Notes du cours : MATH2308P

Cours assuré par Sébastien GODILLON

Fichier LaTeX rédigé par Corentin 邱天意

Semestre 2024-2025-2

Table des matières

Première partie

Espaces vectoriels normés

On commence notre travail avec les espaces vectoriels normés.

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et on note 0_E le vecteur nul de E.

1 Normes et distances

Définition I.1

Une **norme** sur E est une application de E dans $\mathbb{R}$. Elle a pour notation N, et elle vérifie les propriétés suivantes :

— $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$ (séparation)

— $\forall(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité absolue)

— $\forall(x, y) \in E^2, \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (sous-additivité)

Dans le deuxième point, $|\lambda|$ peut représenter la valeur absolue(en $\mathbb{R}$) ou le module(en $\mathbb{C}$), et ça dépend de l'ensemble dans lequel on se place.

Définition I.2

Si N est une norme sur E, alors on dit que (E, N) est un **espace vectoriel normé**.

Proposition I.1

Soit N une norme sur E, alors on a :

— $N(0_E) = 0$ (réciproque de la séparation)

— $\forall x \in E, \quad N(x) \geq 0$ (positivité)

— $\forall(x, y) \in E^2, \quad |N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$ ("continuité")

Petit remarque 1 : la première nous donne l'équivalence dans la propriété de séparation : $\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0_E$

Petit remarque 2 : dans la troisième, $|N(x) - N(y)|$ désigne la valeur absolue puisque la norme est une application dans $\mathbb{R}$.

Preuve : Soit $(x, y) \in E^2$.

— $N(0_E) = N(0.x) = |0|N(x) = 0$, donc on a : $\underline{N(0_E) = 0}$.
  Remarque : ne mélangez pas 0_E et 0.

— D'après la propriété qu'on vient de démontrer, on a :

$$0 = N(0_E) = N(x - x) = N(x + (-x))$$

  De plus, par sous-additivité, on a :

$$N(x + (-x)) \leq N(x) + N(-x) = N(x) + |-1|N(x) = 2N(x)$$

  On obtient $\underline{N(x) \geq 0}$ en mettant les deux relations ensemble.

— Rappel : $|x| \geq k \Longleftrightarrow -k \leq x \leq k$.
  Donc il faut démontrer les inégalités à gauche et à droite.
  — $N(x) = N(x - y + y) \leq N(x - y) + N(y)$ (par sous-additivité), et on trouve la relation $N(x) - N(y) \leq N(x - y)$.
  — De même façon on trouve l'autre, en utilisant $N(y)$ au début : $-N(x - y) \leq N(x) - N(y)$.

Ces deux inégalités nous donnent le résultat : $\forall (x, y) \in E^2, \quad |N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$. ■

Remarque I.1

Les normes sont les objets qui généralisent la valeur absolue et le module pour les espaces vectoriels plus grands que $\mathbb{K}$.

Rappel I.1

Pour qu'on puisse commencer à étudier les distances, on rappelle que :

— La valeur absolue du réel a représent la distance entre 0 et a sur la droite réelle.

— Même chose pour le module pour les complexes, mais cette fois on trouve la distance sur le plan complexe.

— Plus généralement $|a - b|$ représent la distance entre a et b.

Définition I.3

Soit (E, N) un espace vectoriel normé, alors l'application :

$$d : \begin{cases} E^2 \to [0, +\infty[\\ (a, b) \mapsto d(a, b) = N(a - b) \end{cases}$$

est une **distance** sur E. De plus, elle vérifie 3 propriétés :

— $\forall (a, b) \in E^2, d(a, b) = d(b, a)$ (symétrie)

— $\forall (a, b) \in E^2, d(a, b) = 0 \iff a = b$ (séparation)

— $\forall (a, b, c) \in E^3, d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$ (inégalité triangulaire)

Remarque : la deuxième propriété se démontre avec la séparation des normes, et la troisième avec la homogénéité absolue.

Propriété I.1

Notre espace vectoriel normé (E, d) est un **espace métrique**.

Vous pouvez regarder les autres livres pour la définition d'un espace métrique, qui est essentiellement un ensemble muni d'une distance :).

Propriété I.2

La translation et l'homothétie, on les a vu au MATH1301P, dans le chapitre de la géométrie euclidienne. La norme vérifie aussi ces deux propriétés :

— d est **invariante par translation**, c'est-à-dire : $\forall (t, x, y) \in E^3, d(x+t, y+t) = d(x, y)$.

— d est **absolument homogène par homothétie**, c'est-à-dire : $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2, d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.

Remarque I.2

Les espaces métriques fournissent un cadre plus général que les espaces vectoriels normés pour introduire les différentes notions de topologie de ce chapitre. Cependant, on se limitera ici à l'étude moins abstraite des espaces vectoriels normés afin de pouvoir continuer à utiliser les opérations classiques d'algèbre linéaire.

Définition I.4

Soit (E, N) un espace vectoriel normé, on définit :

— La **boule ouverte** de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$.

$$B(a, r) = \{x \in E | N(x - a) < r\}.$$

C'est l'ensemble des vecteurs à une distance de a strictement plus petite que r.

— La **boule fermé** de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$.

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in E | N(x - a) \leq r\}.$$

— La **sphère** de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$.

$$\partial B(a, r) = \{x \in E | N(x - a) = r\}.$$

Propriété I.3

On peut passer d'une boule à une autre(de la même nature), à l'aide d'une translation et une homothétie.
En particulier, $\forall (a, r) \in E \times]0, +\infty[$, on a $B(a, r) = a + rB(0_E, 1)$.
L'addition de a et la multiplication par r sont respectivement la translation et la homothétie. Mais attention, on commence toujours par la homothétie, car l'inverse nous donnerait une boule agrandie.

Preuve : Soient $B(a_1, r_1)$ et $B(a_2, r_2)$ deux boules, où $(a_1, a_2) \in E^2$ et $(r_1, r_2) \in]0, +\infty[^2$.

— On peut démontrer que l'opération de translation est faisable en justifiant l'égalité entre ces deux ensembles suivants : $B(a_1, r_1) = a_1 + r_1 B(0_E, 1)$. Vous devez procéder par double inclusion.

— On raisonne étape par étape pour la homothétie :

$$B(a_1, r_1) = a_1 + B(0_E, r_1) = a_1 + \frac{r_1}{r_2} B(0_E, r_2)$$

Comme on a dit déjà qu'on peut faire la translation par un vecteur, on manipule :

$$a_1 + \frac{r_1}{r_2}(B(a_2, r_2) - a_2) = a_1 - \frac{r_1 a_2}{r_2} + \frac{r_1}{r_2} B(a_2, r_2)$$

■

C'est la même preuve pour toutes les boules ouvertes, fermées et les sphères.

2 Exemples d'espaces vectoriels normés

2.1 Cas de la dimension finie

On fixe un entier $n \geq 1$, et on considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}^n$.

Définition I.5

Pour tout $x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{K}^n$, on définit :

$$||x||_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

et :

$$||x||_\infty = \max_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k|$$

Propriété I.4

$||x||_1$ et $||x||_\infty$ sont les normes sur $\mathbb{K}^n$, appelées les normes 1 et infinie.

Preuve : Soient $x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y = (y_1, y_2, ...y_n) \in \mathbb{K}^n$

On va démontrer que ces applications vérifient les trois propriétés.

— (séparation)

On remarque que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$0 \leq |x_k| \leq ||x||_\infty \leq ||x||_1$$

Donc, si on a $||x||_1 = 0$ ou $||x||_\infty = 0$, alors $x_k = 0$ pour tout k.

— (homogénéité absolue)

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\|\lambda x\|_1 = \|(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^{n} |x_k| = |\lambda| ||x||_1$$

$$\|\lambda x\|_\infty = \max_{k \in [\![1,n]\!]} |\lambda x_k| = |\lambda| \max_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k|. = |\lambda| ||x||_\infty$$

On a utilisé la linéarité de $|.|$ pour $\mathbb{K}$.

— (sous-additivité)

$$\begin{aligned}\|x+y\|_1 &= \sum_{k=1}^{n}(|x_k+y_k|)\\ &\leq \sum_{k=1}^{n}(|x_k|+|y_k|) \quad \text{(sous-additivité de } |\cdot| \text{ sur } \mathbb{K})\\ &= \sum_{k=1}^{n}|x_k| + \sum_{k=1}^{n}|y_k| \quad \text{(linéarité)}\\ &= \|x\|_1 + \|y\|_1.\end{aligned}$$

Pour $\|\cdot\|_\infty$, on commence par remarquer que $\forall k \in [\![1,n]\!]$,
On a : $|x_k+y_k| \leq |x_k|+|y_k| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$, qui ne dépend pas de k.
Donc :

$$\max_{k\in[\![1,n]\!]} |x_k+y_k| \leq ||x||_\infty + ||y||_\infty$$

Conclusion : $||.||_1$ et $||.||_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$. ∎

Exemple I.1

Pour $n=2$ et $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, on peut représenter graphiquement les boules unités des normes $||x||_1$ et $||x||_\infty$.

Définition I.6

Pour tout réel $p \geq 1$ et tout vecteur $x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{K}^n$, on définit :

$$||x||_p = (\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Remarque : Pour $p=1$ on retrouve la norme $||.||_1$.

Preuve : On veut démontrer que $||x||_p$ est aussi une norme.

Plus tard. On aura besoin de démontrer autres lemmes et inégalités avant de commencer la preuve de cette définition. Plus spécifiquement, on va démontrer un lemme, qui est essentiel pour démontrer l'inégalité de Hölder, qui nous donnera un corollaire(Inégalité de Minkowski), qui sera utile pour montrer la sous-additivité de $||x||_p$.

Propriété I.5

On a : $\lim_{p\to+\infty} ||x||_p = ||x||_\infty$

Preuve :

Soit $p \geq 1$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

On pose $I = \{k \in [\![1, n]\!] \mid |x_k| = \|x\|_\infty\} \neq \varnothing$.

On a :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1,k\in I}^{n} |x_k|^p + \sum_{k=1,k\notin I}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\operatorname{card}(I) + \sum_{k=1,k\notin I}^{n} \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_\infty}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \|x\|_\infty$$

$$\longrightarrow \|x\|_\infty \quad \text{lorsque } p \to +\infty$$

Donc on a : $\|x\|_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \|x\|_\infty$. ■

Remarque : on peut dire que $\sum_{k=1,k\notin I}^{n} \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_\infty}\right)^p$ tend vers 0 parce que $\frac{|x_k|}{\|x\|_\infty}$ est strictement plus petit que 1, et le fait que c'est une somme finie.

Lemme I.1 Inégalité de Young

Pour tout réel a et b positifs et $(p, q) \in [1, +\infty]^2$tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

Preuve : On fixe $b \geq 0$ et on pose la fonction

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{b^q}{q} - xb.$$

Elle est dérivable sur $]0, +\infty[$, et

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = x^{p-1} - b.$$

Or, $p > 1$, donc $x^{p-1} - b$ est strictement croissante.

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 &\quad \text{pour} \quad x < b^{\frac{1}{p-1}} \\ f'(x) = 0 &\quad \text{pour} \quad x = b^{\frac{1}{p-1}} \\ f'(x) > 0 &\quad \text{pour} \quad x > b^{\frac{1}{p-1}} \end{aligned}$$

Cela montre que $f(x)$ admet un minimum en $x = b^{\frac{1}{p-1}}$.

Et ce minimum vaut :

$$f\left(b^{\frac{1}{p-1}}\right) = \frac{b^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{b^q}{q} - b^{\frac{p}{p-1}}.$$

Or, $\frac{p}{p-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = q$, donc

$$f\left(b^{\frac{1}{p-1}}\right) = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right) b^q = 0.$$

C'est-à-dire que f est positive sur $[0, +\infty[$.

En particulier, pour $a \geq 0$, on a :

$$f(a) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab \geq 0, \quad \text{d'où} \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

■

Théorème I.1 Inégalité de Hölder

Soient $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$.

On se donne $p \in [1, +\infty]$ et $q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Preuve : On traite d'abord le cas facile.

Premier cas :

Supposons qu'on a : $p = 1$ et $q = +\infty$

En utilisant la linéarité et en remplaçant les normes usuelles on a :

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| = \sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right) \|y\|_\infty = \|x\|_1 \|y\|_\infty.$$

De même, pour la situation $p = +\infty$ et $q = 1$, l'inégalité est évidente.

Deuxième cas :

Désormais on suppose que $(p, q) \in]1, +\infty[^2$

— On remarque que si $\|x\|_p = 0$, alors $x_k = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ (par séparation), qui donne $x = 0_k$(de même si $\|y\|_q = 0$). Donc l'inégalité est triviale dans ce cas.

— Supposons que $(p, q) \in]1, +\infty[^2$ et que $\|x\|_p \neq 0$, $\|y\|_q \neq 0$. On applique le lemme avec $a = \frac{|x_k|}{\|x\|_p}$ et $b = \frac{|y_k|}{\|y\|_q}$ (les deux dénominateurs sont non-nuls) :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k y_k|}{\|x\|_p \|y\|_q} = \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|}{\|x\|_p} \frac{|y_k|}{\|y\|_q} \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{p} \frac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_k|^q}{\|y\|_q^q}\right).$$

On peut retirer les constantes et on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{p}\frac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p}+\frac{1}{q}\frac{|y_k|^q}{\|y\|_q^q}\right)\leq\frac{1}{p\|x\|_p^p}\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p+\frac{1}{q\|y\|_q^q}\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Donc,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{|x_ky_k|}{\|x\|_p\|y\|_q}\leq\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

En multipliant par $\|x\|_p\|y\|_q$, on obtient l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{k=1}^{n}|x_ky_k|\leq\|x\|_p\|y\|_q.$$

■

Corollaire du théorème I.1 : Inégalité de Minkowski

Pour tout réel $p\in[1,+\infty]$, on a :

$$\forall(x,y)\in(\mathbb{K}^n)^2, ||x+y||_p\leq||x||_p+||y||_p$$

Cela peut nous donner la sous-additivité de $||.||_p$

Preuve : de Minkowski

On sait déjà que l'inégalité est vraie pour $p=1$ ou $+\infty$ car on reconnaît la sous-additivité des normes 1 et $+\infty$. Donc on va supposer que $p\in]1,+\infty[$.

Posons $q=\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=\frac{p}{p-1}$, pour qu'on puisse utiliser l'inégalité de Hölder démontrée avant. On a $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Soient $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ et $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{K}^n$, on a :

$$\|x+y\|_p^p=\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p=\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k||x_k+y_k|^{p-1}$$

Par sous-additivité de la valeur absolue et la linéarité de la somme :

$$\text{(...continué)}\leq\sum_{k=1}^{n}|x_k||x_k+y_k|^{p-1}+\sum_{k=1}^{n}|y_k||x_k+y_k|^{p-1}$$

Par inégalité de Hölder :

$$\text{(...continué)}\leq\|x\|_p\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}+\|y\|_p\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Comme on a posé q en utilisant p, on remplace :

$$(\text{...continué}) = (\|x\|_p + \|y\|_p)\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} = (\|x\|_p + \|y\|_p)\,\|x+y\|_p^{\frac{p}{q}}$$

On organise un peu : $\|x+y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)\,\|x+y\|_p^{\frac{p}{q}}$. En divisant par $\|x+y\|_p^{\frac{p}{q}}$ et en remplaçant q on trouve l'inégalité de Minkowski :

$$||x+y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$$

■

Maintenant on peut retourner finalement à la norme p.

Corollaire de l'inégalité de Minkowski

Pour tout réel $p \in [1, +\infty]$ et tout vecteur $x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{K}^n$, on définit :

$$||x||_p = (\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Elle est une norme sur $\mathbb{K}^n$, appelée la norme p.

Preuve :

On a déjà démontré pour $p = 1$ et $p = +\infty$. On étudie l'intervalle $p \in]1, +\infty[$.

Supposons que $p \in]1, +\infty[$.

— (Séparation)

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Rightarrow x_k = 0 \text{ pour tout } k \in [\![1, n]\!]$$

$$\Rightarrow x = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

— (Absolue homogénéité)

$$\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda|^{p\cdot\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda|\|x\|_p$$

par la linéarité de la somme.

— (Sous-additivité) : par l'inégalité de Minkowski.

■

Exemple I.2

Dans $\mathbb{R}^2$, les boules unités(ouvertes) pour $\|\cdot\|_p$ où $p \in [1, +\infty]$ sont :

$$B(0_{\mathbb{R}^2}, 1) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\|_p < 1\right\}$$

Elles peuvent être représentées graphiquement.

Notre camarade Johan a fait des très belles figures pour les boules d'unités, je les insère ici pour que vous puissiez mieux comprendre les boules.

