Notes du cours : MATH2308P

Cours assuré par Sébastien GODILLON

Fichier LaTeX rédigé par Corentin 邱天意

Semestre 2024-2025-2

Table des matières

Première partie

Espaces vectoriels normés

On commence notre travail avec les espaces vectoriels normés.

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et on note 0_E le vecteur nul de E.

1 Normes et distances

Définition 1.1

Une **norme** sur E est une application de E dans $\mathbb{R}$. Elle a pour notation N, et elle vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$ (séparation)
- $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité absolue)
- $\forall (x, y) \in E^2, \quad N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ (sous-additivité)

Dans le deuxième point, $|\lambda|$ peut représenter la valeur absolue(en $\mathbb{R}$) ou le module(en $\mathbb{C}$), et ça dépend de l'ensemble dans lequel on se place.

Définition 1.2

Si N est une norme sur E, alors on dit que (E, N) est un **espace vectoriel normé**.

Proposition 1.1

Soit N une norme sur E, alors on a :

- $N(0_E) = 0$ (réciproque de la séparation)
- $\forall x \in E, \quad N(x) \geq 0$ (positivité)
- $\forall (x, y) \in E^2, \quad |N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$ (“continuité”)

Petit remarque 1 : la première nous donne l'équivalence dans la propriété de séparation : $\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0_E$

Petit remarque 2 : dans la troisième, $|N(x) - N(y)|$ désigne la valeur absolue puisque la norme est une application dans $\mathbb{R}$.

Preuve : Soit $(x, y) \in E^2$.

— $N(0_E) = N(0.x) = |0|N(x) = 0$, donc on a : $\underline{N(0_E) = 0}$.
  Remarque : ne mélangez pas 0_E et 0.
— D'après la propriété qu'on vient de démontrer, on a :

$$0 = N(0_E) = N(x - x) = N(x + (-x))$$

  De plus, par sous-additivité, on a :

$$N(x + (-x)) \leq N(x) + N(-x) = N(x) + |-1|N(x) = 2N(x)$$

  On obtient $\underline{N(x) \geq 0}$ en mettant les deux relations ensemble.
— Rappel : $|x| \geq k \Longleftrightarrow -k \leq x \leq k$.
  Donc il faut démontrer les inégalités à gauche et à droite.
  — $N(x) = N(x - y + y) \leq N(x - y) + N(y)$ (par sous-additivité), et on trouve la relation $N(x) - N(y) \leq N(x - y)$.
  — De même façon on trouve l'autre, en utilisant $N(y)$ au début : $-N(x - y) \leq N(x) - N(y)$.

Ces deux inégalités nous donnent le résultat : $\forall (x, y) \in E^2, \quad |N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$. ■

Remarque 1.1

Les normes sont les objets qui généralisent la valeur absolue et le module pour les espaces vectoriels plus grands que $\mathbb{K}$.

Rappel 1.1

Pour qu'on puisse commencer à étudier les distances, on rappelle que :

— La valeur absolue du réel a représent la distance entre 0 et a sur la droite réelle.
— Même chose pour le module pour les complexes, mais cette fois on trouve la distance sur le plan complexe.
— Plus généralement $|a - b|$ représent la distance entre a et b.

Définition 1.3

Soit (E, N) un espace vectoriel normé, alors l'application :

$$d : \begin{cases} E^2 \to [0, +\infty[\\ (a, b) \mapsto d(a, b) = N(a - b) \end{cases}$$

est une **distance** sur E. De plus, elle vérifie 3 propriétés :

— $\forall (a, b) \in E^2, d(a, b) = d(b, a)$ (symétrie)

— $\forall (a, b) \in E^2, d(a, b) = 0 \iff a = b$ (séparation)

— $\forall (a, b, c) \in E^3, d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$ (inégalité triangulaire)

Remarque : la deuxième propriété se démontre avec la séparation des normes, et la troisième avec la homogénéité absolue.

Propriété 1.1

Notre espace vectoriel normé (E, d) est un **espace métrique**.

Vous pouvez regarder les autres livres pour la définition d'un espace métrique, qui est essentiellement un ensemble muni d'une distance :).

Propriété 1.2

La translation et l'homothétie, on les a vu au MATH1301P, dans le chapitre de la géométrie euclidienne. La norme vérifie aussi ces deux propriétés :

— d est **invariante par translation**, c'est-à-dire : $\forall (t, x, y) \in E^3, d(x+t, y+t) = d(x, y)$.

— d est **absoluement homogène par homothétie**, c'est-à-dire : $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2, d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.

Remarque 1.2

On peut aussi faire de la topologie dans les espaces métriques, la théorie est plus générale(car on a pas besoin de la structure d'espace vectoriel).

Les espaces métriques fournissent un cadre plus général que les espaces vectoriels normés pour introduire les différentes notions de topologie de ce chapitre. Cependant, on se limitera ici à l'étude moins abstraite des espaces vectoriels normés afin de pouvoir continuer à utiliser les opérations classigues d'algèbre linéaire.

Définition 1.4

Soit (E, N) un espace vectoriel normé, on définit :

— La **boule ouverte** de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$.

$$B(a,r) = \{x \in E | N(x-a) < r\}.$$

C'est l'ensemble des vecteurs à une distance de a strictement plus petite que r.

— La **boule fermé** de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$.

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in E | N(x-a) \leq r\}.$$

— La **sphère** de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$.

$$\partial B(a,r) = \{x \in E | N(x-a) = r\}.$$

Propriété 1.3

On peut passer d'une boule à une autre(de la même nature), à l'aide d'une translation et une homothétie.
En particulier, $\forall (a,r) \in E \times]0, +\infty[$, on a $B(a,r) = a + rB(0_E, 1)$.
L'addition de a et la multiplication par r sont respectivement la translation et la homothétie. Mais attention, on commence toujours par la homothétie, car l'inverse nous donnerait une boule agrandie.

Preuve : Soient $B(a_1, r_1)$ et $B(a_2, r_2)$ deux boules, où $(a_1, a_2) \in E^2$ et $(r_1, r_2) \in]0, +\infty[^2$.

— On peut démontrer que l'opération de translation est faisable en justifiant l'égalité entre ces deux ensembles suivants : $B(a_1, r_1) = a_1 + r_1 B(0_E, 1)$. Vous devez procéder par double inclusion.

— On raisonne étape par étape pour la homothétie :

$$B(a_1, r_1) = a_1 + B(0_E, r_1) = a_1 + \frac{r_1}{r_2} B(0_E, r_2)$$

Comme on a dit déjà qu'on peut faire la translation par un vecteur, on manipule :

$$a_1 + \frac{r_1}{r_2}(B(a_2, r_2) - a_2) = a_1 - \frac{r_1 a_2}{r_2} + \frac{r_1}{r_2} B(a_2, r_2)$$

■

C'est la même preuve pour toutes les boules ouvertes, fermées et les sphères.

2 Exemples d'espaces vectoriels normés

2.1 Cas de la dimension finie

On fixe un entier $n \geq 1$, et on considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}^n$.

Définition 1.5

Pour tout $x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{K}^n$, on définit :

$$||x||_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

et :

$$||x||_\infty = \max_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k|$$

Propriété 1.4

$||x||_1$ et $||x||_\infty$ sont les normes sur $\mathbb{K}^n$, appelées les normes 1 et infinie.

Preuve : Soient $x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y = (y_1, y_2, ...y_n) \in \mathbb{K}^n$

On va démontrer que ces applications vérifient les trois propriétés.

— (séparation)

On remarque que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$0 \leq |x_k| \leq ||x||_\infty \leq ||x||_1$$

Donc, si on a $||x||_1 = 0$ ou $||x||_\infty = 0$, alors $x_k = 0$ pour tout k.

— (homogénéité absolue)

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\|\lambda x\|_1 = \|(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^{n} |x_k| = |\lambda| ||x||_1$$

$$\|\lambda x\|_\infty = \max_{k \in [\![1,n]\!]} |\lambda x_k| = |\lambda| \max_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k|. = |\lambda| ||x||_\infty$$

On a utilisé la linéarité de $|.|$ pour $\mathbb{K}$.

— (sous-additivité)

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_1 &= \sum_{k=1}^{n} (|x_k + y_k|) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|) \quad \text{(sous-additivité de } |\cdot| \text{ sur } \mathbb{K}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k| \quad \text{(linéarité)} \\
&= \|x\|_1 + \|y\|_1.
\end{aligned}$$

Pour $\|\cdot\|_\infty,$ on commence par remarquer que $\forall k \in [\![1, n]\!]$,

On a : $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$, qui ne dépend pas de k.

Donc :

$$\max_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k + y_k| \leq ||x||_\infty + ||y||_\infty$$

Conclusion : $||.||_1$ et $||.||_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$. ■

Exemple 1.1

Pour $n = 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut représenter graphiquement les boules unités des normes $||x||_1$ et $||x||_\infty$.

