\\0&1&3\end{bmatrix}$$

而且有

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{bmatrix}$$

(3) 首先求出

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{3}{4}&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix},\quad (P^{-1})^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

取

$$\beta_1=\left[\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right]^T$$

$$\beta_2=\left[\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right]^T$$

$$\beta_3=\left[-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]^T$$

令

$$G_1=\alpha_1\beta_1^T+\alpha_2\beta_2^T=\begin{bmatrix}\frac{5}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{3}{4}&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$G_2 = \alpha_3\beta_3^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

故 $A=2G_1+6G_2$ 记为矩阵 A 的谱分解表达式.

三、习　题

4－1　求矩阵 A 的满秩分解表达式

(1) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，(2) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$，

(3) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$，　(4) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 10 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 2 & 36 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 2 & 27 \\ 6 & 12 & 1 & 7 & 5 & 73 \end{bmatrix}$

4－2　已知

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

求 A 的奇异值分解表达式.

4－3　求矩阵

(1) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$，　(2) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

验证 A 与 B 是正规矩阵，并求 A 与 B 的谱分解表达式.

4－4　已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 4\\ \frac{1}{2} & 0 & 2\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

验证 A 是单纯矩阵，并求 A 的谱分解表达式．

四、自测题

4.1　求矩阵 A 的满秩分解表达式

$$(1)\ A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix};$$

$$(2)\ A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

4.2　设矩阵 A 的满秩分解为 $A=BC$，证明：

$$CX=0\Leftrightarrow AX=0$$

4.3　求下列矩阵的 UR 分解表达式

$$A=\begin{bmatrix}3 & 14 & 9\\ 6 & 43 & 3\\ 6 & 22 & 15\end{bmatrix}$$

4.4　已知

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

求 A 的奇异值分解表达式．

4.5　设 A 为一个 Hermite 矩阵，那么必存在酉矩阵 U，使得

$$U^{H}AU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

问 $A=U\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)U^H$ 是否为 A 的奇异值分解表达式？

4.6 (1) 验证矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1 & i\\ 1 & 0 & 0\\ i & 0 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4+3i & 4i & -6-2i\\ -4i & 4-3i & -2-6i\\ 6+2i & -2-6i & 1\end{bmatrix}$$

都是正规矩阵．

(2) 求(1)中两个矩阵的谱分解表达式．

4.7 已知

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 8 & 2 & a\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

为单纯矩阵．

(1) 求 a 的值；

(2) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵；

(3) 求 A 的谱分解表达式．

习题与自测题解答

第一章

习题答案

1－1．见典型例题 1.1.

1－2．将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha$ 坐标带入 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\alpha$，求得

$$[x_1,x_2,x_3,x_4]^T=[\frac{5}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}]^T$$

此即 α 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标．

1－3．见典型例题 1.5.

1－4．见典型例题 1.6.

1－5．见典型例题 1.7.

1－6．见典型例题 1.10.

1－7．见典型例题 1.12.

1－8．见典型例题 1.14.

1－9．见典型例题 1.15.

1－10．证明：设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times s}$ 的列秩为 r，不妨设前 r 个列向量线性无关，则 A 的列向量都可以由这前 r 个列向量线性表示，即

$$[a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{mi}]^T=[\sum_{j=1}^{r}k_ja_{1j},\sum_{j=1}^{r}k_ja_{2j},\cdots,\sum_{j=1}^{r}k_ja_{mj}]^T,$$

$$i=1,2,\cdots,s$$

因此

$$\xi_i=(\sum_{j=1}^{r}k_ja_{1j})\beta_1+(\sum_{j=1}^{r}k_ja_{2j})\beta_2+\cdots+(\sum_{j=1}^{r}k_ja_{mj})\beta_m$$

$$= \sum_{j=1}^{r} k_j(a_{1j}\beta_1 + a_{2j}\beta_2 + \cdots + a_{mj}\beta_m) = \sum_{j=1}^{r} k_j\xi_j, i = 1,2,\cdots,s$$

由此可见向量组$\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s\}$可由自身前 r 个向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性表示，因此 $\dim L(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s)=\dim L(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r)\leqslant r=A$ 的秩．

(下证等号成立)只需证$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 线性无关即可．

事实上，若 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_r\xi_r=0$，则由$\xi_i=\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\beta_j, i=1,2,\cdots,s$ 可得

$$(\sum_{i=1}^{r} k_i a_{1i})\beta_1 + (\sum_{i=1}^{r} k_i a_{2i})\beta_2 + \cdots + (\sum_{i=1}^{r} k_i a_{mi})\beta_m = 0.$$

由题设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关，必有

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1r}k_r = 0 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}k_1 + a_{m2}k_2 + \cdots + a_{mr}k_r = 0 \end{cases} \qquad ①$$

此方程组①的系数矩阵的前 r 个行恰是矩阵 A 的前 r 个线性无关的列，所以式①系数矩阵的秩为 r，因此式①只有零解，即 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$，故$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 线性无关，从而向量组$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 的秩=矩阵$(a_{ij})_{m\times s}$的秩．

1－11．见典型例题 1.23.

1－12．解：(1) 由题意知

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathscr{A}[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]A$$

于是

$$[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]\boldsymbol{P}$$

其中

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

即为所求过渡矩阵.

设 $\boldsymbol{B}$ 是线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵表示,即

$$\mathscr{A}[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3] = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3]\boldsymbol{B}$$

于是

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) 由于方程组 $\boldsymbol{AX}=0$ 的基础解系是$[1, -1, 1]^{\mathrm{T}}$,所以 $\mathscr{A}$ 的核子空间

$$N(A) = \mathrm{span}\{\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3\} = \mathrm{span}\{[-2, 2, 3]^{\mathrm{T}}\}$$

$\mathscr{A}$ 的值域

$$\begin{aligned} R(A) &= \mathrm{span}\{\mathscr{A}(\alpha_1), \mathscr{A}(\alpha_2), \mathscr{A}(\alpha_3)\} \\ &= \mathrm{span}\{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_2 + 2\alpha_3, -\alpha_1 + 3\alpha_3\} \\ &= \mathrm{span}\{[0, 0, -1]^{\mathrm{T}}, [1, 2, 1]^{\mathrm{T}}, [1, 2, 2]^{\mathrm{T}}\} \\ &= \mathrm{span}\{[0, 0, 1]^{\mathrm{T}}, [1, 2, 0]^{\mathrm{T}}\} \end{aligned}$$

1－13 见典型例题 1.21.

1－14 证明:由 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$,从而

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})^k &= \mathrm{tr}[(\boldsymbol{AB} \cdot \boldsymbol{AB} \cdot \cdots \cdot \boldsymbol{A})\boldsymbol{B}] \\ &= \mathrm{tr}[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB} \cdot \cdots \cdot \boldsymbol{AB} \cdot \boldsymbol{A})] \\ &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})^k. \end{aligned}$$

1－15. 证明:利用 $\boldsymbol{A}\alpha_i = \lambda_i\alpha_i, \boldsymbol{A}^k\alpha_i = \lambda_i^k\alpha_i$ 即可证明.

1－16. 设λ是矩阵A的任一特征值，其对应的特征向量为α，即有$A\alpha=\lambda\alpha$，那么有$A^2\alpha=\lambda^2\alpha$，又$A^2=E$，于是可得$(\lambda^2-1)\alpha=0$，注意到$\alpha\neq 0$，从而有$\lambda^2=1$，因此$A$的特征值只可能是$+1$或者$-1$.

1－17. 方法同上.

1－18. 证明：设可逆矩阵A的特征值为λ，对应的特征向量为α，则$A\alpha=\lambda\alpha$，从而$A^{-1}A\alpha=A^{-1}(\lambda\alpha)$，即$E\alpha=\lambda A^{-1}\alpha$，因此$A^{-1}\alpha=\frac{1}{\lambda}\alpha$. 所以$A$的特征值为$\frac{1}{\lambda}$，对应的特征向量为$\alpha$.

1－19. 证明：因相似矩阵有相同的特征多项式与特征值，利用

$|\lambda E-A|=\lambda^n-(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|$

根据根与系数的关系$\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum a_{ii}=\sum b_{ii}$，得证$\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$.

1－20. 见典型例题1.27.

自测题答案

1.1 解：设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$

即

$$k_1\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}+k_4\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}k_1+k_2+k_3+k_4 & k_1+k_2+k_3\\ k_1+k_3+k_4 & k_1+k_2+k_4\end{bmatrix}=0$$

于是

$$k_1+k_2+k_3+k_4=0,\quad k_1+k_2+k_3=0$$
$$k_1+k_3+k_4=0,\quad k_1+k_2+k_4=0$$

解之得

$$k_1=k_2=k_3=k_4=0$$

故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关.

设

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 + x_4 & x_1 + x_2 + x_4 \end{bmatrix}$$

于是

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a \quad x_1 + x_2 + x_3 = b$$

$$x_1 + x_3 + x_4 = c \qquad x_1 + x_2 + x_4 = d$$

解之得

$$x_1 = b + c + d - 2a, \qquad x_2 = a - c$$

$$x_3 = a - d, \qquad x_4 = a - b$$

x_1,x_2,x_3,x_4 即为所求之坐标.

1.2 将 α_i,β_j 代入 $[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]P$,可得 4 阶矩阵

$$P = [\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]^{-1}[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

此矩阵记为所求过渡矩阵. 将 $\xi,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 代入 $\xi = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4$ 得到

$$x_1 = -\frac{19}{11}, x_2 = \frac{15}{11}, x_3 = -\frac{2}{11}, x_4 = -\frac{4}{11},$$

这便是 ξ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标.

1.3 秩 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}=3$,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 的极大线性无关组,故所求生成子空间的基为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,维数为 3.

1.4 设与 A 乘法可交换的 4 阶矩阵 $B=(b_{ij})$,将其代入 $AB=BA$ 得 $b_{ij}=0(i\neq j)$. 所以所求线性空间是 4 维的. 设 $\varepsilon_{ii}(i=1,2,3,4)$ 为第 i 行,第 i 列处元素为 1,其余元素全为 0 的 4 阶矩阵,则 $\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{33},\varepsilon_{44}$ 是基底.