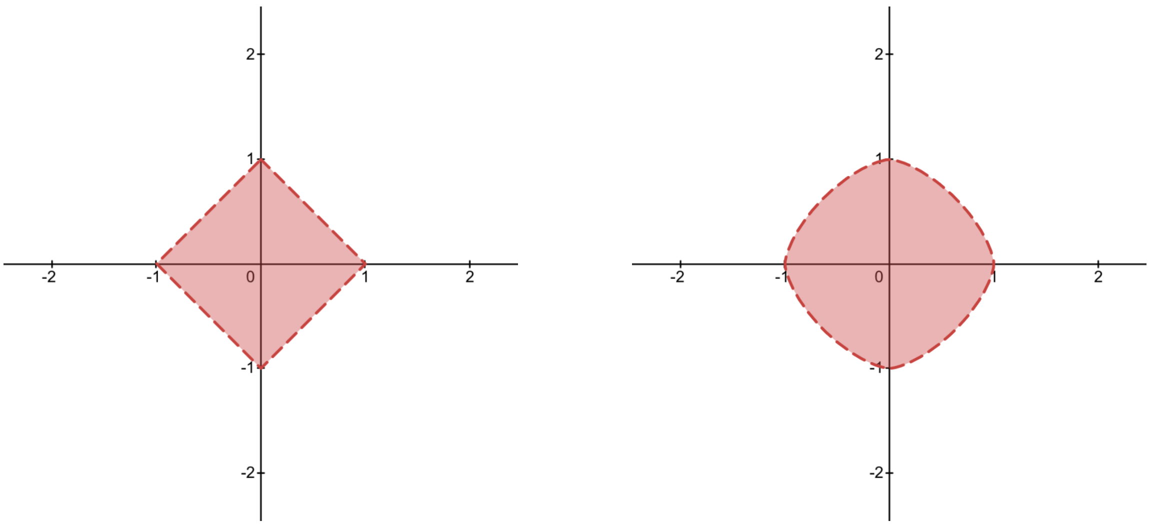

Figure 1 – $B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ de la norme 1(gauche) et la norme 1.5(droite)

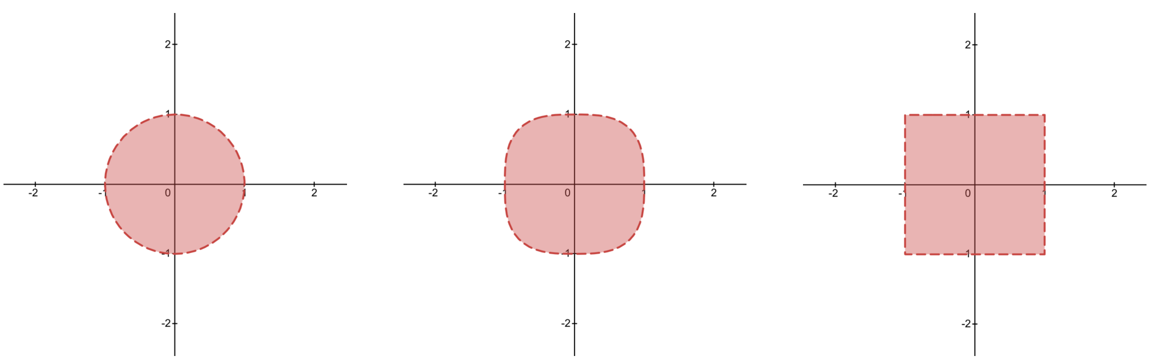

Figure 2 – $B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ de la norme 2(gauche), la norme 3(milieu) et la norme infinie(droite)

2.2 Espaces préhilbertiens

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition I.7

Un **produit scalaire** sur E est une application ϕ :

$$\phi : \begin{cases} E \times E \to \mathbb{K} \\ (x, y) \mapsto \phi(x, y) \end{cases}$$

telle que :

— ϕ est **hermitien** : $\forall (x, y) \in E^2$, $\phi(x, y) = \overline{\phi(y, x)}$.
Et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est la **symétrie**.

— ϕ est **linéaire à gauche** : $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall (x_1, x_2, y) \in E^3$

$$\phi(x_1 + \lambda x_2, y) = \phi(x_1, y) + \lambda \phi(x_2, y).$$

— ϕ est **définie positive** : $\forall x \in E \setminus \{0_E\}$, $\phi(x, x) > 0$.

Remarque I.3

On rappele que $z = \overline{z}$ est équivalente à $z \in \mathbb{R}$.
Puisque ϕ est hermitien, on a $\phi(x, x) = \overline{\phi(x, x)}$, donc $\phi(x, x) \in \mathbb{R}$.
Et comme ϕ est définie positive, on a $\phi(x, x) \in \mathbb{R}_+^*$ pour x non nul.

Définition I.8

Soit ϕ un produit scalaire sur E, on dit que (E, ϕ) est un **espace préhilbertien**.

Remarque I.4

En MATH2306P, on a vu que si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, on l'appelle un **espace euclidien**.

Propriété I.6

Soit (E, ϕ) un espace préhilbertien, alors on a deux propriétés :

— $\forall x \in E, \phi(x,x) = 0_E \iff x = 0_E$. (séparation)

— $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y_1, y_2) \in E^3$, on a :

$$\phi(x, y_1 + \lambda y_2) = \phi(x, y_1) + \overline{\lambda}\phi(x, y_2)$$

C'est ce qu'on appelle la "sesquilinéarité à droite" de ϕ.

Preuve de la séparation : Double implication

— $(\Longrightarrow)$ Si $\phi(x,x) = 0$ alors $x = 0_E$, car $x \neq 0_E \Rightarrow \phi(x,x) > 0$(définie positive).

— $(\Longleftarrow)$ Si $x = 0_E$, alors $\forall y \in E, \phi(0_E, y) = 0$ car ϕ est linéaire. En particulier, pour $y = x = 0_E$, on a : $\phi(x,x) = \phi(0_E, 0_E) = 0$.

Par double implication on trouve la propriété de la séparation.

Preuve de la sesquilinéarité On utilise les propriétés du produit scalaire

Comme Φ est hermitien, on a :

$$\phi(x, y_1 + \lambda y_2) = \overline{\phi(y_1 + \lambda y_2, x)}$$

En utilisant la linéarité du produit scalaire et la linéarité de la conjugaison :

$$\overline{\phi(y_1 + \lambda y_2, x)} = \overline{\phi(y_1, x)} + \overline{\lambda\phi(y_2, x)} = \phi(x, y_1) + \overline{\lambda}\phi(x, y_2)$$

Cette dernière égalité est vraie car le produit est hermitien. ■

Remarque I.5

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a :

— Hermitien $\Rightarrow$ symétrique, car le conjugué d'un réel est lui-même.

— Sesquilinéarité à droite $\Rightarrow$ linéarité à droite pour le même raison.

On a vu le semestre précédent qu'un produit scalaire dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Pour bien distinguer les cas réels et complexes, on dit produit scalaire **euclidien** si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et produit scalaire **hermitien** si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Attention ! ϕ n'est pas bilinéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$! En fait, une forme bilinéaire symétrique définie positive ne peut pas exister pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, car sinon on aura :

$$\phi(ix, ix) = i^2\phi(x,x) < 0$$

Ce qui contredit la positivité. Mais pour un produit scalaire hermitien, tout va bien grâce à la linéarité à gauche et la sesquilinéarité à droite :

$$\phi(ix, ix) = i \cdot \bar{i}\phi(x, x)$$

Exemple I.3

On prend $E = \mathbb{K}^n$.
Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y \in (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, on vérifie facilement que :

$$\phi(x, y) = \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}.$$

est un produit scalaire, appelé le produit scalaire **canonique**.
On remarque que $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $\sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|_2$, c'est le module dans $\mathbb{C}$.

De plus, soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y \in (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$. Par la sous-additivité du module et par l'inégalité de Hölder(car $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$):

$$|\langle x, y \rangle| = \left| \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k} \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

C'est l'inégalité de **Cauchy-Schwarz**, elle se généralise à tout produit scalaire et est essentielle pour montrer que $x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur E.

Théorème I.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient (E, ϕ) un espace préhilbertien et $(x, y) \in E^2$. On a :

$$|\phi(x, y)| \leq \sqrt{\phi(x, x)} \cdot \sqrt{\phi(y, y)}$$

Preuve : On doit séparer les cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Traitons d'une manière générale :

Si $\phi(x, y) = 0$ alors l'inégalité est évidente, il n'y a rien à faire.

Supposons que $\phi(x, y) \neq 0$. En particulier, $\phi(x, x) \neq 0$, (car sinon $x = 0_E$ et $\phi(x, x) = 0$)

On considère la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \phi(tx + y, tx + y) \geq 0.$$

On a par linéarité à gauche :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \phi(tx+y, tx+y) = t\phi(x, tx+y) + \phi(y, tx+y)$$

Et par sesquilinéarité à droite(ici t est un réel donc pas de changement):

$$t\phi(x, tx+y) + \phi(y, tx+y) = t^2\phi(x,x) + t\phi(x,y) + t\phi(y,x) + \phi(y,y)$$

On connecte les égalités, et comme ϕ est hermitien :

$$f(t) = \phi(x,x)t^2 + 2\operatorname{Re}(\phi(x,y))t + \phi(y,y)$$

On reconnaît une fonction polynomiale de degré 2 ($\phi(x,x) \neq 0$), qui est **positive** sur $\mathbb{R}$. C'est-à-dire qu'elle admet au plus une racine réelle. On en déduit que Δ est négatif.

On a :

$$\Delta = 4\operatorname{Re}(\phi(x,y))^2 - 4\phi(x,x)\phi(y,y) \leq 0$$

Donc :

$$|\operatorname{Re}(\phi(x,y))| \leq \sqrt{\phi(x,x)} \cdot \sqrt{\phi(y,y)}$$

On en déduit immédiatement l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Traitons maintenant le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

Puisque cette inégalité est vraie pour tout $(x,y) \in E^2$, on peut remplacer y par $\phi(x,y)y$, et on peut manipuler en utilisant les propriétés.

On a :

$$\phi(x, \phi(x,y)y) = \overline{\phi(x,y)} \cdot \phi(x,y) \quad \text{(par sesquilinéarité)}$$

$$= |\phi(x,y)|^2 \in \mathbb{R}_+.$$

Donc $|\operatorname{Re}(\phi(x, \phi(x,y)y))| = |\phi(x,y)|^2$. D'après la linéarité et la sesquilinéarité, on a aussi :

$$\phi(\phi(x,y)y, \phi(x,y)y) = \phi(x,y)\overline{\phi(x,y)}\phi(y,y) = |\phi(x,y)|^2\phi(y,y)$$

Donc :

$$\sqrt{\phi(\phi(x,y)y, \phi(x,y)y)} = |\phi(x,y)| \cdot \sqrt{\phi(y,y)}.$$

Par conséquence :

$$|\phi(x,y)|^2 \leq \sqrt{\phi(x,x)} \cdot |\phi(x,y)| \cdot \sqrt{\phi(y,y)}.$$

On simplifie par $|\phi(x,y)|$ car il est non nul, et on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les complexes. ■

Corollaire de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit (E,ϕ) un espace préhilbertien.
Alors $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\phi(x,x)}$ est une norme sur E, appelée la **norme euclidienne** si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et la **norme hermitienne** si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Preuve :

— La séparation est déjà fait.

— L'homogénéité absolue se démontre facilement avec la linéarité et la sesquilinéarité.

— Sous-additivité :

$$\|x+y\|^2 = \phi(x+y,x+y) = \phi(x,x)+\phi(x,y)+\phi(y,x)+\phi(y,y)$$

$$= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\phi(x,y)) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

$$= (\|x\|+\|y\|)^2$$

On prend la racine carrée : $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$. ■

2.3 Espace des fonctions

Théorème I.3

Soit $D \in \mathbb{R}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.
On note $\mathscr{B}(D,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ bornées sur D.
On pose pour $f \in \mathscr{B}(D,\mathbb{K})$:

$$||f||_\infty = \sup_{t\in D} |f(t)|$$

Alors $||.||_\infty$ est une norme sur $\mathscr{B}(D,\mathbb{K})$ appelée la norme de la convergence uniforme.

Je vous rappelle que "bornée" marche dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$, avec la valeur absolue et le module, respectivement.

Preuve

On démontre les trois propriétés :

— (séparation)
Soit $f \in \mathscr{B}(D, \mathbb{K})$ telle que $||f||_\infty = 0$.
Alors on a pout tout $t \in D$:

$$|f(t)| \leq ||f||_\infty = 0$$

Ici $|f(t)|$ est positif, donc on a $f(t) = 0$ pout tout $t \in D$.

— (homogénéité absolue)
Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{B}(D, \mathbb{K})$. On a :

$$||\lambda f||_\infty = \sup_{t \in D} |\lambda f(t)| = |\lambda| \sup_{t \in D} |f(t)| = |\lambda| \cdot ||f||_\infty$$

— (sous-additivité)
Soit f et g deux fonctions dans $\mathscr{B}(D, \mathbb{K})$.
Pour tout $t \in D$, on a :

$$|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$$

Donc :

$$\sup_{t \in D} |f(t) + g(t)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$$

Conclusion : $||.||_\infty$ est une norme sur $\mathscr{B}(D, \mathbb{K})$. ■

Remarque I.6

Le raisonnement suivant est faux :

$$\sup_{t \in D} |f(t) + g(t)| \leq \sup_{t \in D} |f(t)| + \sup_{t \in D} |g(t)|$$

Mais ce résultat est correct. Faites un dessin pour mieux comprendre.

Corollaire 1 du théorème I.3

Soit $a < b$ deux réels. $||.||_\infty$ est une norme sur $\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[a, b]$.

Preuve

D'après le théorème des bornes atteintes, on sait que toute fonction f qui est continue sur $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit : $\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{B}([a, b], \mathbb{R})$.

Donc $(\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R}), ||.||_\infty)$ est un espace vectoriel normé. ■

Corollaire 2 du théorème I.3

On note ℓ^∞ l'ensemble des suites $(u_n) \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ bornées. L'application suivante est une norme sur ℓ^∞ :

$$||.||_\infty : u_n \mapsto ||u_n||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

Preuve

On applique le théorème en utilisant $D = \mathbb{N}$. ■

Corollaire 3 du théorème I.3

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Alors l'application :

$$||.|| : P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \mapsto \max_{k\in[\![0,n]\!]} |a_k|$$

est une norme sur $\mathbb{K}[X]$.

Ici $k \in [\![0,n]\!]$ car les polynômes sont effectivement les suites qui sont nulles à partir d'un certain rang.

Preuve

On peut identifier un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et la suite $(u_n) \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ de ses coefficients.

Ainsi, $\mathbb{K}[X]$ s'identifie avec le sous-espace vectoriel de ℓ^∞ des suites nulles à partir d'un certain rang, et la norme $||.||$ correspond à $||.||_\infty$ sur ℓ^∞. ■

Remarque I.7

On peut aussi identifier le polynôme P avec sa fonction polynomiale. Donc il faut faire attention de ne pas confondre les normes $||.||$ pour les polynômes et $||.||_\infty$ pour les fonctions.

Théorème I.4

Soient $a < b$ deux réels. Pour tout $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K})$, on pose :

$$||f||_1 = \int_a^b |f(t)|dt$$

qui est une norme sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K})$, généralisable à tout $p \geq 1$, comme la norme p avant.

Preuve

— (Séparation)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ telle que $\|f\|_1 = 0$.

On suppose par absurde que f n'est pas constante égale à 0.

D'après l'énoncé on a la continuité de f sur $[a,b]$, et par la définition de la continuité, on sait qu'il existe : $c \in]a,b[$ et $\varepsilon > 0$ tels que : $[c-\varepsilon, c+\varepsilon] \subset [a,b]$, et

$$\forall t \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon], \quad |f(t)| \geq \frac{|f(c)|}{2} > 0.$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} 0 = \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt \geq \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} |f(t)|dt \geq \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \frac{|f(c)|}{2} dt \\ = 2\varepsilon \cdot \left(\frac{|f(c)|}{2}\right) > 0 \quad \underline{\text{absurde}} \end{aligned}$$

Donc f est constante égale à 0 sur $[a,b]$.

— (homogénéité absolue)

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K})$.

Alors par linéarité de l'intégrale on a :

$$\|\lambda f\|_1 = \int_a^b |\lambda f(t)|dt = |\lambda| \cdot \|f\|_1$$

— (sous-additivité)

Soient $f, g \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K})$.

On a :

$$\begin{aligned} \|f+g\|_1 &= \int_a^b |f(t)+g(t)|dt \leq \int_a^b (|f(t)| + |g(t)|)\, dt \\ &= \int_a^b |f(t)|dt + \int_a^b |g(t)|dt = \|f\|_1 + \|g\|_1. \end{aligned}$$

Conclusion : $||.||_1$ est une norme sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K})$. ■

Remarque I.8

Comme pour les normes p sur $\mathbb{K}^n$, on peut vérifier que pour tout $p \geq 1$:

$$||.||_p : f \mapsto \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

est une norme sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ (voir exercice 3 du TD 2).

3 Équivalence des normes

Définition I.9

Soient N_1 et N_2 deux normes sur E.
On dit que N_1 et N_2 sont **équivalentes** s'il existe deux constantes $m > 0$ et $M > 0$ telles que : $\forall x \in E, \quad mN_1(x) \leq N_2(x) \leq MN_1(x)$.

Remarque I.9

C'est en effet une relation d'équivalence, elle vérifie les propriétés :

— **Réflexive** : $N_1 \mathscr{R} N_1$.

— **Symétrique** : $N_1 \mathscr{R} N_2 \Rightarrow N_2 \mathscr{R} N_1$.

— **Transitive** : Si $N_1 \mathscr{R} N_2$ et $N_2 \mathscr{R} N_3$, alors $N_1 \mathscr{R} N_3$.

Exemple I.4

On prend $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
On a, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\|x\|_\infty = \max_{k\in\{1,\ldots,n\}} |x_k| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| = \|x\|_1 \quad \text{et} \quad \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{K}^n$,

$$1\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

D'après la définition, ces normes sont équivalentes.

Exemple I.5

On prend $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Analyse de l'exemple :

On a, pour tout $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt \quad \text{(par monotonie de l'intégrale)}$$

$$= [\|f\|_\infty t]_0^1 = \|f\|_\infty.$$

On a trouvé une constante $M = 1 > 0$ telle que :

$$\forall f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \quad \|f\|_1 \leq M\|f\|_\infty.$$

Mais il n'existe pas de constante $m > 0$ telle que $\forall f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$,

$$m\|f\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

En effet, on raisonne par absurde : supposons qu'il existe une telle constante $m > 0$.
On considère la suite de fonctions de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$: $(f_n : t \mapsto t^n)_{n\geq 0}$
Alors, $\forall n \geq 0$,

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |t^n| = 1$$

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |t^n|dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Donc $\forall n > 0$,

$$m = m\|f_n\|_\infty \leq \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$$

Pour $n \to \infty$, on obtient $0 < m \leq 0$, ce qui est absurde.
Conclusion : $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ ne sont **pas équivalentes** !! ■

Remarque I.10

Les normes sur E qui sont équivalentes définissent la même topologie sur E.

Propriété I.7

Soient N_1 et N_2 deux normes sur E.
Alors N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si :

$$\exists (r,R) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad B_2(0_E,r) \subset B_1(0_E,1) \subset B_2(0_E,R)$$

où $B_2(0_E,r)$ et $B_2(0_E,R)$ sont des boules pour N_2, et $B_1(0_E,1)$ est la boule unité définie par la norme N_1.

Preuve

On raisonne par double implication.

