Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels

Cours assuré par Sijia KONG

Rédigé par Corentin 邱天意 P2023

Semestre 2025-2026-1

Table des matières

Première partie

Séries de Fourier

Notations

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré,

$$\mathcal{L}^2(\Omega) \overset{\text{Not}}{=} \left\{ f \in \mathscr{F}(\Omega, \mathbb{K}),\ f \text{ mesurable}, \int_\Omega |f|^2 \,\mathrm{d}\mu < +\infty \right\}$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Pour les séries de Fourier, nous travaillerons avec

$$(\Omega, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{BO}(\mathbb{R}), \lambda)$$

où $\mathcal{BO}(\mathbb{R})$ désigne la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ et λ la mesure usuelle, définie par

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, [a < b] \implies [\lambda([a,b]) = b - a]$$

et

$$E = \left\{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K}),\ f \ 2\pi\text{-périodique et } f|_{[0,2\pi]} \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi]) \right\}$$

Corentin :

- 这门课前半部分讲的 L^p 空间在这里又变回 $\mathcal{L}^p$ 了，导致所有东西后面都拖着 presque partout
- 而且 E 的元素都是 2π 周期，这本书省略了有关周期的一些部分，计算的时候遇到其他周期函数得加上

Remarque I.1

Si $T \in \mathbb{R}_+^*$ et f T-périodique, alors

$$g : x \longmapsto f\left(\frac{T}{2\pi} x\right) \text{ est } 2\pi\text{-périodique}$$

Propriété I.1

La fonction définie sur E, par

$$f \longmapsto \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t}$$

est une semi-norme sur E, notée $\|f\|_{2,[0,2\pi]}$.

Corentin :

用这个就会导致拓扑学的东西无法使用，因为这个 norme 不满足 separation
两个不一样的函数的 norme 可能一样

1 Espaces $\mathcal{L}^p$

Corentin :

我记得孔老师某次习题的时候说过期末的时候 $\mathcal{L}^p$ 空间不考（有待证实）

Définition I.1

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, et $p \in [1, +\infty[$, on note

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu; \mathbb{K}) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K},\ \text{mesurable}, |f|^p \text{ est intégrable sur } \Omega\}$$

Lorsqu'il n'y aura pas ambiguïté, nous noterons simplement $\mathcal{L}^p$.

Rappel I.1

Rappelons quelques inégalités vues dans le cours de topologie ou le cours d'intégration.

1. *Inégalité de Hölder* Si $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$, avec

   $$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

   alors $fg \in \mathcal{L}^1$ et

   $$\int_\Omega |fg| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \sqrt[p]{\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu}\sqrt[q]{\int_\Omega |g|^q \,\mathrm{d}\mu}$$

2. On en déduit l'inégalité de Minkowski.

$$\forall (f,g) \in (\mathcal{L}^p)^2, \quad \sqrt[p]{\int_\Omega |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu} \leqslant \sqrt[p]{\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu} + \sqrt[p]{\int_\Omega |g|^p \,\mathrm{d}\mu}$$

3. $\mathcal{L}^p$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

4. L'application définie par

$$\begin{cases} \mathcal{L}^p \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f \longmapsto \sqrt[p]{\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu} \end{cases}$$

est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p$ (notée $\| \ \|_p$) et on a

$$\forall f \in \mathcal{L}^p, [\|f\|_p = 0] \implies [f = 0 \quad \mu - \text{p.p.}]$$

Rappel I.2 Suite de Cauchy

Soit (E,d) un espace métrique, on appelle *suite de Cauchy* toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geqslant N, \forall q \geqslant N, d(u_p, u_q) \leqslant \varepsilon$$

1. Toute suite de Cauchy est bornée.
2. Toute suite convergente est de Cauchy.
3. Toute suite de Cauchy **à valeurs réelles est convergente**.

Corentin :

度量空间没学过哪来的 rappel，上学期的定义是：

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite d'éléments de E.

On dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **de Cauchy** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \geq n_0$ suffisamment grand tel que, pour tous $p, q \geq n$, la distance entre les deux termes est inférieur à ε.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \geq n_0,\ \forall p \geq n,\ \forall q \geq n,\ N\big(u_p - u_q\big) < \varepsilon.$$

Théorème I.1 Riesz

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $p \in [1, +\infty[$, alors toute suite de Cauchy de $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu; \mathbb{K})$ pour la semi-norme $\| \ \|_p$ converge pour la semi-norme $\| \ \|_p$.