Définition 1.6

Pour tout réel $p \geq 1$ et tout vecteur $x = (x_1, x_2, ... x_n) \in \mathbb{K}^n$, on définit :

$$||x||_p = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Remarque : Pour $p = 1$ on retrouve la norme $||.||_1$.

Preuve : On veut démontrer que $||x||_p$ est aussi une norme.

Plus tard. On aura besoin de démontrer autres lemmes et inégalités avant de commencer la preuve de cette définition. Plus spécifiquement, on va démontrer un lemme, qui est essentiel pour démontrer l'inégalité de Hölder, qui nous donnera un corollaire(Inégalité de Minkowski), qui sera utile pour montrer la sous-additivité de $||x||_p$.

Propriété 1.5

On a : $\lim_{p\to+\infty} ||x||_p = ||x||_\infty$

Preuve : Soit $p \geq 1$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

On pose $I = \{k \in [\![1, n]\!] \mid |x_k| = \|x\|_\infty\} \neq \emptyset$.

On a :

$$\begin{aligned}\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{k=1,k\in I}^{n} |x_k|^p + \sum_{k=1,k\notin I}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\operatorname{card}(I) + \sum_{k=1,k\notin I}^{n} \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_\infty}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \|x\|_\infty \\ &\longrightarrow \|x\|_\infty \quad \text{lorsque } p \to +\infty\end{aligned}$$

Donc on a : $\|x\|_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \|x\|_\infty$. ■

Remarque : on peut dire que $\sum_{k=1,k\notin I}^{n} \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_\infty}\right)^p$ tend vers 0 parce que $\frac{|x_k|}{\|x\|_\infty}$ est strictement plus petit que 1, et le fait que c'est une somme finie.

Lemme 1.1(pour l'inégalité de Hölder après)

Pour tout réel a et b positifs et $(p,q) \in [1,+\infty]^2$tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

Preuve : On fixe $b \geq 0$ et on pose la fonction

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{b^q}{q} - xb.$$

Elle est dérivable sur $]0, +\infty[$, et

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = x^{p-1} - b.$$

Or, $p > 1$, donc $x^{p-1} - b$ est strictement croissante.

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 \quad &\text{pour} \quad x < b^{\frac{1}{p-1}} \\ f'(x) = 0 \quad &\text{pour} \quad x = b^{\frac{1}{p-1}} \\ f'(x) > 0 \quad &\text{pour} \quad x > b^{\frac{1}{p-1}} \end{aligned}$$

Cela montre que $f(x)$ admet un minimum en $x = b^{\frac{1}{p-1}}$.
Et ce minimum vaut :

$$f\left(b^{\frac{1}{p-1}}\right) = \frac{b^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{b^q}{q} - b^{\frac{p}{p-1}}.$$

Or, $\frac{p}{p-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = q$, donc

$$f\left(b^{\frac{1}{p-1}}\right) = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right) b^q = 0.$$

C'est-à-dire que f est positive sur $[0, +\infty[$. En particulier, pour $a \geq 0$, on a :

$$f(a) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab \geq 0, \quad \text{d'où} \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

$\blacksquare$

Théorème 1.1 : Inégalité de Hölder

Soient $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$.
On se donne $p \in [1, +\infty]$ et $q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Preuve :

Premier cas :

Supposons qu'on a : $p = 1$ et $q = +\infty$

En utilisant la linéarité et en remplaçant les normes usuelles on a :

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| = \sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right) \|y\|_\infty = \|x\|_1 \|y\|_\infty.$$

De même, pour la situation $p = +\infty$ et $q = 1$, l'inégalité est évidente.

Deuxième cas :

Désormais on suppose que $(p,q) \in]1,+\infty[^2$

- On remarque que si $\|x\|_p = 0$, alors $x_k = 0$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ (par séparation), qui donne $x = 0_k$(de même si $\|y\|_q = 0$). Donc l'inégalité est triviale dans ce cas.
- Supposons que $(p,q) \in]1,+\infty[^2$ et que $\|x\|_p \neq 0$, $\|y\|_q \neq 0$. On applique le lemme avec $a = \frac{|x_k|}{\|x\|_p}$ et $b = \frac{|y_k|}{\|y\|_q}$ (les deux dénominateurs sont non-nuls) :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k y_k|}{\|x\|_p \|y\|_q} = \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|}{\|x\|_p} \frac{|y_k|}{\|y\|_p} \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{p} \frac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_k|^q}{\|y\|_q^q} \right).$$
On peut retirer les constantes et on obtient :
$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{p} \frac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_k|^q}{\|y\|_q^q} \right) \leq \frac{1}{p\|x\|_p^p} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p + \frac{1}{q\|y\|_q^q} \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$
Donc,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k y_k|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$
En multipliant par $\|x\|_p \|y\|_q$, on obtient l'inégalité de Hölder :
$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

■

Corollaire du théorème 1.1 : Inégalité de Minkowski

Pour tout réel $p \in [1,+\infty]$, on a :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{K}^n)^2, ||x+y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$$

Cela peut nous donner la sous-additivité de $||.||_p$

Preuve : de Minkowski

On sait déjà que l'inégalité est vraie pour $p = 1$ ou $+\infty$ car on reconnaît la sous-additivité des normes 1 et $+\infty$. Donc on va supposer que $p \in]1,+\infty[$.

Posons $q = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}$, pour qu'on puisse utiliser l'inégalité de Hölder démontrée avant. On a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Soient $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k||x_k + y_k|^{p-1}$$

Par sous-additivité de la valeur absolue et la linéarité de la somme :

$$(\text{...continué}) \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k||x_k+y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |y_k||x_k+y_k|^{p-1}$$

Par inégalité de Hölder :

$$(\text{...continué}) \leq \|x\|_p \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} + \|y\|_p \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Comme on a posé q en utilisant p, on remplace :

$$(\text{...continué}) = (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^{p}\right)^{\frac{1}{q}} = (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x+y\|_p^{\frac{p}{q}}$$

On organise un peu : $\|x+y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x+y\|_p^{\frac{p}{q}}$. En divisant par $\|x+y\|_p^{\frac{p}{q}}$ et en remplaçant q on trouve l'inégalité de Minkowski :

$$||x+y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$$

■

Maintenant on peut retourner finalement à la norme p.

Corollaire de l'inégalité de Minkowski

C'est en effet la définiton 1.6.

Pour tout réel $p \in [1, +\infty]$ et tout vecteur $x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{K}^n$, on définit :

$$||x||_p = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Elle est une norme sur $\mathbb{K}^n$, appelée la norme p.

Preuve : On a déjà démontré pour $p = 1$ et $p = +\infty$. On étudie l'intervalle $p \in]1, +\infty[$.

Supposons que $p \in]1, +\infty[$.

— (Séparation)

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Rightarrow x_k = 0 \text{ pour tout } k \in [\![1, n]\!]$$

$$\Rightarrow x = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

— (Absolue homogénéité)

$$\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda|^{p\cdot\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda|\|x\|_p$$

par la linéarité de la somme.

— (Sous-additivité) : par l'inégalité de Minkowski.

■

Exemple 1.2

Dans $\mathbb{R}^2$, les boules unités(ouvertes) pour $\|\cdot\|_p$ où $p \in [1, +\infty]$ sont :

$$B(0_{\mathbb{R}^2}, 1) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\|_p < 1\right\}$$

Elles peuvent être représentées graphiquement.

Notre camarade Johan a fait des très belles figures pour les boules d'unités, je les insère ici pour que vous puissiez mieux comprendre les boules.