— $(\Rightarrow)$

On suppose que les normes sont équivalentes :

$$\exists (m,M) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \forall x \in E, \quad mN_1(x) \leq N_2(x) \leq MN_1(x).$$

Alors en réduisant $N_2(x)$ jusqu'à $B_2(0_E,m)$:

$$N_2(x) < m \Rightarrow N_1(x) < 1 \Rightarrow N_2(x) < M.$$

Donc :

$$B_2(0_E,m) \subset B_1(0_E,1) \subset B_2(0_E,M).$$

— $(\Leftarrow)$

On suppose que :

$$\exists (r,R) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad B_2(0_E,r) \subset B_1(0_E,1) \subset B_2(0_E,R).$$

On a, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$ et tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit :

$$N_2\left(\frac{(r-\varepsilon)x}{N_2(x)}\right) = (r-\varepsilon)\frac{N_2(x)}{N_2(x)} = r - \varepsilon < r.$$

Donc par définition d'une boule :

$$\frac{(r-\varepsilon)x}{N_2(x)} \in B_2(0_E,r) \subset\in B_1(0_E,1).$$

Ainsi :

$$N_1\left(\frac{(r-\varepsilon)x}{N_2(x)}\right) < 1.$$

$$(r-\varepsilon)N_1(x) < N_2(x).$$

Et en prenant le cas limite $\varepsilon \to 0$, on obtient :

$$rN_1(x) \leq N_2(x).$$

Pour la deuxième inégalité, on utilise la même manipulation qu'avant :

$$N_1\left(\frac{(1-\varepsilon)x}{N_1(x)}\right) = (1-\varepsilon)\frac{N_1(x)}{N_1(x)} = 1-\varepsilon < 1.$$

Donc on a :

$$N_2\left(\frac{(1-\varepsilon)x}{N_1(x)}\right) = (1-\varepsilon)\frac{N_2(x)}{N_1(x)} < R.$$

Pour $\varepsilon \to 0$, on obtient :

$$N_2(x) \leq RN_1(x).$$

Donc, $\forall x \in E \setminus \{0_E\}$:

$$rN_1(x) \leq N_2(x) \leq RN_1(x).$$

C'est aussi évident pour $x = 0_E$.

Conclusion : N_1 et N_2 sont **équivalentes**. ■

Deuxième partie

Topologie des espaces vectoriels normés

Dans tout ce chapitre, on utilise les notations suivantes :

— $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

— E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

— N une norme sur E, donc (E, N) est un espace vectoriel normé.

— 0_E désigne le vecteur nul de E.

On va aussi prendre les objets qu'on a définit avant. Pour tout $a \in E$ et $r > 0$, on note $B(a, r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r et également la boule fermé $\overline{B}(a, r)$, revoyez leurs définitions si vous en avez besoin. y

1 Ouverts et fermés

Définition II.1

On dit qu'une partie $O \subset E$ est **ouverte** ou que O est un **ouvert** de (E, N) lorsque :

$$\forall x \in O, \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset O$$

On dit qu'une partie $F \subset E$ est **fermée** ou que F est un **fermé** de (E, N) si $E \setminus F$ est un ouvert de E.

Exemple II.1

Quelques exemples immédiats.

E est un ouvert car : $\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset E$.

$\varnothing$ est un ouvert car il contient personne, ce qui donne la vérité de l'assertion universelle.

De plus, E et $\varnothing$ sont aussi des fermés, car $E \setminus \varnothing = E$, et $E \setminus E = \varnothing$.

Exemple II.2

L'exemple de la droite réelle et sa norme, la valeur absolue.

Pour la suivante, on se place dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |.|)$. Dans ce cas on a $B(a, r) =]a - r, a + r[$.

En particulier, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, on a l'intervalle ouvert $]a,b[$. On veut montrer qu'un intervalle ouvert est un ouvert sur cet espace. Pour x dans l'intervalle $]a,b[$, on choisit $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{|x-a|, |x-b|\} > 0$. On peut facilement vérifier que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]a,b[$, donc $]a,b[$ est un ouvert. Autrement dit, un intervalle ouvert sur $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

De plus, on peut regarder son complémentaire $]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$, qui n'est pas ouvert. On peut imaginer qu'en $x = a$ ou en $x = b$, aucun ε marche. Une idée pour la démonstration en $x = a$: on voit que $]a, a+\varepsilon[\cap]a,b[\neq \emptyset$.

De même, $[a,b]$ n'est pas ouvert, mais on voit que son complémentaire est un ouvert, donc $[a,b]$ est un fermé.

— $[a,b[$ et $]a,b]$ sont ni ouverts, ni fermés.

— $]a,+\infty[$ est ouvert mais pas fermé.

— $[a,+\infty[$ est fermé mais pas ouvert.

— $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$ est à la même fois ouvert et fermé.

Exemple II.3

Exemple des boules dans un espace vectoriel normé général.

Fixons $a \in E$ et $r > 0$. On veut vérifier que $B(a,r)$ est un ouvert et que $\overline{B}(a,r)$ est un fermé de (E,N).

Preuve pour la boule ouverte :

Soit $x \in B(a,r)$. On cherche $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset B(a,r)$.

Posons

$$\varepsilon = r - N(x-a) > 0 \quad (\text{comme } x \in B(a,r))$$

Soit $y \in B(x,\varepsilon)$, par définition d'une boule ouverte, $N(y-x) < \varepsilon$.

Par l'inégalité triangulaire, on a :

$$N(y-a) \leq N(y-x) + N(x-a) < \varepsilon + N(x-a) = r.$$

Donc on a $y \in B(a,r)$, et ceci est vraie pour tout $y \in B(x,\varepsilon)$.

Ainsi, $B(x,\varepsilon) \subset B(a,r)$ pour tout $x \in B(a,r)$. Donc $B(a,r)$ est un ouvert sur notre espace vectoriel normé. ■

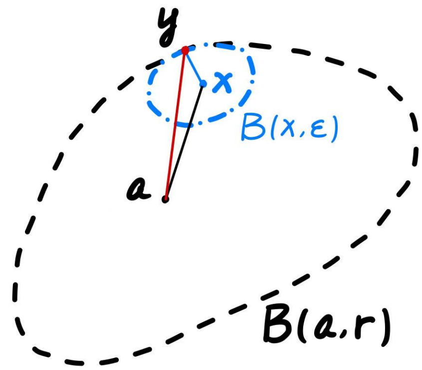

FIGURE 3 – Grande boule et petite boule :)

Preuve pour la boule fermée :

On veut montrer que la boule est fermée, donc on considère son complémentaire dans E. Montrons que $E \setminus \overline{B}(a,r) = \{x \in E \mid N(x-a) > r\}$ est un ouvert.

Soit $x \in E \setminus \overline{B}(a,r)$. Alors $N(x-a) > r$.

On cherche $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset E \setminus \overline{B}(a,r)$.

Posons $\varepsilon = N(x-a) - r > 0$.

Soit $y \in B(x,\varepsilon)$, alors $N(y-x) < \varepsilon$.

On a :

$$N(x-a) \leq N(x-y) + N(y-a) \quad \text{(par inégalité triangulaire).}$$

On fait bouger les termes :

$$N(y-a) \geq N(x-a) - N(x-y).$$

$$\text{(...continué)} = N(x-a) - N(y-x) \quad \text{(homogénéité absolue).}$$

$$\text{(...continué)} > N(x-a) - \varepsilon = r, \quad \text{car } N(y-x) < \varepsilon.$$

Donc $y \in E \setminus \overline{B}(a,r)$ et $B(x,\varepsilon) \subset E \setminus \overline{B}(a,r)$.

Ainsi, $E \setminus \overline{B}(a,r)$ est ouvert, par conséquent, $\overline{B}(a,r)$ est fermé. ■

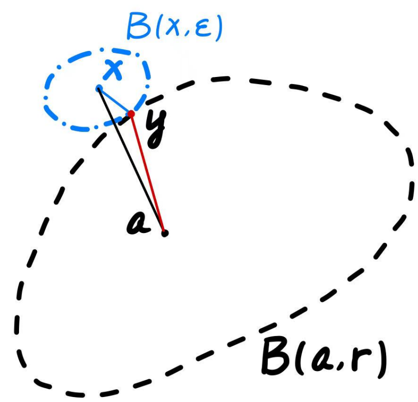

FIGURE 4 – Grande boule et petite boule, mais la petite boule s'est échappée :(

Exemple II.4

Soit $a \in E$, le singleton $\{a\}$ est fermé et pas ouvert.

Proposition II.1

La propriété d'être ouvert ou fermé, on peut la généraliser avec les opérations $\cup$ et $\cap$.

— Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts, alors $\bigcup\limits_{i\in I} O_i$ est un ouvert.

— Soit $(O_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie d'ouverts, alors $\bigcap\limits_{i\in[\![1,n]\!]} O_i$ est un ouvert.

— Soit $(F_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie de fermés , alors $\bigcup\limits_{i\in[\![1,n]\!]} F_i$ est un fermé.

— Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés, alors $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est un fermé.

Preuve

— Montrons que $\forall x \in \bigcup\limits_{i\in I} O_i$, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset \bigcup\limits_{i\in I} O_i$.
Donc $\exists i_0 \in I$ tel que $x \in O_{i_0}$.
Or, O_{i_0} est ouvert, donc $\exists \varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset O_{i_0} \subset \bigcup\limits_{i\in I} O_i$.
Conclusion : $\bigcup\limits_{i\in I} O_i$ est ouvert.

— Montrons que $\forall x \in \bigcap\limits_{i\in[\![1,n]\!]} O_i$, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset \bigcap\limits_{i\in[\![1,n]\!]} O_i$.
Soit $x \in \bigcap\limits_{i\in[\![1,n]\!]} O_i$, donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x \in O_i$.
Or, chaque O_i est ouvert, donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\exists \varepsilon_i > 0$ tel que $B(x,\varepsilon_i) \subset O_i$.

Prenons $\varepsilon = \min_{i \in [\![1,n]\!]} \varepsilon_i > 0$, car $[\![1,n]\!]$ est fini.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $B(x,\varepsilon) \subset B(x,\varepsilon_i) \subset O_i$.

Conclusion : $B(x,\varepsilon) \subset \bigcap_{i \in [\![1,n]\!]} O_i$, donc $\bigcap_{i \in [\![1,n]\!]} O_i$ est ouvert.

— Montrons que $E \setminus \bigcup_{i \in [\![1,n]\!]} F_i$ est ouvert.

On écrit :

$$E \setminus \bigcup_{i \in [\![1,n]\!]} F_i = \bigcap_{i \in [\![1,n]\!]} (E \setminus F_i).$$

Or, $E \setminus F_i$ est ouvert puisque F_i est fermé.

L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert, donc $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ est fermé.

D'après la proposition précédente, le résultat est démontré.

— De même, montrons que $E \setminus \bigcap_{i \in I} F_i$ est ouvert.

On écrit :

$$E \setminus \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (E \setminus F_i).$$

Or, $E \setminus F_i$ est ouvert pour tout $i \in I$.

D'après les résultats précédents, l'union d'un nombre quelconque d'ouverts est un ouvert, donc $\bigcap_{i \in I} F_i$ est fermé. ■

Exemple II.5

— Soit $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ une partie <u>finie</u> de E.

Alors $A = \bigcup_{i \in [\![1,n]\!]} \{a_i\}$ est fermée comme union d'un nombre fini de singletons qui sont fermés.

— On se place encore une fois sur $(\mathbb{R}, |.|)$: notons $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{n\}.$$

Ceci ne justifie pas que $\mathbb{Z}$ soit un fermé ! Il faut faire attention aux raisonnements.

Mais $\mathbb{Z}$ est en fait un fermé, car son complémentaire $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ est une union d'ouverts, donc ouvert.

Par conséquence $\mathbb{Z}$ est fermé.

ATTENTION :

— Une intersection d'un nombre infini d'ouverts n'est pas toujours ouverte.
Exemple :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\} \quad \text{C'est un fermé.}$$

— Une union d'un nombre infini de fermés n'est pas toujours fermée.
Exemple :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}\right] =]0,1[\quad \text{C'est un ouvert.}$$

2 Intérieur et adhérence

Définition II.2

Soit $A \subset E$.

— **L'intérieur de** A, noté $\mathring{A}$, est le plus grand ouvert inclus dans A.
Autrement dit, c'est l'union de tous les ouverts inclus dans A, qui est ouverte grâce à la propriété fait dans la section précédente.

$$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{O\subset A \\ O \text{ ouvert}}} O$$

— **L'adhérence de** A, notée $\overline{A}$, est le plus petit fermé contenant A, c'est aussi l'intersection de tous les fermés contenant A.

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F\supset A \\ F \text{ fermé}}} F$$

— **La frontière de** A (ou le bord de A), notée ∂A, est définie par :

$$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$$

Remarque II.1

L'intérieur est un ouvert, l'adhérence est un fermé. Le bord est aussi un fermé comme l'intersection de deux fermés : $\partial A = \overline{A} \cap \left(E \setminus \mathring{A}\right)$

Exemple II.6

Quelques exemples immédiats sur les ensembles et les intervalles.

- $\mathring{\varnothing} = \overline{\varnothing} = \varnothing, \quad \mathring{E} = \overline{E} = E.$

  Car $\varnothing$ et E sont ouverts et fermés.
- Dans $(\mathbb{R}, |.|)$, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$:

$$\overset{\circ}{]a,b[} = \overset{\circ}{]a,b]} = \overset{\circ}{[a,b[} = \overset{\circ}{[a,b]} =]a,b[$$

$$\overline{]a,b[} = \overline{]a,b]} = \overline{[a,b[} = \overline{[a,b]} = [a,b]$$

$$\overset{\circ}{]a,+\infty[} = \overset{\circ}{[a,+\infty[} =]a,+\infty[$$

$$\overline{]a,+\infty[} = \overline{[a,+\infty[} = [a,+\infty[$$

$$\overset{\circ}{]-\infty,b[} = \overset{\circ}{]-\infty,b]} =]-\infty,b[$$

$$\overline{]-\infty,b[} = \overline{]-\infty,b]} =]-\infty,b]$$

$$\overset{\circ}{]-\infty,+\infty[} = \overline{]-\infty,+\infty[} =]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$$

  Vous avez vu ces notations dans le cours MATH1301P, où on a utilisé les intervalles ouverts et fermés.

Exemple II.7

Soit $a \in E$ et $r > 0$. L'adhérence de $B(a,r)$ est $\overline{B}(a,r)$.

Preuve

Il suffit de montrer que $\overline{B}(a,r)$ est le plus petit fermé qui contient $B(a,r)$. On sait déjà que la boule fermé est un fermé contenant la boule ouverte, donc on peut montrer la chose suivante : si F est un fermé contenant $B(a,r)$ alors $\overline{B}(a,r) \subset F$.

Soit $F \subset E$ un fermé tel que $B(a,r) \subset F$.

Montrons que $\overline{B}(a,r) \subset F$.

La boule fermée est effectivement la boule ouverte et la sphère :

$$\overline{B}(a,r) = B(a,r) \cup \{x \in E \mid N(x-a) = r\}$$

Il suffit de montrer que $\partial B(a,r) \subset F$.

Par l'absurde, on suppose qu'il existe $x \in E$ tel que

$$x \in \partial B(a,r) \quad \text{et} \quad x \notin F$$

Donc $N(x-a) = r$ et $x \in E \setminus F$

Or F est fermé, alors $E \setminus F$ est ouvert, donc on a :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad B(x,\varepsilon) \subset E \setminus F \subset E \setminus \overline{B}(a,r)$$

Ce qui est intuitivement bizarre, car si on fait un dessin on trouve une petite section qui ne doit pas exister.

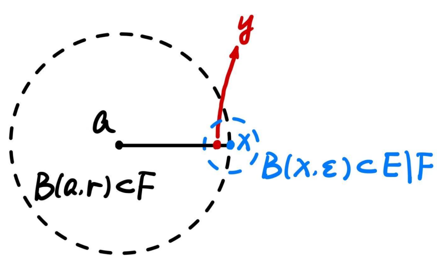

Figure 5 – "Comme si je n'existait pas"

Pour démontrer précisément cette absurdité, il suffit de prendre un y au voisinage de x sur le segment :

$$[a,x] = \{\lambda a + (1-\lambda)x \mid \lambda \in [0,1]\}$$

Par exemple pour $y = \lambda a + (1-\lambda)x$ où

$$0 < \lambda < \min\left\{\frac{\varepsilon}{r}, 1\right\}$$

On a :

$$
\begin{aligned}
N(y-a) &= N\left(\lambda a + (1-\lambda)x - a\right) \\
&= N\left((1-\lambda)(x-a)\right) \\
&= |1-\lambda| \cdot N(x-a) \\
&= (1-\lambda)r < r
\end{aligned}
$$

(car $\lambda > 0$ donc $1-\lambda < 1$)

Donc $y \in B(a,r) \subset F$. On va démontrer que y appartient aussi à $E \setminus F$, et puis on obtiendra la contradiction.

$$N(y-x) = N\left(-\lambda(x-a)\right) = |-\lambda| \cdot N(x-a) = \lambda r < \frac{\varepsilon}{r} r = \varepsilon$$

Donc $y \in B(x,\varepsilon) \subset E \setminus F$

C'est absurde car $F \cap (E \setminus F) = \varnothing$, on en déduit que $\partial B(a,r) \subset F$

Donc on a :

$$\overline{B}(a,r) = B(a,r) \cup \partial B(a,r) \subset F$$

On a montré que $\overline{B}(a,r)$ est le plus petit fermé qui contient $B(a,r)$.

Autrement dit :

$$\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$$

■

On peut aussi montrer que :

$$\overline{B}(\mathring{a},r) = B(a,r)$$

On en déduit aussi que :

$$\partial\left(B(a,r)\right) = \overline{B(a,r)} \setminus B(\mathring{a},r) = \overline{B}(a,r) \setminus B(a,r)$$

$$= \{x \in E \mid N(x-a) = r\} = \partial B(a,r)$$

Autrement dit, la frontière d'une boule est la sphère. On peut aussi définir l'intérieur, l'adhérence et la frontière à l'aide des boules et des quantificateurs logiques, ce qui est plus facile à utiliser en pratique.

Proposition II.2

Soit $A \subset E$. Alors :

$$\mathring{A} = \{x \in E \mid \exists r > 0,\ B(x,r) \subset A\}$$

$$\overline{A} = \{x \in E \mid \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing\}$$

$$\partial A = \{x \in E \mid \forall r > 0,\ (B(x,r) \cap A \neq \varnothing \text{ et } B(x,r) \cap (E \setminus A) \neq \varnothing)\}$$

Preuve

— Soit $x \in \mathring{A}$. Puisque $\mathring{A}$ est ouvert, on sait que :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad B(x,\varepsilon) \subset \mathring{A}$$

Or $\mathring{A} \subset A$. Donc $B(x,\varepsilon) \subset A$, on en déduit que :

$$\mathring{A} \subset \{x \in E \mid \exists r > 0,\ B(x,r) \subset A\}$$

Réciproquement, on fixe $x \in E$ tel que :

$$\exists r > 0,\ B(x,r) \subset A$$

Alors $B(x,r)$ est un ouvert inclus dans A. On sait que $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.