1.5　容易求出齐次线性方程组的基础解系：$\alpha=[2,-21,0,9]^{\mathrm{T}}$，它是解空间的基底，维数为 1.

1.6　和空间 $\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\}$ 的维数为 3，基底 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$. 交空间的维数为 1，基底为$[-5,2,3,4]$.

1.7　交空间的维数为 2，基底为$[2,1,0,0]^{\mathrm{T}}$，$[2,0,-5,7]^{\mathrm{T}}$. 和空间的维数为 4.

1.8　设 $\gamma=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]X=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]X$，求得

$X=k[1,-2,1]^{\mathrm{T}}$，$W=\{k(\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3)|k$ 为任意常数$\}$

1.9　把 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\mathscr{A}(\alpha)_1,\mathscr{A}(\alpha)_2,\mathscr{A}(\alpha)_3$ 代入

$\mathscr{A}[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\mathscr{A}(\alpha)_1,\mathscr{A}(\alpha)_2,\mathscr{A}(\alpha)_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]A$

得

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -\frac{4}{7} & 1\\ 2 & \frac{1}{7} & 1\\ 0 & \frac{1}{7} & 2\end{bmatrix}$$

1.10　证明：

$$\begin{aligned}
&\mathscr{A}([x_1,y_1,z_1]^{\mathrm{T}}+[x_2,y_2,z_2]^{\mathrm{T}})=\mathscr{A}([x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2]^{\mathrm{T}})\\
&=[2(x_1+x_2)-3(y_1+y_2)+4(z_1+z_2),5(x_1+x_2)-(y_1+y_2)+\\
&\quad(z_1+x_2),4(x_1+x_2)+7(y_1+y_2)]^{\mathrm{T}}\\
&=[(2x_1-3y_1+4z_1)+(2x_2-3y_2+4z_2),(5x_1-y_1+2z_1)+\\
&\quad(5x_2-y_2+2z_2),(4x_1+7y_1)+(4x_2+7y_2)]^{\mathrm{T}}\\
&=[2x_1-3y_1+4z_1,5x_1-y_1+2z_1,4x_1+7y_1]^{\mathrm{T}}+\\
&\quad(2x_2-3y_2+4z_2,5x_2-y_2+2z_2,4x_2+7y_2)^{\mathrm{T}}\\
&=\mathscr{A}([x_1,y_1,z_1]^{\mathrm{T}})+\mathscr{A}([x_2,y_2,z_2]^{\mathrm{T}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathscr{A}(k[x,y,z]^{\mathrm{T}})=\mathscr{A}([kx,ky,kz]^{\mathrm{T}})\\
&=[2kx-3ky+4kz,5kx-ky+2kz,4kx+7ky]^{\mathrm{T}}\\
&=k[2x-3y+4z,5x-y+2z,4x+7y]^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

$=k\mathscr{A}([x,y,z]^{\mathrm{T}})$

所以 $\mathscr{A}$ 是线性变换.

$\mathscr{A}([1,0,0]^{\mathrm{T}})=[2,5,4]^{\mathrm{T}}$,

$\mathscr{A}([0,1,0]^{\mathrm{T}})=[-3,-1,7]^{\mathrm{T}}$, $\mathscr{A}([0,0,1]^{\mathrm{T}})=[4,2,7]^{\mathrm{T}}$

故

$$\mathscr{A}[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]\begin{bmatrix}2 & -3 & 4\\5 & -1 & 2\\4 & 7 & 7\end{bmatrix}$$

由此 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 下的矩阵是

$$\begin{bmatrix}2 & -3 & 4\\5 & -1 & 2\\4 & 7 & 7\end{bmatrix}$$

类似可以证明,$\mathscr{B}$ 是线性变换,且

$\mathscr{B}([1,0,0]^{\mathrm{T}})=[0,1,3]^{\mathrm{T}}$,

$\mathscr{B}([0,1,0]^{\mathrm{T}})=[2,-4,0]^{\mathrm{T}}$, $\mathscr{B}([0,0,1]^{\mathrm{T}})=[1,0,0]^{\mathrm{T}}$

故

$$\mathscr{B}[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\1 & -4 & 0\\3 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

由此 $\mathscr{B}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 下的矩阵为

$$\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\1 & -4 & 0\\3 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

1.11　解:首先求出从基$\{\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_1\}$到基$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$,即

$$[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_1]=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]\boldsymbol{P}$$

由此可知 $\mathscr{A}$ 在基$\{\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_1\}$下的矩阵为

$$B_1 = P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} & b_{21} \\ b_{32} & b_{33} & b_{31} \\ b_{12} & b_{13} & b_{11} \end{bmatrix}$$

同样求 $\mathscr{A}$ 在基 $(\beta_1, k\beta_2, \beta_3)$ 下的矩阵为

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & kb_{12} & b_{13} \\ \dfrac{b_{21}}{k} & b_{22} & \dfrac{b_{23}}{k} \\ b_{31} & kb_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$\mathscr{A}$ 在基 $(\beta_1, \beta_1+\beta_2, \beta_3)$ 下的矩阵为

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} - b_{21} & b_{12} - b_{22} + b_{11} - b_{21} & b_{13} - b_{33} \\ b_{21} & b_{21} + b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{31} + b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

1.12 (1) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到 η_1, η_2, η_3 的过渡矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

于是可得

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 14 \\ 19 & 4 & 16 \\ -17 & -6 & -16 \end{bmatrix}$$

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=1+\sqrt{3},\lambda_3=1-\sqrt{3}$ 的属于特征值 2 的特征向量为 $k[-2,1,0]^{\mathrm{T}},k\neq 0$，$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $1+\sqrt{3}$ 的特征向量为 $l[3,-2,2-\sqrt{3}]^{\mathrm{T}},l\neq 0$，$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $1-\sqrt{3}$ 的特征向量为 $m[3,-2,2+\sqrt{3}]^{\mathrm{T}},m\neq 0$. 于是，$\mathscr{A}$ 的特征值为 2，其对应的特征向量为 $k(-2\alpha_1+\alpha_2),k\neq 0$，$\mathscr{A}$ 的特征值为 $1+\sqrt{3}$，其对应的特征向量为 $l(3\alpha_1-2\alpha_2+(2-\sqrt{3})\alpha_3)$，$l\neq 0$，$\mathscr{A}$ 的特征值为 $1-\sqrt{3}$，其对应的特征向量为 $m(3\alpha_1-2\alpha_2+(2+\sqrt{3})\alpha_3),m\neq 0$.

第二章

习题答案

2—1 (1) 见教材例 2.1.1.

(2) 见典型例题 2.1 中的(2).

(3) 见教材例 2.1.2.

(4) 见教材例 2.1.4.

2—2　见典型例题 2.3.

2—3　见典型例题 2.4.

2—4　见典型例题 2.7.

2—5　见典型例题 2.8.

2—6　证明：设的 Jordan 标准形为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_t\end{bmatrix},\boldsymbol{J}_i=\begin{bmatrix}a_i & 1 & & & \\ & a_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & a_i\end{bmatrix}_{d_i\times d_i}$$

且存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使

$$P^{-1}A^kP = J$$

由于 $A^2=A$，所以

$$J^2 = (P^{-1}AP)^2 = P^{-1}A^2P = J = P^{-1}AP$$

从而有

$$J_i^2 = J_i, \qquad i = 1,2,\cdots,s$$

即

$$\begin{bmatrix} a_i^2 & 2a_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_i^2 & 2a_i & 1 & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & 1 \\ & & & & & 2a_i \\ 0 & & \cdots & & 0 & a_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & 1 & & & \\ & a_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & a_i \end{bmatrix}$$

从而

$$a_i = 1 \text{ 或 } a_i = 0.$$

从而 J 为一个对角矩阵且主对角线上的元素只能为 1 或 0. 适当调整对角线上的元素的顺序，可得方阵

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

而且 A 相似于此矩阵.

2—7 解：(1) 记

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

首先求出 A 的 Jordan 标准形

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 2 & -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 \end{bmatrix}$$

所以 A 的 Jordan 标准形为

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故存在 $P \in C_3^{3\times 3}$,满足 $AP = PJ$.

令 $P = [X_1, X_2, X_3]$,那么有

$$[AX_1, AX_2, AX_3] = [X_1, X_2, X_3]\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

比较上式两端得

$$AX_1 = 2X_2, AX_2 = X_2, AX_3 = X_2 + X_3$$

即　$(2E - A)X_1 = 0, (E - A)X_2 = 0, (E - A)X_3 = -X_2$

由齐次线性方程组 $(2E - A)X_1 = 0$,可求得 $X_1 = [2, 1, -6]^T$. 由 $(E - A)X_2 = 0$,可求得 $X_2 = [0, 0, 1]^T$. 把 X_2 代入 $(E - A)X_3 = -X_2$,可求得 $X_3 = [-\frac{1}{2}, 0, 0]^T$.

所以

$$P = [X_1, X_2, X_3] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 3 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 记

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{bmatrix}$$

首先求出 A 的 Jordan 标准形

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ 5 & \lambda-21 & -17 \\ -6 & 26 & \lambda+21 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda+1)(\lambda)^2 \end{bmatrix}$$

所以 A 的 Jordan 标准形为

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故存在 $P \in C_3^{3\times 3}$，满足 $AP=PJ$.

令 $P=[X_1,X_2,X_3]$，那么有

$$[AX_1, AX_2, AX_3] = [X_1, X_2, X_3]\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

比较上式两端得

$$AX_1 = -X_1, AX_2 = 0, AX_3 = X_2$$

即
$$(E+A)X_1=0, AX_2=0, AX_3=X_2$$

由齐次线性方程组 $(E+A)X_1=0$ 可求得 $X_1=[1,1,-1]^{\mathrm{T}}$. 由 $AX_2=0$ 可求得 $X_2=k[-1,3,-4]^{\mathrm{T}}$. 取 $k=1$，则可保证 $AX_3=X_2$ 有解，且

$$X_3 = [\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}, 1]^{\mathrm{T}}$$

所以

$$P = [X_1, X_2, X_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{7}{4} \\ 1 & 3 & -\frac{1}{4} \\ -1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 记

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

首先求出 A 的 Jordan 标准形

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda-4 & -5 & 2 \\ 2 & \lambda+2 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-1)^3 \end{bmatrix}$$

所以 A 的 Jordan 标准形为

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故存在 $P \in C_3^{3\times 3}$，满足 $AP = PJ$.