Corentin :

其实就是想说 $\mathcal{L}^p$ 是 complet 的

Remarque I.2

1. Le cas particulier $p = 2$, où la semi-norme découle d'un semi-produit scalaire défini par
$$\forall (f,g) \in \mathcal{L}^2, \langle f, g\rangle \overset{\text{Def}}{=} \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu$$
a la même propriété que toute suite de Cauchy converge pour la semi-norme $\| \ \|_2$. En particulier, on peut lui appliquer le théorème de représentation sous la forme suivante. Comme nous n'avons qu'une semi-norme, la fonction f n'est plus unique, mais deux fonctions f_1 et f_2 représentant ψ seront égales $\mu - \mathbf{p.p.}$
2. On peut généraliser à $p = +\infty$ de la manière suivante
$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{T}, \mu; \mathbb{R}) \overset{\text{Def}}{=} \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ \text{mesurable}, \exists K \in \mathbb{R}_+, |f(x)| \leqslant K \quad \mu - \mathbf{p.p.}\}$$
La semi-norme est alors la semi-norme infinie définie par
$$\forall f \in \mathcal{L}^\infty, \|f\|_\infty = \inf\left(\{K \in \mathbb{R}_+, |f(x)| \leqslant K \quad \mu - \mathbf{p.p.}\}\right)$$
On a toujours le fait qu'une suite de Cauchy pour la semi-norme $\| \ \|_\infty$ converge pour la semi-norme $\| \ \|_\infty$.

Corentin :

$\mathcal{L}^\infty$ 也是 complet 的，但后边有些性质里 $\mathcal{L}^\infty$ 跟其他的不太一样

2 Convergence $\mathcal{L}^2$

Définition I.2

1. On munit E du « produit scalaire hermitien » suivant[1]

$$\forall (f,g) \in E^2, \langle f, g\rangle \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} \overline{f} g \,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Posons, pour $n \in \mathbb{Z}$

$$e_n : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto e^{inx} \end{cases}$$

Clairement, $e_n \in E$ et pour $f \in E$, on appelle *n-ième coefficient de Fourier de* f l'expression

$$\boxed{c_n(f) \overset{\text{Not}}{=} \langle e_n, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\,\mathrm{d}t}$$

[a] Ce n'est pas réellement un produit scalaire, car il n'est pas défini

Proposition I.1 Système total

La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un système total de E, c'est-à-dire

1. elle est orthonormée ;
2. le sous-espace vectoriel de E engendré par cette famille est dense dans E pour la semi-norme $\| \, \|_{2,[0,2\pi]}$.

Théorème I.2 Bessel et Parseval

Soit $f \in E$, on a alors

1. *Inégalité de Bessel :* pour $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, $p < q$

$$\boxed{\sum_{n=p}^{q} |c_n(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x}$$

2. *Formule de Parseval*

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}$$

Démonstration :

Cadre Géométrique

On munit l'espace E des fonctions 2π-périodiques et continues par morceaux du produit scalaire hermitien suivant :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) \, dt$$

La norme associée est $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par $e_n(t) = e^{int}$ est une **famille orthonormée** pour ce produit scalaire.

Démonstration de l'Inégalité de Bessel

Soit $f \in E$. On note $S_N(f)$ la somme partielle de rang N de la série de Fourier de f :

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n$$

Étape 1 : Calcul de la norme de la somme partielle La famille (e_n) étant orthonormée, le théorème de Pythagore nous donne :

$$\|S_N(f)\|_2^2 = \left\| \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n \right\|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2$$

Étape 2 : Orthogonalité du reste Posons le reste $R_N = f - S_N(f)$. Ce vecteur est orthogonal à l'espace engendré par les polynômes trigonométriques de degré N. En effet, pour tout $k \in \{-N, \dots, N\}$:

$$\begin{aligned} \langle f - S_N(f), e_k \rangle &= \langle f, e_k \rangle - \left\langle \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n, e_k \right\rangle \\ &= c_k(f) - c_k(f) = 0 \end{aligned}$$

Étape 3 : Conclusion par Pythagore On peut décomposer f comme la somme de sa projection et du reste : $f = S_N(f) + (f - S_N(f))$. Ces deux termes étant orthogonaux, on a :

$$\|f\|_2^2 = \|S_N(f)\|_2^2 + \|f - S_N(f)\|_2^2$$

Puisque $\|f - S_N(f)\|_2^2 \geq 0$, on obtient l'inégalité de Bessel :

$$\|f\|_2^2 \geq \|S_N(f)\|_2^2 \implies \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt \geq \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2$$

Démonstration de l'Égalité de Parseval

Pour démontrer l'égalité, il faut montrer que le reste tend vers 0 lorsque $N \to +\infty$. Reprenons l'égalité établie précédemment :

$$\|f - S_N(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2$$

L'égalité de Parseval équivaut donc à montrer que $\lim_{N\to+\infty} \|f - S_N(f)\|_2 = 0$.