Donc $B(x,r) \subset \mathring{A}$. En particulier, $x \in B(x,r) \subset \mathring{A}$

Donc on a :

$$\{x \in E \mid \exists r > 0,\ B(x,r) \subset A\} \subset \mathring{A}$$

Par double-inclusion, on a montré que :

$$\mathring{A} = \{x \in E \mid \exists r > 0,\ B(x,r) \subset A\}$$

— On remarque que :

$$E \setminus \overline{A} = E \setminus \left(\bigcap_{\substack{F \supset A \\ F \text{ fermé}}} F \right) = \bigcup_{\substack{F \supset A \\ F \text{ fermé}}} (E \setminus F) \quad \text{(ouvert)}$$

$$= \bigcup_{\substack{(E\setminus F)\subset(E\setminus A)\\(E\setminus F)\text{ouvert}}} (E \setminus F) = \bigcup_{\substack{O\subset(E\setminus A)\\O\text{ ouvert}}} O = E \overset{\circ}{\setminus} A$$

Or,

$$E \overset{\circ}{\setminus} A = \{x \in E \mid \exists r > 0,\ B(x,r) \subset E \setminus A\}$$

Donc en manipulant les ensembles on a :

$$\overline{A} = E \setminus (E \setminus \overline{A}) = E \setminus \left(E \overset{\circ}{\setminus} A\right) = E \setminus \{x \in E \mid \exists r > 0,\ B(x,r) \subset (E \setminus A)\}$$

$$= \{x \in E \mid \forall r > 0,\ B(x,r) \cap (E \setminus (E \setminus A)) \neq \varnothing\}$$

$$= \{x \in E \mid \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing\}$$

— On a :

$$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap \left(E \setminus \mathring{A}\right) = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$$

$$= \{x \in E \mid \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing \text{ et } B(x,r) \cap (E \setminus A) \neq \varnothing\}$$

■

Exemple II.8

Dans $(\mathbb{R}, |.|)$, on rappelle que :

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (]n, n+1[) \text{ ouvert} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{Z} \text{ est fermé}$$

On a : $\mathring{\mathbb{Z}} = \varnothing$ et $\overline{\mathbb{Z}} = \partial\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, car : $\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall r \in]0,1[, \quad B(n,r) \cap \mathbb{Z} = \{n\}$

Exemple II.9

On dit que $a \in A$ est un **point isolé** de A si $\exists \varepsilon > 0$ tel que :

$$B(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}$$

Par exemple, tout $n \in \mathbb{Z}$ est un point isolé de $\mathbb{Z}$, par contre, aucun point d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ n'est isolé.

Soit $a \in A$ un point isolé de A.

Alors :

$$a \notin \mathring{A} = \{x \in E \mid \exists r > 0,\ B(x,r) \subset A\}$$

$$a \in \overline{A} = \{x \in E \mid \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing\}$$

Autrement dit, les points isolés de A appartiennent à la **frontière** de A. Mais attention : la réciproque est fausse. Il peut exister des points dans la frontière qui ne sont pas isolés.

Exemple II.10

Dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, aucun point de $\partial B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ n'est isolé.

$$\partial B(0_{\mathbb{R}^2}, 1) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$

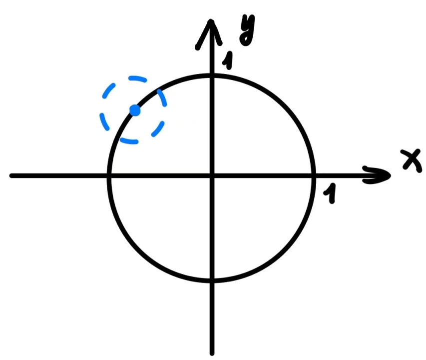

Figure 6 – Il y a toujours une intersection.

Propriété II.1

Soit $A \subset E$, alors :

— A est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$. Autrement dit,

$$\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subset A.$$

— A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$. Autrement dit,

$$\forall x \in E \quad (\forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \Rightarrow x \in A.$$

Preuve : Immédiate si vous avez bien compris le cours. ■

Remarque II.2

— Pour la caractérisation d'un ouvert, on retrouve la définition d'un ouvert. *(Donc inutile)*.

— Par contre, pour la caractérisation d'un fermé, on obtient une nouvelle méthode pour montrer qu'une partie F est fermée.
Au lieu de démontrer que son complémentaire est ouvert, il suffit de montrer que $\overline{F} \subset F$.

Exemple II.11

Soit $a \in E$ et $r > 0$, on sait déjà que :

— $B(a,r)$ est ouverte.

— $\overline{B}(a,r)$ est fermée.

— $\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$ et $\overline{B}\mathring{(a,r)} = B(a,r)$

En particulier $\overline{B}(a,r) = \partial B(a,r) \cup B(a,r)$.

Donc $B(a,r) \neq \overline{B}(a,r)$, par conséquence $B(a,r)$ n'est pas fermée. De même $\overline{B}(a,r)$ n'est pas ouverte.

Exemple II.12

Soit $A =]0,1[^2$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.
Alors A est ouvert car, pour tout $(x,y) \in]0,1[^2$, si on pose

$$r = \min\{x,\, 1-x,\, y,\, 1-y\} > 0,$$

on peut facilement vérifier que

$$B((x,y),r) = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\right\} \subset]0,1[^2.$$

On peut également montrer que A n'est pas fermé.

Preuve

Montrons que A n'est pas fermé $\Leftrightarrow \overline{A} \neq A$.
Il suffit de montrer que :

$$\overline{A} = [0,1]^2$$

On sait déjà que $A \subset [0,1]^2$, donc : $\overline{A} \subset [0,1]^2$ (définition de $\overline{A}$).
On essaye de montrer que :

$$\overline{A} \supset [0,1]^2$$

Soit $r > 0$. On cherche l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$B((x,y),r) \cap A \neq \varnothing$$

On peut montrer (exercice de géométrie) que :

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid B((x,y),r) \cap A \neq \varnothing\right\}$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{distance de } (x,y) \text{ à } A \text{ est strictement plus petite que } r\right\}$$

$$\subset]-r, 1+r[^2 \quad \text{(effectivement “encadré” par le carré)}$$

Donc

$$\overline{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall r > 0,\ B((x,y),r) \cap A \neq \varnothing\right\} \supset \bigcap_{r>0}]-r, 1+r[^2 = [0,1]^2.$$

Par conséquent :

$$\overline{A} = [0,1]^2 \quad \Rightarrow \quad A \neq \overline{A}.$$

En particulier, A n'est pas fermé. ■

Propriété II.2

Soient $A \subset E$ et $B \subset E$.

Alors :

$$\overset{\circ}{A \cap B} = \mathring{A} \cap \mathring{B} \quad \text{et} \quad \overset{\circ}{A \cup B} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B},$$

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Preuve pour le premier point :

On sait que $A \cap B \subset A$, donc $\overset{\circ}{A \cap B} \subset A$.

Donc $\overset{\circ}{A \cap B}$ est un ouvert inclus dans A.

Donc $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \mathring{A}$ (car $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A).

De la même manière, $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \mathring{B}$.

Donc on a :

$$\overset{\circ}{A \cap B} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}.$$

Montrons l'inclusion réciproque.

On sait que $\mathring{A} \subset A$ et $\mathring{B} \subset B$.

Donc $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset A \cap B$.

Or $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ est un ouvert, comme intersection de deux ouverts (en nombre fini).

Et $\overset{\circ}{A \cap B}$ est le plus grand ouvert inclus dans $A \cap B$.

Par conséquent,

$$\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \overset{\circ}{A \cap B}.$$

<u>Conclusion</u> : on a montré par double inclusion que

$$\overset{\circ}{A \cap B} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$$

Preuve pour le deuxième point :

De même, on sait que $\mathring{A} \subset A$ et $\mathring{B} \subset B$, donc

$$\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset A \cup B.$$

Or $\mathring{A} \cup \mathring{B}$ est ouvert comme union d'ouverts (quel que soit le nombre d'ensembles). Et $\overset{\circ}{A \cup B}$ est le plus grand ouvert inclus dans $A \cup B$.

Par conséquent,

$$\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}.$$

Preuve pour le troisième point :

On pose $A' = E \setminus A$ et $B' = E \setminus B$.

Alors :

$$A' \cap B' = (E \setminus A) \cap (E \setminus B) = E \setminus (A \cup B)$$

Donc on a :

$$\overline{A' \cap B'} = \overline{E \setminus (A \overset{\circ}{\cup} B)}.$$

Or,

$$\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset A \overset{\circ}{\cup} B \quad \Rightarrow \quad E \setminus (A \overset{\circ}{\cup} B) \subset E \setminus \left(\mathring{A} \cup \mathring{B}\right).$$

Donc par passage à l'adhérence :

$$\overline{A' \cap B'} \subset E \setminus (\mathring{A} \cup \mathring{B}) = (E \setminus \mathring{A}) \cap (E \setminus \mathring{B}) = \overline{A'} \cap \overline{B'}.$$

Preuve pour le quatrième point :

Toujours de la même manière, on a :

$$\overline{A' \cup B'} = \overline{(E \setminus A) \cup (E \setminus B)} = \overline{E \setminus (A \cap B)} = E \setminus (A \overset{\circ}{\cap} B)$$

Or, on a :

$$A \overset{\circ}{\cap} B = \mathring{A} \cap \mathring{B}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\overline{A' \cup B'} &= E \setminus (\mathring{A} \cap \mathring{B}) = (E \setminus \mathring{A}) \cup (E \setminus \mathring{B}) \\ &= \overline{(E \setminus A)} \cup \overline{(E \setminus B)} = \overline{A'} \cup \overline{B'}\end{aligned}$$

■

Attention

En général, on a seulement :

$$\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset A \overset{\circ}{\cup} B \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$$

Les inclusions réciproques sont fausses en général !!

Exemple II.13

Dans $(\mathbb{R}, |.|)$ on a le contre-exemple :

$$\overset{\circ}{[0,1]} \cup \overset{\circ}{[1,2]} =]0,1[\cup]1,2[=]0,2[\setminus \{1\}$$

$$[0,1] \overset{\circ}{\cup} [1,2] = \overset{\circ}{[0,2]} =]0,2[$$

Ces deux ensembles ne sont pas égaux.

$$\overline{]0,1[\cap]1,2[} = \overline{\varnothing} = \varnothing$$

$$\overline{]0,1[} \cap \overline{]1,2[} = [0,1] \cap [1,2] = \{1\}$$

Ouf, il faut faire attention si on veut faire bouger les barres et les ronds.

Définition II.3

Soit $D \subset E$.

On dit que D est **dense** dans (E, N) si : $\overline{D} = E$.

Autrement dit, lorsque :

$$\forall x \in E,\ \forall r > 0, \quad B(x,r) \cap D \neq \varnothing$$

Exemple II.14

Soit $a \in E$.
a est un point isolé de $\{a\}$ (car $B(a,r) \cap \{a\} = \{a\}$)
Donc $\mathring{\{a\}} = \varnothing$ et donc :

$$\overline{E \setminus \{a\}} = E \setminus \mathring{\{a\}} = E \setminus \varnothing = E$$

Autrement dit : $E \setminus \{a\}$ est dense dans (E, N).
De même, le complémentaire d'une partie finie de E est dense dans (E, N).
Autre exemple, on reprend l'ensemble : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ est dense dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, car : $\mathring{\mathbb{Z}} = \varnothing$

Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme.

$$f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

On considère

$$D = \{f \in E \mid f(0) \neq 0\}$$

On peut montrer que D est dense dans E.

Preuve :

Il suffit de montrer que

$$\overline{D} = E$$

Soit $f \in E \setminus D$, donc $f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $f(0) = 0$.
Soit $r > 0$. On considère la fonction $g = f + \frac{r}{2} \in E$.
On a :

$$\|g - f\|_\infty = \left\|\frac{r}{2}\right\|_\infty = \frac{r}{2} < r$$

et

$$g(0) = f(0) + \frac{r}{2} = \frac{r}{2} \neq 0$$

Donc $g \in B(f,r) \cap D$.
En particulier, $B(f,r) \cap D \neq \varnothing$ pour tout $r > 0$.
Donc :

$$f \in \overline{D} = \{f \in E \mid \forall r > 0,\ B(f,r) \cap D \neq \varnothing\}$$

Par conséquent,

$$E \setminus D \subset \overline{D}$$

On sait aussi que $D \subset \overline{D}$
Donc :

$$E = (E \setminus D) \cup D \subset \overline{D} \subset E$$

On a bien montré que $\overline{D} = E$, donc que D est dense dans (E, N)

3 Suites d'éléments dans un espace vectoriel normé

3.1 Convergence des suites

Définition II.4

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite d'éléments de E.
On dit que $(u_n)_{n \geq n_0}$ **converge** vers $\ell \in E$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \geq n_0,\ \forall n \geq n_1, u_n \in B(\ell, \varepsilon) \quad \text{(voisinage de } \ell)$$

Cette dernière inclusion équivaut à : $N(u_n - \ell) < \varepsilon$. On note : $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$.

Remarque II.3

Autrement dit, une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers ℓ si pour tout ouvert contenant ℓ, les termes de la suite appartient tous à partir d'un certain rang à cet ouvert(car si O est un ouvert qui contient ℓ alors on sait que $\exists \varepsilon > 0, B(\ell, \varepsilon) \subset O$).
Plus généralement, si $V \subset E$ est une partie contenant un ouvert qui contient ℓ, alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \quad \text{si et seulement si} \quad \exists n_1 \geq n_0, \forall n \geq n_1, u_n \in V \quad (\text{pour tout } V)$$

Une telle partie V qui vérifie :

$$\begin{cases} V \subset E \\ \exists O \text{ ouvert}, O \subset E \text{ et } \ell \in O \subset V \end{cases}$$

est appelée un voisinage de ℓ.

Remarque II.4

- Dans le cas où $(E, N) = (\mathbb{K}, |.|)$, on retrouve la convergence des suites numériques :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$$

- Dans le cas général, on peut toujours se ramener à des suites numériques car :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} N(u_n - \ell) = 0$$

Exemple II.15

Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni des normes :

$$f \mapsto \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt, \qquad f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

On considère la suite (f_n) définie par :

$$(f_n : t \mapsto t^n)_{n\geq 0}$$

On a :

$$\forall n \geq 0, \quad \|f_n - 0_E\|_1 = \int_0^1 t^n\, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par conséquence, $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0_E dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
Supposons que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers $f \in E$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
Donc :

$$\forall n \geq 0,\ \forall t \in [0,1], \quad |f_n(t) - f(t)| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On en déduit que pour tout $t \in [0,1]$:

$$f(t) = \lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \lim_{n\to+\infty} t^n = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0,1[\\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

En particulier, cette fonction n'est pas continue en 1 :

$$\lim_{t\to 1^-} f(t) = 0 \neq f(1)$$

Donc f n'est pas continue sur l'intervalle $[0,1]$, c'est-à-dire $f \notin E$.

Ce qui est absurde, donc $(f_n)_{n\geq 0}$ n'est pas convergente dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Exemple II.16

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [1, +\infty]$.
Dans $(\mathbb{K}^n, \|.\|_p)$, la convergence d'une suite d'éléments de $\mathbb{K}^n$ est équivalente à la convergence de ses n composantes dans $(\mathbb{K}, |.|)$.

Je précise un peu sur les notations : on a une suite $(x_k)_{k\geq k_0}$, dont x_k est le k-ième terme. Ce terme est un élément de $\mathbb{K}^n$ donc il s'écrit sous la forme d'un n-uplet. Comme on a déjà mis les indices en bas, cette fois on va mettre les "indices" sur les puissances. Ça peut être bizarre mais ce sera encore plus déroutant si on met deux indices(avec les implications très différentes) au même endroit.

En effet, si

$$\left(x_k = (x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^n)\right)_{k\geq k_0}$$

est une suite d'éléments de $\mathbb{K}^n$ et si

$$\ell = (\ell^1, \ell^2, \ldots, \ell^n) \in \mathbb{K}^n,$$

alors, pour tout $k \geq k_0$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$|x_k^i - \ell^i| \leq \|x_k - \ell\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^n |x_k^j - \ell^j|^p\right)^{1/p} & \text{si } p \in [1, +\infty[\\ \max_{j\in[\![1,n]\!]} |x_k^j - \ell^j| & \text{si } p = +\infty \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} x_k = \ell \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{k\to+\infty} \|x_k - \ell\|_p = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \ \lim_{k\to+\infty} |x_k^i - \ell^i| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \ \lim_{k\to+\infty} x_k^i = \ell^i \quad \text{dans } (\mathbb{K}, |.|) \end{aligned}$$

En particulier, si $(x_k)_{k\geq k_0}$ converge vers ℓ dans $(\mathbb{K}^n, \|.\|_p)$ pour <u>une valeur</u> de $p \in [1, +\infty]$, alors $(x_k)_{k\geq k_0}$ converge vers ℓ dans $(\mathbb{K}^n, \|.\|_p)$ pour <u>toutes les valeurs</u> de $p \in [1, +\infty]$.

Remarque II.5

La différence entre $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ est que

$$\dim(\mathbb{K}^n) = n < +\infty \quad \text{alors que} \quad \dim(\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})) = +\infty$$

On généralisera le résultat sur $(\mathbb{K}^n, \|.\|_p)$ à tout espace vectoriel de dimension finie dans le prochain chapitre.

Remarque II.6

On peut généraliser tous les résultats des suites numériques (dans $(\mathbb{K}, |.|)$) convergentes aux suites convergentes de (E, N).

Par exemple :

- unicité de la limite des suites convergentes
- toute suite convergente est bornée (c'est-à-dire : $\exists M > 0,\ \forall n \geq n_0,\ N(u_n) \leq M$, ce qui équivaut à $u_n \in B(0_E, M)$)
- une combinaison linéaire de suites convergentes est convergente vers la combinaison linéaire des limites
- etc.

3.2 Caractéristiques séquentielles

Propriété II.3

Caractéristique séquentielle des fermés.
Soit $A \subset E$.
Alors A est fermé si et seulement si toute suite convergente d'éléments de A a sa limite dans A :

$$\begin{cases} \forall n \geq n_0,\ u_n \in A \\ (u_n)_{n \geq n_0} \text{ converge} \end{cases} \implies \lim_{n \to \infty} u_n = \ell \in A$$

"Séquentielle" veut dire effectivement "avec des suites", et vous voyez qu'en anglais une suite se dit "a sequence".