令 $P = [X_1, X_2, X_3]$，那么有

$$[AX_1, AX_2, AX_3] = [X_1, X_2, X_3]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

比较上式两端得

$$AX_1 = X_1, AX_2 = X_1 + X_2, AX_3 = X_2 + X_3$$

即 $\qquad (E-A)X_1 = 0, (E-A)X_2 = -X_1, (E-A)X_3 = -X_2$

由齐次线性方程组 $(E-A)X_1 = 0$，可求得 $X_1 = [1,-1,-1]^T$. 把 $X_1 = [1-1,-1]^T$ 代入 $(E-A)X_2 = -X_1$ 可求得 $X_1 = [1,0,1]^T$. 把 X_2 代入 $(E-A)X_3 = -X_2$，可求得 $X_3 = [-1,0,-2]^T$.

所以

$$P = [X_1, X_2, X_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(4) 记

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

首先求出 A 的 Jordan 标准形

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda-3 & 0 & -8 \\ -3 & \lambda+1 & -6 \\ 2 & 0 & \lambda+5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \lambda+1 & \\ & & (\lambda+1)^2 \end{bmatrix}$$

所以 A 的 Jordan 标准形为

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

故存在 $P \in C_3^{3\times 3}$，满足 $AP=PJ$.

令 $P=[X_1,X_2,X_3]$，那么有

$$[AX_1,AX_2,AX_3] = [X_1,X_2,X_3]\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

比较上式两端得

$$AX_1 = -X_1, AX_2 = -X_2, AX_3 = X_2 - X_3$$

即 $\qquad (E+A)X_1=0,(E+A)X_2=0,(E+A)X_3=X_2$

由此可见 X_1,X_2 是方程组 $(E+A)X_1=0$ 的两个线性无关解，可求得

$$\xi_1 = [0,1,0]^T, \xi_2 = [-2,0,1]^T$$

选取 $X_1=\xi_1, X_2=k_1\xi_1+k_2\xi_2$，其中 k_1,k_2 要保证 X_1,X_2 无关，且使 $(E+A)X_3=X_2$ 有解．此即若 $X_2=k_1\xi_1+k_2\xi_2=[-2k_2,k_1,k_2]^T$，选 k_1,k_2 使方程组 $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2k_2 \\ k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ 有解．

易知当 $k_1+\frac{3}{2}k_2=0$ 时有解，且解为 $X_1=\frac{-4X_3-k_2}{2}$.

取 $k_2=2,k_1=-3$，则 $X_2=[-4,-3,2]^T,X_3=[-1,0,0]^T$.

所以

$$P=[X_1,X_2,X_3]=\begin{bmatrix}0&-4&-1\\1&-3&0\\0&2&0\end{bmatrix}$$

2－8 (1)解：特征多项式$|\lambda E-A|=(\lambda+3)(\lambda-1)^2$.

当$\lambda=1$时：① $\mathrm{rank}(E-A)=2$，② $\mathrm{rank}(E-A)^2=1$，③ $\mathrm{rank}(E-A)^3=1$.

当$\lambda=-3$时：④ $\mathrm{rank}(-3E-A)=2$，⑤ $\mathrm{rank}(-3E-A)^2=2$.

由①知$\lambda=1$时的Jordan块为$3-2=1$块；由②知$\lambda=1$时的Jordan块阶数$\geqslant 2$的有$2-1=1$块；由③知$\lambda=1$时的Jordan块最高阶数为2. 因此$\lambda=1$时的Jordan块为2阶1块.

由④知$\lambda=-3$时的Jordan块有$3-2=1$块；由⑤知$\lambda=-3$时的Jordan块最高阶数为1. 因此$\lambda=-3$时的Jordan块为1阶1块.

从而知

$$J=\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

(2) 解：特征多项式$|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$.

当$\lambda=2$时：① $\mathrm{rank}(E-A)=2$，② $\mathrm{rank}(2E-A)^2=2$.

当$\lambda=1$时：③ $\mathrm{rank}(E-A)=2$，④ $\mathrm{rank}(E-A)^2=1$，⑤ $\mathrm{rank}(E-A)^3=1$.

由①知$\lambda=2$时的Jordan块有1块；由②知$\lambda=2$时的Jordan块最高阶数为1. 因此$\lambda=2$时的Jordan块为1阶1块.

由③知$\lambda=1$时的Jordan块有1块；由④知$\lambda=1$时的Jordan块阶数$\geqslant 2$的为1块；由⑤知$\lambda=1$时的Jordan块最高阶数为1. 因此$\lambda=1$时的Jordan块为2阶1块.

从而知

$$J=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

(3) 解：特征多项式 $|\lambda E-A|=-\lambda^4$.

$\mathrm{rank}A=2$, $\mathrm{rank}A^2=0$，因此 Jordan 块为 2 阶 1 块．

从而知

$$J=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

(4) 解：特征多项式 $|\lambda E-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-4)^2$

当 $\lambda=4$ 时：① $\mathrm{rank}(4E-A)=3$，② $\mathrm{rank}(4E-A)^2=2$，③ $\mathrm{rank}(4E-A)^3=2$.

当 $\lambda=2$ 时：④ $\mathrm{rank}(2E-A)=3$，⑤ $\mathrm{rank}(2E-A)^2=2$，⑥ $\mathrm{rank}(2E-A)^3=2$.

由①知 $\lambda=4$ 时的 Jordan 块为 1 块；由②知 $\lambda=4$ 时的 Jordan 块阶数≥2 的有 1 块；由③知 $\lambda=4$ 时的 Jordan 块最高阶数为 2. 因此 $\lambda=4$ 时的 Jordan 块为 2 阶 1 块．

由④知 $\lambda=2$ 时的 Jordan 块有 1 块；由⑤的 Jordan 块阶数≥2 的为 1 块；由⑥知 $\lambda=2$ 时的 Jordan 块最高阶数为 2. 因此 $\lambda=2$ 时的 Jordan 块为 2 阶 1 块．

从而知

$$J=\begin{bmatrix}4&1&0&0\\0&4&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$$

2—9　见典型例题 2.11.

自测题答案

2.1 (1) 解：用初等变换方法求解．

$$
\begin{bmatrix} 3\lambda^2+2\lambda-3 & 2\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-3 \\ 4\lambda^2+3\lambda-5 & 3\lambda-2 & \lambda^2+3\lambda-4 \\ \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1 \end{bmatrix} \rightarrow
$$

$$
\begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1 \\ 3\lambda^2+2\lambda-3 & 2\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-3 \\ 4\lambda^2+3\lambda-5 & 3\lambda-2 & \lambda^2+3\lambda-4 \end{bmatrix} \rightarrow
$$

$$
\begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1 \\ 4\lambda^2+3\lambda-7 & 3\lambda-3 & \lambda^2+3\lambda-4 \\ 4\lambda^2+3\lambda-5 & 3\lambda-2 & \lambda^2+3\lambda-4 \end{bmatrix} \rightarrow
$$

$$
\begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1 \\ 4\lambda^2+3\lambda-7 & 3\lambda-3 & \lambda^2+3\lambda-4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow
$$

$$
\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1 \\ 4\lambda^2+3\lambda-7 & 3\lambda-3 & \lambda^2+3\lambda-4 \end{bmatrix} \rightarrow
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \lambda-2 & \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-1 \\ 3\lambda-3 & 4\lambda^2+3\lambda-7 & \lambda^2+3\lambda-4 \end{bmatrix} \rightarrow
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 4\lambda^2-3\lambda-1 & \lambda^2+3\lambda-4 \end{bmatrix} \rightarrow
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \\ 0 & \lambda^2+3\lambda-4 & 4\lambda^2-3\lambda-1 \end{bmatrix} \rightarrow
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1 \end{bmatrix} \rightarrow
$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda+1)\end{bmatrix}\to$$

(2) 解：利用行列式因子方法求解．首先求出

$$D_1(\lambda)=1, D_2(\lambda)=\lambda(\lambda-3), D_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda-3)^2,$$

$$D_4(\lambda)=\lambda^4(\lambda-3)^4$$

于是

$$d_1(\lambda)=1,\qquad d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=\lambda(\lambda-3),$$

$$d_2(\lambda)=\frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)}=\lambda(\lambda-3),\qquad d_4(\lambda)=\frac{D_4(\lambda)}{D_3(\lambda)}=\lambda^2(\lambda-3)^2$$

从而其 Smith 标准形为

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda(-3) & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-3) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-3)^2\end{bmatrix}$$

2.2 (1) 其不变因子为 $1,1,(\lambda-2)^3$

(2)当 $\beta=0$ 时，不变因子为 $1,1,(\lambda+\alpha)^2,(\lambda+\alpha)^2$

当 $\beta\neq 0$ 时，不变因子为 $1,1,1,[\beta^2+(\lambda+\alpha)^2]^2$.

2.3 (1) 其初等因子组为 $\lambda-1,\lambda+1,\lambda-2$.

(2) 其初等因子组为 $\lambda-2,(\lambda-1)^2$.