Argument de densité D'après le théorème de densité (conséquence du théorème de Fejér ou de Weierstrass trigonométrique), l'espace des polynômes trigonométriques est dense dans l'espace des fonctions continues 2π-périodiques (et donc dans l'espace des fonctions continues par morceaux pour la norme L^2).

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\|f - P\|_2 < \varepsilon$. Soit N_0 le degré de ce polynôme P. Pour tout $N \geq N_0$, $S_N(f)$ est la projection orthogonale de f sur l'espace des polynômes de degré N. Par propriété de minimisation de la distance de la projection orthogonale :

$$\|f - S_N(f)\|_2 \leq \|f - P\|_2 < \varepsilon$$

Ainsi, $\|f - S_N(f)\|_2 \to 0$ quand $N \to +\infty$. On conclut :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt$$

■

Remarque I.3 Interprétation géométrique de Bessel

L'inégalité de Bessel, $\sum |c_n(f)|^2 \leqslant \|f\|_2^2$, exprime que la norme de la projection orthogonale de f sur un sous-espace de dimension finie est toujours inférieure à celle de f. Une conséquence fondamentale est que la somme partielle de Fourier $S_N(f)$ réalise la **meilleure approximation** en norme $\mathcal{L}^2$ de f par un polynôme trigonométrique de degré $\leqslant N$:

$$\|f - S_N(f)\|_2 \leqslant \|f - T_N\|_2$$

Ceci est une application directe du théorème de la projection orthogonale dans un espace de Hilbert.

Remarque I.4 Parseval : Conservation et Application

L'égalité de Parseval, $\sum |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2$, est la condition nécessaire et suffisante pour que le système trigonométrique soit une base hilbertienne. Elle signifie qu'aucune énergie n'est perdue dans la transformation : la puissance totale du signal (intégrale de $|f|^2$) égale la somme des puissances de ses harmoniques ($|c_n|^2$). C'est aussi un outil de calcul puissant.

Corentin :

可以用能量守恒理解

Remarque I.5 Interprétation de la formule de Parseval

On a donc un deuxième produit sesqui-linéaire, hermitien, positif sur E, défini par

$$\boxed{\langle f, g\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{c_n(f)}c_n(g)}$$

qui coïncide avec le précédent sur E.

Propriété I.2 Unicité des coefficients de Fourier pour les applications continues

L'application

$$\begin{cases} E \cap \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \\ f \longmapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{cases}$$

est linéaire et injective.

Plus généralement, pour tout $f \in E$

$$[(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}}] \iff [\lambda\left(\{x \in [0, 2\pi], f(x) \neq 0\}\right) = 0]$$

Démonstration :

L'application est clairement linéaire, calculons son noyau. Soit $f \in E$, telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = 0$$

alors la formule de Parseval nous donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = 0$$

Cas où f est continue

Comme la fonction $t \longmapsto |f(t)|^2$ est positive, continue, on en déduit que $f = 0$.

Cas où f est quelconque dans E

1. ($\Rightarrow$) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$A_n = \left\{ x \in [0, 2\pi], |f(x)|^2 \geqslant \frac{1}{n} \right\}$$

alors

$$0 \leqslant \frac{1}{n}\lambda(A_n) \leqslant \int_{A_n} |f|^2 \,\mathrm{d}\lambda \leqslant \int_{[0,2\pi]} |f|^2 \,\mathrm{d}\lambda = 0$$

donc $\lambda(A_n) = 0$. Mais en ce cas

$$\Delta = \{x \in [0, 2\pi], f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$$

réunion dénombrable d'ensembles de λ-mesure nulle est de λ-mesure nulle, ou encore $\lambda(\Delta) = 0$.

