

# Sommaire du Cours : MATH2310P

Cours assuré par Sébastien GODILLON

Rédigé par Corentin 邱天意

Semestre 2024-2025-2



## Table des matières

<b>I</b>	<b>Équations différentielles ordinaires</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Cours 21 févr : Généralités</b>	<b>3</b>
<b>II</b>	<b>Courbes et Surfaces</b>	<b>6</b>

## Première partie

# Équations différentielles ordinaires

## 1 Cours 21 févr : Généralités

### Définition 1.1

Une **Équation différentielle linéaire(EDO)** est une équation de la forme :

$$\forall t \in I, F(t, X(t), X'(t) \dots X^{(k)}(t)) = 0$$

Plus spécifiquement sur les notations :

- $X$  est une fonction inconnue, d'une seule variable réelle, et à valeurs réelles ou vectorielles ( $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$ ). Elle est supposée  $k$ -fois dérivable sur  $I$ .
- $t$  est la variable de la fonction  $X$ .
- $I \subset \mathbb{R}$ , c'est l'intervalle de définition de l'équation différentielle.
- $F$  est une fonction de plusieurs variables, elle est fixée.
- $k \in \mathbb{N}^*$ , on l'appelle l'ordre de l'EDO.

### Exemple 1.1

#### Chercher les primitives

Soit  $f$  une fonction réelle qui est continue sur l'intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ .

D'après le théorème fondamental de l'analyse (TFA), on sait que  $f$  admet des primitives sur  $I$ .

Alors, trouver des primitives de  $f$  revient à résoudre l'EDO :

$$\forall t \in I, X'(t) = f(t)$$

ici on a  $F(t, X(t), X'(t)) = X'(t) - f(t)$ , une EDO d'ordre 1.

## Exemple 1.2

**L'oscillateur harmonique**

Le mouvement d'un oscillateur harmonique est modélisé par l'EDO :

$$\forall t \in I, X''(t) + \frac{k}{m}X(t) = 0$$

Elle est d'ordre 2. En considérant le problème physique on trouve que :  $I = \mathbb{R}_+$ , et que  $X(0)$  est une condition initiale à déterminer.  $k$  et  $m$  désignent respectivement le raideur du ressort et la masse.

La forme générale s'écrit :  $F(t, X(t), X'(t), X''(t)) = X''(t) + \frac{k}{m}X(t)$ .

## Exemple 1.3

**Le pendule simple**

Il est modélisé par l'équation :

$$\theta''(t) + \frac{g}{l} \sin \theta(t) = 0$$

Où  $l$  est la longueur de la corde,  $g$  le module de l'accélération gravitationnelle, et  $\theta$  l'angle aigu entre la corde et la verticale. Attention, elle n'est pas linéaire car la fonction  $\sin$  ne l'est pas.

## Exemple 1.4

**Dynamique d'une population : Lotka-Volterra**

On se place dans le monde où il n'y a que les proies et les prédateurs.

Notons :  $X(t)$  la population des proies et  $Y(t)$  celle des prédateurs à l'instant  $t$ .

On a :

$$\begin{cases} X'(t) = X(t)(\alpha - \beta Y(t)) \\ Y'(t) = Y(t)(\gamma X(t) - \eta) \end{cases}$$

Il y a deux équations donc posons la fonction vectorielle  $Z(t) = (X(t), Y(t))$ . La forme générale de notre EDO s'écrit :  $F(t, X(t), X'(t)) = Z(t)$ . Elle est d'ordre 1.

**Rappel 1.1****Équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1**

Une équation de la forme :

$$(E_1) : X'(t) + a(t)X(t) = 0$$

Où  $a$  est une fonction fixée et continue.

**Théorème 1.1**

Les solutions de  $(E_1)$  sont toutes de la forme :  $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ .  $\lambda$  est une constante quelconque, et  $A$  est une primitive de  $a$ .

On peut prendre n'importe quelle primitive car la différence entre deux primitives est une constante.

**Preuve :**

Posons deux ensembles :

## Deuxième partie

# Courbes et Surfaces