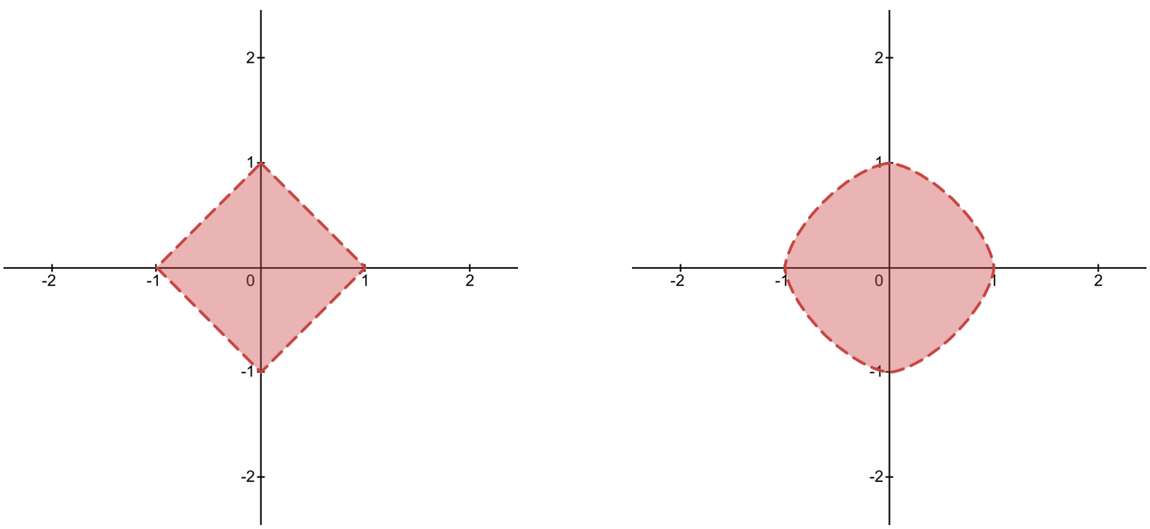

FIGURE 1 – $B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ de la norme 1(gauche) et la norme 1.5(droite)

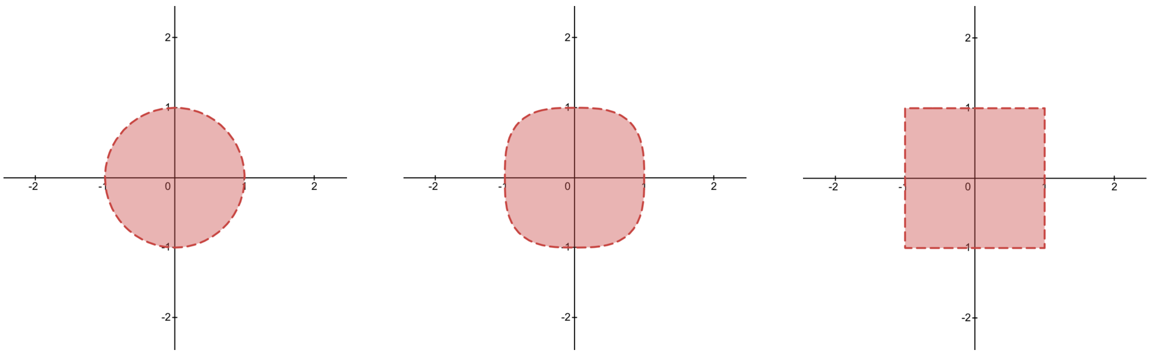

FIGURE 2 – $B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ de la norme 2(gauche), la norme 3(milieu) et la norme infinie(droite)

2.2 Espaces préhilbertiens

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.7

Un **produit scalaire** sur E est une application ϕ :

$$\phi : \begin{cases} E \times E \to \mathbb{K} \\ (x, y) \mapsto \phi(x, y) \end{cases}$$

telle que :

— ϕ est **hermitien** : $\forall (x, y) \in E^2$, $\phi(x, y) = \overline{\phi(y, x)}$.
Et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est la **symétrie**.

— ϕ est **linéaire à gauche** : $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall (x_1, x_2, y) \in E^3$

$$\phi(x_1 + \lambda x_2, y) = \phi(x_1, y) + \lambda \phi(x_2, y).$$

— ϕ est **définie positive** : $\forall x \in E \setminus \{0_E\}$, $\phi(x, x) > 0$.

Remarque 1.3

On rappele que $z = \overline{z}$ est équivalente à $z \in \mathbb{R}$.
Puisque ϕ est hermitien, on a $\phi(x, x) = \overline{\phi(x, x)}$, donc $\phi(x, x) \in \mathbb{R}$.
Et comme ϕ est définie positive, on a $\phi(x, x) \in \mathbb{R}_+^*$ pour x non nul.

Définition 1.8

Soit ϕ un produit scalaire sur E, on dit que (E, ϕ) est un **espace préhilbertien**.

Remarque 1.4

En MATH2306P, on a vu que si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, on l'appelle un **espace euclidien**.

Propriété 1.6

Soit (E, ϕ) un espace préhilbertien, alors on a deux propriétés :

— $\forall x \in E, \phi(x, x) = 0_E \Longleftrightarrow x = 0_E$. (séparation)

— $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y_1, y_2) \in E^3$, on a :

$$\phi(x, y_1 + \lambda y_2) = \phi(x, y_1) + \overline{\lambda}\phi(x, y_2)$$

C'est ce qu'on appelle la "sesquilinéarité à droite" de ϕ.

Preuve de la séparation : Double implication

— ($\Longrightarrow$) Si $\phi(x, x) = 0$ alors $x = 0_E$, car $x \neq 0_E \Rightarrow \phi(x, x) > 0$(définie positive).

— ($\Longleftarrow$) Si $x = 0_E$, alors $\forall y \in E, \phi(0_E, y) = 0$ car ϕ est linéaire. En particulier, pour $y = x = 0_E$, on a : $\phi(x, x) = \phi(0_E, 0_E) = 0$.

Par double implication on trouve la propriété de la séparation.

Preuve de la sesquilinéarité On utilise les propriétés du produit scalaire

Comme Φ est hermitien, on a :

$$\phi(x, y_1 + \lambda y_2) = \overline{\phi(y_1 + \lambda y_2, x)}$$

En utilisant la linéarité du produit scalaire et la linéarité de la conjugaison :

$$\overline{\phi(y_1 + \lambda y_2, x)} = \overline{\phi(y_1, x)} + \overline{\lambda\phi(y_2, x)} = \phi(x, y_1) + \overline{\lambda}\phi(x, y_2)$$

Cette dernière égalité est vraie car le produit est hermitien. ■

Remarque 1.5

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a :

— Hermitien $\Rightarrow$ symétrique, car le conjugué d'un réel est lui-même.

— Sesquilinéarité à droite $\Rightarrow$ linéarité à droite pour le même raison.

On a vu le semestre précédent qu'un produit scalaire dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Pour bien distinguer les cas réels et complexes, on dit produit scalaire **euclidien** si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et produit scalaire **hermitien** si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Attention ! ϕ n'est pas bilinéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$! En fait, une forme bilinéaire symétrique définie positive ne peut pas exister pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, car sinon on aura :

$$\phi(ix, ix) = i^2\phi(x, x) < 0$$

Ce qui contredit la positivité. Mais pour un produit scalaire hermitien, tout va bien grâce à la linéarité à gauche et la sesquilinéarité à droite :

$$\phi(ix, ix) = i \cdot \bar{i}\phi(x, x)$$

Exemple 1.3

On prend $E = \mathbb{K}^n$.

Soient $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y \in (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, on vérifie facilement que :

$$\phi(x, y) = \langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k\overline{y_k}.$$

est un produit scalaire, appelé le produit scalaire **canonique**.

On remarque que $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $\sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|_2$, c'est le module dans $\mathbb{C}$.

De plus, soient $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y \in (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$. Par la sous-additivité du module et par l'inégalité de Hölder(car $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$):

$$|\langle x, y\rangle| = \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\overline{y_k}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \|x\|_2\|y\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

C'est l'inégalité de **Cauchy-Schwarz**, elle se généralise à tout produit scalaire et est essentielle pour montrer que $x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est une norme sur E.

Théorème 1.2 :Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient (E, ϕ) un espace préhilbertien et $(x, y) \in E^2$. On a :

$$|\phi(x,y)| \leq \sqrt{\phi(x,x)} \cdot \sqrt{\phi(y,y)}$$

Preuve : On doit séparer les cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Traitons d'une manière générale :

Si $\phi(x,y) = 0$ alors l'inégalité est évidente, il n'y a rien à faire.

Supposons que $\phi(x,y) \neq 0$. En particulier, $\phi(x,x) \neq 0$, (car sinon $x = 0_E$ et $\phi(x,x) = 0$)

On considère la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \phi(tx+y, tx+y) \geq 0.$$

On a par linéarité à gauche :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \phi(tx+y, tx+y) = t\phi(x, tx+y) + \phi(y, tx+y)$$

Et par sesquilinéarité à droite :

$$t\phi(x, tx+y) + \phi(y, tx+y) = t^2\phi(x,x) + t\phi(x,y) + t\phi(y,x) + \phi(y,y)$$

On connecte les égalités, et comme ϕ est hermitien :

$$f(t) = \phi(x,x)t^2 + 2\,\mathrm{Re}(\phi(x,y))t + \phi(y,y)$$

On reconnaît une fonction polynomiale de degré 2 ($\phi(x,x) \neq 0$), qui est **positive** sur $\mathbb{R}$. C'est-à-dire qu'elle admet au plus une racine réelle. On en déduit que Δ est négatif.