2. ($\Leftarrow$) Par définition de l'intégrale, on a

$$\int_{[0,2\pi]} |f|^2 \,\mathrm{d}\lambda = \underbrace{\int_{[0,2\pi]\setminus\Delta} |f|^2 \,\mathrm{d}\lambda}_{=0 \text{ car } f \text{ est nulle en dehors de } \Delta} + \underbrace{\int_{\Delta} |f|^2 \,\mathrm{d}\lambda}_{=0 \text{ car } \lambda(\Delta)=0} = 0$$

■

Théorème I.3 Riemann-Lebesgue

Soit $f \in E$, alors

$$\boxed{c_n(f) \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0}$$

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe alors $g_\varepsilon \in F$ (voir les notations de la proposition 1.1, page 13) telle que

$$\|f - g_\varepsilon\|_{2,[0,2\pi]} \leqslant \varepsilon$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz (Réf. [7]) nous assure alors que, pour $n \in \mathbb{Z}$

$$|\langle e_n, f\rangle - \langle e_n, g_\varepsilon\rangle| \leqslant \|f - g_\varepsilon\|_{2,[0,2\pi]} \leqslant \varepsilon$$

Mais

$$|\langle e_n, f\rangle - \langle e_n, g_\varepsilon\rangle| = |c_n(f) - c_n(g_\varepsilon)|$$

et, comme $g_\varepsilon \in F$, pour $|n|$ assez grand, $c_n(g_\varepsilon) = 0$ (une combinaison linéaire est une somme finie, Ce qui montre le résultat. ■

Proposition I.2

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, si f est de classe $\mathscr{C}^{p-1}$ et de classe $\mathscr{C}^p_{\text{p.m.}}$, alors

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{|n|^p}\right) \text{ au voisinage de } \pm\infty$$

Démonstration :

Cas $p = 1$

La fonction étant de classe $\mathscr{C}^0$, $\mathscr{C}^1$ par morceaux, il existe une subdivision de $[0, 2\pi]$

$$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_q = 2\pi$$

telle que, pour $k \in [\![1, q]\!]$, il existe une fonction $g_k \in \mathscr{C}^1([a_{k-1}, a_k], \mathbb{K})$ telle que

$$\forall x \in]a_{k-1}, a_k[,\ f(x) = g_k(x)$$

On a alors, par relation de Chasles, pour $n \in \mathbb{Z}^*$

Ce qui donne, en notant *abusivement* f' la fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [0, 2\pi[, \forall k \in [\![1, q]\!],\ [x \in]a_{k-1}, a_k[] \implies [f'(x) = g_k'(x)]$$

et, à nouveau par relation de Chasles

$$\begin{aligned} 2\pi c_n(f) &= \frac{1}{in}\left(2\pi c_n(f') + \sum_{k=1}^{q}(g_k(a_{k-1}) - g_k(a_k))\right) \\ &= \frac{1}{in}\left(2\pi c_n(f') + \sum_{k=1}^{q}\left(f(a_{k-1}^+) - f(a_k^-)\right)\right) \end{aligned}$$

et, par périodicité

$$c_n(f) = \frac{1}{in}\left(c_n(f') + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{q}\left(f(a_k^+) - f(a_k^-)\right)\right) \tag{1.2}$$

Dans le cas qui nous intéresse, la fonction f étant supposée continue, on obtient[1]

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f')}$$

Cas général

Il suffit de faire une récurrence sur p. ■

---

a On fera attention à cette formule.

1. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, la formule est exacte ;
2. si f est de classe $\mathscr{C}^0$ et $\mathscr{C}^1_{\text{p.m.}}$, la formule est exacte, mais la fonction f' n'est pas réellement la dérivée de f ;
3. si f est de classe $\mathscr{C}^1_{\text{p.m.}}$, la formule est *fausse*, car la formule (1.2), page 24 nous donne en général $inc_n(f) \neq c_n(f')$!

Définition I.3 Définition 1.3

La projection de f sur l'espace vectoriel engendré par les $(e_p)_{p\in[\![-n,n]\!]}$ est appelée[1] *série de Fourier complexe de f*, en écrivant chaque $e_p(t)$ sous forme trigonométrique, il vient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, S_n(f)(t) = \sum_{p=-n}^{+n} c_p(f)e_p(t)$$

$$= a_0(f) + \sum_{p=1}^{n} (a_p(f)\cos(pt) + b_p(f)\sin(pt))$$

Les coefficients $(a_p(f))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_p(f))_{p\in\mathbb{N}^*}$ s'appellent les *coefficients de Fourier trigonométriques* de f et la série

$$a_0(f) + \sum (a_p(f)\cos(pt) + b_p(f)\sin(pt))$$

s'appelle *série de Fourier trigonométrique de f*. On a de plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t}$$

et

$$\boxed{a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

---

1 **Attention :** Ce n'est pas une série, la terminologie est abusive.

