Notes du Cours : MATH2310P

Cours assuré par Sébastien GODILLON

Rédigé par Corentin 邱天意

Semestre 2024-2025-2

Table des matières

Première partie

Équations différentielles ordinaires

1 Généralités

Définition I.1

Une **Équation différentielle ordinaire(EDO)** est une équation de la forme :

$$\forall t \in I, F(t, X(t), X'(t)...X^{(k)}(t)) = 0$$

Plus spécifiquement sur les notations :

- X est une fonction inconnue, d'une seule variable réelle, et à valeurs réelles ou vectorielles($X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$). Elle est supposée k-fois dérivable sur I.
- t est la variable de la fonction X.
- $I \subset \mathbb{R}$, c'est l'intervalle de définition de l'équation différentielle.
- F est une fonction de plusieurs variables, elle est fixée.
- $k \in \mathbb{N}^*$, on l'appelle l'ordre de l'EDO.

Exemple I.1

Chercher les primitives

Soit f une fonction réelle qui est continue sur l'intervalle $I \in \mathbb{R}$.

D'après le théorème fondamental de l'analyse(TFA), on sait que f admet des primitives sur I.

Alors, trouver des primitives de f revient à résoudre l'EDO :

$$\forall t \in I, X'(t) = f(t)$$

Ici on a $F(t, X(t), X'(t)) = X'(t) - f(t)$, une EDO d'ordre 1.

Exemple I.2

L'oscillateur harmonique

Le mouvement d'un oscillateur harmonique est modélisé par l'EDO :

$$\forall t \in I, X''(t) + \frac{k}{m} X(t) = 0$$

Elle est d'ordre 2. En considérant le problème physique on trouve que : $I = \mathbb{R}_+$, et que $X(0)$ est une condition initiale à déterminer. k et m désignent respectivement le raideur du ressort et la masse.

La forme générale s'écrit : $F(t, X(t), X'(t), X''(t)) = X''(t) + \frac{k}{m} X(t)$.

Exemple I.3

Le pendule simple

Il est modélisé par l'équation :

$$\theta''(t) + \frac{g}{l} \sin \theta(t) = 0$$

Où l est la longeur de la corde, g le module de l'accélération gravitationelle, et θ l'angle aigu entre la corde et la verticale. Attention, elle n'est pas linéaire à cause de sin.

Exemple I.4

Dynamique d'une population : Lotka-Volterra

On se place dans le monde où il n'y a que les proies et les prédateurs.

Notons : $X(t)$ la population des proies et $Y(t)$ celle des prédateurs à l'instant t.

On a :

$$\begin{cases} X'(t) = X(t)(\alpha - \beta Y(t)) \\ Y'(t) = Y(t)(\gamma X(t) - \eta) \end{cases}$$

Il y a deux équations donc posons la fonction vectorielle $Z(t) = (X(t), Y(t))$. La forme générale de notre EDO s'écrit : $F(t, X(t), X'(t)) = Z(t)$. Elle est d'ordre 1.

Rappel I.1

Équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1

Une équation de la forme :

$$(E) : X'(t) + a(t)X(t) = 0$$

Où a est une fonction fixée et continue.

Théorème I.1

Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$. λ est une constante quelconque, et A est une primitive de a.

On peut prendre n'importe quelle primitive car la différence entre deux primitives est une constante.

Preuve :

Posons deux ensembles : $S_1 = \{X | X'(t) + a(t)X(t) = 0\}$ et $S_2 = \{X : t \mapsto \lambda e^{-A(t)} | \lambda \in \mathbb{R}\}$, où X est une fonction. Montrons que les deux ensembles sont égaux par double inclusion.

— $(S_1 \supset S_2)$

Soit λ un réel, on pose la fonction $X : t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$, donc elle est un élément de S_2. X est composée des fonctions dérivables, et d'après les théorèmes généraux elle est aussi dérivable.

On a : $X'(t) = \lambda(-A'(t))e^{-A(t)} = -\lambda a(t)e^{-A(t)}$.

Donc : $X'(t) + a(t)X(t) = -\lambda a(t)e^{-A(t)} + \lambda a(t)e^{-A(t)} = 0$, c'est-à-dire que $X \in S_1$, et que $S_1 \supset S_2$.

— $(S_2 \supset S_1)$

Soit $X \in S_1$. Montrons que $X \in S_2$.

On cherche une constante réelle λ, telle que $X(t) = \lambda e^{-A(t)}$.

Posons la fonction f qui à t associe $\frac{X(t)}{e^{-A(t)}}$, c'est-à-dire $f(t) = \frac{X(t)}{e^{-A(t)}} = X(t)e^{A(t)}$. On suppose que la fonction X est 1-fois dérivable car elle est solution d'un équation différentielle, et donc notre f est aussi dérivable comme composée des fonctions dérivables.

On a : $f'(t) = (X'(t) + X(t)a(t))e^{A(t)} = 0$ car $X \in S_1$. Donc f est constante, on note λ sa valeur.

De plus, $X(t)e^{A(t)} = \lambda, X(t) = \lambda e^{-A(t)} \in S_2$. On trouve que $S_2 \supset S_1$.