On a :

$$\Delta = 4\,\mathrm{Re}(\phi(x,y))^2 - 4\phi(x,x)\phi(y,y) \leq 0$$

Donc :

$$|\,\mathrm{Re}(\phi(x,y))| \leq \sqrt{\phi(x,x)} \cdot \sqrt{\phi(y,y)}$$

On en déduit immédiatement l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Traitons maintenant le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

Puisque cette inégalité est vraie pour tout $(x,y) \in E^2$, on peut remplacer y par $\phi(x,y)y$, et on peut manipuler en utilisant les propriétés.

On a :

$$\phi(x, \phi(x,y)y) = \overline{\phi(x,y)} \cdot \phi(x,y) \quad \text{(par sesquilinéarité)}$$

$$= |\phi(x,y)|^2 \in \mathbb{R}_+.$$

Donc $|\mathrm{Re}\,(\phi(x, \phi(x,y)y))| = |\phi(x,y)|^2$. D'après la linéarité et la sesquilinéarité, on a aussi :

$$\phi\left(\phi(x,y)y, \phi(x,y)y\right) = \phi(x,y)\overline{\phi(x,y)}\phi(y,y) = |\phi(x,y)|^2\phi(y,y)$$

Donc :

$$\sqrt{\phi\left(\phi(x,y)y, \phi(x,y)y\right)} = |\phi(x,y)| \cdot \sqrt{\phi(y,y)}.$$

Par conséquence :

$$|\phi(x,y)|^2 \leq \sqrt{\phi(x,x)} \cdot |\phi(x,y)| \cdot \sqrt{\phi(y,y)}.$$

On simplifie par $|\phi(x,y)|$ car il est non nul, et on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les complexes. ■

Corollaire de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit (E, ϕ) un espace préhilbertien.
Alors $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\phi(x,x)}$ est une norme sur E, appelée la **norme euclidienne** si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et la **norme hermitienne** si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Preuve :

— La séparation est déjà fait.

— L'homogénéité absolue se démontre facilement avec la linéarité et la sesquilinéarité.

— Sous-additivité :

$$\|x+y\|^2 = \phi(x+y, x+y) = \phi(x,x) + \phi(x,y) + \phi(y,x) + \phi(y,y)$$

$$= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\phi(x,y)) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

On prend la racine carrée : $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. ■

2.3 Espace des fonctions

Théorème 1.3

Soit $D \in \mathbb{R}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.

On note $\mathscr{B}(D, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ bornées sur D.

On pose pour $f \in \mathscr{B}(D, \mathbb{K})$:

$$||f||_\infty = \sup_{t \in D} |f(t)|$$

Alors $||.||_\infty$ est une norme sur $\mathscr{B}(D, \mathbb{K})$ appelée la norme de la convergence uniforme.

Je vous rappelle que "bornée" marche dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$, avec la valeur absolue et le module, respectivement.

Preuve

On démontre les trois propriétés :

— (séparation)

Soit $f \in \mathscr{B}(D, \mathbb{K})$ telle que $||f||_\infty = 0$.

Alors on a pout tout $t \in D$:

$$|f(t)| \leq ||f||_\infty = 0$$

Ici $|f(t)|$ est positif, donc on a $f(t) = 0$ pout tout $t \in D$.

— (homogénéité absolue)

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{B}(D, \mathbb{K})$. On a :

$$||\lambda f||_\infty = \sup_{t \in D} |\lambda f(t)| = |\lambda| \sup_{t \in D} |f(t)| = |\lambda| \cdot ||f||_\infty$$

— (sous-additivité)

Soit f et g deux fonctions dans $\mathscr{B}(D, \mathbb{K})$.

Pour tout $t \in D$, on a :

$$|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$$

Donc :

$$\sup_{t \in D} |f(t) + g(t)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$$

Conclusion : $||.||_\infty$ est une norme sur $\mathscr{B}(D, \mathbb{K})$. ■

Remarque 1.6

Le raisonnement suivant est faux :

$$\sup_{t \in D} |f(t) + g(t)| \leq \sup_{t \in D} |f(t)| + \sup_{t \in D} |g(t)|$$

Mais ce résultat est correct. Faites un dessin pour mieux comprendre.

Corollaire 1 du théorème 1.3

Soit $a < b$ deux réels. $||.||_\infty$ est une norme sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[a,b]$.

Preuve

D'après le théorème des bornes atteintes, on sait que toute fonction f qui est continue sur $[a,b]$ est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit : $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$.

Donc $(\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}), ||.||_\infty)$ est un espace vectoriel normé. ■

Corollaire 2 du théorème 1.3

On note ℓ^∞ l'ensemble des suites $(u_n) \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ bornées. L'application suivante est une norme sur ℓ^∞ :

$$||.||_\infty : u_n \mapsto ||u_n||_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$$

Preuve

On applique le théorème en utilisant $D = \mathbb{N}$. ■

Corollaire 3 du théorème 1.3

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Alors l'application :

$$||.|| : P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \mapsto \max_{k \in [\![0,n]\!]} |a_k|$$

est une norme sur $\mathbb{K}[X]$.

Ici $k \in [\![0, n]\!]$ car les polynômes sont effectivement les suites qui sont nulles à partir d'un certain rang.

Preuve

On peut identifier un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et la suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de ses coefficients.

Ainsi, $\mathbb{K}[X]$ s'identifie avec le sous-espace vectoriel de l^∞ des suites nulles à partir d'un certain rang, et la norme $||.||$ correspond à $||.||_\infty$ sur l^∞. ■

Remarque 1.7

On peut aussi identifier le polynôme P avec sa fonction polynomiale. Donc il faut faire attention de ne pas confondre les normes $||.||$ pour les polynômes et $||.||_\infty$ pour les fonctions.

Théorème 1.4

Soient $a < b$ deux réels. Pour tout $f \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{K})$, on pose :

$$||f||_1 = \int_a^b |f(t)| dt$$

qui est une norme sur $\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{K})$.

C'est généralisable à tout $p \geq 1$, comme la norme p définie avant.

Preuve

— (Séparation)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{K})$ telle que $\|f\|_1 = 0$.

On suppose par absurde que f n'est pas constante égale à 0.

D'après l'énoncé on a la continuité de f sur $[a, b]$, et par la définition de la continuité, on sait qu'il existe : $c \in]a, b[$ et $\varepsilon > 0$ tels que : $[c - \varepsilon, c + \varepsilon] \subset [a, b]$, et

$$\forall t \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon], \quad |f(t)| \geq \frac{|f(c)|}{2} > 0.$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} 0 = \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt \geq \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} |f(t)| dt \geq \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \frac{|f(c)|}{2} dt \\ = 2\varepsilon \cdot \left(\frac{|f(c)|}{2}\right) > 0 \quad \underline{\text{absurde}} \end{aligned}$$

Donc f est constante égale à 0 sur $[a,b]$.

— (homogénéité absolue)
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K})$.
Alors par linéarité de l'intégrale on a :

$$\|\lambda f\|_1 = \int_a^b |\lambda f(t)| dt = |\lambda| \cdot \|f\|_1$$

— (sous-additivité)
Soient $f, g \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K})$.
On a :

$$\begin{aligned}\|f+g\|_1 &= \int_a^b |f(t)+g(t)| dt \leq \int_a^b (|f(t)|+|g(t)|)\, dt \\ &= \int_a^b |f(t)| dt + \int_a^b |g(t)| dt = \|f\|_1 + \|g\|_1.\end{aligned}$$

Conclusion : $||.||_1$ est une norme sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K})$. ■

Remarque 1.8

Comme pour les normes p sur $\mathbb{K}^n$, on peut vérifier que pour tout $p \geq 1$:

$$||.||_p : f \mapsto \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

est une norme sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ (voir exercice 3 du TD 2).

3 Équivalence des normes

Définition 1.9

Soient N_1 et N_2 deux normes sur E.
On dit que N_1 et N_2 sont **équivalentes** s'il existe deux constantes $m > 0$ et $M > 0$ telles que :

$$\forall x \in E, \quad mN_1(x) \leq N_2(x) \leq MN_1(x).$$

Remarque 1.9

C'est en effet une relation d'équivalence, elle vérifie les propriétés :

- **Réflexive** : $N_1 \mathscr{R} N_1$.
- **Symétrique** : $N_1 \mathscr{R} N_2 \Rightarrow N_2 \mathscr{R} N_1$.
- **Transitive** : Si $N_1 \mathscr{R} N_2$ et $N_2 \mathscr{R} N_3$, alors $N_1 \mathscr{R} N_3$.

Si vous avez oublié qu'est-ce que c'est $\mathscr{R}$, révisez le cours MATH2306P sur les relations d'équivalence.

Exemple 1.4

On prend $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
On a, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\|x\|_\infty = \max_{k \in \{1,\ldots,n\}} |x_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| = \|x\|_1 \quad \text{et} \quad \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{K}^n$,

$$1\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

D'après la définition, ces normes sont équivalentes.