2.4 首先求出其 Jordan 标准形为

$$J=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

然后再求出其相似变换矩阵

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

且有 $P^{-1}AP=J$，于是可得 $A^n=PJ^nP^{-1}$，容易计算

$$A^{100} = \begin{bmatrix} -199 & 0 & 100 \\ 201 + (-2)^{100} & 2^{100} & -101 + 2^{100} \\ -400 & 0 & 201 \end{bmatrix}$$

2.5 证明：设 A 的 Jordan 标准形为

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}, \quad J_i = \begin{bmatrix} a_i & 1 & & & \\ & a_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & a_i \end{bmatrix}_{d_i \times d_i}$$

且存在可逆矩阵 P 使

$$P^{-1}A^{k}P = J$$

由于 $A^2=E$，所以

$$J^2 = (P^{-1}AP)^2 = P^{-1}A^2P = J = P^{-1}AP$$

从而有

$$J_i^2 = E$$

即

$$\begin{bmatrix} a_i^2 & 2a_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_i^2 & 2a_i & 1 & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & & & 1 \\ & & & & & 2a_i \\ 0 & & \cdots & & 0 & a_i^2 \end{bmatrix} = E$$

从而

$$a_i = 1 \text{ 或 } a_i = -1.$$

J 为一个对角矩阵且主对角线上的元素只能为 1 或 −1. 适当调整对角线上的元素的顺序，可得方阵

$$\begin{bmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1\end{bmatrix}$$

而且 A 相似于此矩阵.

2.6 (1) 解:记

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 8\\ 3 & -1 & 6\\ -2 & 0 & -5\end{bmatrix}$$

首先求出 A 的 Jordan 标准形.

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda-3 & 0 & -8\\ -3 & \lambda+1 & -6\\ 2 & 0 & \lambda+5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & & \\ & \lambda+1 & \\ & & (\lambda+1)^2\end{bmatrix}$$

由此可知 A 的初等因子为 $\lambda+1,(\lambda+1)^2$,从而 A 的 Jordan 标准形为

$$J=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

再求相似变换矩阵 P,设 $P=[X_1,X_2,X_3]$且有 $P^{-1}AP=J$,那么

$$A[X_1,X_2,X_3]=[X_1,X_2,X_3]\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

于是有

$$AX_1=-X_1,AX_2=-X_2,AX_3=X_2-X_3$$

这里$(E+A)X_1=0,(E+A)X_2=0$ 是同一个线性方程组,求得此方程组两个线性无关的解向量

$$\xi=[0,1,0]^T,\eta=[-2,0,1]^T$$

取 $X_1=[0,1,0]^T$,但不能简单的取 $X_2=\eta$. 但是可以选取 $X_2=k_1$

$\xi + rk_2\eta = [-2k_2, k_1, k_2]^T$，而且使得增广矩阵

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 & -2k_1 \\ 3 & 0 & 6 & k_1 \\ -2 & 0 & -4 & k_2 \end{bmatrix}$$

的秩等于系数矩阵

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

的秩，容易计算系数矩阵的秩为 1，从而取 $k_1=-3, k_2=2$ 即 $X_2=[-4,-3,2]^T$. 再由 $(E+A)X_3=X_2$ 求得 $X_3=[-1,0,0]^T$. 所以

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

且有 $P^{-1}AP=J$.

(2) 记

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

首先求出 A 的 Jordan 标准形

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & \lambda-1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix}$$

利用行列式因子方法求得 $\lambda E-A$ 的初等因子 $(\lambda-1)^4$，当然也是 A 的初等因子．于是 A 的 Jordan 标准形为

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

再求相似变换矩阵 P，设 $P=[X_1,X_2,X_3,X_4]$且有 $P^{-1}AP=J$，那么

$$A[X_1,X_2,X_3,X_4]=[X_1,X_2,X_3,X_4]\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

于是有

$$AX_1=X_1,AX_2=X_1+X_2,AX_3=X_2+X_3,AX_4=X_4+X_3$$

首先求得 $AX_1=X_1$ 的线性无关解向量

$$X_1=[8,0,0,0]^{\mathrm{T}}$$

依此类推再分别求得 $X_2=[4,4,0,0]^{\mathrm{T}}$，$X_3=[0,-1,2,0]^{\mathrm{T}}$，$X_4=[0,1,-2,1]^{\mathrm{T}}$. 于是

$$P=\begin{bmatrix}8&4&0&0\\0&4&-1&1\\0&0&2&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

且有 $P^{-1}AP=J$.

第三章

习题答案

3－1　见典型例题 3.1.

3－2　见典型例题 3.4.　72

3－3　(1) 见典型例题 3.13.　20

(2) 首先求出其特征多项式$|\lambda E-A|=(\lambda-1)^3$.

当 $\lambda=1$ 时，求出属于特征值 1 的一个特征向量$[2,1,1]^{\mathrm{T}}$，将其单位化可得

$$\eta_1=\left[\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right]^{\mathrm{T}}$$

解与 η_1 内积为零的方程

$$2x_1+x_2+x_3=0$$

取其一个单位解向量

$$\eta_2 = \left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]^{\mathrm{T}}$$

解与 η_1,η_2 内积为零的方程

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

再取其一个单位解向量

$$\eta_3 = \left[0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^{\mathrm{T}}$$

于是取

$$U_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

而且有

$$U_1^{\mathrm{H}}AU_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3\sqrt{2} & 4\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故 U_1 即为所求的矩阵.

3－4　证明：由教材定理 3.4.9 可知正交投影矩阵为 $P=U_1U_1^{\mathrm{H}}$，其中 U_1 为一个 $n\times r$ 次酉矩阵．显然有 $P^{\mathrm{H}}=P$，P 是 Hermite 矩阵．$\forall\ 0\neq X\in C^n$，那么二次型

$$f(X) = X^{\mathrm{H}}U_1U_1^{\mathrm{H}}X = (U_1^{\mathrm{H}}X)^{\mathrm{H}}(U_1^{\mathrm{H}}X) \geqslant 0$$

这表明 P 是半正定 Hermite 矩阵.

3－5　(1) 解：易证 $A^{\mathrm{H}}=A$，A 是 Hermite 矩阵.

求得其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=1$.

对于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$，求得两个线性无关的特征向量

$$X_1 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2},1,0\right]^{\mathrm{T}}, X_2 = \left[\frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i},0,1\right]^{\mathrm{T}}$$

对于特征值 $\lambda_2=1$，求得一个线性无关的特征向量．对于特征值 $\lambda_3=1$，求得一个线性无关的特征向量 $X_3=\left[-\frac{\sqrt{6}}{3}\mathrm{i},\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i},1\right]^{\mathrm{T}}$

将 X_1,X_2 正交化与单位化得到

$$\alpha_1=\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3},0\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\alpha_2=\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i},-\frac{\sqrt{6}}{6}\mathrm{i},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^{\mathrm{T}}$$

将 X_3 单位化即可得到

$$\alpha_3=\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i},\frac{\sqrt{6}}{6}\mathrm{i},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^{\mathrm{T}}$$

于是取

$$U=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i} & -\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}\\ \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6}\mathrm{i} & \frac{\sqrt{6}}{6}\mathrm{i}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

而且有

$$U^{\mathrm{H}}AU=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(2) 见典型例题 3.18(1).

(3) 见典型例题 3.18(2).

(4) 见典型例题 3.18(3).

3－6　(1) $|\lambda E-A|=(\lambda+2)(\lambda-4)(\lambda-1)$，所以其特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=4,\lambda_3=1$. 对于特征值 $\lambda_1=-2$，其对应的单位特征向量为 $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]^{\mathrm{T}}$. 对于特征值 $\lambda_2=4$，其对应的单位特征向量为 $\left[\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right]^{\mathrm{T}}$. 对于特征值 $\lambda_3=1$，其对应的单位特征向量为

$\left[\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right]^{T}$.

于是取

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

那么有

$$Q^{T}AQ=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(2) 见典型例题 3.21.

3－7 (1) 解：$|\lambda E-A|=\lambda^3-3\lambda^2-2\lambda-1$

当 $\lambda=2$ 时，A 的单位特征向量 $\xi_1=[\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}]^{T}$.

当 $\lambda=1$ 时，对应的特征向量 $\xi_2=[-2,1,0]^{T}$，$\xi_3=[2,0,1]^{T}$，应用 Schmidt 正交化方法得到 $\alpha_2=\xi_2$，$\alpha_3=-\frac{(\alpha_2,\xi_3)}{(\alpha_2,\alpha_2)}\alpha_2=\left[\frac{2}{5},\frac{4}{5},1\right]^{T}$，单位化得到

$$\beta_2=\left[-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right]^{T},\beta_3=\left[\frac{2\sqrt{5}}{15},\frac{2\sqrt{5}}{15},\frac{\sqrt{5}}{3}\right]^{T}$$

取

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2\sqrt{5}}{15}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4\sqrt{5}}{15}\\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3}\end{bmatrix}$$

而且有

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{bmatrix}10&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

再取

$$R=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

那么$(QR)^{\mathrm{T}}A(QR)=E$,其中

$$QR=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{2\sqrt{5}}{15}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4\sqrt{5}}{15}\\-\frac{2}{3}&0&\frac{\sqrt{5}}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{3\sqrt{10}}&-\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{2\sqrt{5}}{15}\\\frac{2}{3\sqrt{10}}&\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4\sqrt{5}}{15}\\-\frac{2}{3\sqrt{10}}&0&\frac{\sqrt{5}}{3}\end{bmatrix}$$

(2) **解**:$|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$

当$\lambda_1=10$时,A的单位特征向量$\xi_1=\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right]^{\mathrm{T}}$.

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时,对应的特征向量$\xi_2=[-2,1,0]^{\mathrm{T}}$,$\xi_3=[2,0,1]^{\mathrm{T}}$、应用 Schmidt 正交化方法得到$\alpha_2=\xi_2$,$\alpha_3=\xi_3-\frac{(\alpha_2,\xi_3)}{(\alpha_2,\alpha_2)}\alpha_2=\left[\frac{2}{5},\frac{4}{5},1\right]^{\mathrm{T}}$,单位化得到

$$\beta_2=\left[-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right]^{\mathrm{T}},\beta_3=\left[\frac{2\sqrt{5}}{15},\frac{4\sqrt{5}}{15},\frac{\sqrt{5}}{3}\right]^{\mathrm{T}}$$

取

$$
Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix}
$$

而且有

$$
Q^{\mathrm{T}}AQ = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

再取

$$
R = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

那么$(QR)^{\mathrm{T}}AQ(QR)=E$，其中

$$
QR = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \frac{1}{3\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{2}{3\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{2}{3\sqrt{10}} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix}
$$

3－8　见典型例题 3.10.