Preuve : on raisonne par double implication.

— (⇒)
Supposons que A est fermé, soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite convergente d'éléments de A.
On pose $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$, et montrons que $\ell \in A$.
On sait que $\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_1 \geq n_0,\ \forall n \geq n_1,\ u_n \in B(\ell,\varepsilon)$. En particulier, $\forall\varepsilon > 0,\ u_n \in B(\ell,\varepsilon) \cap A$.
Or, on sait que $\overline{A} = \{x \in E \mid \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing\}$, donc $\ell \in \overline{A}$.
Or on a supposé que A est fermé, donc $A = \overline{A}$.
On en déduit bien que $\ell \in A$.

— (⇐)
Supposons que toute suite convergente d'éléments de A a sa limite dans A.
Montrons que A est fermé.
Il suffit de montrer que $\overline{A} \subset A$.
Soit $x \in \overline{A}$. On sait que :

$$\forall r > 0, \quad B(x,r) \cap A \neq \varnothing$$

En particulier, pour $r = \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, on sait qu'il existe $u_n \in A$ tel que $u_n \in B(x, \frac{1}{n})$.
On a donc construit une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de A telle que :

$$\forall n \geq 1, \quad N(u_n - x) < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc (u_n) converge vers x.
On a établi que $x \in A$.
Donc $\overline{A} \subset A$, donc $A = \overline{A}$ (car $A \subset \overline{A}$ toujours).
Par conséquent, A est fermé.

Conclusion : Par double inclusion, la propriété est vraie. ■

Remarque II.7

Cette caractérisation est très utile en pratique, il est beaucoup plus facile d'utiliser les suites pour montrer qu'une partie est fermée.

Exemple II.17

Dans $\mathbb{R}^2$, on a :

$$B_2((0,0),1) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 < 1\right\}$$

Alors $B_2((0,0),1)$ n'est pas fermé dans $(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$.

Considérons par exemple la suite

$$\left(\left(\frac{n-1}{n},\ 0\right)\right)_{n\geq 1}$$

est une suite d'éléments de $B_2((0,0),1)$ (car $(\frac{n-1}{n})^2+0^2=\left(1-\frac{1}{n}\right)^2<1$).

Elle converge vers $(1,0)$ dans $(\mathbb{R}^2,\|.\|_\infty)$ car on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|\left(\frac{n-1}{n},0\right)-(1,0)\right\|_\infty=\lim_{n\to+\infty}\max\left\{\left|\frac{n-1}{n}-1\right|,\ |0-0|\right\}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$$

Mais $(1,0)\notin B_2((0,0),1)$, ouf ! Donc $B_2((0,0),1)$ n'est pas fermé dans $(\mathbb{R}^2,\|.\|_\infty)$, d'après la caractérisation séquentielle des fermés.

Puisque la convergence dans $(\mathbb{R}^2,\|.\|_\infty)$ implique la convergence dans $(\mathbb{R}^2,\|.\|_p)$ pour tout $p\in[1,+\infty]$, on en déduit que $B_2((0,0),1)$ n'est pas fermée dans $(\mathbb{R}^2,\|.\|_p)$ pour tout $p\in[1,+\infty]$.

Par contre,

$$\overline{B_2}((0,0),1)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ x^2+y^2\leq 1\right\}$$

est fermée dans $(\mathbb{R}^2,\|.\|_p)$ pour tout $p\in[1,+\infty]$.

En effet, si $(x_n,y_n)_{n\geq 0}$ est une suite convergente d'éléments de $\overline{B_2}((0,0),1)$ alors si on pose $(x,y)=\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n,y_n)$

(alors $x=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ et $y=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$)

Alors :

$$x^2+y^2=\lim_{n\to+\infty}(x_n^2+y_n^2)\leq 1$$

Donc $(x,y)\in\overline{B_2}((0,0),1)$,

Donc $\overline{B_2}((0,0),1)$ est fermé dans $(\mathbb{R}^2,\|.\|_p)$ pour tout $p\in[1,+\infty]$, d'après la caractérisation séquentielle des fermés.

Propriété II.4

Caractéristique séquentielle de l'adhérence.

Soit $A\subset E$.

L'adhérence de A est l'ensemble des limites de suites convergentes d'éléments de A :

$$\overline{A}=\left\{\ell\in E\ \middle|\ \exists(u_n)_{n\geq n_0},\ \begin{array}{l}\forall n\geq n_0,\ u_n\in A\\ \lim_{n\to+\infty}u_n=\ell\end{array}\right\}$$

En particulier, la limite d'une suite convergente d'éléments de A appartient à $\overline{A}$.

Preuve : on raisonne par double inclusion.

— ($\supset$)

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite convergente d'éléments de A.

On pose $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

Puisque $A \subset \overline{A}$, la suite (u_n) est une suite convergente d'éléments de $\overline{A}$.

Or $\overline{A}$ est fermé, donc $\ell \in \overline{A}$ (d'après la caractérisation séquentielle des fermés).

On a bien montré l'inclusion $\supset$.

— ($\subset$)

Soit $x \in \overline{A}$.

On sait que $\forall r > 0,\ B(x, r) \cap A \neq \varnothing$.

En particulier, pour $r = \frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $u_n \in A$ tel que $u_n \in B(x, \frac{1}{n})$.

Donc on a construit une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de A telle que

$$\forall n \geq 1, \quad N(u_n - x) < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc (u_n) converge vers x .

Conclusion : Par double inclusion, la propriété est vraie. ■

Exemple II.18

Soit $A = \left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

A n'est pas fermé dans $(\mathbb{R}, |.|)$, car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \notin A$, d'après la caractérisation séquentielle des fermés.

Mais

$$\overline{A} = \left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\}$$

(en prenant une suite constante qui converge vers $\frac{1}{n} \in \overline{A}$, et la suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ qui converge vers $0 \in \overline{A}$)

Propriété II.5

Caractéristique séquentielle des parties denses.
Soit $D \subset E$.
Alors D est dense dans (E, N) si et seulement si tout élément de E est égal à la limite d'une suite convergente d'éléments de D.
C'est-à-dire, si et seulement si :

$$\forall x \in E,\ \exists (u_n)_{n \geq n_0},\ \begin{cases} \forall n \geq n_0,\ u_n \in D \\ \lim_{n \to +\infty} u_n = x \end{cases}$$

Preuve :

C'est immédiat car D dense dans (E, N) signifie $\overline{D} = E$, puis on utilise la caractérisation séquentielle de l'adhérence. ■

Exemple II.19

Dans $(\mathbb{R}, |.|)$, on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} = x$$

(où $\lfloor . \rfloor$ est l'unique entier tel que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$)
Donc

$$\left(\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \right)_{n \geq 0}$$

est une suite de rationnels qui converge vers x.
Autrement dit :

$$\boxed{\mathbb{Q} \text{ est une partie dense de } (\mathbb{R}, |.|)}$$

3.3 Sous-suites et valeurs d'adhérence

Définition II.5

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite d'éléments de E et $\varphi : \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\} \to \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\}$ une application extractrice strictement croissante.
La suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq n_0}$ est appelée une **sous-suite** de $(u_n)_{n\geq n_0}$, ou une **suite extraite** de $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Exemple II.20

On considère quelques sous-suites usuelles qu'on a vu en MATH2305P :

— Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de E, alors $(u_{2k})_{k\geq 0}$ est la suite extraite des indices pairs.

— De même, $(u_{2k+1})_{k\geq 0}$ est la suite extraite des indices impairs.

On peut aussi considérer les sous-suites : $(u_{3k})_{k\geq 0}, \quad (u_{5k+2})_{k\geq 0}, \quad (u_{k^2})_{k\geq 0}$

Remarque II.8

Puisque $\varphi : \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\} \to \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\}$ est strictement croissante, on peut montrer par récurrence que :

$$\forall n \geq n_0, \quad \varphi(n) \geq n$$

En effet :

Initialisation :

$$\varphi(n_0) \in \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\} \quad \Rightarrow \quad \varphi(n_0) \geq n_0$$

Hérédité

On suppose que $\varphi(n) \geq n$ pour un $n \geq n_0$ fixé. Alors :

$$\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n \quad \Rightarrow \quad \varphi(n+1) \geq n+1 \qquad \text{(car } \varphi \text{ est strictement croissante)}$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \geq n_0, \quad \varphi(n) \geq n$$

■

Propriété II.6

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite d'éléments de E qui converge vers $\ell \in E$.
Alors toute sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq n_0}$ de $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge aussi vers ℓ.

Preuve :

On sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \Rightarrow \quad \forall\varepsilon > 0,\ \exists n_1 \geq n_0,\ \forall n \geq n_1,\ u_n \in B(\ell, \varepsilon)$$

En particulier :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_1 \geq n_0,\ \forall n \geq n_1,\ u_{\varphi(n)} \in B(\ell, \varepsilon) \quad \text{car } \varphi(n) \geq n \geq n_1$$

Donc on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$$

Définition II.6

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite d'elements de E.
Un élément $a \in E$ est appelé une **valeur d'adhérence** de $(u_n)_{n\geq n_0}$ lorsqu'il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq n_0}$ qui converge vers a.

Exemple II.21

Soit $(u_n = (-1)^n)_{n\geq 0}$.

Alors 1 est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$ car la suite extraite $(u_{2k} = 1)_{k\geq 0}$ est constante donc converge vers 1.

De même, -1 est une valeur d'adhérence car $(u_{2k+1} = -1)_{k\geq 0}$ converge vers -1.

Par contre, 0 n'est pas une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$, sinon il existerait une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ telle que :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_1 \geq 0,\ \forall n \geq n_1, \quad u_{\varphi(n)} \in B(0, \varepsilon) =]-\varepsilon, \varepsilon[$$

Par exemple, pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, c'est absurde car :

$$\forall n \geq 0, \quad u_{\varphi(n)} \in \{-1, +1\} \quad \Rightarrow \quad u_{\varphi(n)} \notin]-1/2, +1/2[$$

De plus, puisque $(u_n = (-1)^n)_{n\geq 0}$ admet deux sous-suites qui convergent vers des limites différentes $(-1 \neq +1)$, on en déduit que $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas convergente.

Remarque II.9

D'après la propriété sur les limites de sous-suites, si une suite admet 0 ou au moins 2 valeurs d'adhérence distinctes, alors la suite n'est pas convergente.

Autrement dit, si une suite est convergente, alors elle admet une unique valeur d'adhérence.

La réciproque est fausse en général !!! Exemple :

$$(u_n = n \cdot (1 - (-1)^n))_{n\geq 0} \quad \text{soit} \quad u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Alors 0 est l'unique valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$, mais la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas convergente. La convergence d'une sous-suite ne peut rien dire sur les autres termes.

Proposition II.3

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite d'elements de E.

Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\geq n_0}$ est égal à :

$$\bigcap_{n_1 \geq n_0} \overline{\{u_n \mid n \geq n_1\}}$$

En particulier, l'ensemble des valeurs d'adhérence est fermé comme intersection de fermés.

Preuve : par double inclusion.

— $(\subset)$

Soit $a \in E$ une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Donc il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq n_0}$ qui converge vers a.

En particulier, pour tout $n_1 \geq n_0$, la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq n_1}$ est une suite d'elements de $\{u_n \mid n \geq n_1\}$, (car $\varphi(n) \geq n \geq n_1$) et cette suite converge vers a.

D'après la caractérisation séquentielle de l'adhérence :

$$a \in \overline{\{u_n \mid n \geq n_1\}}$$

C'est vrai pour tout $n_1 \geq n_0$, donc :

$$a \in \bigcap_{n_1 \geq n_0} \overline{\{u_n \mid n \geq n_1\}}$$

— $(\supset)$
Soit $a \in \bigcap_{n_1 \geq n_0} \overline{\{u_n \mid n \geq n_1\}}$
Donc :

$$\forall n_1 \geq n_0,\ \forall \varepsilon > 0, \quad B(a, \varepsilon) \cap \{u_n \mid n \geq n_1\} \neq \varnothing$$

On va construire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \geq n_0}$, c'est-à-dire une application :

$$\varphi : \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\} \to \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\}$$

qui est strictement croissante, telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_{\varphi(n)} = a$$

On va définir φ par récurrence.
— On pose : $\varphi(n_0) = n_0$
— On suppose qu'on a défini $\varphi(n_0 + k)$ pour un $k \in \mathbb{N}$ fixé.
On pose :

$$n_1 = \varphi(n_0 + k) + 1 \geq 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{1}{k+1} > 0$$

Alors on sait que :

$$B\left(a, \frac{1}{k+1}\right) \cap \{u_n \mid n \geq n_1\} \neq \varnothing$$

On pose : $u_{\varphi(n_0+k+1)} \in \{u_n \mid n \geq \varphi(n_0 + k) + 1\}$ tel que :

$$N\left(u_{\varphi(n_0+k+1)} - a\right) < \frac{1}{k+1}$$

Vérifions que φ est strictement croissante et que $\lim_{n \to +\infty} u_{\varphi(n)} = a$.
— Pour que φ soit strictement croissante, il suffit que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n_0 + k + 1) > \varphi(n_0 + k)$$

Il suffit de poser :

$$n_1 = \varphi(n_0 + k) + 1$$

Alors :

$$\varphi(n_0 + k + 1) \geq \varphi(n_0 + k) + 1 > \varphi(n_0 + k)$$

Donc φ est bien strictement croissante.

— Pour que $\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = a$, il suffit que :

$$\lim_{k\to+\infty} N\left(u_{\varphi(n_0+k+1)} - a\right) = 0$$

Il suffit de poser :

$$\varepsilon = \frac{1}{k+1}$$

Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad N\left(u_{\varphi(n_0+k+1)} - a\right) < \frac{1}{k+1} \longrightarrow 0 \quad (\text{quand } k \to +\infty)$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = a$$

Finalement, on a bien montré que a est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Par double inclusion on trouve le résultat. ■

Exemple II.22

Soit $(u_n = \frac{1}{n})_{n\geq 1}$.
Alors :

$$\forall n_1 \geq 1, \quad \left\{\frac{1}{n} \mid n \geq n_1\right\} \cup \{0\} = \overline{\left\{\frac{1}{n} \mid n \geq n_1\right\}}$$

car :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad B(0,\varepsilon) \cap \left\{\frac{1}{n} \mid n \geq n_1\right\} \neq \varnothing \quad (\text{par exemple dès que } n \geq \max(n_1, \tfrac{1}{\varepsilon}))$$

Donc :

$$\bigcap_{n_1\geq 1} \overline{\left\{\frac{1}{n} \mid n \geq n_1\right\}} = \{0\}$$

Exemple II.23

On peut montrer (TD n°5) que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\cos(n))_{n\geq 0}$ est $[-1,1]$.

4 Fonctions entre espaces vectoriels normés

Dans cette section, on fixe (E_1, N_1) et (E_2, N_2), deux espaces vectoriels normés. On note $B_1(a,r)$ les boules de (E_1, N_1) et $B_2(a,r)$ celles de (E_2, N_2).

4.1 Limites

Définition II.7

Soit $f : A \to E_2$ une fonction définie sur $A \subset E_1$. Soit $a \in \overline{A}$.
On dit que $f(x)$ **tend vers** $\ell \in E_2$ quand x **tend vers** a, lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A \cap B_1(a, \eta),\ f(x) \in B_2(\ell, \varepsilon)$$

C'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A, \quad N_1(x-a) < \eta \ \Rightarrow\ N_2(f(x) - \ell) < \varepsilon$$

On dit aussi que f admet ℓ pour limite en a, et on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

Exemple II.24

Prenons l'exemple :

$$f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$$

On choisit la norme $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^3$ et la norme $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}$. On sait que :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad |x| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \|(x,y,z)\|_2$$

De même pour $|y|$ et $|z|$.
Donc :

$$\begin{aligned}\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}, \quad |f(x,y,z)| &= \frac{|x||y||z|}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2} \\ &\leq \frac{\|(x,y,z)\|_2^3}{\|(x,y,z)\|_2^2} = \|(x,y,z)\|_2\end{aligned}$$

Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, si on pose $\eta = \varepsilon$, alors :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}, \quad \|(x,y,z) - (0,0,0)\|_2 < \eta \Rightarrow |f(x,y,z) - 0| < \varepsilon$$

On en déduit que :

$$\lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} f(x,y,z) = 0$$

Proposition II.4

Soit $f : A \to E_2$ une fonction définie sur $A \subset E_1$. Soit $a \in \overline{A}$.
Alors : $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in E_2$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $(f(u_n))_{n \geq n_0}$ converge vers ℓ.

Preuve : On raisonne par double implication.

— $(\Rightarrow)$
On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.
Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite d'éléments de A qui converge vers a.
Donc on sait que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A, \quad N_1(x - a) < \eta \Rightarrow N_2(f(x) - \ell) < \varepsilon$$

$$\forall \eta > 0,\ \exists n_1 \geq n_0,\ \forall n \geq n_1, \quad N_1(u_n - a) < \eta$$

Par conséquent :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \geq n_0,\ \forall n \geq n_1, \quad N_2(f(u_n) - \ell) < \varepsilon$$

On en déduit bien que $(f(u_n))_{n \geq n_0}$ converge vers ℓ.

— $(\Leftarrow)$
On raisonne par contraposée.
On suppose que $f(x)$ ne tend pas vers $\ell \in E_2$ quand x tend vers a.
Donc :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in A\ ,\ N_1(x - a) < \eta \text{ et } N_2(f(x) - \ell) \geq \varepsilon$$

Montrons qu'il existe une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ d'éléments de A qui converge vers a, telle que la suite $(f(u_n))_{n \geq n_0}$ ne converge pas vers ℓ.
Pour tout $n \geq 1$, on pose $\eta = \frac{1}{n} > 0$. Alors, d'après l'hypothèse de contraposée, il existe $u_n \in A$ tel que :

$$N_1(u_n - a) < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad N_2(f(u_n) - \ell) \geq \varepsilon$$

Donc on a construit une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de A qui converge vers a, mais telle que $(f(u_n)) \not\to \ell$.
On a :

$$\forall n \geq 1, \quad N_1(u_n - a) < \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \to +\infty$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$.

Par l'absurde, supposons que $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$. Alors :

$$\forall n \geq 1, \quad \varepsilon \leq N_2(f(u_n) - \ell) \longrightarrow 0$$

Ce qui est absurde car $\varepsilon > 0$.

On a bien montré l'implication $\Leftarrow$ par contraposée.