Exemple 1.5

On prend $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_\infty$ sur $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

Analyse de l'exemple :

On a, pour tout $f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt \quad \text{(par monotonie de l'intégrale)}$$

$$= [\|f\|_\infty t]_0^1 = \|f\|_\infty.$$

On a trouvé une constante $M = 1 > 0$ telle que

$$\forall f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \quad \|f\|_1 \leq M\|f\|_\infty.$$

Mais il n'existe pas de constante $m > 0$ telle que $\forall f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$,

$$m\|f\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

En effet, on raisonne par absurde : supposons qu'il existe une telle constante $m > 0$.
On considère la suite de fonctions de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$: $(f_n : t \mapsto t^n)_{n\geq 0}$
Alors, $\forall n \geq 0$,

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |t^n| = 1$$

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |t^n| dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Donc $\forall n > 0$,

$$m = m\|f_n\|_\infty \leq \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$$

Pour $n \to \infty$, on obtient $0 < m \leq 0$, ce qui est absurde !!!
Conclusion : $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ ne sont **pas équivalentes** !! ■

Remarque 1.10

On verra dans le prochain chapitre que des normes sur E qui sont équivalentes définissent la même topologie sur E.

Propriété 1.7

Soient N_1 et N_2 deux normes sur E.
Alors N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si :

$$\exists (r,R) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad B_2(0_E, r) \subset B_1(0_E, 1) \subset B_2(0_E, R)$$

où $B_2(0_E, r)$ et $B_2(0_E, R)$ sont des boules pour N_2, et $B_1(0_E, 1)$ est la boule unité définie par la norme N_1.

Preuve

On raisonne par double implication.

— $(\Rightarrow)$

On suppose que :

$$\exists (m, M) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \forall x \in E, \quad mN_1(x) \leq N_2(x) \leq MN_1(x).$$

Alors en réduisant $N_2(x)$ jusqu'à $B_2(0_E, m)$:

$$N_2(x) < m \Rightarrow N_1(x) < 1 \Rightarrow N_2(x) < M.$$

Donc :

$$B_2(0_E, m) \subset B_1(0_E, 1) \subset B_2(0_E, M).$$

— ($\Leftarrow$)
On suppose que :

$$\exists (r, R) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad B_2(0_E, r) \subset B_1(0_E, 1) \subset B_2(0_E, R).$$

On a, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$ et tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit :

$$N_2\left(\frac{(r-\varepsilon)x}{N_2(x)}\right) = (r-\varepsilon)\frac{N_2(x)}{N_2(x)} = r - \varepsilon < r.$$

Donc par définition d'une boule :

$$\frac{(r-\varepsilon)x}{N_2(x)} \in B_2(0_E, r) \subset\in B_1(0_E, 1).$$

Ainsi :

$$N_1\left(\frac{(r-\varepsilon)x}{N_2(x)}\right) < 1.$$

$$(r-\varepsilon)N_1(x) < N_2(x).$$

Et en prenant le cas limite $\varepsilon \to 0$, on obtient :

$$rN_1(x) \leq N_2(x).$$

Pour la deuxième inégalité, on utilise la même manipulation qu'avant :

$$N_1\left(\frac{(1-\varepsilon)x}{N_1(x)}\right) = (1-\varepsilon)\frac{N_1(x)}{N_1(x)} = 1 - \varepsilon < 1.$$

Donc on a :

$$N_2\left(\frac{(1-\varepsilon)x}{N_1(x)}\right) = (1-\varepsilon)\frac{N_2(x)}{N_1(x)} < R.$$

Pour $\varepsilon \to 0$, on obtient :

$$N_2(x) \leq RN_1(x).$$

Donc, $\forall x \in E \setminus \{0_E\}$:

$$rN_1(x) \leq N_2(x) \leq RN_1(x).$$

C'est aussi évident pour $x = 0_E$.

Conclusion : N_1 et N_2 sont **équivalentes**. ■

Deuxième partie

Topologie des espaces vectoriels normés

Dans tout ce chapitre, on utilise les notations suivantes :

- $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- N une norme sur E, donc (E, N) est un espace vectoriel normé.
- 0_E désigne le vecteur nul de E.

On va aussi prendre les objets qu'on a définit avant. Pour tout $a \in E$ et $r > 0$, on note $B(a, r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r et également la boule fermé $\overline{B}(a, r)$, revoyez leurs définitions si vous en avez besoin.

1 Ouverts et fermés

Définition 2.1

On dit qu'une partie $O \subset E$ est **ouverte** ou que O est un **ouvert** de (E, N) lorsque :

$$\forall x \in O, \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset O$$

On dit qu'une partie $F \subset E$ est **fermée** ou que F est un **fermé** de (E, N) si $E \setminus F$ est un ouvert de E.

Exemple 2.1

Quelques exemples immédiats.

E est un ouvert car : $\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset E$.

$\varnothing$ est un ouvert car il contient personne, ce qui donne la vérité de l'assertion universelle.

De plus, E et $\varnothing$ sont aussi des fermés, car $E \setminus \varnothing = E$, et $E \setminus E = \varnothing$.

Exemple 2.2

L'exemple de la droite réelle et sa norme, la valeur absolue.

Pour la suivante, on se place dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |.|)$. Dans ce cas on a

$B(a,r) =]a-r, a+r[$.

En particulier, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, on a l'intervalle ouvert $]a,b[$. On veut montrer qu'un intervalle ouvert est un ouvert sur cet espace. Pour x dans l'intervalle $]a,b[$, on choisit $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{|x-a|, |x-b|\} > 0$. On peut facilement vérifier que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]a,b[$, donc $]a,b[$ est un ouvert. Autrement dit, un intervalle ouvert sur $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

De plus, on peut regarder son complémentaire $]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$, qui n'est pas ouvert. On peut imaginer qu'en $x = a$ ou en $x = b$, aucun ε marche. Une idée pour la démonstration en $x = a$: on voit que $]a, a+\varepsilon[\cap]a,b[\neq \emptyset$.

De même, $[a,b]$ n'est pas ouvert, mais on voit que son complémentaire est un ouvert, donc $[a,b]$ est un fermé.

- $[a,b[$ et $]a,b]$ sont ni ouverts, ni fermés.
- $]a,+\infty[$ est ouvert mais pas fermé.
- $[a,+\infty[$ est fermé mais pas ouvert.
- $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$ est à la même fois ouvert et fermé.

Exemple 2.3

Exemple des boules dans un espace vectoriel normé général.

Fixons $a \in E$ et $r > 0$. On veut vérifier que $B(a,r)$ est un ouvert et que $\overline{B}(a,r)$ est un fermé de (E,N).

Preuve pour la boule ouverte :

Soit $x \in B(a,r)$. On cherche $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset B(a,r)$.

Posons

$$\varepsilon = r - N(x-a) > 0 \quad (\text{comme } x \in B(a,r))$$

Soit $y \in B(x,\varepsilon)$, par définition d'une boule ouverte, $N(y-x) < \varepsilon$.

Par l'inégalité triangulaire, on a :

$$N(y-a) \leq N(y-x) + N(x-a) < \varepsilon + N(x-a) = r.$$

Donc on a $y \in B(a,r)$, et ceci est vraie pour tout $y \in B(x,\varepsilon)$.

Ainsi, $B(x,\varepsilon) \subset B(a,r)$ pour tout $x \in B(a,r)$. Donc $B(a,r)$ est un ouvert sur notre espace vectoriel normé. ■

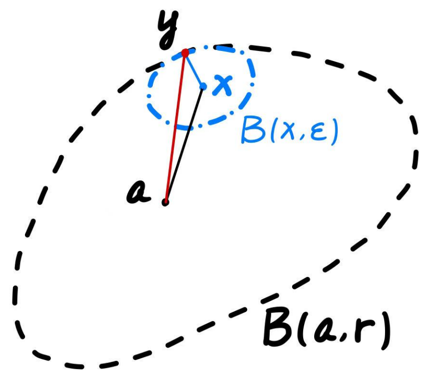

FIGURE 3 – Grande boule et petite boule :)

Preuve pour la boule fermée :

On veut montrer que la boule est fermée, donc on considère son complémentaire dans E. Montrons que $E \setminus \overline{B}(a,r) = \{x \in E \mid N(x-a) > r\}$ est un ouvert.

Soit $x \in E \setminus \overline{B}(a,r)$. Alors $N(x-a) > r$.

On cherche $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset E \setminus \overline{B}(a,r)$.

Posons $\varepsilon = N(x-a) - r > 0$.

Soit $y \in B(x,\varepsilon)$, alors $N(y-x) < \varepsilon$.