3－9　证明：记 $U=(E+T+\mathrm{i}S)(E-T-\mathrm{i}S)^{-1}$，那么

$$U^{H}U=(E+T+\mathrm{i}S)^{-1}(E-T-\mathrm{i}S)(E+T+\mathrm{i}S)$$
$$(E-T-\mathrm{i}S)^{-1}=(E+T+\mathrm{i}S)^{-1}(E+T+\mathrm{i}S)$$
$$(E-T-\mathrm{i}S)(E-T-\mathrm{i}S)^{-1}=E$$

这表明 U 是一个酉矩阵.

3－10　证明：必要性　由于相似矩阵有相同的特征值，所以 A 与 B 的特征值相同.

充分性　A，B 均为实对称矩阵，所以分别存在正交矩阵 Q_1，Q_2，使得

$$Q_1^{T}AQ_1=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$$Q_2^{T}BQ_2=\begin{bmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 A 的特征值，$\mu_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 B 的特征值．而且 $\lambda_i=\mu_i$，于是有 $Q_1^{T}AQ_1=Q_2^{T}BQ_2$，此即 $(Q_2^{-1})^{T}Q_1^{T}AQ_1Q_2^{-1}=B$，$(Q_1Q_2^{-1})^{T}A(Q_1Q_2^{-1})=B$，故 A 与 B 正交相似.

3－11　见典型例题 3.22.

3－12　证明：必要性　由于相似矩阵有相同的特征值，所以 A 与 B 的特征值相同.

充分性　A 与 B 均为正规矩阵，所以分别存在酉矩阵 W_1，W_2，使得

$$W_1^{H}AW_1=\begin{bmatrix}\beta_1 & & & \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta_n\end{bmatrix}$$

$$W_2^H B W_2 = \begin{bmatrix} \gamma_1 & & & \\ & \gamma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma_n \end{bmatrix}$$

其中 $\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$为 A 的特征值,$\gamma_i(i=1,2,\cdots,n)$为 B 的特征值．而且 $\beta_i=\gamma_i$，于是有 $W_1^H A W_1 = W_2^H B W_2$，此即$(W_1W_2^{-1})^H A(W_1W_2^{-1})=B$,这表明 A 与 B 酉相似．

3－13　见典型例题 3.23.

3－14　证明：由于 A 为 Hermite 矩阵．所以存在酉矩阵 U，使得

$$U^H A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$为 A 的特征值，又 $A^2=E$，于是有 $\lambda_i=1$ 或－1．不妨设有 r 个 1，$n-r$ 个－1．记 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_r=1$，$\lambda_{r+1}=\lambda_{r+2}=\cdots=\lambda_{n-r}=-1$，这样上式即为

$$U^H A U = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_{n-r} \end{bmatrix}$$

3－15　见典型例题 3.24.

3－16　证明：设 λ 为 AB 的任意一个特征值，于是有 $|\lambda E-AB|=0$，由于 A 为正定的 Hermite 矩阵，所以存在可逆矩阵 Q，使得 $A=Q^HQ$，将此式代入 $|\lambda E-AB|=0$ 中可得

$$\begin{aligned} 0 &= |\lambda E - Q^H Q B| = |\lambda Q^H (Q^H)^{-1} - Q^H Q B| \\ &= |Q^H|\,|\lambda E - Q B Q^H|\,|(Q^H)^{-1}| \end{aligned}$$

从而有 $|\lambda E-QBQ^H|=0$，这表明 λ 也是 QBQ^H 的特征值．注意到 QBQ^H 是一个 Hermite 矩阵，故 λ 必为实数．同理可证 BA 的特征值也是实数．

3－17　见典型例题 3.25.

3－18　见典型例题 3.26.

3－19　证明：由于 A 为 Hermite 矩阵，所以存在酉矩阵 U，使得

$$U^{H}AU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，又 A 为酉矩阵，于是 $|\lambda_i|=1$，这样有 $\lambda_i=1$，上式即为 $U^{H}AU=E$。

3－20　(1) 证明：设 A 与 B 均为半正定的 Hermite 矩阵，那么对于任意一组不全为零的复数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都有 Hermite 二次齐次式

$$f(X)=X^{H}AX\geqslant 0,f(X)=X^{H}BX\geqslant 0$$

其中 $X=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{T}$，于是有 $f(X)=X^{H}(A+B)X\geqslant 0$，这表明 $A+B$ 也是一个半正定的 Hermite 矩阵。

(2) 设 A 是一个半正定的 Hermite 矩阵，B 为正定的 Hermite 矩阵，那么对于任意一组不全为零的复数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都有

$$f(X)=X^{H}AX\geqslant 0,f(X)=X^{H}BX>0$$

于是有 $f(X)=X^{H}(A+B)X>0$，这表明 $A+B$ 是一个正定的 Hermite矩阵。

3－21　见典型例题 3.27.

3－22　见典型例题 3.14.

3－23　证明：由于 $A^{H}=A$，所以 $(A+tE)^{H}=A+tE$，即 $A+tE$ 也是一个 Hermite 矩阵，设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值，那么 $A+tE$ 的特征值为 $\lambda_1+t,\lambda_2+t,\cdots,\lambda_n+t$。只要取 $t>\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_n|\}$，那么 $\lambda_1+t,\lambda_2+t,\cdots,\lambda_n+t$ 均大于零，此时 $A+tE$ 为正定 Hermite 矩阵。

容易验证 $(A-tE)^{H}=A-tE$，这表明 $A-tE$ 也是一个 Hermite 矩阵，设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值，那么 $A-tE$ 的特征值为 $\lambda_1-t,\lambda_2-t,\cdots,\lambda_n-t$，只要取 $t<\min\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_n|\}$，那么 $\lambda_1-t,\lambda_2-t,\cdots,\lambda_n-t$ 均小于零，此时 $A-tE$ 为负定 Hermite 矩阵。

3－24　见典型例题 3.17.

3－25　证明：由已知条件可得

$$U^{H}=(-A-E)^{-1}(-A+E)=(A+E)^{-1}(A-E)$$

于是

$$\begin{aligned}U^{H}U&=(A+E)^{-1}(A-E)(A+E)(A-E)^{-1}\\&=(A+E)^{-1}(A+E)(A-E)(A-E)^{-1}\\&=E\end{aligned}$$

同理可证 $UU^{H}=E$，这表明 U 为酉矩阵．

3－26　见典型例题 3.15.

3－27　证明：(1) 容易证明 $A^{H}A$ 和 AA^{H} 都是 Hermite 矩阵．任取 $0\neq X\in C^{n\times 1}$，那么有 $AX=0$ 或 $AX\neq 0$，于是对于 Hermite 二次型

$$f(X)=X^{H}A^{H}AX=(AX)^{H}AX$$

总有 $f(X)\geqslant 0$，这表明 $A^{H}A$ 是半正定的 Hermite 矩阵．同样可以证明 AA^{H} 也是一个半正定的 Hermite 矩阵．

(2) 设矩阵 A 的秩为 r，λ_i 是 AA^{H} 的特征值，u_i 是 $A^{H}A$ 的特征值，那么它们均为实数，由(1)可设

$$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_r\geqslant\lambda_{r+1}=\lambda_{r+2}=\cdots=\lambda_m=0$$
$$u_1\geqslant u_2\geqslant\cdots\geqslant u_r>u_{r+1}=u_{r+2}=\cdots=u_n=0$$

下面证明

$$\lambda_i=u_i>0\qquad(i=1,2,\cdots,r)$$

对于任意一个 λ_i，$1\leqslant i\leqslant r$，由 $AA^{H}X=\lambda_i X$ 可知 $A^{H}AA^{H}X=\lambda_i A^{H}X$，而且 $A^{H}X\neq 0$，于是 λ_i 又是 $A^{H}A$ 的特征值，$A^{H}X$ 为其对应的特征向量．同样可以证明 u_i 也是 AA^{H} 的特征值，但目前还不能确定 $\lambda_i=u_i$.

设 $X_1,X_2,\cdots,X_p$ 是 AA^{H} 的属于特征值 $\lambda_i\neq 0$ 的线性无关的特征向量，由前面的证明可知 $A^{H}X_1,A^{H}X_2,\cdots,A^{H}X_p$ 是 $A^{H}A$ 的属于特征值 λ_i 的特征向量，而且 $A^{H}X_1,A^{H}X_2,\cdots,A^{H}X_p$ 是线性无关的．设有一些复数 $k_1,k_2,\cdots,k_p$，使得

$$k_1A^{H}X_1+k_2A^{H}X_2+\cdots+k_pA^{H}X_p=0$$

两端左乘 A 有

$$k_1AA^HX_1 + k_2AA^HX_2 + \cdots + k_pAA^HX_p = 0$$

于是得到

$$k_1\lambda_iX_1 + k_2\lambda_iX_2 + \cdots + k_p\lambda_iX_p = 0$$

由于 $\lambda_i \neq 0$,所以

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_pX_p = 0$$

又因 $X_1, X_2, \cdots, X_p$ 是线性无关的,故

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_p$$

这表明 $A^HX_1, A^HX_2, \cdots, A^HX_p$ 的确是线性无关的. 从而 AA^H 的 重特征值也是 A^HA 的 p 重特征值,因此 $\lambda_i = u_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, r)$.