Corentin :

信号学讲傅立叶分解的时候强调了每个三角函数里都有 pulsation ： $\sin(n\omega t)$ 和 $\cos(n\omega t)$，而 pulsation 的定义是 $\omega = \frac{2\pi}{T}$。在 $T = 2\pi$ 这个情况下刚好 pulsation 没了，但计算的时候一定要记得 ω。建议回去看袁老师的 ppt 里那一节

Remarque I.6

1. En général, la famille $(c_n(f).e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *ne définit pas des séries convergentes*, en tous cas ponctuellement, attention donc au fait que la somme s'effectue de $-n$ à $+n$. On a en fait
$$S_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\ \|_{2,[0,2\pi]}} f$$
mais on ne sait *rien* sur la sommabilité de la famille $(c_n(f)e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Lorsque f est paire, on a $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Lorsque f est impaire, on a $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Lorsque f est réelle, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) \in \mathbb{R}$$
Et, plus généralement
$$\forall n \in \mathbb{N}, c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$$
5. La formule de Parseval devient alors
$$|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t$$

3 Convolution

3.1 Théorèmes de Fubini

Rappel I.3

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, on dit que μ est *une mesure σ-finie sur* Ω si, il existe une famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mu(A_n) \in \mathbb{R}_+ \text{ (c'est-à-dire finie), et } \Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

Proposition I.3

Soit $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés, où μ_1 et μ_2 sont σ-finies, alors il existe une unique mesure μ définie sur $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$, vérifiant

$$\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2,\ \mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \times \mu_2(A_2)$$

ce produit étant nul, dès que l'un de ses termes est nul. Cette mesure μ sera notée $\mu_1 \otimes \mu_2$. μ est une mesure σ-finie.

Les théorèmes de Fubini s'intéressent à la capacité d'intervertir deux intégrales (c'est donc bien un problème d'interversion de limites). On a deux versions différentes. L'une pour les fonctions positives, qui nous permettre aussi de montrer facilement qu'une fonction est intégrable par rapport à la tribu produit, et l'autre, plus générale, qui nous donnera une condition suffisante pour pouvoir intervertir.

Théorème I.4 Fubini-Tonelli

Soit $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés, les mesures étant σ-finies, soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow [0, +\infty]$, une application mesurable par rapport à la tribu produit $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$, alors

1. L'application
$$F_1 : \begin{cases} \Omega_1 \longrightarrow [0, +\infty] \\ x \longmapsto \displaystyle\int_{\Omega_2} f(x, \bullet) \, \mathrm{d}\mu_2 \end{cases}$$
est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{T}_1$.

2. L'application
$$F_2 : \begin{cases} \Omega_2 \longrightarrow [0, +\infty] \\ y \longmapsto \displaystyle\int_{\Omega_1} f(\bullet, y) \, \mathrm{d}\mu_1 \end{cases}$$
est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{T}_2$.

3. On a de plus
$$\boxed{\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} F_1 \, \mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_2} F_2 \, \mathrm{d}\mu_2}$$

Théorème I.5 Fubini-Lebesgue

Soit $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés. On suppose que μ_1 et μ_2 sont σ-finies. Soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow [-\infty, +\infty]$, $\mu_1 \otimes \mu_2$-intégrable sur $\Omega_1 \times \Omega_2$, alors

1. La fonction
$$F_1 : \begin{cases} \Omega_1 \longrightarrow [-\infty, +\infty] \\ x \longmapsto \displaystyle\int_{\Omega_2} f(x, \bullet) \, \mathrm{d}\mu_2 \end{cases}$$
est définie $\mu_1 - \mathbf{p.p.}$ et intégrable sur Ω_1.
2. La fonction
$$F_2 : \begin{cases} \Omega_2 \longrightarrow [-\infty, +\infty] \\ y \longmapsto \displaystyle\int_{\Omega_1} f(\bullet, y) \, \mathrm{d}\mu_1 \end{cases}$$
est définie $\mu_2 - \mathbf{p.p.}$ et intégrable sur Ω_2.
3. On a de plus
$$\boxed{\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} F_1 \, \mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_2} F_2 \, \mathrm{d}\mu_2}$$

Corentin :

— 拿到一个函数，如果是正的那就能用 Fubini-Toneli 换积分顺序

— 如果不是正的，给它套个绝对值就是正的了，这样就又能用 Fubini-Tonelli

— 带上绝对值之后如果积分能积出来，那就是 integrable（因为 integrable 的定义带绝对值）；而 integrable 又满足了 Fubini-Lebesgue 的要求，因此拿掉绝对值也可以变换积分顺序, 后面就能继续算

3.2 Définition et propriétés de convolution

Définition I.4

Soit $f : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est *à support compact* si

$$\exists K \text{ compact}, \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^s \setminus K, f(\underline{x}) = 0$$

On note $\mathscr{C}_c$ l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact.