On a :

$$N(x-a) \leq N(x-y) + N(y-a) \quad \text{(par inégalité triangulaire).}$$

On fait bouger les termes :

$$N(y-a) \geq N(x-a) - N(x-y).$$

$$\text{(...continué)} = N(x-a) - N(y-x) \quad \text{(homogénéité absolue).}$$

$$\text{(...continué)} > N(x-a) - \varepsilon = r, \quad \text{car } N(y-x) < \varepsilon.$$

Donc $y \in E \setminus \overline{B}(a,r)$ et $B(x,\varepsilon) \subset E \setminus \overline{B}(a,r)$.

Ainsi, $E \setminus \overline{B}(a,r)$ est ouvert, par conséquent, $\overline{B}(a,r)$ est fermé. ■

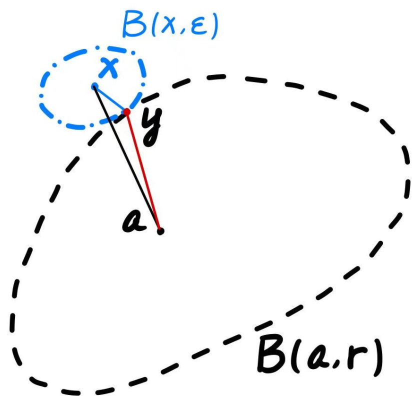

FIGURE 4 – Grande boule et petite boule, mais la petite boule s'est échappée :(

Exemple 2.4

Soit $a \in E$, le singleton $\{a\}$ est fermé et pas ouvert.

Proposition 2.1

La propriété d'être ouvert ou fermé, on peut la généraliser avec les opérations $\cup$ et $\cap$.

- Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts, alors $\bigcup\limits_{i\in I} O_i$ est un ouvert.
- Soit $(O_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie d'ouverts, alors $\bigcap\limits_{i\in[\![1,n]\!]} O_i$ est un ouvert.
- Soit $(F_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie de fermés , alors $\bigcup\limits_{i\in[\![1,n]\!]} F_i$ est un fermé.
- Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés, alors $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est un fermé.

Preuve

- Montrons que $\forall x \in \bigcup\limits_{i\in I} O_i$, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset \bigcup\limits_{i\in I} O_i$.

  Donc $\exists i_0 \in I$ tel que $x \in O_{i_0}$.

  Or, O_{i_0} est ouvert, donc $\exists \varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset O_{i_0} \subset \bigcup\limits_{i\in I} O_i$.

  Conclusion : $\bigcup\limits_{i\in I} O_i$ est ouvert.
- Montrons que $\forall x \in \bigcap\limits_{i\in[\![1,n]\!]} O_i$, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset \bigcap\limits_{i\in[\![1,n]\!]} O_i$.

  Soit $x \in \bigcap\limits_{i\in[\![1,n]\!]} O_i$, donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x \in O_i$.

  Or, chaque O_i est ouvert, donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\exists \varepsilon_i > 0$ tel que $B(x,\varepsilon_i) \subset O_i$.

Prenons $\varepsilon = \min_{i\in[\![1,n]\!]} \varepsilon_i > 0$, car $[\![1,n]\!]$ est fini.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $B(x,\varepsilon) \subset B(x,\varepsilon_i) \subset O_i$.

Conclusion : $B(x,\varepsilon) \subset \bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} O_i$, donc $\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} O_i$ est ouvert.

— Montrons que $E \setminus \bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} F_i$ est ouvert.

On écrit :

$$E \setminus \bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} F_i = \bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} (E \setminus F_i).$$

Or, $E \setminus F_i$ est ouvert puisque F_i est fermé.

L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert, donc $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ est fermé.

D'après la proposition précédente, le résultat est démontré.

— De même, montrons que $E \setminus \bigcap_{i\in I} F_i$ est ouvert.

On écrit :

$$E \setminus \bigcap_{i\in I} F_i = \bigcup_{i\in I} (E \setminus F_i).$$

Or, $E \setminus F_i$ est ouvert pour tout $i \in I$.

D'après les résultats précédents, l'union d'un nombre quelconque d'ouverts est un ouvert, donc $\bigcap_{i\in I} F_i$ est fermé. ∎

Exemple 2.5

— Soit $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ une partie <u>finie</u> de E.

Alors $A = \bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} \{a_i\}$ est fermée comme union d'un nombre fini de singletons qui sont fermés.

— On se place encore une fois sur $(\mathbb{R}, |.|)$: notons $\mathbb{Z}$ l' ensemble des entiers relatifs.

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{n\}.$$

Ceci ne justifie pas que $\mathbb{Z}$ soit un fermé ! Il faut faire attention aux raisonnements.

Mais $\mathbb{Z}$ est en fait un fermé, car son complémentaire $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ est une union d'ouverts, donc ouvert.

Par conséquence $\mathbb{Z}$ est fermé.

ATTENTION :

— Une intersection d' un nombre infini d'ouverts n' est pas toujours ouverte.

Exemple :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\} \quad \text{C'est un fermé.}$$

— Une union d' un nombre infini de fermés n' est pas toujours fermée.

Exemple :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}\right] =]0,1[\quad \text{C'est un ouvert.}$$

2 Intérieur et adhérence

Définition 2.2

Soit $A \subset E$.

— **L'intérieur de** A, noté $\mathring{A}$, est le plus grand ouvert inclus dans A.
Autrement dit, c' est l' union de tous les ouverts inclus dans A, qui est ouverte grâce à la propriété fait dans la section précédente.

$$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{O\subset A \\ O \text{ ouvert}}} O$$

— **L'adhérence de** A, notée $\overline{A}$, est le plus petit fermé contenant A, c' est aussi l'intersection de tous les fermés contenant A.

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F\supset A \\ F \text{ fermé}}} F$$

— **La frontière de** A (ou le bord de A), notée ∂A, est définie par :

$$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$$

Remarque 2.1

L'intérieur est un ouvert, l'adhérence est un fermé. Le bord est aussi un fermé comme l'intersection de deux fermés : $\partial A = \overline{A} \cap \left(E \setminus \mathring{A}\right)$

Exemple 2.6

Quelques exemples immédiats sur les ensembles et les intervalles.

— $\mathring{\varnothing} = \overline{\varnothing} = \varnothing, \quad \mathring{E} = \overline{E} = E.$

Car $\varnothing$ et E sont ouverts et fermés.

— Dans $(\mathbb{R}, |.|)$, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$:

$$\overset{\circ}{\overbrace{]a,b[}} = \overset{\circ}{\overbrace{]a,b]}} = \overset{\circ}{\overbrace{[a,b[}} = \overset{\circ}{\overbrace{[a,b]}} =]a,b[$$

$$\overline{]a,b[} = \overline{]a,b]} = \overline{[a,b[} = \overline{[a,b]} = [a,b]$$

$$\overset{\circ}{\overbrace{]a,+\infty[}} = \overset{\circ}{\overbrace{[a,+\infty[}} =]a,+\infty[$$

$$\overline{]a,+\infty[} = \overline{[a,+\infty[} = [a,+\infty[$$

$$\overset{\circ}{\overbrace{]-\infty,b[}} = \overset{\circ}{\overbrace{]-\infty,b]}} =]-\infty,b[$$

$$\overline{]-\infty,b[} = \overline{]-\infty,b]} =]-\infty,b]$$

$$\overset{\circ}{\overbrace{]-\infty,+\infty[}} = \overline{]-\infty,+\infty[} =]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$$

Vous avez vu ces notations dans le cours MATH1301P, où on a utilisé les intervalles ouverts et fermés.

Exemple 2.7

Soit $a \in E$ et $r > 0$. L'adhérence de $B(a,r)$ est $\overline{B}(a,r)$.

Preuve

Il suffit de montrer que $\overline{B}(a,r)$ est le plus petit fermé qui contient $B(a,r)$. On sait déjà que la boule fermé est un fermé contenant la boule ouverte, donc on peut montrer la chose suivante : si F est un fermé contenant $B(a,r)$ alors $\overline{B}(a,r) \subset F$.

Soit $F \subset E$ un fermé tel que $B(a,r) \subset F$.

Montrons que $\overline{B}(a,r) \subset F$.

La boule fermée est effectivement la boule ouverte et la sphère :

$$\overline{B}(a,r) = B(a,r) \cup \{x \in E \mid N(x-a) = r\}$$

Il suffit de montrer que $\partial B(a,r) \subset F$.

Par l'absurde, on suppose qu'il existe $x \in E$ tel que

$$x \in \partial B(a,r) \quad \text{et} \quad x \notin F$$

Donc $N(x-a) = r$ et $x \in E \setminus F$

Or F est fermé, alors $E \setminus F$ est ouvert, donc on a :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad B(x,\varepsilon) \subset E \setminus F \subset E \setminus \overline{B}(a,r)$$

Ce qui est intuitivement bizarre, car si on fait un dessin on trouve une petite section qui ne doit pas exister.