3-28 证明:根据正规矩阵的结构定理(教材定理 3.5.3) 可知存在酉矩阵 U,使得

$$A = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)U^H$$

(1) 如果 $A^r = 0$,那么

$$A^r = U\mathrm{diag}(\lambda_1^r, \lambda_2^r, \cdots, \lambda_n^r)U^H$$

由于酉矩阵 U 是可逆矩阵,所以有

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

于是有

$$A = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)U^H = 0$$

(2) 如果 $A^2 = A$,那么有

$$U\mathrm{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2)U^H = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)U^H$$

于是可得

$$\lambda_i^2 = \lambda_i, i = 1, 2, \cdots, n$$

那么 $\lambda_i = 1$ 或 $\lambda_i = 0, i = 1, 2, \cdots, n$,这样

$$A = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)U^H = A^H$$

(3) 如果 $A^3 = A^2$,那么有

$$U\mathrm{diag}(\lambda_1^3, \lambda_2^3, \cdots, \lambda_n^3)U^H = U\mathrm{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2)U^H$$

于是有

$$\lambda_i^3 = \lambda_i^2, i = 1, 2, \cdots, n$$

从而 $\lambda_i=1$ 或 $\lambda_i=0, i=1,2,\cdots,n$.这样

$$A^2=U\mathrm{diag}(\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2)U^H=U\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)U^H=A$$

3—29 证明：(1) ⇒ (2)若 $A+B$ 为正规矩阵,则有

$$(A+B)^H(A+B)=(A+B)(A+B)^H$$

展开可得

$$(A^H+B^H)(A+B)=(A+B)(A^H+B^H)$$
$$(A-B)(A+B)=(A+B)(A-B)$$
$$AB=BA$$

(2) ⇒ (3) 若 $AB=BA$,则有

$$(AB)^H=B^HA^H=-BA=-AB$$

(3) ⇒(1) 若$(AB)^H=-AB$,则有

$$-AB=B^HA^H=-BA$$

此即

$$AB=BA$$

于是

$$\begin{aligned}&(A+B)^H(A+B)=(A^H+B^H)(A+B)\\&=(A-B)(A+B)=A^2-B^2\\&(A+B)(A+B)^H=(A+B)(A^H+B^H)\\&=(A+B)(A-B)=A^2-B^2\end{aligned}$$

故

$$(A+B)^H(A+B)=(A+B)(A+B)^H$$

这表明 $A+B$ 为正规矩阵.

3—30 证明：设 $A=S+\mathrm{i}T$,其中 S,T 为 Hermite 矩阵,那么 $A^H=S^H-\mathrm{i}T^H=S-\mathrm{i}T$,又由

$$\begin{cases}A=S+\mathrm{i}T\\A^H=S-\mathrm{i}T\end{cases}$$

可得

$$S=\frac{A+A^H}{2},T=\frac{A^H-A}{2}\mathrm{i}$$

于是有

$$A = \frac{A + A^H}{2} + i(\frac{A^H - A}{2}i)$$

下面来证明这种表示具有唯一性，假设 $A=S_1+iT_1=S_2+iT_2$，那么 $S_1-S_2=i(T_2-T_1)$，于是 $S_1-S_2=(S_1-S_2)^H=[i(T_2-T_1)]^H=-i(T_2-T_1)$. 由此立即可得

$$i(T_2 - T_1) = 0, T_2 = T_1, S_2 = S_1$$

这表明 $A=S+iT$ 这种表示是唯一的. 同理可以证明 $A=B+C=\frac{A+A^H}{2}+\frac{A-A^H}{2}$这种表示也是唯一的.

自测题答案

3.1 解：(1) 设 $\alpha_1=k_1\beta_1+k_2\beta_2$，将 α_1,β_2,β_2 的具体分量代入此式，解之得 $k_1=-\frac{1}{2}$，$k_2=\frac{1}{6}$，于是有

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}\beta_1 + \frac{1}{6}\beta_2$$

同样可求有

$$\alpha_2 = -\frac{3}{2}\beta_1 + \frac{1}{6}\beta_2$$

从而

$$(\alpha_1,\alpha_1) = (\alpha_1, -\frac{1}{2}\beta_1 + \frac{1}{6}\beta_2) = -\frac{1}{2}(\alpha_1,\beta_1) + \frac{1}{6}(\alpha_1,\beta_2) = 2$$

$$(\alpha_1,\alpha_2) = (\alpha_1, -\frac{3}{2}\beta_1 + \frac{1}{6}\beta_2) = -\frac{3}{2}(\alpha_1,\beta_1) + \frac{1}{6}(\alpha_1,\beta_2) = 1$$

$$(\alpha_2,\alpha_1) = (\alpha_1,\alpha_2) = 1$$

$$(\alpha_2,\alpha_2) = (\alpha_2, -\frac{3}{2}\beta_1 + \frac{1}{6}\beta_2) = -\frac{3}{2}(\alpha_2,\beta_1) + \frac{1}{6}(\alpha_2,\beta_2) = 2$$

由此立即可得基 α_1,α_2 的度量矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) 设从基 α_1,α_2 到基 β_1,β_2 过渡矩阵 P，即 $[\beta_1,\beta_2]=$

$[\alpha_1,\alpha_2]P$，将 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 代入此式，可得

$$P=\begin{bmatrix}1 & 9\\ -1 & -3\end{bmatrix}$$

那么

$$B=P^{T}AP=\begin{bmatrix}2 & 12\\ 12 & 126\end{bmatrix}$$

评注：对于 (1)严格按照度量矩阵的定义来求解，对于(2)则要利用不同基的度量矩阵是合同的结论．

3.2 **解**：(1) 设 A 的 n 个列向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，而且彼此正交，于是有

$$A^{T}A=\begin{bmatrix}\alpha_1^{T}\\ \alpha_2^{T}\\ \vdots\\ \alpha_n^{T}\end{bmatrix}[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=\begin{bmatrix}\alpha_1^{T}\alpha_1 & \alpha_1^{T}\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^{T}\alpha_n\\ \alpha_2^{T}\alpha_1 & \alpha_2^{T}\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{T}\alpha_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_n^{T}\alpha_1 & \alpha_n^{T}\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^{T}\alpha_n\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}|\alpha_1|^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & |\alpha_2|^2 & & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & |\alpha_n|^2\end{bmatrix}$$

取

$$B=\begin{bmatrix}\frac{1}{|\alpha_1|} & & & \\ & \frac{1}{|\alpha_2|} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{|\alpha_n|}\end{bmatrix}$$

记 $Q=AB$，那么

$$Q^{T}Q=B^{T}A^{T}AB$$

$$
=\begin{bmatrix}\frac{1}{\|\alpha_1\|} & & & \\ & \frac{1}{\|\alpha_2\|} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\|\alpha_n\|}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\|\alpha_1\|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \|\alpha_2\|^2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \|\alpha_n\|^2\end{bmatrix}\times
$$

$$
\begin{bmatrix}\frac{1}{\|\alpha_1\|} & & & \\ & \frac{1}{\|\alpha_2\|} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\|\alpha_n\|}\end{bmatrix}=E
$$

这表明Q为正交矩阵.

(2) 设C的n个列向量为$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$,而且标准正交,于是有

$$
C^TC=\begin{bmatrix}\eta_1^T \\ \eta_2^T \\ \vdots \\ \eta_n^T\end{bmatrix}[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]=\begin{bmatrix}\eta_1^T\eta_1 & \eta_1^T\eta_2 & \cdots & \eta_1^T\eta_n \\ \eta_2^T\eta_1 & \eta_2^T\eta_2 & \cdots & \eta_2^T\eta_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta_n^T\eta_1 & \eta_n^T\eta_2 & \cdots & \eta_n^T\eta_n\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}
$$

(3) 整理此方程有$(A-E)X=B$,其中

$$
A-E=\begin{bmatrix}-a & -b & c & d \\ b & -a & -d & c \\ -c & d & -a & b \\ d & c & b & a\end{bmatrix}
$$

容易计算

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\begin{bmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{bmatrix}$$

从而

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}$$

那么

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{B} &= \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\begin{bmatrix} -a & b & -c & d \\ -b & -a & d & c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\begin{bmatrix} -a+b-c+d \\ -b-a+d+c \\ c-d-a+b \\ d+c+b+a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.3 证:设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

因为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,且 $|\boldsymbol{A}|=1$,所以 $\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,于是可得

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

故

$$\begin{cases} a_{11}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32} \\ a_{21}=a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33} \\ a_{31}=a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22} \end{cases}$$

3.4 证明:(1) 由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$,且 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$

$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})$，于是有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} &= [(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}]^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}\\ &= (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}\\ &= (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}\\ &= \boldsymbol{E}\end{aligned}$$

这表明 $\boldsymbol{B}$ 为正交矩阵．

(2) 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{Q})^{-1}$，由于 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}^{-1}$，所以有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} &= (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}) = (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{Q}^{-1})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q}^{-1})\\ &= (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q}^{-1}) = -(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{Q})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q})\end{aligned}$$

由于$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q})=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{Q})$，所以有

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{Q})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q})=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{Q})^{-1}$$

于是有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，即 $\boldsymbol{A}$ 为实反对称矩阵．

又

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}\\ =&[\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{Q})^{-1}][\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{Q})^{-1}]^{-1}\\ =&[\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{Q})^{-1}][(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{Q})^{-1}]^{-1}\\ =&[\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{Q})^{-1}]\cdot\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{Q})\\ =&\boldsymbol{Q}\end{aligned}$$

因此存在实反对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，使得

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}$$

3.5 证明：首先证明 $\mathscr{A}$ 一定是线性变换．对于任意的 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}\in V$，有

$$\begin{aligned}&(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})-\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})-\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})-\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})-\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))\\ =&(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}))-2(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}))-2(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\\ &\boldsymbol{\beta}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))+(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}))+(\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))+2(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\\ &\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))\\ =&(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})-2(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})-2(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})+\\ &(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})+2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\\ =&0\end{aligned}$$

故 $\mathscr{A}(\alpha+\beta)=\mathscr{A}(\alpha)+\mathscr{A}(\beta)$.

再证明 $\mathscr{A}(k\alpha)=k\mathscr{A}(\alpha)$，由于

$$
\begin{aligned}
&(\mathscr{A}(k\alpha) - k\mathscr{A}(\alpha), \mathscr{A}(k\alpha) - k\mathscr{A}(\alpha)) \\
&= (\mathscr{A}(k\alpha), \mathscr{A}(k\alpha)) - k\mathscr{A}(\alpha), \mathscr{A}(k\alpha)) - k(\mathscr{A}(k\alpha), \\
&\quad \mathscr{A}(\alpha)) + k^2(\mathscr{A}(\alpha), \mathscr{A}(\alpha)) \\
&= (k\alpha, k\alpha) - k(\alpha, k\alpha) + k(k\alpha, \alpha) + k^2(\alpha, \alpha) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

故 $\mathscr{A}(k\alpha)=k\mathscr{A}(k\alpha)$. 这就证明了 $\mathscr{A}$ 是一个线性变换，从而 $\mathscr{A}$ 为正交变换.

