Sommaire du Cours : MATH2310P

Cours assuré par Sébastien GODILLON

Rédigé par Corentin 邱天意

Semestre 2024-2025-2

Table des matières

Première partie

Équations différentielles ordinaires

1 Cours 21 févr : Généralités

Définition 1.1

Une **Équation différentielle linéaire(EDO)** est une équation de la forme :

$$\forall t \in I, F(t, X(t), X'(t)...X^{(k)}(t)) = 0$$

Plus spécifiquement sur les notations :

- X est une fonction inconnue, d'une seule variable réelle, et à valeurs réelles ou vectorielles($X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$). Elle est supposée k-fois dérivable sur $I/$.
- t est la variable da la fonction X.
- $I \subset \mathbb{R}$, c'est l'intervalle de définition de l'équation différentielle.
- F est une fonction de plusieurs variables, elle est fixée.
- $k \in \mathbb{N}^*$, on l'appelle l'ordre de l'EDO.

Exemple 1.1

Chercher les primitives

Soit f une fonction réelle qui est continue sur l'intervalle $I \in \mathbb{R}$.

D'après the théorème fondamental de l'analyse(TFA), on sait que f admet des primitives sur I.

Alors, trouver des primitives de f revient à résoudre l'EDO :

$$\forall t \in I, X'(t) = f(t)$$

ici on a $F(t, X(t), X'(t)) = X'(t) - f(t)$, une EDO d'ordre 1.

Exemple 1.2

L'oscillateur harmonique

Le mouvement d'un oscillateur harmonique est modélisé par l'EDO :

$$\forall t \in I, X''(t) + \frac{k}{m}X(t) = 0$$

Elle est d'ordre 2. En considérant le problème physique on trouve que : $I = \mathbb{R}_+$, et que $X(0)$ est une condition initiale à déterminer. k et m désignent respectivement le raideur du ressort et la masse.

La forme générale s'écrit : $F(t, X(t), X'(t), X''(t)) = X''(t) + \frac{k}{m}X(t)$.

Exemple 1.3

Le pendule simple

Il est modélisé par l'équation :

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\sin\theta(t) = 0$$

Où l est la longeur de la corde, g le module de l'accélération gravitationelle, et θ l'angle aigu entre la corde et la verticale. Attention, elle n'est pas linéaire car la fonction sin ne l'est pas.

Exemple 1.4

Dynamique d'une population : Lotka-Volterra

On se place dans le monde où il n'y a que les proies et les prédateurs.

Notons : $X(t)$ la population des proies et $Y(t)$ celle des prédateurs à l'instant t.

On a :

$$\begin{cases} X'(t) = X(t)(\alpha - \beta Y(t)) \\ Y'(t) = Y(t)(\gamma X(t) - \eta) \end{cases}$$

Il y a deux équations donc posons la fonction vectorielle $Z(t) = (X(t), Y(t))$. La forme générale de notre EDO s'écrit : $F(t, X(t), X'(t)) = Z(t)$. Elle est d'ordre 1.

Rappel 1.1

Équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1

Une équation de la forme :

$$(E_1) : X'(t) + a(t)X(t) = 0$$

Où a est une fonction fixée et continue.

Théorème 1.1

Les solutions de (E_1) sont toutes de la forme : $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$. λ est une constante quelconque, et A est une primitive de a.

On peut prendre n'importe quelle primitive car la différence entre deux primitives est une constante.

Preuve :

Posons deux ensembles : $S_1 = \{X | X'(t) + a(t)X'(t) = 0\}$ et $S_2 = \{X : t \mapsto \lambda e^{-A(t)} | \lambda \in \mathbb{R}\}$, où X est une fonction. Montrons que les deux ensembles sont égaux par double inclusion.

— $(S_1 \supset S_2)$

Soit λ un réel, on pose la fonction $X : t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$, donc elle est un élément de S_2. X est composée des fonctions dérivables, et d'après les théorèmes généraux elle est aussi dérivable.

On a : $X'(t) = \lambda(-A'(t))e^{-A(t)} = -\lambda a(t)e^{-A(t)}$.

Donc : $X'(t) + a(t)X(t) = -\lambda a(t)e^{-A(t)} + \lambda a(t)e^{-A(t)} = 0$, c'est-à-dire que $X \in S_1$, et que $S_1 \supset S_2$.

— $(S_2 \supset S_1)$

Soit $X \in S_1$. Montrons que $X \in S_2$.

On cherche une constante réelle λ, telle que $X(t) = \lambda e^{-A(t)}$.

Posons la fonction f qui à t associe $\frac{X(t)}{e^{-A(t)}}$, c'est-à-dire $f(t) = \frac{X(t)}{e^{-A(t)}} = X(t)e^{A(t)}$. On suppose que la fonction X est 1-fois dérivable car elle est solution d'un équation différentielle, et donc notre f est aussi dérivable comme composée des fonctions dérivables.

On a : $f'(t) = (X'(t) + X(t)a(t))e^{A(t)} = 0$ car $X \in S_1$. Donc f est constante, on note λ sa valeur.

De plus, $X(t)e^{A(t)} = \lambda, X(t) = \lambda e^{-A(t)} \in S_2$. On trouve que $S_2 \supset S_1$.

Par double inclusion on trouve le résultat énoncé.

Rappel 1.2

Équations différentielles linéaires non-homogènes d'ordre 1

Une équation de la forme :

$$(E_2) : X'(t) + a(t)X(t) = b(t)$$

Où a et b sont des fonctions fixées et continues.

Théorème 1.2

Toutes les solutions de (E_2) sont de la forme : $X = X_p + X_h$, où X_p est une solution particulière, et X_h est une solution de l'équation homogène associée à (E_2).

On appelle ce résultat **le principe de superposition**.

Preuve :

Exemple 1.5

Résoudre l'équation différentielle : $f(t) - tf'(t) = 1$ pour $t \in]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$.

Faites attention : $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

Solution :

D'après le théorème 1.2 on sait qu'on doit chercher deux solutions : une particulière et une homogène. On va d'abord manipuler l'équation pour qu'elle soit de la forme générale.

$$f'(t) - \frac{1}{t}f(t) = -\frac{1}{t}$$

— **Solution homogène**

Cherchons une solution de l'équation homogène associée : $f'(t) - \frac{1}{t}f(t) = 0$.

D'après le théorème 1.1, f est de la forme : $f : t \mapsto \lambda e^{ln|t|} = \lambda|t|$, avec λ une constante quelconque. Ici on trouve le logarithme népérien comme primitive de $\frac{1}{t}$.

— **Solution particulière**

On remarque que la fonction constante et égale à 1 est une solution particulière.

D'après le théorème 1.2, toutes les solutions sont de la forme : $f : t \mapsto f_p(t) + f_h(t) = 1 + \lambda|t|$, avec λ une constante réelle.

Rappel 1.3

ÉDLs homogènes d'ordre 2 à coefficients constantes

Une équation de la forme :

$$(E_3) : X''(t) + aX'(t) + bX(t) = 0$$

Où a et b sont des constantes.

Deuxième partie

Courbes et Surfaces