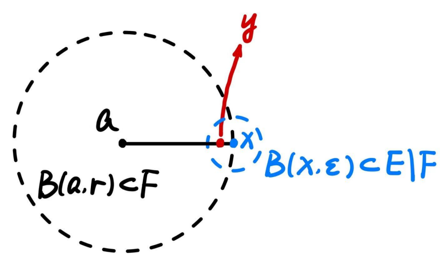

FIGURE 5 – “Comme si je n'existait pas”

Pour démontrer précisément cette absurdité, il suffit de prendre un y au voisinage de x sur le segment :

$$[a,x] = \{\lambda a + (1-\lambda)x \mid \lambda \in [0,1]\}$$

Par exemple pour $y = \lambda a + (1-\lambda)x$ où

$$0 < \lambda < \min\left\{\frac{\varepsilon}{r}, 1\right\}$$

On a :

$$\begin{aligned} N(y-a) &= N(\lambda a + (1-\lambda)x - a) \\ &= N((1-\lambda)(x-a)) \\ &= |1-\lambda| \cdot N(x-a) \\ &= (1-\lambda)r < r \end{aligned}$$

(car $\lambda > 0$ donc $1-\lambda < 1$)

Donc $y \in B(a,r) \subset F$. On va démontrer que y appartient aussi à $E \setminus F$, et puis on obtiendra la contradiction.

$$N(y-x) = N(-\lambda(x-a)) = |-\lambda| \cdot N(x-a) = \lambda r < \frac{\varepsilon}{r} r = \varepsilon$$

Donc $y \in B(x,\varepsilon) \subset E \setminus F$

C'est absurde car $F \cap (E \setminus F) = \varnothing$, on en déduit que $\partial B(a,r) \subset F$

Donc on a :

$$\overline{B}(a,r) = B(a,r) \cup \partial B(a,r) \subset F$$

On a montré que $\overline{B}(a,r)$ est le plus petit fermé qui contient $B(a,r)$.

Autrement dit :

$$\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$$

$\blacksquare$

On peut aussi montrer que :

$$\overline{B}(\overset{\circ}{a},r) = B(a,r)$$

On en déduit aussi que :

$$\partial(B(a,r)) = \overline{B(a,r)} \setminus B(\overset{\circ}{a},r) = \overline{B}(a,r) \setminus B(a,r)$$

$$= \{x \in E \mid N(x-a) = r\} = \partial B(a,r)$$

Autrement dit, la frontière d'une boule est la sphère. On peut aussi définir l'intérieur, l'adhérence et la frontière à l'aide des boules et des quantificateurs logiques, ce qui est plus facile à utiliser en pratique.

Proposition 2.2

Soit $A \subset E$. Alors :

$$\mathring{A} = \{x \in E \mid \exists r > 0,\ B(x,r) \subset A\}$$

$$\overline{A} = \{x \in E \mid \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing\}$$

$$\partial A = \{x \in E \mid \forall r > 0,\ (B(x,r) \cap A \neq \varnothing \text{ et } B(x,r) \cap (E \setminus A) \neq \varnothing)\}$$

Preuve

— Soit $x \in \mathring{A}$. Puisque $\mathring{A}$ est ouvert, on sait que :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad B(x,\varepsilon) \subset \mathring{A}$$

Or $\mathring{A} \subset A$. Donc $B(x,\varepsilon) \subset A$, on en déduit que :

$$\mathring{A} \subset \{x \in E \mid \exists r > 0,\ B(x,r) \subset A\}$$

Réciproquement, on fixe $x \in E$ tel que :

$$\exists r > 0,\ B(x,r) \subset A$$

Alors $B(x,r)$ est un ouvert inclus dans A. On sait que $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.

Donc $B(x,r) \subset \mathring{A}$. En particulier, $x \in B(x,r) \subset \mathring{A}$

Donc on a :

$$\{x \in E \mid \exists r > 0,\ B(x,r) \subset A\} \subset \mathring{A}$$

Par double-inclusion, on a montré que :

$$\mathring{A} = \{x \in E \mid \exists r > 0,\ B(x,r) \subset A\}$$

— On remarque que :

$$E \setminus \overline{A} = E \setminus \left(\bigcap_{\substack{F \supset A \\ F \text{ fermé}}} F \right) = \bigcup_{\substack{F \supset A \\ F \text{ fermé}}} (E \setminus F) \quad \text{(ouvert)}$$

$$= \bigcup_{\substack{(E\setminus F)\subset(E\setminus A)\\(E\setminus F)\text{ouvert}}} (E \setminus F) = \bigcup_{\substack{O\subset(E\setminus A)\\ O \text{ ouvert}}} O = E \overset{\circ}{\setminus} A$$

Or,

$$E \overset{\circ}{\setminus} A = \{x \in E \mid \exists r > 0,\ B(x,r) \subset E \setminus A\}$$

Donc en manipulant les ensembles on a :

$$\overline{A} = E \setminus (E \setminus \overline{A}) = E \setminus \left(E \overset{\circ}{\setminus} A\right)$$

$$= E \setminus \{x \in E \mid \exists r > 0,\ B(x,r) \subset (E \setminus A)\}$$

$$= \{x \in E \mid \forall r > 0,\ B(x,r) \cap (E \setminus (E \setminus A)) \neq \varnothing\}$$

$$= \{x \in E \mid \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing\}$$

— On a :

$$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap \left(E \setminus \mathring{A}\right) = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$$

$$= \{x \in E \mid \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing \text{ et } B(x,r) \cap (E \setminus A) \neq \varnothing\}$$

■

Exemple 2.8

Dans $(\mathbb{R}, |.|)$, on rappelle que :

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (]n, n+1[) \text{ ouvert} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{Z} \text{ est fermé}$$

On a : $\mathring{\mathbb{Z}} = \varnothing$ et $\overline{\mathbb{Z}} = \partial\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

Car : $\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall r \in]0,1[, \quad B(n,r) \cap \mathbb{Z} = \{n\}$

Exemple 2.9

On dit que $a \in A$ est un **point isolé** de A si $\exists \varepsilon > 0$ tel que :

$$B(a,\varepsilon) \cap A = \{a\}$$

Par exemple, tout $n \in \mathbb{Z}$ est un point isolé de $\mathbb{Z}$, par contre, aucun point d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ n' est isolé.

Soit $a \in A$ un point isolé de A.

Alors :

$$a \notin \mathring{A} = \{x \in E \mid \exists r > 0,\ B(x,r) \subset A\}$$

$$a \in \overline{A} = \{x \in E \mid \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing\}$$

Autrement dit, les points isolés de A appartiennent à la **frontière** de A.

Attention : La réciproque est fausse. Il peut exister des points dans la frontière qui ne sont pas isolés.

Exemple 2.10

Dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, aucun point de $\partial B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ n' est isolé.

$$\partial B(0_{\mathbb{R}^2}, 1) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$

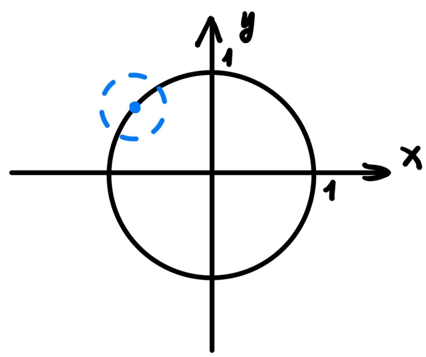

Figure 6 – Il y a toujours une intersection.

Propriété 2.1

Soit $A \subset E$, alors :

— A est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$. Autrement dit,

$$\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subset A.$$

— A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$. Autrement dit,

$$\forall x \in E, \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing \Rightarrow x \in A.$$

Preuve : Immédiate si vous avez bien compris le cours. ■

Remarque 2.2

— Pour la caractérisation d'un ouvert, on retrouve la définition d'un ouvert. *(Donc inutile).*

— Par contre, pour la caractérisation d'un fermé, on obtient une nouvelle méthode pour montrer qu'une partie F est fermée.
Au lieu de démontrer que son complémentaire est ouvert, il suffit de montrer que $\overline{F} \subset F$.

Exemple 2.11

Soit $A =]0,1[^2$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.
Alors A est ouvert car, pour tout $(x,y) \in]0,1[^2$, si on pose

$$r = \min\{x,\ 1-x,\ y,\ 1-y\} > 0,$$

on peut facilement vérifier que

$$B((x,y),r) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\} \subset]0,1[^2.$$

On peut également montrer que A n'est pas fermé.