3.6 证明：首先证明 $\mathscr{A}$ 是一个线性变换. 设 $\alpha_1, \alpha_2 \in R^n$, $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$，则有

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A}(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2) &= (l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2) - k(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2, \beta)\beta \\
&= l_1\alpha_1 - k(l_1\alpha_1, \beta)\beta + l_2\alpha_2 - k(l_2\alpha_2, \beta)\beta \\
&= l_1\mathscr{A}(\alpha_1) + l_2\mathscr{A}(\alpha_2)
\end{aligned}
$$

所以 $\mathscr{A}$ 是一个线性变换. 又

$$
\begin{aligned}
(\mathscr{A}(\alpha), \mathscr{A}(\alpha)) &= (\alpha - k(\alpha, \beta)\beta, \alpha - k(\alpha, \beta)\beta) \\
&= (\alpha, \alpha) + (\alpha, \beta)^2(k^2 - 2k)
\end{aligned}
$$

所以当 $k=0$, $k=2$ 时，有

$$
(\mathscr{A}(\alpha), \mathscr{A}(\alpha)) = (\alpha, \alpha)
$$

即 $\mathscr{A}$ 是一个正交变换.

3.7 解：首先求出 A 的特征值 $\lambda_1=1, \lambda_2=\mathrm{i}, \lambda_3=-\mathrm{i}$. 对于特征值 $\lambda_1=1$，求得一个特征向量为 $X=[1,1,1]^{\mathrm{T}}$，将其单位化得到 $u_1=[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]^{\mathrm{T}}$，再求出两个与 u 正交的标准正交向量

$$
u_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]^{\mathrm{T}}, \qquad u_3 = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right]^{\mathrm{T}}
$$

取

$$U_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

于是有

$$U_1^{H}AU_1=\begin{bmatrix}1 & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\sqrt{2}\\ 0 & 0 & -\sqrt{3}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0\end{bmatrix}$$

令

$$B=\begin{bmatrix}0 & -\sqrt{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0\end{bmatrix}$$

B 的两个特征值为 $\lambda_1=\mathrm{i},\lambda_2=-\mathrm{i}$. 对于 i 有一个特征向量 $X=[-\sqrt{3},\mathrm{i}]^{\mathrm{T}}$，将其单位化得到 $\nu_1=\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\mathrm{i}}{2}\right]^{\mathrm{T}}$，再找一个与 ν_1 正交的标准向量 $\nu_2=\left[-\frac{\mathrm{i}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^{\mathrm{T}}$. 记

$$W=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\mathrm{i}}{2}\\ \frac{\mathrm{i}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

$$U_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & W\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\mathrm{i}}{2}\\ 0 & \frac{\mathrm{i}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

于是有

$$U_2^H U_1^H A U_1 U_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} & -\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix} = R$$

那么

$$U = U_1 U_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{12}\mathrm{i} & \frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{i} \\ \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{6}}{8}+\frac{\sqrt{6}}{12}\mathrm{i} & \frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{i} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{6}}{6}\mathrm{i} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

即为所求的酉矩阵 U，且使得 $U^H AU$ 为上三角矩阵．

3.8　解：首先求出矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda^2-2)$，所以其特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=\sqrt{2},\lambda_3=-\sqrt{2}$，它们对应的特征向量分别为 $\alpha_1=[0,\mathrm{i},1]^T,\alpha_2=[\sqrt{2},-\mathrm{i},1]^T,\alpha_3=[-\sqrt{2},-\mathrm{i},1]^T$，再将它们单位化得 $\eta_1=[0,\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}]^T,\eta_2=[\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{\mathrm{i}}{2},\frac{1}{2}]^T,\eta_3=[-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{\mathrm{i}}{2},\frac{1}{2}]^T$，故所求的酉矩阵

$$U = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & -\frac{\mathrm{i}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

且 $U^H AU$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \sqrt{2} & \\ & & -\sqrt{2} \end{bmatrix}
$$

3.9 解：首先求出 A 的特征多项式为

$$
|\lambda E - A| = (\lambda - a - 1)^2(\lambda - a + 2)
$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=a+1,\lambda_3=a-2$.

对于特征值 $a+1$，可求得两个线性无关的特征向量

$$
\alpha_1 = [1,1,0]^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = [1,0,1]^{\mathrm{T}}
$$

对于特征值 $a-2$，求得一个特征向量

$$
\alpha_3 = [-1,1,1]^{\mathrm{T}}
$$

取

$$
P = [\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

于是有

$$
P^{-1}AP = \begin{bmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix}
$$

由于 A 的特征值为 $a+1,a+1,a-2$，所以 $A-4E$ 的特征值为 $a+1-4,a+1-4,a-2-4$，即为 $a-3,a-3,a-6$. 因此

$$
|A - 4E| = (a-3)^2(a-6)
$$

3.10 证明：必要性 见典型例题 3.17 (2).

充分性 设存在酉矩阵 U，使得

$$
U^{\mathrm{H}}AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}, U^{\mathrm{H}}BU = \begin{bmatrix} u_1 & & \\ & \ddots & \\ & & u_n \end{bmatrix}
$$

那么有

$$
A = U\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}U^{\mathrm{H}}, B = U\begin{bmatrix} u_1 & & \\ & \ddots & \\ & & u_n \end{bmatrix}U^{\mathrm{H}}
$$

从而得到

$$AB = U\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}U^{H}U\begin{bmatrix}u_1 & & \\ & \ddots & \\ & & u_n\end{bmatrix}U^{H}$$

$$= U\begin{bmatrix}u_1 & & \\ & \ddots & \\ & & u_n\end{bmatrix}U^{H}U\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}U^{H} = BA$$

3.11　见习题3－27.

3.12　(1) 证明：设　$a=m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2, b=n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2$. 记

$$A = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ m_2 & -m_1 & m_4 & -m_3 \\ m_3 & -m_4 & -m_1 & m_2 \\ m_4 & m_3 & -m_2 & -m_1 \end{bmatrix}$$

那么

$$AA^{T} = aE$$

于是有

$$ab = a\beta\beta^{T} = \beta(aE)\beta^{T} = \beta AA^{T}\beta^{T}$$

其中 $\beta=[n_1, n_2, n_3, n_4]$，记 $\beta A=[p_1, p_2, p_3, p_4]$，

$$ab = \beta AA^{T}\beta^{T} = \beta A(\beta A)^{T} = [p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4]\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{bmatrix}$$

$$= p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2$$

这表明 ab 也可表示成 p_1, p_2, p_3, p_4 的平方和.

(2) 由于 $1457=31\times 47$，其中

$$31 = 2^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2$$

$$47 = 1^2 + 1^2 + 3^2 + 6^2$$

令

$$a=31, b=47,\quad \beta=[1,1,3,6],\quad A=\begin{bmatrix}2&3&3&3\\3&-2&3&-3\\3&-3&-2&3\\3&3&-3&-2\end{bmatrix}$$

那么

$$\beta A=\begin{bmatrix}1&1&3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3&3&3\\3&-2&3&-3\\3&-3&-2&3\\3&3&-3&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}32&10&-18&-3\end{bmatrix}$$

从而

$$1457=32^2+10^2+(-18)^2+(-3)^2$$

第四章

习题答案

4—1 (1) 对矩阵 A 只作行初等变换得到行简化阶梯形矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2&1&-2&3&1\\2&5&-1&4&1\\1&3&-1&2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{8}{5}&-\frac{2}{5}\\0&1&0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\0&0&1&\frac{1}{5}&-\frac{4}{5}\end{bmatrix}$$

取

$$B=\begin{bmatrix}2&1&-2\\2&5&-1\\1&3&-1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{8}{5}&-\frac{2}{5}\\0&1&0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\0&0&1&\frac{1}{5}&-\frac{4}{5}\end{bmatrix}$$

于是 $A=BC$ 即为其满秩分解表达式.

(2) 对矩阵 A 只作行初等变换得到行简化阶梯形矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\0&1&1&1&1\\2&3&1&3&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0&-1\\0&1&1&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

取

$$B=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\2&3\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&0&-1&0&-1\\0&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

于是 $A=BC$ 即为其满秩分解表达式.

(3) 对矩阵 A 只作行初等变换得到行简化阶梯形矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&0&1&2\\1&2&2&1&3&3\\2&4&3&1&4&5\\4&8&6&2&8&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&0&1&2\\0&0&1&1&2&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

取

$$B=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\2&3\\4&6\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&2&0&-1&-1&1\\0&0&1&1&2&1\end{bmatrix}$$

于是 $A=BC$ 即为其满秩分解表达式.

(4) 对矩阵 A 只作行初等变换得到行简化阶梯形矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&1&1&10\\3&6&1&4&2&36\\2&4&0&2&2&27\\6&12&1&7&5&73\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&1&1&0\\0&0&1&1&-1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

取

$$B=\begin{bmatrix}1&0&10\\3&1&36\\2&0&27\\6&1&73\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&2&0&1&1&0\\0&0&1&1&-1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

于是 $A=BC$ 即为其满秩分解表达式.

4－2　解：首先注意到 A 的秩为 1，同时计算出 AA^H 的特征值 $\lambda_1=6,\lambda_2=0$，所以 A 的奇异值为 $\delta_1=\sqrt{6}$. 然后计算出分别属于 λ_1,λ_2 的标准正交特征向量

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,1]^T,\eta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}[-1,1]^T$$

记 $U=[\eta_1,\eta_2]$，$V_1=\eta_1$. 现在计算

$$V_1=A^HU_1\Delta^{-H}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}$$

取

$$V_2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix},$$

$$V=[V_1,V_2]=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

于是

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{6} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{3}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

或者

$$A=U_r\Delta V_r^{H}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\sqrt{6}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}$$

4－3 (1) 见典型例题 4.11.