Donc par double implication le résultat est démontré. ■

Exemple II.25

Soit $f(x,y) \mapsto x^y = \exp(y\ln(x))$

f est définie sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. Étudions la limite en $(0,0) \in \overline{]0,+\infty[\times\mathbb{R}} = [0,+\infty[\times\mathbb{R}$

On remarque que :

$$\left(a_n = \left(\tfrac{1}{n}, 0\right)\right)_{n\geq 1} \quad \text{et} \quad \left(b_n = \left(e^{-n}, \tfrac{1}{n}\right)\right)_{n\geq 1} \quad \text{convergent vers } (0,0)$$

Par exemple en prenant la norme : $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\tfrac{1}{n}, 0\right) = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(0 \cdot \ln\left(\tfrac{1}{n}\right)\right) = 1$$
$$\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = \lim_{n\to+\infty} f\left(e^{-n}, \tfrac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\tfrac{1}{n} \cdot \ln(e^{-n})\right) = \exp(-1) = e^{-1}$$

Or, $1 \neq e^{-1}$, donc f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

4.2 Continuité

Définition II.8

Soit $f : A \to E_2$ une fonction définie sur $A \subset E_1$.

— On dit que f est **continue** en $a \in A$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \cap B_1(a, \delta), \quad f(x) \in B_2(f(a), \varepsilon)$$

ce qui est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \quad N_1(x-a) < \delta \Rightarrow N_2(f(x) - f(a)) < \varepsilon$$

ou bien plus simplement :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

— On dit que f est **continue sur** A si f est continue en a pour tout $a \in A$.

Remarque II.10

⋆ Dans le cas où $(E_1, N_1) = (E_2, N_2) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$,
on retrouve bien la définition de la continuité des fonctions réelles.

⋆ Toutes les propriétés usuelles des fonctions réelles continues
se généralisent bien aux fonctions entre EVN.

Exemple II.26

On considère quelques exemples qu'on a vu dans le cours et les TD précédents.

— Soit (E, N) un EVN. Alors

$$\mathrm{Id}_E : E \to E, \quad x \mapsto x$$

est continue sur E, car il suffit de choisir $\delta = \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0, \, \forall (a, x) \in E^2, \quad N(x-a) < \varepsilon \implies N(\mathrm{Id}_E(x) - \mathrm{Id}_E(a)) < \varepsilon$$

— On considère

$$(E, N_1) = (\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \quad \text{et} \quad (E, N_2) = (\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$$

où on rappelle les normes usuelles :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

Alors

$$\mathrm{Id}_E : (E, N_1) \to (E, N_2)$$

n'est pas continue.

En effet, si on considère la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E définie par

$$f_n : t \mapsto t^n,$$

alors on a vu que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 dans (E, N_1) car

$$\forall n \geq 0, \quad \|t^n - 0\|_1 = \int_0^1 |t^n - 0|\, dt = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Mais :

$$(\mathrm{Id}_E(f_n) = f_n)_{n\geq 0} \quad \text{ne converge pas vers} \quad (\mathrm{Id}_E(0) = 0)_{n\geq 0} \quad \text{dans} \quad (E, N_2)$$

Car :

$$\forall n \geq 0, \quad \|t^n - 0\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |t^n - 0| = 1$$

On a un truc qui ne converge pas vers 0... Donc l'identité n'est pas forcément continue si on croise entre deux EVNs de natures différentes.

$\boxed{\text{Attention au choix des normes!!!}}$

— Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Alors

$$N : E \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto N(x)$$

est continue de (E, N) dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

En effet, on sait que pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$$

car

$$N(x) = N(x - y + y) \leq N(x - y) + N(y)$$

donc $N(x) - N(y) \leq N(x - y)$ et de même $N(y) - N(x) \leq N(x - y)$.

Or

$$|N(x) - N(y)| = \max\{N(x) - N(y),\ N(y) - N(x)\}.$$

Donc on a pour tout $a \in E$:

$\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in E$, $N(x - a) < \varepsilon \Longrightarrow |N(x) - N(a)| < \varepsilon$.

Ce qui montre bien la continuité en tout $a \in E$.

— De même, on définit

$$f : \begin{cases} E \setminus \{0_E\} \to E \\ x \mapsto \dfrac{x}{N(x)} \end{cases}$$

f est continue pour la norme N sur E.

Par contre, f ne se prolonge pas par continuité en 0_E.

Par exemple, si on fixe $u \in E \setminus \{0_E\}$, alors

$$\lim_{t \to 0^+} f(tu) = \lim_{t \to 0^+} \frac{tu}{N(tu)} = \frac{u}{N(u)}$$

et

$$\lim_{t \to 0^-} f(tu) = \lim_{t \to 0^-} \frac{tu}{N(tu)} = \frac{-u}{N(u)}$$

(on peut enlever t grâce à l'homogénéité absolue), mais :

$$\frac{u}{N(u)} \neq \frac{-u}{N(u)} \quad \text{car} \quad u \neq 0_E.$$

Donc

$$\lim_{x \to 0_E} f(x) \quad \text{n'existe pas.}$$

— Dans le cas où $(E_2, N_2) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [1, +\infty]$, alors

$$f : \begin{cases} A \subset E_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) \end{cases}$$

est continue si et seulement si chaque $f_i : A \to \mathbb{R}$ est continue pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ (voir ce qu'on a démontré pour les limites).

— On considère $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme

$$\forall p = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X], \quad \|p\| = \max_{k \in [\![0, d]\!]} |a_k|$$

Alors

$$D : \begin{cases} E \to E \\ p \mapsto p' \end{cases} \qquad \text{n'est pas continue.}$$

Par exemple, la suite $\left(p_n = \frac{1}{n}X^n\right)_{n\geq 1}$ d'éléments de E converge vers 0 dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$ car :

$$\forall n \geq 1, \quad \|p_n - 0\| = \left\|\frac{1}{n}X^n\right\| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \to +\infty$$

Mais

$$\left(D(p_n) = X^{n-1}\right)_{n\geq 1} \quad \text{ne converge pas vers } D(0) = 0$$

comme, dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$, on a :

$$\forall n \geq 1, \quad \|D(p_n) - D(0)\| = \left\|X^{n-1}\right\| = 1 \not\longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \to +\infty$$

Par contre, si on considère

$$E = \mathbb{R}_d[X] := \{p \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(p) \leq d\}$$

où $d \in \mathbb{N}$ est fixé, alors :

$$D : \begin{cases} \mathbb{R}_d[X] \to \mathbb{R}_d[X] \\ p = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \mapsto D(p) = p' = \sum_{k=0}^{d} k a_k X^{k-1} \end{cases} \qquad \text{est continue}$$

En effet, $\mathbb{R}_d[X]$ peut être identifiée à $\mathbb{R}^{d+1}$ (par l'application $\left(p = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k\right) \mapsto (a_0, a_1, \ldots, a_d)$), et donc D peut être identifiée à la fonction

$$\mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^{d+1}$$

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d) \mapsto (a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots, da_d, 0)$$

Important : La différence entre $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_d[X]$ est que

$$\dim(\mathbb{R}[X]) = +\infty > d + 1 = \dim(\mathbb{R}_d[X])$$

On verra dans le prochain chapitre qu'en dimension finie, toutes les applications linéaires sont continues.

ATTENTION : En dimension infinie, il existe des applications linéaires qui ne sont *plus continues* !!

— On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (où $n \in \mathbb{N}*$) d'une norme $\|\cdot\|$ quelconque.
Alors l'application :

$$\det : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A = (A_{i,j}) \mapsto \det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)} \end{cases}$$

est continue de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ (comme fonction polynomiale des coefficients de A)

Exemple : pour $n = 2$,

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc \text{ est continue.}$$

Propriété II.7

Soit $f : A \to E_2$ une fonction définie sur $A \subset E_1$.

- f est continue si et seulement si pour tout ouvert $O_2 \subset E_2$, l'image réciproque $f^{-1}(O_2) = \{x \in A \mid f(x) \in O_2\}$ est un ouvert de E_1.
- f est continue si et seulement si pour tout fermé $F_2 \subset E_2$, l'image réciproque $f^{-1}(F_2) = \{x \in A \mid f(x) \in F_2\}$ est un fermé de E_1.

Preuve : double implication pour chaque point.

Montrons la propriété sur les ouverts :

- ($\Rightarrow$) Soit O_2 un ouvert de E_2, et soit $a \in f^{-1}(O_2)$, donc $f(a) \in O_2$.
  Puisque O_2 est ouvert, $\exists\, \varepsilon > 0$ tel que
  $$B_2(f(a), \varepsilon) \subset O_2.$$
  Puisque f est continue, $\exists\, \delta > 0$ tel que $\forall x \in A \cap B_1(a, \delta)$, on a
  $$f(x) \in B_2(f(a), \varepsilon).$$
  Donc $\forall x \in A \cap B_1(a, \delta)$, on a $x \in f^{-1}(O_2)$, soit
  $$B_1(a, \delta) \subset f^{-1}(O_2).$$
  Donc $f^{-1}(O_2)$ est un ouvert de E_1.
- ($\Leftarrow$) Soient $a \in A$ et $\varepsilon > 0$.
  On sait que $f^{-1}(B_2(f(a), \varepsilon))$ est un ouvert de E_1.
  $$\exists\, \delta > 0 \text{ tel que } B_1(a, \delta) \subset f^{-1}(B_2(f(a), \varepsilon)).$$
  Autrement dit,
  $$\forall x \in A \cap B_1(a, \delta), \quad f(x) \in B_2(f(a), \varepsilon).$$
  Donc f est continue en a, pour tout $a \in A$.

Pour les fermés, on raisonne aussi par double implication en utilisant la caractérisation séquentielle.

— ($\Rightarrow$)
  Soit F_2 un fermé de E_2. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $f^{-1}(F_2)$, donc $\forall n \geq 0$, $f(x_n) \in F_2$.
  On suppose que $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers $a \in E_1$.
  Puisque f est continue, $(f(x_n))_{n\geq 0} \to f(a)$.
  Puisque F_2 est fermé, $f(a) \in F_2$ (caractérisation séquentielle des fermés).
  Autrement dit, $a \in f^{-1}(F_2)$. Donc $f^{-1}(F_2)$ est fermé.

— ($\Leftarrow$) De même.

■

Important : Cette propriété fournit une nouvelle méthode pour montrer qu'une partie est ouverte ou fermée !!

Exemple II.27

Considérons : $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 > x\}$.
On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto y^2 - x \end{cases}$$

Alors f est continue comme fonction polynomiale. De plus,

$$A = f^{-1}\left(\,]0, +\infty[\, \right) \quad \text{et} \quad]0, +\infty[\text{ est ouvert.}$$

Donc A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soit (E, N) un espace vectoriel normé, et soient $a \in E$ et $r > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \partial B(a, r) &= \{x \in E \mid N(x - a) = r\} \\ &= f^{-1}\left(\{r\}\right) \quad \text{où } f : E \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto N(x - a) \end{aligned}$$

Or f est continue comme composition de fonctions continues, et le singleton $\{r\}$ est fermé. Donc les sphères sont fermées.

Exemple II.28

L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une partie ouverte car

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) \neq 0\} = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$$

où $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue, et $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ est ouvert.

ATTENTION : L'image directe d'un ouvert (ou d'un fermé) par une fonction continue n'est pas toujours un ouvert (ou un fermé).

Exemple II.29

On considère une fonction constante :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1$$

$]0, 1[$ est ouvert, mais $f(]0, 1[) = \{f(x) \mid x \in]0, 1[\} = \{1\}$ est fermé comme un singleton.

Définition II.9

Soit $f : A \to E_2$ où $A \subset E_1$.

— On dit que f est **continue sur** A lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall a \in A,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A,\ N_1(x-a) < \delta \Rightarrow N_2(f(x) - f(a)) < \varepsilon$$

— On dit que f est **uniformément continue sur** A lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (a, x) \in A^2,\ N_1(x-a) < \delta \Rightarrow N_2(f(x) - f(a)) < \varepsilon$$

— On dit que f est **lipschitzienne sur** A lorsque :

$$\exists k > 0,\ \forall (x, y) \in A^2, \quad N_2(f(x) - f(y)) \leq k N_1(x-y)$$

Propriété II.8

Lipschitzien implique uniformément continue, et uniformément continue implique continue.

Preuve : Pour une démonstration similaire, regardez les notes du cours sur les équations différentielles ordinaires, où on a traité les fonctions localement/globalement lipschitziennes.

Soit $f : A \to E_2$ où $A \subset E_1$. On suppose que f est lipschitzienne.

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k} > 0$.

Soient $(a, x) \in A^2$ tels que $N_1(x-a) < \delta$.

$$N_2(f(x) - f(a)) \leq k N_1(x-a) < k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

Donc f est uniformément continue.

La deuxième démonstration est évidente et vous pouvez essayer de le faire :) Mais attention, les réciproques sont fausses en général. ■

On fait deux contre-exemples :

Exemple II.30

On considère :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

qui est continue sur $\mathbb{R}$.

Par l'absurde, supposons que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (a, x) \in \mathbb{R}^2,\ |x-a| < \delta \Rightarrow |x^2 - a^2| < \varepsilon$$

Or

$$|x^2 - a^2| = |x-a| \cdot |x+a|$$

Donc si on pose $x = a + \dfrac{\delta}{2}$, alors $|x-a| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$.

Donc

$$|x^2 - a^2| = \frac{\delta}{2} \cdot |2a + \frac{\delta}{2}| < \varepsilon \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}$$

Ce qui est absurde quand $a \to +\infty$.

Donc f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Lemme II.1

$$\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2, \quad |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$$

Preuve :

Si $x \geq y \geq 0$, alors

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \leq x - 2y + y = x - y$$

Donc

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|} \quad \text{pour } x \geq y \geq 0$$

Et de même c'esi vrai pour $y \geq x \geq 0$. ■

Exemple II.31

Montrer que

$$g : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$$

est uniformément continue sur $[0,1]$ mais pas lipschitzienne.

Preuve : Montrons maintenant que g est uniformément continue sur $[0,1]$.

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \varepsilon^2$.

Soient $(a, x) \in [0,1]^2$ tels que $|x - a| < \delta$.

Alors

$$|g(x) - g(a)| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leq \sqrt{|x - a|} < \sqrt{\delta} = \varepsilon \quad \text{(par le lemme)}$$

Par l'absurde, supposons que g est lipschitzienne sur $[0,1]$.

Alors

$$\exists k > 0,\ \forall (x, y) \in [0,1]^2, \quad |g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$$

En particulier, pour $y = 0$, on a

$$\forall x \in]0,1], \quad \sqrt{x} \leq kx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \leq k$$

Ce qui est absurde quand $x \to 0^+$. Donc g n'est pas lipschitzienne sur $[0,1]$. ■

4.3 Applications linéaires continues

Théorème II.1

Soient (E_1, N_1) et (E_2, N_2) deux espaces vectoriels normés.

Soit $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, c'est-à-dire $f : E_1 \to E_2$ une application linéaire.

Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

— f est continue en 0_{E_1}

— f est continue sur E_1

— f est lipschitzienne (donc uniformément continue) sur E_1

— $\sup\limits_{x \in E_1,\, x \neq 0} \dfrac{N_2(f(x))}{N_1(x)}$ existe et est finie

Preuve :

On a déjà (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) de manière évidente.

Il suffit de montrer que (4) $\Rightarrow$ (3) et (1) $\Rightarrow$ (4).

— ((4) $\Rightarrow$ (3))

On suppose que $k = \sup\limits_{x \in E_1 \setminus \{0_{E_1}\}} \dfrac{N_2(f(x))}{N_1(x)}$ existe et est finie.

Montrons que f est k-lipschitzienne, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in E_1^2, \quad N_2(f(x) - f(y)) \leq k\, N_1(x - y)$$

(C'est évident pour $x = y$ car $N_1(0_{E_1}) = N_2(0_{E_2}) = 0$)

Soient $(x, y) \in E_1^2$ tels que $x \neq y$, c'est-à-dire :

$$x - y \in E_1 \setminus \{0_{E_1}\}$$

Par linéarité de l'application f et séparation de N_1 :

$$k \geq \frac{N_2(f(x - y))}{N_1(x - y)} = \frac{N_2(f(x) - f(y))}{N_1(x - y)} \Rightarrow N_2(f(x) - f(y)) \leq k\, N_1(x - y)$$

On a donc bien montré que (4) $\Rightarrow$ (3).

— ((1) $\Rightarrow$ (4))

On suppose que f est continue en 0_{E_1}, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in E_1,\ N_1(x - 0_{E_1}) < \delta \Rightarrow N_2(f(x) - f(0_{E_1})) < \varepsilon$$

En particulier, pour $\varepsilon = 1$, on a (car $f(0_{E_1}) = 0_{E_2}$ par linéarité) :

$$\exists \delta > 0,\ \forall x \in E_1,\ N_1(x) < \delta \Rightarrow N_2(f(x)) < 1$$

Soit $x \in E_1 \setminus \{0_{E_1}\}$, donc $N_1(x) > 0$.

On pose $x' := \dfrac{\delta}{2N_1(x)} x \in E_1$, donc

$$N_1(x') = \frac{\delta}{2} < \delta, \quad \text{et } N_2(f(x')) < 1$$

Donc, par linéarité de f et par homogénéité absolue de N_1 et de N_2 :

$$N_2(f(x)) = N_2\left(f\left(\frac{2N_1(x)}{\delta}x'\right)\right) = \left|\frac{2N_1(x)}{\delta}\right| N_2(f(x')) < \frac{2N_1(x)}{\delta}$$

Par conséquent,

$$\left\{ \frac{N_2(f(x))}{N_1(x)} \;\middle|\; x \in E_1 \setminus \{0_{E_1}\} \right\} \subset \left[0, \frac{2}{\delta}\right[$$

C'est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$, donc elle admet une borne supérieure qui est finie.

On a donc montré que (1) $\Rightarrow$ (4).

Donc on a montré que les 4 assertions sont équivalentes. ■

Important :Ce théorème est très utile en pratique puisqu'il permet de justifier qu'une application linéaire est continue simplement en vérifiant que :

$$\sup_{x \in E_1 \setminus \{0_{E_1}\}} \frac{N_2(f(x))}{N_1(x)} \quad \text{existe et est finie.}$$

En plus, ce théorème affirme que pour les applications linéaires, si elles sont continues, alors elles sont **uniformément continues** et **lipschitziennes**.

Définition II.10

Soient (E_1, N_1) et (E_2, N_2) deux espaces vectoriels normés.