Preuve

Montrons que A n' est pas fermé $\Leftrightarrow \overline{A} \neq A$.
Il suffit de montrer que :

$$\overline{A} = [0,1]^2$$

On sait déjà que $A \subset [0,1]^2$, donc :

$$\overline{A} \subset [0,1]^2 \qquad (\text{définition de } \overline{A})$$

On essaye de montrer que :

$$\overline{A} \supset [0,1]^2$$

Soit $r > 0$. On cherche l' ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$B((x,y), r) \cap A \neq \varnothing$$

On peut montrer (exercice de géométrie) que :

$$\begin{aligned} &\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid B((x,y),r) \cap A \neq \varnothing\right\} \\ = &\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{distance de } (x,y) \text{ à } A \text{ est strictement plus petite que } r\right\} \\ &\subset]-r, 1+r[^2 \end{aligned}$$

Donc

$$\overline{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall r > 0,\ B((x,y),r) \cap A \neq \varnothing\right\} \supset \bigcap_{r>0}]-r, 1+r[^2 = [0,1]^2.$$

Par conséquent :

$$\overline{A} = [0,1]^2 \quad \Rightarrow \quad A \neq \overline{A}.$$

En particulier, A n' est pas fermé. ■

Propriété 2.2

Soient $A \subset E$ et $B \subset E$.

Alors :

$$\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B} \quad \text{et} \quad \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B},$$

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Preuve pour le premier point :

On sait que $A \cap B \subset A$, donc $A \overset{\circ}{\cap} B \subset A$.

Donc $A \overset{\circ}{\cap} B$ est un ouvert inclus dans A.

Donc $A \overset{\circ}{\cap} B \subset \mathring{A}$ (car $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A).

De la même manière, $A \overset{\circ}{\cap} B \subset \mathring{B}$.

Donc on a :

$$\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}.$$

Montrons l'inclusion réciproque.

On sait que $\mathring{A} \subset A$ et $\mathring{B} \subset B$.

Donc $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset A \cap B$.

Or $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ est un ouvert, comme intersection de deux ouverts (en nombre fini).

Et $A \overset{\circ}{\cap} B$ est le plus grand ouvert inclus dans $A \cap B$.

Par conséquent,

$$\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset A \overset{\circ}{\cap} B.$$

<u>Conclusion</u> : on a montré par double inclusion que

$$A \overset{\circ}{\cap} B = \mathring{A} \cap \mathring{B},$$

Preuve pour le deuxième point :

De même, on sait que $\mathring{A} \subset A$ et $\mathring{B} \subset B$, donc

$$\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset A \cup B.$$

Or $\mathring{A} \cup \mathring{B}$ est ouvert comme union d'ouverts (quel que soit le nombre d' ensembles). Et $A \overset{\circ}{\cup} B$ est le plus grand ouvert inclus dans $A \cup B$.

Par conséquent,

$$\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset A \overset{\circ}{\cup} B.$$

Preuve pour le troisième point :

On pose $A' = E \setminus A$ et $B' = E \setminus B$.

Alors :

$$A' \cap B' = (E \setminus A) \cap (E \setminus B) = E \setminus (A \cup B)$$

donc

$$\overline{A' \cap B'} = \overline{E \setminus (A \overset{\circ}{\cup} B)}.$$

Or,

$$\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset A \overset{\circ}{\cup} B \quad \Rightarrow \quad E \setminus (A \overset{\circ}{\cup} B) \subset E \setminus \left(\mathring{A} \cup \mathring{B}\right).$$

Donc par passage à l'adhérence :

$$\overline{A' \cap B'} \subset E \setminus (\mathring{A} \cup \mathring{B}) = (E \setminus \mathring{A}) \cap (E \setminus \mathring{B}) = \overline{A'} \cap \overline{B'}.$$

Preuve pour le quatrième point :

Toujours de la même manière, on a :

$$\overline{A' \cup B'} = \overline{(E \setminus A) \cup (E \setminus B)} = \overline{E \setminus (A \cap B)} = E \setminus (A \overset{\circ}{\cap} B)$$

Or, on a :

$$A \overset{\circ}{\cap} B = \mathring{A} \cap \mathring{B}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \overline{A' \cup B'} &= E \setminus (\mathring{A} \cap \mathring{B}) = (E \setminus \mathring{A}) \cup (E \setminus \mathring{B}) \\ &= \overline{(E \setminus A)} \cup \overline{(E \setminus B)} = \overline{A'} \cup \overline{B'} \end{aligned}$$

■

Attention

En général, on a seulement :

$$\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset A \overset{\circ}{\cup} B \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$$

Les inclusions réciproques sont fausses en général !!

Exemple 2.12

Dans $(\mathbb{R}, |.|)$ on a le contre-exemple :

$$[0, \overset{\circ}{} 1] \cup [1, \overset{\circ}{} 2] =]0, 1[\cup]1, 2[=]0, 2[\setminus \{1\}$$

$$[0, 1] \overset{\circ}{\cup} [1, 2] = [0, \overset{\circ}{} 2] =]0, 2[$$

Ces deux ensembles ne sont pas égaux.

$$\overline{]0, 1[\cap]1, 2[} = \overline{\varnothing} = \varnothing$$

$$\overline{]0, 1[} \cap \overline{]1, 2[} = [0, 1] \cap [1, 2] = \{1\}$$

Ouf, il faut faire attention si on veut faire bouger les barres et les ronds.

Définition 2.3

Soit $D \subset E$.
On dit que D est **dense** dans (E, N) si : $\overline{D} = E$.
Autrement dit, lorsque :

$$\forall x \in E,\ \forall r > 0, \quad B(x, r) \cap D \neq \varnothing$$

Exemple 2.13

Soit $a \in E$.
a est un point isolé de $\{a\}$ (car $B(a, r) \cap \{a\} = \{a\}$)

Donc $\overset{\circ}{\{a\}} = \varnothing$ et donc :

$$\overline{E \setminus \{a\}} = E \setminus \overset{\circ}{\{a\}} = E \setminus \varnothing = E$$

Autrement dit : $E \setminus \{a\}$ est dense dans (E, N).
De même, le complémentaire d'une partie finie de E est dense dans (E, N). Par exemple, on reprend l'ensemble qu'on a étudié avant : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ est dense dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, car : $\overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \varnothing$

Soit $E = \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme.

$$f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

On considère

$$D = \{f \in E \mid f(0) \neq 0\}$$

On peut montrer que D est dense dans E.

Preuve :

Il suffit de montrer que

$$\overline{D} = E$$

Soit $f \in E \setminus D$, donc $f \in \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $f(0) = 0$.
Soit $r > 0$. On considère la fonction $g = f + \frac{r}{2} \in E$.
On a :

$$\|g - f\|_\infty = \left\|\frac{r}{2}\right\| = \frac{r}{2} < r$$

et

$$g(0) = f(0) + \frac{r}{2} = \frac{r}{2} \neq 0$$

Donc $g \in B(f, r) \cap D$.

En particulier, $B(f, r) \cap D \neq \varnothing \quad$ pour tout $r > 0$.

Donc :

$$f \in \overline{D} = \{f \in E \mid \forall r > 0,\ B(f, r) \cap D \neq \varnothing\}$$

Par conséquent,

$$E \setminus D \subset \overline{D}$$

On sait aussi que $D \subset \overline{D}$

Donc :

$$E = (E \setminus D) \cup D \subset \overline{D} \subset E$$

On a bien montré que $\overline{D} = E$，donc que D est dense dans (E, N)

3 Suites d'éléments dans un espace vectoriel normé

Définition 2.4

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite d' éléments de E.

On dit que $(u_n)_{n \geq n_0}$ **converge** vers $\ell \in E$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \geq n_0,\ \forall n \geq n_1, u_n \in B(\ell, \varepsilon) \quad \text{(voisinage de } \ell\text{)}$$

Ce qui équivaut à :

$$N(u_n - \ell) < \varepsilon$$

Remarque 2.3

On retrouve la définition des suites réelles convergentes dans $(\mathbb{R}, |.|)$.

Remarque 2.4

De plus, on peut se ramener aux suites réelles, car :

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} N(u_n - \ell) = 0$$

(À gauche : suite dans un EVN, et à droite : suite réelle)

Important : On retrouve donc tous les résultats classiques sur les suites numériques :

- Unicité de la limite
- Toute suite convergente est bornée
- Une combinaison linéaire de suites convergentes est convergente
- etc.

Propriété 2.3

Soit $F \subset E$.

Alors F est fermée si et seulement si toute suite convergente d' éléments de F a sa limite dans F :

$$\begin{cases} \forall n \geq n_0,\ u_n \in F \\ (u_n)_{n \geq n_0} \text{ converge} \end{cases} \implies \lim_{n \to \infty} u_n \in F$$

C'est ce qu'on appelle la **caractéristique séquentielle des fermés**. "Séquentielle" est effectivement "avec des suites", et vous voyez qu'en anglais une suite se dit "a sequence".