Notes du Cours : MATH2308P

Cours assuré par Sébastien GODILLON

Fiche LaTeX rédigé par Corentin 邱天意

Semestre 2024-2025-2

Table des matières

Première partie

Espaces vectoriels normés

On commence notre travail avec les espaces vectoriels normés.

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et on note 0_E le vecteur nul de E.

1 Cours 18 février : Normes et distances

Définition 1.1

Une **norme** sur E est une application de E dans $\mathbb{R}$. Elle a pour notation N, et elle vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$ (séparation)
- $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité absolue)
- $\forall (x, y) \in E^2, \quad N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ (sous-additivité)

Dans le deuxième point, $|\lambda|$ peut représenter la valeur absolue(en $\mathbb{R}$) ou le module(en $\mathbb{C}$), et ça dépend de l'ensemble dans lequel on se place.

Définition 1.2

Si N est une norme sur E, alors on dit que (E, N) est un **espace vectoriel normé**.

Proposition 1.1

Soit N une norme sur E, alors on a :

- $N(0_E) = 0$ (réciproque de la séparation)
- $\forall x \in E, \quad N(x) \geq 0$ (positivité)
- $\forall (x, y) \in E^2, \quad |N(x) - N(y)| \leq N(x-y)$ ("continuité")

Petit remarque 1 : la première nous donne l'équivalence dans la propriété de séparation : $\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0_E$

Petit remarque 2 : dans la troisième, $|N(x) - N(y)|$ désigne la valeur absolue puisque la norme est une application dans $\mathbb{R}$.

Preuve : Soient $(x, y) \in E^2$.

— $N(0_E) = N(0.x) = |0|N(x) = 0$, donc on a : $\underline{N(0_E) = 0}$.
  Remarque : ne mélangez pas 0_E et 0.

— D'après la propriété qu'on vient de démontrer, on a :

$$0 = N(0_E) = N(x - x) = N(x + (-x))$$

  De plus, par sous-additivité, on a :

$$N(x + (-x)) \leq N(x) + N(-x) = N(x) + |-1|N(x) = 2N(x)$$

  On obtient $\underline{N(x) \geq 0}$ en mettent les deux relations ensemble.

— Rappel : $|x| \geq k \Longleftrightarrow -k \leq x \leq k$.
  Donc il faut démontrer les inégalités à gauche et à droite.
  - — $N(x) = N(x - y + y) \leq N(x - y) + N(y)$ (par sous-additivité), et on trouve la relation $N(x) - N(y) \leq N(x - y)$.
  - — De même façon on trouve l'autre, en utilisant $N(y)$ au début : $-N(x - y) \leq N(x) - N(y)$.

  Ces deux inégalités nous donnent le résultat : $\forall (x, y) \in E^2, \quad |N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$.

Remarque 1.1

Dans la troisième on reconnaît une propriété de continuité. Si x est proche de y ("tend vers"), alors $x - y$ est proche du vecteur nul. Donc $N(x, y)$ devient proche de 0, $|N(x) - N(y)|$ aussi(par séparation). Donc $N(x)$ est proche de $N(y)$.

Exemple 1.1

La valeur absolue de $\mathbb{R}$
On dit que l'application $N : x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{R}$, parce qu'elle vérifie les conditions :

- — $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
- — $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R}^2, |\lambda x| = |\lambda||x|$.
- — $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x + y| \leq |x| + |y|$(l'inégalité triangulaire).

Le module de $\mathbb{C}$
De même, $N : x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{C}$.
On peut remarquer que $(\mathbb{K}, |.|)$ est un espace vectoriel normé.

Remarque 1.2

Les normes sont les objets qui généralisent la valeur absolue et le module pour les espaces vectoriels plus grands que $\mathbb{K}$.

Rappel 1.1

Pour qu'on puisse commencer à étudier les distances, on rappelle que :

- La valeur absolue du réel a représent la distance entre 0 et a sur la droite réelle.
- Même chose pour le module pour les complexes, mais cette fois on trouve la distance sur le plan complexe.
- Plus généralement $|a-b|$ représent la distance entre a et b.

Définition 1.3

—
—
—

Définition 1.4

Propriété 1.1

—
—

Remarque 1.3