On note $\mathcal{L}_c(E_1, E_2)$ l'ensemble des applications linéaires $f : E_1 \to E_2$ qui sont continues.

Pour tout $f \in \mathcal{L}_c(E_1, E_2)$, on note :

$$|||f||| = \sup_{x \in E_1 \setminus \{0_{E_1}\}} \frac{N_2(f(x))}{N_1(x)}$$

Proposition II.5

$|||.|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E_1, E_2)$, appelée la norme triple sur $\mathcal{L}_c(E_1, E_2)$.

De plus, on a pour tout $f \in \mathcal{L}_c(E_1, E_2)$:

$$|||f||| = \sup_{x \in B_1(0_{E_1}, 1)} N_2(f(x)) = \sup_{x \in \overline{B}_1(0_{E_1}, 1)} N_2(f(x)) = \sup_{x \in \partial B_1(0_{E_1}, 1)} N_2(f(x))$$

Preuve : on montre d'abord que c'est une norme :

— (Séparation)

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E_1, E_2)$ telle que $|||f||| = 0$.

Alors $\forall x \in E_1 \setminus \{0_{E_1}\}$:

$$\frac{N_2(f(x))}{N_1(x)} \leq 0 \Rightarrow N_2(f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) = 0_{E_2} \quad \text{(par séparation de } N_2\text{)}.$$

De plus, $f(0_{E_1}) = 0_{E_2}$ car f est linéaire. Donc f est l'application linéaire constante égale à 0_{E_2}.

— (Homogénéité absolue)

Soient $f \in \mathcal{L}_c(E_1, E_2)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\begin{aligned} |||\lambda f||| &= \sup_{x \in E_1 \setminus \{0_{E_1}\}} \frac{N_2(\lambda f(x))}{N_1(x)} \\ &= \sup_{x \in E_1 \setminus \{0_{E_1}\}} \frac{|\lambda| N_2(f(x))}{N_1(x)} \quad \text{par homogénéité absolue de } N_2 \\ &= |\lambda| \sup_{x \in E_1 \setminus \{0_{E_1}\}} \frac{N_2(f(x))}{N_1(x)} = |\lambda|\, |||f||| \end{aligned}$$

— (Sous-additivité)

Soient $(f, g) \in \mathcal{L}_c(E_1, E_2)^2$.

On a, pour tout $x \in E_1 \setminus \{0_{E_1}\}$:

$$\begin{aligned} \frac{N_2((f+g)(x))}{N_1(x)} &= \frac{N_2(f(x) + g(x))}{N_1(x)} \\ &\leq \frac{N_2(f(x)) + N_2(g(x))}{N_1(x)} \quad \text{(par sous-additivité de } N_2\text{)} \\ &\leq |||f||| + |||g||| \end{aligned}$$

Donc :

$$|||f + g||| = \sup_{x \in E_1 \setminus \{0_{E_1}\}} \frac{N_2((f+g)(x))}{N_1(x)} \leq |||f||| + |||g|||$$

Conclusion : La norme triple $|||.|||$ est bien une norme sur $\mathcal{L}_c(E_1, E_2)$.

Maintenant on démontre la deuxième partie de la proposition.

$$\begin{aligned} |||f||| &= \sup_{x \in E_1 \setminus \{0_{E_1}\}} \frac{N_2(f(x))}{N_1(x)} \\ &= \sup_{x \in E_1 \setminus \{0_{E_1}\}} N_2\left(\frac{1}{N_1(x)} f(x)\right) \quad \text{(par homogénéité absolue de } N_2\text{)} \\ &= \sup_{x \in E_1 \setminus \{0_{E_1}\}} N_2\left(f\left(\frac{x}{N_1(x)}\right)\right) \quad \text{(car } f \text{ est linéaire)} \end{aligned}$$

Or :

$$N_1\left(\frac{x}{N_1(x)}\right) = \frac{N_1(x)}{N_1(x)} = 1 \quad \text{(par homogénéité absolue de } N_1\text{)}$$

Donc, en posant $y = \frac{x}{N_1(x)} \in \partial B_1(0_{E_1}, 1)$:

$$|||f||| = \sup_{y \in \partial B_1(0_{E_1},1)} N_2(f(y))$$

On a aussi :

$$|||f||| = \sup_{y \in \overline{B}_1(0_{E_1},1)} N_2(f(y)) \quad \text{et comme } B_1(0_{E_1}, 1) \subset \overline{B_1}(0_{E_1}, 1),$$

Donc :

$$\sup_{y \in B_1(0_{E_1},1)} N_2(f(y)) \leq |||f|||$$

Soit $x \in \partial B_1(0_{E_1}, 1)$ donc $N_1(x) = 1$.
Soit $\varepsilon > 0$, alors :

$$N_1\left(\frac{1}{1+\varepsilon}x\right) = \frac{1}{1+\varepsilon} < 1 \Rightarrow y = \frac{1}{1+\varepsilon}x \in B_1(0_{E_1}, 1)$$

Par linéarité de f :

$$f(x) = f\left((1+\varepsilon)y\right) = (1+\varepsilon)f(y)$$

Par homogénéité absolue de N_2 :

$$N_2(f(x)) = (1+\varepsilon)N_2(f(y)) \leq (1+\varepsilon) \sup_{y \in B_1(0_{E_1},1)} N_2(f(y))$$

Donc

$$|||f||| = \sup_{x \in B_1(0_{E_1},1)} N_2(f(x)) \leq (1+\varepsilon) \sup_{y \in B_1(0_{E_1},1)} N_2(f(y))$$

C'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$. Donc pour $\varepsilon \to 0$ on obtient que :

$$\sup_{y \in B_1(0_{E_1},1)} N_2(f(y)) \leq |||f||| \leq \sup_{y \in B_1(0_{E_1},1)} N_2(f(y))$$

Donc :

$$|||f||| = \sup_{x \in B_1(0_{E_1},1)} N_2(f(x))$$

$\blacksquare$

Exemple II.32

Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (2x + 3y,\ 4x + 5y) \end{cases}$$

Donc

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{dans la base canonique de } \mathbb{R}^2.$$

Pour exemple, pour la norme $|| \cdot ||_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \sup_{(x,y)\in\partial B_\infty((0,0),1)} \|f(x,y)\|_\infty &= \sup_{(x,y)\in[-1,1]^2} \{\max\{|2x+3y|,\ |4x+5y|\}\} \\ &\leq \max\{2+3,\ 4+5\} \leq 9 \end{aligned}$$

Donc $|||f|||$ existe et est finie. Donc f est continue.

Remarque II.11

On démontrera dans le prochain chapitre qu'en dimension finie, **toute application linéaire est continue**.

$\boxed{\textbf{ATTENTION}}$: Il existe des applications linéaires non continues en dimension infinie.

Exemple II.33

On considère $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme infinie at aussi deux applications linéaires :

$$\|P\|_\infty = \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \right\|_\infty = \max_{k\in[\![0,n]\!]} |a_k|.$$

— $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ (dérivation)

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \longmapsto \quad \varphi(P) = P' = \sum_{k=1}^{n} a_k k X^{k-1}$$

— $\Phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ (primitivation)

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \longmapsto \quad \Phi(P) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$$

— (Dérivation) On pose $P_n = X^n$, alors $P_n \in \partial B_\infty(0,1)$ car $\|P_n\|_\infty = \|X^n\|_\infty = 1$.
Mais $\|\varphi(P_n)\|_\infty = \|nX^{n-1}\|_\infty = n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

Donc :

$$|||\varphi||| = \sup_{P\in\partial B_\infty(0,1)} \|\varphi(P)\|_\infty \geq \sup_{n\geq 0} \|\varphi(P_n)\|_\infty = +\infty$$

Par conséquence la norme $|||\varphi|||$ n'est pas finie donc φ n'est pas continue. La dérivation des polynômes n'est pas une application linéaire continue.

— (Primitivation) Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \partial B_\infty(0,1)$.

Alors :

$$\|\Phi(P)\|_\infty = \max_{k\in[\![0,n]\!]} \left|\frac{a_k}{k+1}\right| \leq \max_{k\in[\![0,n]\!]} |a_k| = \|P\|_\infty = 1$$

Donc :

$$|||\Phi||| = \sup_{P\in\partial B_\infty(0,1)} \|\Phi(P)\|_\infty \leq 1$$

Par conséquent, $|||\Phi|||$ est finie, donc Φ est continue.
La primitivation des polynômes est donc une application linéaire continue, (et même uniformément continue et lipschitzienne).

4.4 Topologie et normes équivalentes

Théorème II.2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient N_1 et N_2 deux normes sur E.
Si N_1 et N_2 sont équivalentes alors toutes les notions de topologie sur (E, N_1) sont égales à celles sur (E, N_2).
Autrement dit :

— Si $O \subset E$ est ouvert dans (E, N_1) alors O est ouvert dans (E, N_2), de même pour les fermés.

— Si $A \subset E$, alors l'intérieur de A dans (E, N_1) est égal à l'intérieur de A dans (E, N_2), de même pour l'adhérence et la frontière, et de même pour les parties denses.

— Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers ℓ dans (E, N_1) alors $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers ℓ dans (E, N_2), de même pour les valeurs d'adhérence.

Preuve : on fait la démonstration pour les ouverts.

Soit $O \subset E$ un ouvert dans (E, N_1).

Donc $\forall a \in O$, $\exists r > 0$ tel que $B_1(a, r) \subset O$

Avec $B_1(a,r) = \{x \in E \mid N_1(x-a) < r\}$.

Or N_1 et N_2 sont équivalentes :

$$\exists (m,M) \in]0,+\infty[^2,\ \forall x \in E, \quad mN_2(x) \leq N_1(x) \leq MN_2(x)$$

En particulier,

$$\forall x \in O, \quad N_2(x-a) \leq \frac{N_1(x-a)}{m} < \frac{r}{m}$$

Donc si on pose

$$r' = \frac{r}{m} > 0,$$

on a :

$$\forall a \in O,\ \exists r' > 0, \quad B_2(a,r') \subset O$$

où

$$B_2(a,r') = \{x \in E \mid N_2(x-a) < r'\}$$

Donc O est ouvert dans (E, N_2). ■

Lien vers Wikipédia sur les normes équivalentes.

$\boxed{\textbf{Important}}$: On démontrera dans le prochain chapitre que **toutes les normes sont équivalentes en dimension finie**.

Troisième partie

Compacité et complétude

Soit (E, N) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

1 Compacité

1.1 Définition

Définition III.1

Soit $K \subset E$.

On dit que K est **séquentiellement compact** si toute suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ d'éléments de K admet une valeur d'adhérence dans K, c'est-à-dire qu'il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \geq n_0}$ qui converge dans K.

Proposition III.1

Soient $a < b$ deux réels. Alors l'intervalle fermé $[a, b]$ est compact dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Preuve :

On utilise la méthode de dichotomie. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $[a, b]$. On va construire par récurrence une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ qui converge dans $[a, b]$.

— Pour $n = 0$, on pose $a_0 = a < b = b_0$.

On sait que $[a_0, b_0]$ contient l'infinité des termes de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

Donc

$$[a_0, \frac{a+b}{2}] \quad \text{ou} \quad [\frac{a+b}{2}, b_0]$$

contient aussi une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

$\boxed{1^{\text{er}} cas}$: $[a_0, \frac{a+b}{2}]$ contient une infinité de termes de $(u_n)_{n \geq 0}$.

On pose $a_1 = a_0$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$ et $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\forall n \geq 0, \quad u_{\varphi_1(n)} \in [a_1, b_1].$$

$\boxed{2^{\text{ième}} cas}$: $[\frac{a+b}{2}, b_0]$ contient une infinité de termes de $(u_n)_{n \geq 0}$.

On pose $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b_0$ et $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\forall n \geq 0, \quad u_{\varphi_1(n)} \in [a_1, b_1].$$

— Pour $n = 1$, on raisonne de manière similaire.
On sait que $[a_1, b_1]$ contient l'infinité des termes de la sous-suite $(u_{\varphi_1(n)})_{n\geq 0}$.
Donc
$$[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}] \quad \text{ou} \quad [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$$
contient aussi une infinité de termes de la suite $(u_{\varphi_1(n)})_{n\geq 0}$.
Comme pour $n = 0$, on peut poser
$$a_2 \in \left\{a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right\}, \quad b_2 \in \left\{\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right\} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
strictement croissante telle que
$$\forall n \geq 0, \quad u_{\varphi_1(\varphi_2(n))} \in [a_2, b_2].$$
On obtient donc une sous-suite $\left(u_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}\right)_{n\geq 0}$ d'éléments de $[a_2, b_2]$.

— Pour $n = 2$, on raisonne de manière similaire pour obtenir une sous-suite
$$\left(u_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\varphi_3(n)}\right)_{n\geq 0}$$
d'éléments de $[a_3, b_3]$.

— Etc. On poursuit la construction par récurrence.

Par récurrence, on a donc construit des suites $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ et des fonctions $(\varphi_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N})_{n\geq 0}$ strictement croissantes telles que :

— (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante : *on reconnaît des suites adjacentes !*

— $\forall n \geq 0, \quad b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$

— $\forall n \geq 0, \quad a_n \leq u_{\varphi_0\circ\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_n(n)} \leq b_n$

On pose $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par
$$\varphi(n) = \varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$$
On remarque que φ est strictement croissante, car pour tout $n \geq 0$, on a :
$$\begin{aligned}
\varphi(n+1) &= \varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n \circ \varphi_{n+1}(n+1) \\
&> \varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n(n+1) && \text{car } \varphi_{n+1}(n+1) \geq n+1 \\
&> \varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n(n) && \text{car } \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n \text{ est croissante} \\
&= \varphi(n)
\end{aligned}$$
Donc $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\geq 0}$ est une sous-suite de $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$ telle que
$$\forall n \geq 0, \quad a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$$

Or, $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes, donc elles convergent vers la même limite $\ell \in [a_0, b_0] = [a, b]$.

D'après le théorème de la limite par encadrement (théorème des gendarmes), on en déduit que $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\geq 0}$ converge, et

$$\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell \in [a, b]$$

Autrement dit, $\ell \in [a, b]$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$.

On a bien montré que $[a, b]$ est compact.

■

$\boxed{\textbf{ATTENTION}}$: Un intervalle non fermé de $\mathbb{R}$ n'est pas compact, un intervalle non borné n'est pas compact. On considère deux contre-exemples :

— L'intervalle $]0, 1]$ n'est pas compact car la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ admet 0 pour seule valeur d'adhérence, mais $0 \notin]0, 1]$.

— L'intervalle $[0, +\infty[$ n'est pas compact car la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ avec $u_n = n$ n'a pas de valeur d'adhérence.

Exemple III.1

On considère une partie fermée et bornée du plan euclidien et les boules fermées.

— L'ensemble $[0, 1]^2$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$ pour n'importe quelle norme $|| \cdot ||_p$ avec $p \in [1, +\infty]$.

En effet, soit $\left((x_n, y_n)\right)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $[0, 1]^2$. Alors $\left(x_n\right)_{n\geq 0}$ est une suite dans $[0, 1]$, qui est compact. Il existe donc une fonction $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que quand n tend vers l'infini on a :

$$x_{\varphi_1(n)} \longrightarrow x \in [0, 1].$$

De même, la suite $\left(y_{\varphi_1(n)}\right)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de $[0, 1]$ (compact), donc il existe une fonction $\varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$y_{\varphi_1(\varphi_2(n))} \longrightarrow y \in [0, 1] \quad \text{quand } n \to +\infty$$

On en déduit que la suite extraite

$$\left(x_{\varphi_1(\varphi_2(n))}, y_{\varphi_1(\varphi_2(n))}\right)_{n\geq 0}$$

converge vers $(x, y) \in [0, 1]^2$. Donc $[0, 1]^2$ est bien une partie compacte.

— Plus généralement, pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $a_k < b_k$, alors
$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$
est une partie compacte de $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$, $n \in \mathbb{N}^*$

— On sait également que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la boule fermée
$$\overline{B}(0_{\mathbb{R}^n}, 1) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid ||x||_p \leq 1\}$$
est compacte pour toute norme $||\cdot||_p$, $p \in [1, +\infty]$.
Dans le cas de la droite réelle on a $\overline{B}(0_{\mathbb{R}^n}, 1) \subset [-1, 1]^n$, qui est compact.
Donc si $\left(x_k\right)_{k\geq 0}$ est une suite d'éléments de $\overline{B}(0_{\mathbb{R}^n}, 1)$, alors il existe une sous-suite $\left(x_{\varphi(k)}\right)_{k\geq 0}$ qui converge vers $x \in [-1, 1]^n$.
Donc
$$\|x\|_p = \lim_{k\to+\infty} \|x_{\varphi(k)}\|_p \leq 1$$
par continuité de la norme $||\cdot||_p$.
On en déduit que $x \in \overline{B}_p(0_{\mathbb{R}^n}, 1)$, donc que $\overline{B}_p(0_{\mathbb{R}^n}, 1)$ est compacte.
De même pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, car on peut assimiler $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$.
Donc
$$\overline{B}_p(0_{\mathbb{C}^n}, 1) \subset [-1, 1]^{2n}$$
qui est compact.

ATTENTION : Il existe des boules fermées qui ne sont pas compactes

Exemple III.2

Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme
$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$
Alors, la suite $(f_n : t \mapsto t^n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de $\overline{B}_\infty(0_E, 1)$.

Mais $(f_n)_{n\geq 0}$ n'admet pas de valeur d'adhérence.
Car si $f_n \to f$ alors
$$\forall t \in [0,1], \quad f(t) = \lim_{n\to+\infty} t^n = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

donc f n'est pas continue, ce qui est absurde.

Par conséquent, $\overline{B}_\infty(0_E, 1)$ n'est pas compacte.

Important : On démontrera que la boule unité fermée est compacte si et seulement si $\dim(E)$ est finie.

Propriété III.1

Soit $K \subset E$ une partie compacte. Si $A \subset K$ est fermée, alors A est compacte.

Preuve :

Soit $A \subset K$ une partie fermée. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de A.

Puisque $A \subset K$ et que K est compacte, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ qui converge vers $x \in K$.

Il suffit de montrer que $x \in A$.

Or $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ est une suite d'éléments de A qui est fermé, donc

$$x = \lim_{n \to +\infty} x_{\varphi(n)} \in A$$

par la **caractérisation séquentielle des fermés**.

Donc $x \in A$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \geq 0}$.

Donc A est compacte.

