浸入、淹没、嵌入及子流形

1 浸入

2 子流形

2.1 正则子流形的局部结构

正则子流形的结构非常简单

性质 2.1. *每个浸入子流形的局部结构是一个坐标片*

下面给出两个证明流形的子集是嵌入子流形的充分条件

定理 2.1. *[淹没定理] 设 $f: M^m \to N^n$ 为光滑映射，$q \in f(M)$。如果 f 在 $A = f^{-1}(q)$ 上的每一点为淹没，则 A 是 M 的 $m-n$ 维闭正则子流形*

定理 2.2 (子浸入定理)**.** *设 $f: M^m \to N^n$ 为光滑映射，且 $\mathrm{rank} f \equiv r$。对于 $q \in f(M)$，$A = f^{-1}(q)$ 是 M 的 $m-r$ 维闭正则子流形*

3 Stiefel 流形

定义 3.1 (Stiefel 流形)**.** *设 $\mathrm{St}(p,n)$ $(p \leq n)$ 表示所有 $n \times p$ 的正交矩阵的集合，即*

$$\mathrm{St}(p,n) := \{X \in \mathbb{R}^{n\times p} : X^T X = I_p\}$$

其中 I_p 表示 $p \times p$ 的单位矩阵。我们称 $\mathrm{St}(p,n)$ 为 Stiefel 流形

性质 3.1. *Stiefel 流形是 $\mathbb{R}^{n\times p}$ 的嵌入子流形*

证明. 考虑映射 $f: \mathbb{R}^{n\times p} \to S_{p\times p} : X \mapsto X^T X - I_p$，其中 $S_{p\times p}$ 表示所有 $p \times p$ 的对称矩阵。显然，$\mathrm{St}(p,n) = f^{-1}(0_p) \subset \mathbb{R}^{n\times p}$。下证 f 在 $\mathrm{St}(p,n)$ 中的每一点 X 都是浸入，即证明 $\mathrm{rank}(f) = \dim(S_{p\times p})$。因为 f 的定义域和值域都为线性空间，因此计算 f 的秩不依赖坐标图。即 $\mathrm{rank}(f) = J(f)$，对

于 f 来说，求 jacobian 矩阵就是对 f 求导，f 在 X 点的导数为

$$\begin{aligned}
Df(X)[Z] &= \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{f(X+\alpha Z) - f(X)}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{(X+\alpha Z)^T (X+\alpha Z) - X^T X}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha \to 0^+} X^T Z + Z^T X + \alpha Z^T Z \\
&= X^T Z + Z^T X
\end{aligned}$$

对任意 $X \in \mathrm{St}(p,n)$，选取 $\frac{1}{2} X \hat{Z}$ 作为方向，其中 $\hat{Z} \in S_{p\times p}$，则

$$Df(X)\left[\frac{1}{2} X \hat{Z}\right] = \hat{Z}$$

因为 $X^T X = I_p, \hat{Z}^T = \hat{Z}$。因此 $\dim(f) = \dim(S_{p\times p})$，从而 f 是浸入。由定理 2.1可得，$\mathrm{St}(p,n)$ 是 $\mathbb{R}^{n\times p}$ 的嵌入子流形 $\square$