Corentin :

下划线代表向量，没有特殊含义

Proposition I.4

Si $p \in [1, +\infty[$, alors $\mathscr{C}_c$ est dense dans $\mathcal{L}^p$ pour $\| \ \|_p$.

Remarque I.7

Comme une limite uniforme (pour la norme infinie) de fonctions continues est continue, ce résultat devient faux lorsque $p = +\infty$.

Définition I.5

Soit f et g deux fonctions mesurables (pour les tribus boréliennes) de $\mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$, on appelle *produit de convolution* de f et g et on note $f * g$, l'application (lorsqu'elle a un sens)

$$\begin{cases} \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R} \\ \underline{x} \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^s} \phi(\bullet, \underline{x})\, \mathrm{d}\lambda, \end{cases}$$

où ϕ est l'application

$$(\underline{t}, \underline{x}) \longmapsto f(\underline{t})\ g(\underline{x} - \underline{t})$$

Corentin :

就非得把重要的东西写在外边，这是人类版本：

$$\begin{cases} \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R} \\ \underline{x} \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^s} f(\underline{t})\ g(\underline{x} - \underline{t})\, \mathrm{d}t, \end{cases}$$

Propriété I.3

On a toujours

$$\boxed{f * g = g * f}$$

Propriété I.4

Si f et g sont dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^s, \mathcal{BO}(\mathbb{R}^s), \lambda)$, alors $f*g$ est défini $\lambda-\mathbf{p.p.}$ et, de plus, $f*g \in \mathcal{L}^1$.

Propriété I.5

Si $f \in \mathscr{C}_c$ et $g \in \mathcal{L}^p$ $(p \in [1, +\infty])$, alors $f * g$ est uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}^s$.

Propriété I.6

Si $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$ $(p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, alors l'application $g \longmapsto f * g$ est lipschitzienne sur $\mathcal{L}^q$.

Propriété I.7

Si $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p \in [1, +\infty[$, alors $f * g$ est uniformément continue et bornée.

Deuxième partie

Convergence des séries de Fourier

1 Convergence ponctuelle

Théorème II.1 Dirichlet

Si $f \in E$ est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux,[1] alors la série de Fourier de f converge simplement vers la fonction

$$S(f) : x \longmapsto \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

[1] f n'est plus nécessairement continue.

2 Convergence uniforme

Propriété II.1

Soit $f \in E$, si $\sum |a_n(f)|$ et $\sum |b_n(f)|$ convergent, on a convergence uniforme de la série de Fourier trigonométrique.

Propriété II.2

Soit $f \in E$, si la famille $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, la famille $(c_n(f).e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille sommable et on a aussi convergence uniforme de la série de Fourier de f.

Théorème II.2 Convergence normale pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^1_{\text{p.m.}}$

Si $f \in E$ est continue, de classe $\mathscr{C}^1_{\text{p.m.}}$, alors

$$S_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f \text{ sur } \mathbb{R}$$

Théorème II.3 Fejér

Soit $f \in E$, continue alors

$$\sigma_n(f) = \frac{S_0(f) + \cdots + S_n(f)}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{u} f \text{ sur } \mathbb{R}$$

où $S_n(f)$ désigne la somme partielle de la série de Fourier de f.

3 Convolution avancée et Régularisation

Définition II.1

1. On appelle *approximation de Dirac* toute suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}^s$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telles que
   (a) *Régularité* les φ_n sont continues sur $\mathbb{R}^s$.
   (b) *Support compact* il existe un compact $K_0 \subset \mathbb{R}^s$, tel que
   $$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^s \setminus K_0, \forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n(\underline{x}) = 0$$
   (c) *Normalisation*
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}^s} \varphi_n \, \mathrm{d}\lambda = 1$$
   (d) *Convergence*
   $$\forall \delta > 0, \int_{BF(\underline{0},\delta)^c} \varphi_n \, \mathrm{d}\lambda \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$
2. On appelle *suite régularisante* toute approximation de Dirac qui vérifie de plus
   (a) *Régularité* les φ_n sont de classe $\mathscr{C}^\infty$.
   (b) *Convergence* il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0, +\infty[^{\mathbb{N}}$, tels que
   $$r_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \{\underline{x} \in \mathbb{R}^s, \varphi_n(\underline{x}) \neq \underline{0}\} \subset BF(\underline{0}, r_n)$$

Corentin :

对于 suite regularisante 来说，除了 regularite 的唯一区别是：这些函数的 support 不能仅仅限定在 K_0, 而是要向 0 收缩.