■

Rappel III.1 Définition d'une partie bornée

Soit $A \subset E$. On dit que A est **bornée** s'il existe $M > 0$ tel que $A \subset B(0_E, M)$.

Propriété III.2

Soit $K \subset E$ une partie compacte, alors K est fermée et bornée. De plus,

$$\sup_{x \in K} N(x) \quad \text{et} \quad \inf_{x \in K} N(x)$$

sont atteintes sur K.

Preuve :

— Montrons que K est fermée.

On utilise la caractérisation séquentielle des fermées. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de K qui converge dans E. On pose $x = \lim_{n \to +\infty} x_n \in E$.

Puisque K est compacte, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ qui converge dans K.
Or

$$\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = \lim_{n\to+\infty} x_n = x \quad \text{(unicité de la valeur d'adhérence)}$$

Donc $x \in K$. On en déduit que K est fermée.

— Montrons que K est bornée.
Par l'absurde, supposons que K n'est pas bornée. Donc

$$\forall M > 0, \quad \exists x \in K, \quad x \notin B(O_E, M)$$

En particulier, on peut construire une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de K telle que

$$\forall n \geq 1, \quad \|x_n\| \geq n$$

(en posant $M = 1$).
Puisque K est compacte, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ qui converge vers

$$x = \lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} \in K.$$

Par continuité de la norme, on en déduit que :

$$\|x\| = \left\|\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)}\right\| = \lim_{n\to+\infty} \|x_{\varphi(n)}\| \geq \lim_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty$$

Ce qui est absurde. Donc K est bornée.

— Montrons que $\sup_{x\in K} N(x)$ est atteinte. On pose

$$M = \sup_{x\in K} N(x)$$

M existe et est fini car $\{N(x) \mid x \in K\}$ est une partie non vide et majorée (car K est bornée) de $\mathbb{R}$.
Par définition de la borne supérieure, on sait que :

$$\forall n \geq 1, \quad \exists x_n \in K, \quad M - \frac{1}{n} \leq N(x_n) \leq M$$

On vient de construire une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de K qui est compacte.
Donc on sait qu'il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ qui converge dans K.
On pose

$$x = \lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} \in K.$$

Or on a, pour tout $n \geq 1$:

$$M - \frac{1}{\varphi(n)} \leq N(x_{\varphi(n)}) \leq M$$

Par continuité de la norme, on en déduit que :

$$N(x) = \lim_{n \to +\infty} N(x_{\varphi(n)}) = M.$$

Donc

$$M = \sup_{x \in K} N(x)$$

est atteinte.

— De même pour $\inf_{x \in K} N(x)$

■

ATTENTION : La réciproque est fausse. Il existe des boules fermées et bornées qui ne sont pas compactes.

Exemple III.3

On considère :

$$\overline{B}_\infty(0_E, 1) \quad \text{pour } E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$$

n'est pas compacte pour la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|.$$

Important : On démontrera qu'en dimension finie, les parties fermées bornées sont compactes.

Définition III.2

Soit $A \subset E$. On dit que A vérifie **la propriété de Bolzano–Weierstrass** si de tout **recouvrement** de A par des ouverts, on peut en extraire un recouvrement fini.
C'est-à-dire : s'il existe une famille d'ouverts $(O_j)_{j \in J}$ telle que

$$A \subset \bigcup_{j \in J} O_j,$$

alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $(j_1, j_2, \ldots, j_k) \in J^k$ tels que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} O_{j_i}.$$

Théorème III.1 Bolzano-Weierstrass

Soit $K \subset E$. Alors K est (séquentiellement) compact si et seulement si K vérifie la propriété de Bolzano–Weierstrass.

Preuve : par double implication.

On traite d'abord l'implication réciproque :

On suppose que K vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass.

Soit $(x_n)_{n\geq n_0}$ une suite d'éléments de K.

Par l'absurde : on suppose que $(x_n)_{n\geq 0}$ n'admet pas de valeur d'adhérence dans K, autrement dit :

$$\bigcap_{n_1\geq n_0} \overline{\{x_n \mid n \geq n_1\}} \subset E \setminus K$$

où l'intersection ci-dessus représente l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$.

Donc,

$$K \subset E \setminus \left(\bigcap_{n_1\geq n_0} \overline{\{x_n \mid n \geq n_1\}} \right) = \bigcup_{n_1\geq n_0} \left(E \setminus \overline{\{x_n \mid n \geq n_1\}} \right)$$

Chaque ensemble $E \setminus \overline{\{x_n \mid n \geq n_1\}}$ est *ouvert* car c'est le complémentaire d'un fermé. L'égalité se démontre avec les lois de De Morgan, voir théorie des ensembles.

D'après la propriété de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k} \left(E \setminus \overline{\{x_n \mid n \geq n_i\}} \right)$$

Donc, on a :

$$K \subset E \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \overline{\{x_n \mid n \geq n_i\}} \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{k} \overline{\{x_n \mid n \geq n_i\}} \subset E \setminus K$$

Or,

$$\bigcap_{i=1}^{k} \overline{\{x_n \mid n \geq n_i\}} = \overline{\{x_n \mid n \geq n_k\}} \quad \text{car } n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k$$

En particulier, pour tout $n \geq n_k$, on a : $x_n \in \overline{\{x_n \mid n \geq n_k\}} \subset E \setminus K$

Ce qui est absurde, car $(x_n)_{n\geq n_0}$ est une suite d'éléments de K.

Donc $(x_n)_{n\geq n_0}$ admet une valeur d'adhérence dans K. On en déduit que K est (séquentiellement) compact.

Maintenant on passe à l'implication directe :

On suppose que K est (séquentiellement) compact.

Soit $(O_j)_{j\in J}$ une famille d'ouverts de E telle que :

$$K \subset \bigcup_{j\in J} O_j$$

On fera deux étapes préliminaires, ceux qui nous permettront de conclure.

Première étape :

Montrons qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in K$, la boule $B(x,r)$ soit incluse dans un des ouverts O_j pour un certain $j \in J$.

Par l'absurde, supposons le contraire :

$$\forall r > 0,\ \exists x \in K,\ \forall j \in J, \quad B(x,r) \cap (E \setminus O_j) \neq \varnothing$$

En particulier, pour $r = \dfrac{1}{n}$ où $n \geq 1$, on sait qu'il existe $x_n \in K$ tel que :

$$\forall j \in J, \quad B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset O_j$$

On a donc une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de K qui admet une valeur d'adhérence dans K par hypothèse. Par conséquent, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ avec l'extractrice φ qui converge vers $x \in K \subset \bigcup_{j\in J} O_j$.

Donc $\exists j_x \in J$, $x \in O_{j_x}$. Par hypothèse, O_{j_x} est ouvert, donc $\exists \varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon) \subset O_{j_x}$.

Or

$$\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = x \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\varphi(n)} = 0,$$

donc pour n suffisamment grand, on a :

$$B\left(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}\right) \subset B(x,\varepsilon) \subset O_{j_x}$$

car si $y \in B\left(x_{\varphi(n)}, \dfrac{1}{\varphi(n)}\right)$ alors

$$N(y-x) \leq N(y - x_{\varphi(n)}) + N(x_{\varphi(n)} - x) < \frac{1}{\varphi(n)} + \delta_n \to 0$$

Ceci est absurde car $B(x_{\varphi(n)}, \dfrac{1}{\varphi(n)})$ est incluse dans aucun des O_j.

On en déduit bien que :

$$\exists r > 0,\ \forall x \in K,\ \exists j \in J,\ B(x,r) \subset O_j.$$

$\boxed{\textbf{Deuxième étape :}}$

Montrons qu'on peut extraire un sous-recouvrement fini du recouvrement

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, r).$$

Par l'absurde, on suppose qu'on ne peut pas extraire un sous-recouvrement fini du recouvrement

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, r).$$

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$, alors K n'est pas inclus dans $\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)$.

Donc il existe $x_{n+1} \in K$ tel que $x_{n+1} \notin \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)$.

On a donc construit par récurrence une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de K telle que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^*,\ p \neq q \Rightarrow N(x_p - x_q) > r.$$

On sait qu'on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ qui converge dans K.

En particulier quand n tend vers l'infini :

$$\forall n \geq 1, \quad r < N(x_{\varphi(n)+1} - x_{\varphi(n)}) \longrightarrow 0$$

ce qui est absurde.

On en déduit qu'on peut extraire une sous-recouvrement fini du recouvrement

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, r),$$

c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in K^k$ tels que :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, r).$$

Conclusion : D'après les résultats des 1ère et 2ème étapes, on a :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, r) \subset \bigcup_{i=1}^{k} O_{j_i}.$$

On a bien trouvé un sous-recouvrement fini du recouvrement $K \subset \bigcup_{j \in J} O_j$.

$\blacksquare$

Propriété III.3

- Toute intersection de parties compactes est compacte.
- Toute union finie de parties compactes est compacte.

Remarque : on reconnaît la même propriété que pour les fermés.

Preuve :

- Soit $(K_j)_{j\in J}$ une famille de compacts.
  En particulier $\forall j \in J,\ K_j$ est fermé (et borné).
  Donc $\bigcap\limits_{j\in J} K_j$ est fermé.
  De plus, $\forall j_0 \in J$, on a $\bigcap\limits_{j\in J} K_j \subset K_{j_0}$, qui est compact.
  Donc $\bigcap\limits_{j\in J} K_j$ est compact.
- Soit $(K_i)_{i\in [\![1,n]\!]}$ une famille finie de compacts.
  On suppose que
  $$\bigcup_{i=1}^{n} K_i \subset \bigcup_{j\in J} O_j \quad \text{où } \forall j \in J,\ O_j \text{ est ouvert.}$$
  Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $K_i \subset \bigcup\limits_{j\in J} O_j$ donc on peut extraire un sous-recouvrement fini, car K_i vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass.
  L'union de ces sous-recouvrements finis est un sous-recouvrement de $\bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i$ qui est encore une union finie (car $i \in [\![1,n]\!]$). Donc $\bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i$ vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass, donc $\bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i$ est compact.

$\blacksquare$

Théorème III.2 Segments emboîtés

Soit $(K_n)_{n\geq n_0}$ une suite décroissante de compacts non vides, c'est-à-dire : $\forall n \geq n_0$, $K_{n+1} \subset K_n$ *(On dit aussi que les compacts sont emboîtés)*.
Alors $\bigcap_{n\geq 0} K_n$ est un **compact non vide**.

Preuve :

On sait déjà que $\bigcap_{n \geq n_0} K_n$ est compact. Il suffit de montrer qu'elle est non vide.

Pour tout $n \geq n_0$, on sait que $K_n \neq \varnothing$, donc il existe $x_n \in K_n$. On a donc construit une suite $(x_n)_{n \geq n_0}$ d'éléments de K_{n_0}, qui est compact ($\forall n \geq n_0$, $K_n \subset K_{n_0}$).

Donc on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ qui converge dans K_{n_0}.

On note : $x = \lim_{n \to \infty} x_{\varphi(n)}$

On remarque que

$$x \in \bigcap_{n \geq n_0} \overline{K_{\varphi(n)}} = \bigcap_{n \geq n_0} K_{\varphi(n)}$$

car l'adhérence d'un fermé est lui-même.

Or, $(K_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante donc $x \in \bigcap_{n \geq n_0} K_n$.

En particulier : $\bigcap_{n \geq n_0} K_n \neq \varnothing$

■

Remarque III.1

On retrouve un résultat similaire au **théorème des suites adjacentes** :
Si $([a_n, b_n])_{n \geq n_0}$ est une suite décroissante de segments non vides (segments emboîtés), alors $(a_n)_{n \geq n_0}$ est croissante, $(b_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante, donc

$$\bigcap_{n \geq n_0} [a_n, b_n] \text{ est un segment non vide.}$$

1.2 Applications continues sur un compact

Propriété III.4

Soit $f : A \to E_2$ une fonction définie sur $A \subset E_1$ où (E_1, N_1) et (E_2, N_2) sont deux espaces vectoriels normés.
Si f est continue sur A et $K \subset A$ est compact, alors

$$f(K) = \{f(x) \mid x \in K\} \text{ est compact.}$$

En particulier, $f|_K$ est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire que

$$\sup_{x \in K} N_2(f(x)) \quad \text{et} \quad \inf_{x \in K} N_2(f(x)) \text{ sont atteints.}$$

Preuve :

Soit $(y_n)_{n\geq n_0}$ une suite d'éléments de $f(K)$. Donc $\forall n \geq n_0$, il existe $x_n \in K$ tel que $y_n = f(x_n)$.

Puisque $(x_n)_{n\geq n_0}$ est une suite d'éléments de K, qui est compact, on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ qui converge vers $x \in K$.

Par continuité de f, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} = \lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)}\right) = f(x)$$

Donc (y_n) admet une valeur d'adhérence dans $f(K)$, ce qui montre que $f(K)$ est séquentiellement compact, donc compact.

En particulier :

$$\sup_{y\in f(K)} N_2(y) = \sup_{x\in K} N_2(f(x)), \qquad \inf_{y\in f(K)} N_2(y) = \inf_{x\in K} N_2(f(x))$$

et ces deux extrêmes sont atteints.

On a bien montré que $f|_K$ est bornée et atteint ses bornes. ■

Important : On reconnaît une généralisation du théorème des bornes atteintes pour les fonctions réelles continues sur un segment, aux fonctions entre EVN qui sont continues sur un compact.

Théorème III.3 de Heine

Soient (E_1, N_1) et (E_2, N_2) deux espaces vectoriels normés.

Soit $f : K \to E_2$ une fonction définie et **continue sur une partie compacte** $K \subset E_1$.

Alors f est **uniformément continue sur** K.

Important : En particulier, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle continue sur le segment $[a, b]$, alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Preuve :

On sait que f est continue sur K, donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall a \in K, \exists \delta_a > 0, \forall x \in K,\ N_1(x - a) < \delta_a \Rightarrow N_2(f(x) - f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

On veut montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in K^2,\ N_1(x - y) < \delta \Rightarrow N_2(f(x) - f(y)) < \varepsilon$$

On remarque que $K \subset \bigcup_{a \in K} B\left(a, \frac{\delta_a}{2}\right)$ est un recouvrement de K par des ouverts de E_1.

D'après la propriété de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire un sous-recouvrement fini : il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in K^n$ tels que :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(a_i, \frac{\delta_{a_i}}{2}\right)$$

On pose :

$$\delta = \min_{i \in \{1, \ldots, n\}} \frac{\delta_{a_i}}{2}$$

Soient $(x, y) \in K^2$ tels que $N_1(x - y) < \delta$.

Puisque $x \in K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(a_i, \frac{\delta_{a_i}}{2}\right)$, on sait qu'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que :

$$x \in B\left(a_i, \frac{\delta_{a_i}}{2}\right)$$

Puisque $N_1(x - y) < \delta \leq \frac{\delta_{a_i}}{2}$, on a par inégalité triangulaire :

$$N_1(y - a_i) \leq N_1(y - x) + N_1(x - a_i) < \frac{\delta_{a_i}}{2} + \frac{\delta_{a_i}}{2} = \delta_{a_i}$$

Par conséquent :

$$N_1(x - a_i) < \frac{\delta_{a_i}}{2} < \delta_{a_i} \quad \text{et} \quad N_1(y - a_i) < \delta_{a_i}$$

Par continuité de f, on en déduit que :

$$N_2(f(x) - f(y)) \leq N_2(f(x) - f(a_i)) + N_2(f(y) - f(a_i)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

On a bien démontré le théorème de Heine.

■

FIGURE 7 – Sur le clavier français z est au voisinage de e... théorème de Heinz ?

1.3 Cas de la dimension finie

Lemme III.1

Soit E un espace vectoriel. On suppose que E est de dimension finie.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E où $n = \dim(E) \in \mathbb{N}$.

On définit l'application :

$$\|\cdot\|_\infty : \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} |\lambda_i| \end{cases}$$

Avec $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$, les λ sont ses coordonnées dans la base définie.

Alors :

- $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E,
- Pour tout $a \in E$ et $r > 0$, $\overline{B}_\infty(a, r)$ est compact.
- Soit $K \subset E$, alors

$$K \text{ compact } \iff K \text{ est fermé et borné} \quad (\text{pour } \|\cdot\|_\infty)$$

Preuve :

$\boxed{\textbf{Montrons que l'application est une norme :}}$

- (séparation)
  Soit $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in E$ tel que $\|x\|_\infty = 0$.
  Alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|\lambda_i| \leq \|x\|_\infty = 0$, donc $\lambda_i = 0$.
  Donc $x = \sum_{i=1}^n 0 \cdot e_i = 0_E$.
- (absolue homogénéité)
  Soient $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in E$ et $\mu \in \mathbb{K}$.
  Alors
  $$\|\mu x\|_\infty = \left\|\sum_{i=1}^n \mu\lambda_i e_i\right\|_\infty = \max_{\forall i\in[\![1,n]\!]} |\mu\lambda_i| = |\mu| \max_{\forall i\in[\![1,n]\!]} |\lambda_i| = |\mu|\|x\|_\infty.$$
- (sous-additivité)
  Soient $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in E$ et $y = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i \in E$.
  Alors on a :
  $$\|x + y\|_\infty = \left\|\sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) e_i\right\|_\infty = \max_{i\in\in[\![1,n]\!]} |\lambda_i + \mu_i| \leq \max_{i\in\in[\![1,n]\!]} (|\lambda_i| + |\mu_i|).$$
  Or $\forall i \in [\![1, n]\!]$, on a $|\lambda_i| + |\mu_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

donc

$$\|x+y\|_\infty \leq \max_{i\in[\![1,n]\!]}(|\lambda_i|+|\mu_i|) \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Conclusion : La fonction $\|\cdot\|_\infty$ est bien une norme sur E.

Et puis la compacité de la boule fermée associée :

Soient $a \in E$ et $r > 0$.

Soit $(x_k = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,k} e_i)_{k\geq 0}$ une suite d'éléments de $\overline{B_\infty(a,r)}$.

On note $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. Alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$\forall k \geq 0, \quad |\lambda_{i,k} - \alpha_i| \leq \|x_k - a\|_\infty \leq r.$$

Donc tous les éléments de la suite $(\lambda_{i,k})_{k\geq 0}$ appartiennent à la boule dans $(\mathbb{K}, |.|)$

En particulier,

— Pour $i = 1$

Finalement l'équivalence entre compact et fermé borné :

■

Théorème III.4 Équivalence des normes en dimension finie

Preuve :

■

2 Complétude