(2) 解：容易验证 $AA^{H}=A^{H}A$，所以 A 是正规矩阵．下面求 A 的谱分解

$$|\lambda E-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=-1$. 对于特征值 $\lambda_1=2$ 时，其对应的单位特征向量为 $\xi_1=\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right]^{T}$. 对于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 时，其对应的特征向量为 $\alpha_2=[1,0,-1]^{T},\alpha_3=[1,-1,0]^{T}$. 将 α_2,α_3 正交化和单位化，得到 $\xi_2=\left[\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\right]^{T}$, $\xi_3=\left[\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right]^{T}$.

于是

$$G_1=\xi_1\xi_1^{H}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$G_2 = \xi_2\xi_2^H + \xi_3\xi_3^H = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

因此 $A=2G_1-G_2$ 即为其谱分解表达式.

4－4 已知

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

求得 $|\lambda E-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-2)$，所以其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=2$，对于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 其对应的特征向量为 $\alpha_1=[-2,1,$

$0]^{T}$，$\alpha_2=[-4,0,1]^{T}$；对于特征值 $\lambda_3=2$ 其对应的特征向量为 $\alpha_3=[4,2,1]^{T}$，于是

$$P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}-2 & -4 & 4\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

而且有

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{bmatrix},(P^{-1})^{T}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

取

$$\beta_1=\left[-\frac{1}{6},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right]^{T}$$

$$\beta_2=\left[-\frac{1}{12},-\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right]^{T}$$

$$\beta_3=\left[\frac{1}{12},\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right]^{T}$$

令

$$G_1=\alpha_1\beta_1^{T}+\alpha_2\beta_2^{T}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3}\\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

$$G_2 = \alpha_3\beta_3^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

故 $A=-G_1+2G_2$ 记为矩阵 A 的谱分解表达式.

自测题答案

4.1 (1) 对矩阵 A 只作行初等变换得到行简化阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

取

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

于是 $A=BC$ 即为其满秩分解表达式.

(2) 对矩阵 A 只作行初等变换得到行简化阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

取

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

于是 $A=BC$ 即为其满秩分解表达式.

4.2 证明: 必要性 如果 $CX=0$, 那么显然有 $BCX=0$, 即

$AX=0$.

充分性　如果 $AX=0$，那么显然有 $BCX=0$，由于 $A=BC$ 为满秩分解，所以矩阵 B 的列向量线性无关，由此可知方程组 $BY=0$ 只有零解，于是有 $CX=0$.

4.3　解：仿照典型例题 4.2 及其评注，用 Schmidt 正交化方法计算可得

$$U=\begin{bmatrix}\frac{5}{15} & -\frac{2}{15} & -\frac{14}{15}\\ \frac{10}{15} & \frac{11}{15} & \frac{2}{15}\\ \frac{10}{15} & -\frac{10}{15} & \frac{5}{15}\end{bmatrix},R=\begin{bmatrix}9 & 48 & 15\\ 0 & 15 & -9\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

那么 $A=UR$ 即为矩阵 A 的正交三角分解表达式.

4.4　解：首先注意到矩阵 A 的秩为 2，同时计算出矩阵 AA^H 的特征值为 $\lambda_1=9,\lambda_2=4,\lambda_3=0$，所以 A 的奇异值为 $\delta_1=3,\delta_2=2$. 然后分别计算出属于 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的标准正交特征向量

$$\eta_1=[0,1,0]^T,\eta_2=[1,0,0]^T,\eta_3=[0,0,1]^T$$

记 $U=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]$，$V_1=[\eta_1,\eta_2]$. 现在计算

$$V_1=A^HU_1\Delta^{-H}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

取 $V=V_1$，于是

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

或者

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

4.5　解：(1) 如果 A 为一个正定的 Hermite 矩阵，那么 A 的

n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 均大于零．不妨设 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$，对于这种情况 $A=U\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)U^H$ 即为 A 的奇异值分解表达式．

(2) 如果 A 为一个半正定的 Hermite 矩阵，那么 A 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，均大于或等于零，不妨设 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_r>\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_n=0$，对于这种情况 $A=U\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)U^H$ 即为 A 的奇异值分解．

(3) 如果 A 为一个不定的 Hermite 矩阵，或负定 Hermite 矩阵，或半负定 Hermite 矩阵，显然

$$A=U\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)U^H$$

不是 A 的奇异值分解，因为奇异值均为正数．但此中所求的 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 不一定或者根本不是正数．

4.6 解：(1) 容易验证这两个矩阵都是正规矩阵．

(2) 首先求出矩阵 A 的特征值和特征向量．由于

$$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda^2+2)$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=\sqrt{2}\mathrm{i},\lambda_2=-\sqrt{2}\mathrm{i},\lambda_3=0$．然后求出分别属于这三个特征值的线性无关的特征向量．对于特征值 $\lambda_1=\sqrt{2}\mathrm{i}$，求得一个特征向量为 $\alpha_1=[-\sqrt{2},-\mathrm{i},1]^T$；对于特征值 $\lambda_2=-\sqrt{2}\mathrm{i}$，求得一个特征向量为 $\alpha_2=[\sqrt{2},-\mathrm{i},1]^T$；对于特征值 $\lambda_3=0$，求得一个特征向量为 $\alpha_3=[0,\mathrm{i},1]^T$．再将其单位化，得到三个标准正交特征向量

$$\eta_1=\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{\mathrm{i}}{2},\frac{1}{2}\right]^T,\eta_2=\left[\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{\mathrm{i}}{2},\frac{1}{2}\right]^T,$$

$$\eta_3=\left[0,\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T$$

于是有

$$G_1=\eta_1\eta_1^H=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}i}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4}\\ \frac{\sqrt{2}i}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{i}{4}\\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{i}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$G_2=\eta_2\eta_2^H=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}i}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4}\\ -\frac{\sqrt{2}i}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{i}{4}\\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{i}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$G_3=\eta_3\eta_3^H=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{i}{2}\\ 0 & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

那么其谱分解表达式为

$$A=-\sqrt{2}iG_1+\sqrt{2}iG_2+0G_3$$

下面来看矩阵 $\boldsymbol{B}$. 首先求出矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值和特征向量. 由于

$$|\lambda E-B|=(\lambda-9)(\lambda^2+81)$$

所以其特征值为 $\lambda_1=-9i,\lambda_2=9i,\lambda_3=9$. 然后求出分别属于这三个特征值的线性无关的特征向量. 对于特征值 $\lambda_1=-9i$,求得一个特征向量为 $\alpha_1=\left[-\frac{i}{2},1,1\right]^T$;对于特征值 $\lambda_2=9i$,求得一个特征向量为 $\alpha_2=\left[i,-\frac{1}{2},1\right]^T$;对于特征值 $\lambda_3=9$,求得一个特征向量为 $\alpha_3=\left[i,1,-\frac{1}{2}\right]^T$. 再将其单位化,得到三个标准正交特征向量

$$\eta_1=\left[-\frac{i}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]^T,\eta_2=\left[\frac{2i}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]^T,\eta_3=\left[\frac{2i}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right]^T$$

于是有

$$G_1 = \eta_1\eta_1^H = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2i}{9} & -\frac{2i}{9} \\ \frac{2i}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2i}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \eta_2\eta_2^H = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{2i}{9} & \frac{4i}{9} \\ \frac{2i}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{4i}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

$$G_3 = \eta_3\eta_3^H = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{4i}{9} & -\frac{2i}{9} \\ -\frac{4i}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2i}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

那么其谱分解表达式为

$$A = -9iG_1 + 9iG_2 + 9G_3$$

4.7 解:(1) 首先求出矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 0 \\ -8 & \lambda - 2 & a \\ 0 & 0 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 6)^2$$

所以其特征值为 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = 6$. 由于 A 是单纯矩阵,从而 $r(6E - A) = 1$

$$6E - A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由此可得 $a = 0$.

(2) 对于特征值-2,求出一个特征向量$\alpha_1=[1,-2,0]^T$. 对于特征值6,求出两个线性无关的特征向量$\alpha_2=[1,2,0]^T$,$\alpha_3=[0,0,1]^T$. 取

$$P=\begin{bmatrix}1&1&0\\-2&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

且有$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{bmatrix}$.

(3) 由(2)可得,具体过程仿照典型例题4.12或者教材例4.5.3,请读者自行验证.

第五章

习题答案

5－1　证明:(1)由向量范数的三角不等式有$\|\alpha+\beta-\beta\|\leqslant\|\alpha-\beta\|+\|\beta\|$,此即

$$\|\alpha-\beta\|\geqslant\|\alpha\|-\|\beta\|$$

(2)由矩阵范数的三角不等式有$\|A-B+B\|\leqslant\|A-B\|+\|B\|$,此即

$$\|A-B\|\geqslant\|A\|-\|B\|$$

5－2　证明:(1) 由教材定理5.2.1可知$\|A\|_F=[\mathrm{tr}(A^HA)]^{\frac{1}{2}}$,此即矩阵的Frobenius范数的定义,因此$\|A\|=[\mathrm{tr}(A^HA)]^{\frac{1}{2}}$是矩阵范数.

(2) ① $\|A\|=n\max\limits_{i,j}|a_{ij}|\geqslant0$,显然有,$\|A\|=0$当且仅当$A=0$.

② $\|kA\|=n\max\limits_{i,j}|ka_{ij}|=|k|\max\limits_{i,j}|a_{ij}|=k\|A\|$.

③ $\|A+B\|=n\max\limits_{i,j}|a_{ij}+b_{ij}|\leqslant n\max\limits_{i,j}|a_{ij}|+n\max\limits_{i,j}|b_{ij}|$

$=\|A\|+\|B\|$.

责任编辑：孙金芳
封面设计：庚辰年代

ISBN 7-5640-0474-6

9 787564 004743 >

ISBN 7-5640-0474-6
定价：14.00元