Propriété II.3

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de Dirac. Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^s, \mathbb{R})$, si K est un compact de $\mathbb{R}^s$, alors

$$\boxed{\|\varphi_n * f - f\|_{\infty,K} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Remarque II.1

Si f est continue à support compact, on obtient alors

$$\|\varphi_n * f - f\|_{\infty,\mathbb{R}^s} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Théorème II.4 Weierstraß

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R})$, alors $\exists$ une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\|P_n - f\|_{\infty,[a,b]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Proposition II.1

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de Dirac. Si $p \in [1, +\infty[$ (ici, $p \neq +\infty$), et si $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^s, \mathcal{BO}(\mathbb{R}^s), \lambda)$, alors $\varphi_n * f$ est dans $\mathscr{L}^p$ et

$$\|\varphi_n * f - f\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Propriété II.4

Si $f \in \mathscr{L}^1$ et si $\varphi \in \mathscr{C}_c$ est de classe $\mathscr{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$), alors $\varphi * f$ est de classe $\mathscr{C}^k$. On a de plus

$$\boxed{\forall i \in [\![1, s]\!],\ \partial_i(\varphi * f) = (\partial_i\varphi) * f}$$

Proposition II.2

Soit $p \in [1, +\infty[$, alors l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact (que nous noterons $\mathscr{C}_c^\infty$) est dense dans $\mathscr{L}^p$ pour $\| \ \|_p$.

Troisième partie

Transformées de Fourier

1 Théorie

Définition III.1

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{BO}(\mathbb{R}), \lambda; \mathbb{C})$, on appelle *transformée de Fourier de* f l'application

$$\widehat{f} : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \omega \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t. \end{cases}$$

On dit souvent que t varie dans le domaine *temporel* et que ω varie dans le domaine *fréquentiel*.

Remarque III.1

On a clairement

$$\forall f \in \mathcal{L}^1, \left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leqslant \|f\|_1$$

Propriété III.1

$f \longmapsto \widehat{f}$ est linéaire.

Propriété III.2

L'application $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :
On applique le théorème de continuité sous le signe $\int$ à la fonction

$$g : (t, \omega) \longmapsto f(t)e^{-i\omega t}$$

Elle vérifie

1. $\forall \omega \in \mathbb{R}$, $g(\bullet, \omega)$ est mesurable, car f l'est.
2. $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t, \omega)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Et on a
$$\forall (t,\omega)\in\mathbb{R}^2,\ |g(t,\omega)|\leqslant |f(t)| \text{ intégrable sur } \mathbb{R}$$

Proposition III.1 Lemme de Riemann-Lebesgue

Si $f\in\mathcal{L}^1$, on a
$$\widehat{f}(\omega)\xrightarrow[\omega\to\pm\infty]{}0$$

Propriété III.3

1. Si f est réelle, alors
$$\forall\omega\in\mathbb{R},\ \widehat{f}(-\omega)=\overline{\widehat{f}(\omega)}$$
2. Si f est paire, alors $\widehat{f}$ est paire.
3. Si f est impaire, alors $\widehat{f}$ est impaire.

Propriété III.4

Translation temporelle

Si $x_0\in\mathbb{R}$, et $f_{x_0}: x\longmapsto f(x+x_0)$, alors
$$\boxed{\forall\omega\in\mathbb{R},\ \widehat{f_{x_0}}(\omega)=\widehat{f}(\omega)e^{i\omega x_0}}$$

Translation fréquentielle

Si $\omega_0\in\mathbb{R}$ et $g_{\omega_0}: x\longmapsto f(x)e^{-i\omega_0 x}$, alors
$$\boxed{\forall\omega\in\mathbb{R},\ \widehat{f}(\omega+\omega_0)=\widehat{g_{\omega_0}}}$$

Lien avec le produit de deux fonctions

Si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{L}^1$, alors
$$\boxed{\widehat{f*g}=\widehat{f}\widehat{g}}$$

Démonstration :
On sait que $f*g$ est définie $\lambda-$**p.p.** et dans $\mathscr{L}^1$, on peut donc définir sa transformée de Fourier, si $\omega\in\mathbb{R}$, alors
$$\widehat{f*g}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}(f*g)(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

