Notes du Cours : MATH2308P

Cours assuré par Sébastien GODILLON

Fiche LaTeX rédigé par Corentin 邱天意

Semestre 2024-2025-2

Table des matières

Première partie

Espaces vectoriels normés

On commence notre travail avec les espaces vectoriels normés.

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et on note 0_E le vecteur nul de E.

1 Cours 18 février : Normes et distances

Définition 1.1

Une **norme** sur E est une application de E dans $\mathbb{R}$. Elle a pour notation N, et elle vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$ (séparation)
- $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité absolue)
- $\forall (x, y) \in E^2, \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (sous-additivité)

Dans le deuxième point, $|\lambda|$ peut représenter la valeur absolue(en $\mathbb{R}$) ou le module(en $\mathbb{C}$), et ça dépend de l'ensemble dans lequel on se place.

Définition 1.2

Si N est une norme sur E, alors on dit que (E, N) est un **espace vectoriel normé**.

Proposition 1.1

Soit N une norme sur E, alors on a :

- $N(0_E) = 0$ (réciproque de la séparation)
- $\forall x \in E, \quad N(x) \geq 0$ (positivité)
- $\forall (x, y) \in E^2, \quad |N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$ ("continuité")

Petit remarque 1 : la première nous donne l'équivalence dans la propriété de séparation : $\forall x \in E, N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E$

Petit remarque 2 : dans la troisième, $|N(x) - N(y)|$ désigne la valeur absolue puisque la norme est une application dans $\mathbb{R}$.

Preuve : Soient $(x, y) \in E^2$.

— $N(0_E) = N(0.x) = |0|N(x) = 0$, donc on a : $\underline{N(0_E) = 0}$.
Remarque : ne mélangez pas 0_E et 0.

— D'après la propriété qu'on vient de démontrer, on a :

$$0 = N(0_E) = N(x - x) = N(x + (-x))$$

De plus, par sous-additivité, on a :

$$N(x + (-x)) \leq N(x) + N(-x) = N(x) + |-1|N(x) = 2N(x)$$

On obtient $\underline{N(x) \geq 0}$ en mettent les deux relations ensemble.

— Rappel : $|x| \geq k \Longleftrightarrow -k \leq x \leq k$.
Donc il faut démontrer les inégalités à gauche et à droite.