

Notes du Cours : MATH2308P

Cours assuré par Sébastien GODILLON

Fiche L^AT_EX rédigé par Corentin 邱天意

Semestre 2024-2025-2



Table des matières

I	Espaces vectoriels normés	3
1	Cours 18 février : Normes et distances	3

Première partie

Espaces vectoriels normés

On commence notre travail avec les espaces vectoriels normés.

Dans tout ce chapitre, E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et on note 0_E le vecteur nul de E .

1 Cours 18 février : Normes et distances

Définition 1.1

Une **norme** sur E est une application de E dans \mathbb{R} . Elle a pour notation N , et elle vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$ (séparation)
- $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$ (homogénéité absolue)
- $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (sous-additivité)

Dans le deuxième point, $|\lambda|$ peut représenter la valeur absolue(en \mathbb{R}) ou le module(en \mathbb{C}), et ça dépend de l'ensemble dans lequel on se place.

Définition 1.2

Si N est une norme sur E , alors on dit que (E, N) est un **espace vectoriel normé**.

Proposition 1.1

Soit N une norme sur E , alors on a :

- $N(0_E) = 0$ (réciproque de la séparation)
- $\forall x \in E, N(x) \geq 0$ (positivité)
- $\forall (x, y) \in E^2, |N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$ ("continuité")

Petit remarque 1 : la première nous donne l'équivalence dans la propriété de séparation :

$$\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0_E$$

Petit remarque 2 : dans la troisième, $|N(x) - N(y)|$ désigne la valeur absolue puisque la norme est une application dans \mathbb{R} .

Preuve : Soient $(x, y) \in E^2$.

— $N(0_E) = N(0.x) = |0|N(x) = 0$, donc on a : $N(0_E) = 0$.

Remarque : ne mélangez pas 0_E et 0 .

— D'après la propriété qu'on vient de démontrer, on a :

$$0 = N(0_E) = N(x - x) = N(x + (-x))$$

De plus, par sous-additivité, on a :

$$N(x + (-x)) \leq N(x) + N(-x) = N(x) + |-1|N(x) = 2N(x)$$

On obtient $N(x) \geq 0$ en mettant les deux relations ensemble.

— Rappel : $|x| \geq k \iff -k \leq x \leq k$.

Donc il faut démontrer les inégalités à gauche et à droite.

— $N(x) = N(x - y + y) \leq N(x - y) + N(y)$ (par sous-additivité), et on trouve la relation $N(x) - N(y) \leq N(x - y)$.

— De même façon on trouve l'autre, en utilisant $N(y)$ au début : $-N(x - y) \leq N(x) - N(y)$