En intervertissant les intégrales (théorème de Fubini-Lebesgue), il vient

$$\widehat{f * g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x) e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x$$

$$\underset{u=t-x}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega(u+x)} \, \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}x$$

■

Proposition III.2

Si $f \in \mathcal{L}^1$, et soit

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto -ixf(x) \end{cases}$$

Si $g \in \mathcal{L}^1$, alors $\widehat{f}$ est dérivable et

$$\boxed{(\widehat{f})' = \widehat{g}}$$

Démonstration :
On applique le théorème de dérivation sous le signe $\int$ à la fonction

$$\phi : (t, \omega) \longmapsto f(t) e^{-i\omega t}$$

Elle vérifie

1. *Intégrabilité.*
$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \ |\phi(t, \omega)| = |f(t)| \text{ intégrable sur } \mathbb{R}$$
2. *Dérivabilité.*
$$\forall (t, \omega) \in \mathbb{R}^2, \ \partial_2 \phi(t, \omega) = -itf(t) e^{-i\omega t}$$
3. *Domination.*
$$\forall (t, \omega) \in \mathbb{R}^2, \ |\partial_2 \phi(t, \omega)| = |g(t)| \text{ intégrable sur } \mathbb{R}$$

■

Proposition III.3

Soit $f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathscr{C}^1$ telle que $f' \in \mathcal{L}^1$, alors

$$\boxed{\forall \omega \in \mathbb{R}, \ \widehat{(f')}(\omega) = i\omega \widehat{f}(\omega)}$$

Démonstration :
On a par définition, pour $\omega \in \mathbb{R}$

$$\widehat{(f')}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

on a envie de faire une IPP, mais quel est le comportement de f au voisinage de $\pm\infty$?

1. *Sous les hypothèses données,* $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$. En effet, on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \int_{[x,y]} |f'|\,\mathrm{d}\lambda \xrightarrow[x\to\infty,\ y\to\infty]{} 0$$

2. *Intégration par parties.* On a alors, pour $\omega \in \mathbb{R}$

$$\widehat{(f')}(\omega) = \left[f(t)e^{-i\omega t}\right]_{t=-\infty}^{t=+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = i\omega\widehat{f}(\omega)$$

■

Remarque III.2

On n'a pas besoin de $\mathscr{C}^1$, on a utilisé seulement le fait que

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \quad \lambda - \mathbf{p.p.}$$

ce qui se produit lorsque f est continue, dérivable, de dérivée dans $\mathcal{L}^1$. En particulier, cela sera vrai pour les fonctions continues, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur tout segment.

Théorème III.1 Inversion de Fourier

Si $f \in \mathcal{L}^1$ continue est telle que $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1$, alors

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)e^{+i\omega x}\,\mathrm{d}\omega\right)}$$

Remarque III.3

Nous avons vu que la transformée de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{L}^1$ était nécessairement continue, donc si $\widehat{f}$ est dans $\mathcal{L}^1$, alors $\widehat{(\widehat{f})}$ doit être continue, si on veut avoir l'expression de f comme dans l'énoncé, il faut supposer f continue...

Remarque III.4

L'application $f \longmapsto \widehat{f}$ définie sur $\mathcal{L}^1 \cap \mathscr{C}^0$ est injective.

Remarque III.5

Transformée de Fourier en dimension s. Il est facile de généraliser la notion de transformée de Fourier aux fonctions définies sur $\mathbb{R}^s$, en introduisant la fonction

$$\phi(\underline{x}, \underline{\omega}) = f(\underline{x}) e^{-i\langle \underline{x}, \underline{\omega} \rangle} \text{ où } \langle \underline{x}, \underline{\omega} \rangle = \sum_{k=1}^{s} x_k \omega_k$$

On définit alors $\widehat{f}$ sur $\mathbb{R}^s$ par

$$\forall \underline{\omega} \in \mathbb{R}^s, \ \widehat{f}(\underline{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^s} \phi(\bullet, \underline{\omega}) \, \mathrm{d}\lambda$$

La formule d'inversion pour $f \in \mathcal{L}^1$ et $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1$ devient

$$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^s, \ f(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^s} \int_{\mathbb{R}^s} \psi(\underline{x}, \bullet) \, \mathrm{d}\lambda$$

où

$$\psi(\underline{x}, \underline{\omega}) = \widehat{f}(\underline{\omega}) e^{+i\langle \underline{\omega}, \underline{x} \rangle}$$

2 Applications aux EDPs

3 Quelques EDPs importantes

4 Transformée de Fourier sur les fonctions complexes