Notes du Cours : MATH2308P

Cours assuré par Sébastien GODILLON

Fiche LaTeX rédigé par Corentin 邱天意

Semestre 2024-2025-2

Table des matières

Première partie

Espaces vectoriels normés

On commence notre travail avec les espaces vectoriels normés.

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et on note 0_E le vecteur nul de E.

1 Cours 18 février : Normes et distances

Définition 1.1

Une **norme** sur E est une application de E dans $\mathbb{R}$. Elle a pour notation N, et elle vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$ (séparation)
- $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité absolue)
- $\forall (x, y) \in E^2, \quad N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ (sous-additivité)

Dans le deuxième point, $|\lambda|$ peut représenter la valeur absolue(en $\mathbb{R}$) ou le module(en $\mathbb{C}$), et ça dépend de l'ensemble dans lequel on se place.

Définition 1.2

Si N est une norme sur E, alors on dit que (E, N) est un **espace vectoriel normé**.

Proposition 1.1

Soit N une norme sur E, alors on a :

- $N(0_E) = 0$ (réciproque de la séparation)
- $\forall x \in E, \quad N(x) \geq 0$ (positivité)
- $\forall (x, y) \in E^2, \quad |N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$ ("continuité")

Petit remarque 1 : la première nous donne l'équivalence dans la propriété de séparation : $\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0_E$

Petit remarque 2 : dans la troisième, $|N(x) - N(y)|$ désigne la valeur absolue puisque la norme est une application dans $\mathbb{R}$.

Preuve : Soient $(x,y) \in E^2$.

— $N(0_E) = N(0.x) = |0|N(x) = 0$, donc on a : $\underline{N(0_E) = 0}$.
  Remarque : ne mélangez pas 0_E et 0.

— D'après la propriété qu'on vient de démontrer, on a :

$$0 = N(0_E) = N(x - x) = N(x + (-x))$$

  De plus, par sous-additivité, on a :

$$N(x + (-x)) \leq N(x) + N(-x) = N(x) + |-1|N(x) = 2N(x)$$

  On obtient $\underline{N(x) \geq 0}$ en mettent les deux relations ensemble.

— Rappel : $|x| \geq k \iff -k \leq x \leq k$.
  Donc il faut démontrer les inégalités à gauche et à droite.
  - — $N(x) = N(x - y + y) \leq N(x - y) + N(y)$ (par sous-additivité), et on trouve la relation $N(x) - N(y) \leq N(x - y)$.
  - — De même façon on trouve l'autre, en utilisant $N(y)$ au début : $-N(x - y) \leq N(x) - N(y)$.

  Ces deux inégalités nous donnent le résultat : $\forall (x,y) \in E^2, \quad |N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$.

Remarque 1.1

Dans la troisième on reconnaît une propriété de continuité. Si x est proche de y ("tend vers"), alors $x - y$ est proche du vecteur nul. Donc $N(x,y)$ devient proche de 0, $|N(x) - N(y)|$ aussi(par séparation). Donc $N(x)$ est proche de $N(y)$.

Exemple 1.1

La valeur absolue de $\mathbb{R}$

On dit que l'application $N : x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{R}$, parce qu'elle vérifie les conditions :

- — $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq 0 \iff x = 0$.
- — $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R}^2, |\lambda x| = |\lambda||x|$.
- — $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |x + y| \leq |x| + |y|$(l'inégalité triangulaire).

Le module de $\mathbb{C}$

De même, $N : x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{C}$.

On peut remarquer que $(\mathbb{K}, |.|)$ est un espace vectoriel normé.

Remarque 1.2

Les normes sont les objets qui généralisent la valeur absolue et le module pour les espaces vectoriels plus grands que $\mathbb{K}$.

Rappel 1.1

Pour qu'on puisse commencer à étudier les distances, on rappelle que :

— La valeur absolue du réel a représent la distance entre 0 et a sur la droite réelle.

— Même chose pour le module pour les complexes, mais cette fois on trouve la distance sur le plan complexe.

— Plus généralement $|a-b|$ représent la distance entre a et b.

Définition 1.3

Soit (E, N) un espace vectoriel normé, alors l'application :

$$d : \begin{cases} E^2 \to [0, +\infty[\\ (a,b) \mapsto d(a,b) = N(a-b) \end{cases}$$

est une **distance** sur E. De plus, elle vérifie 3 propriétés :

— $\forall (a,b) \in E^2, d(a,b) = d(b,a)$ (symétrie)

— $\forall (a,b) \in E^2, d(a,b) = 0 \iff a = b$ (séparation)

— $\forall (a,b,c) \in E^3, d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$ (inégalité triangulaire)

Remarque : la deuxième propriété se démontre avec la séparation des normes, et la troisième avec la homogénéité absolue.

Définition 1.4

On dit que (E, N, d) est un **espace métrique**.

Remarque de Corentin

Si vous regardez les autres livres de topologie, vous trouverez que les espaces métriques sont définis avec un ensemble(pas forcément un espace vectoriel) et une distance qui vérifie les trois propriétés. Donc deux trucs.
Ici on utilise un triplet car on a commencé avec un espace vectoriel, définit une norme et puis la distance. L'espace défini de cette manière est bien un espace métrique car il vérifie toutes les conditions, mais il est de plus un espace vectoriel.
Donc notez bien que ce n'est pas une vraie "définition", mais ça suffit si on travaille dans les espaces vectoriels normés.

Propriété 1.1

La translation et l'homothétie, on les a vu au MATH1301P, dans le chapitre de la géométrie euclidienne. La norme vérifie aussi ces deux propriétés :

— d est **invariante par translation**, c'est-à-dire : $\forall(t,x,y) \in E^3, d(x+t,y+t) = d(x,y)$.

— d est **absoluement homogène par homothétie**, c'est-à-dire : $\forall(\lambda,x,y) \in \mathbb{K} \times E^2, d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$.

Remarque 1.3

On peut aussi faire de la topologie dans les espaces métriques, la théorie est plus générale(car on a pas besoin de la structure d'espace vectoriel).

2 Cours 25 février : HAHAHA