Par double inclusion on trouve le résultat énoncé. ■

Rappel I.2

Équations différentielles linéaires non-homogènes d'ordre 1
Une équation de la forme :

$$(E) : X'(t) + a(t)X(t) = b(t)$$

Où a et b sont des fonctions fixées et continues.

Théorème I.2

Toutes les solutions de (E) sont de la forme : $X = X_p + X_h$, où X_p est une solution particulière, et X_h est une solution de l'équation homogène associée à (E).

On appelle ce résultat **le principe de superposition**.

Preuve : ■

Exemple I.5

Résoudre l'équation différentielle : $f(t) - tf'(t) = 1$ pour $t \in]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$.

Faites attention : $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

Solution :

D'après le théorème 1.2 on sait qu'on doit chercher deux solutions : une particulière et une homogène. On va d'abord manipuler l'équation pour qu'elle soit de la forme générale.

$$f'(t) - \frac{1}{t}f(t) = -\frac{1}{t}$$

— **Solution homogène**

Cherchons une solution de l'équation homogène associée : $f'(t) - \frac{1}{t}f(t) = 0$.

D'après le théorème 1.1, f est de la forme : $f : t \mapsto \lambda e^{ln|t|} = \lambda|t|$, avec λ une constante quelconque. Ici on trouve le logarithme népérien comme primitive de $\frac{1}{t}$.

— **Solution particulière**

On remarque que la fonction constante et égale à 1 est une solution particulière.

D'après le théorème 1.2, toutes les solutions sont de la forme : $f : t \mapsto f_p(t) + f_h(t) = 1 + \lambda|t|$, avec λ une constante réelle. ■

Rappel I.3

EDLs homogènes d'ordre 2 à coefficients constantes

Une équation de la forme :

$$(E) : X''(t) + aX'(t) + bX(t) = 0$$

Où a et b sont des constantes.

Théorème I.3

On considère une EDL homogène d'ordre 2 à coefficients constants :

$$(E) : X''(t) + aX'(t) + bX(t) = 0$$

Où a et b sont des constantes réelles fixées.

Et on lui associe **l'équation caractéristique** : $r^2 + ar + b = 0(C)$.

Discutons les 3 cas possibles, en fonction du signe de Δ :

— $\Delta > 0$. Dans ce cas (C) admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2.
  Alors toutes les solutions de (E) sont de la forme :

  $$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$$

  Avec λ_1 et λ_2 deux constantes réelles.

— $\Delta = 0$. Dans ce cas (C) admet une unique solution réelle r_0
  Alors toutes les solutions de (E) sont de la forme :

  $$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = (\lambda + \mu t)e^{r_0 t}$$

  Avec λ et μ deux constantes réelles.

— $\Delta < 0$. Dans ce cas (C) admet deux solutions complexes conjugués : $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$.
  Alors toutes les solutions de (E) sont de la forme :

  $$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = (A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))e^{\alpha t}$$

  Avec A et B deux constantes réelles.

Exemple I.6

Reprenons l'exemple de l'oscillateur harmonique.

On note k le raideur, m la masse et $x(t)$ la longeur du ressort. Si on néglige les frottements alors on trouve :

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

C'est une ÉDL homogène d'ordre 2 à coefficients constantes.

Son équation caractéristique : $r^2 + \frac{k}{m} = 0$, elle admet deux racines complexes conjuguées. D'après le theorème précédent, on déduit que :

$$x'(t) = A\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + B\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$$

Avec A et B deux constantes à déterminer avec les conditions initiales. Par exemple, si on étire le ressort d'une longeur l puis on le lâche à $t = 0$, la vitesse initiale est nulle, on aura donc :

$$\begin{cases} x(0) = l = A\cos(0) + B\sin(0) = A \\ x'(0) = 0 = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(0) + B\sqrt{\frac{k}{m}}\cos(0) = B\sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

On en déduit que $A = l$ et $B = 0$, donc on a :

$$x(t) = l\cos(t\sqrt{\frac{k}{m}})$$

C'est une fonction périodique car on a négligé les frottements.

Remarque : En général, pour une équation différentielle d'ordre 2 il faut deux CIs. Le nombre de CIs est lié à l'ordre, comme on a vu avec les circuits et la mécanique.

Proposition I.1

On considère l'équation : $\forall t \in \mathbb{R}, x''(t) + ax'(t) + bx(t) = c(t)$ (E)

Ici a et b sont des constantes réelles fixées, $c(t)$ une fonction seconde membre fixée. Alors, l'ensemble des solutions de (E) est de la forme :

$$\{t \to x(t), \text{solution de}(E) | x = x_p + x_h\}$$

Où $t \mapsto x_h(t)$ est une solution de (H), l'équation homogène associée à (E), et $t \mapsto x_p(t)$ une solution particulière.

Preuve :

Double inclusion :

— ($\supset$) Posons la fonction $x = x_p + x_h$ avec x_h une solution de (H) et x_p une solution particulière de (E).

Alors on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = (x_p + x_h)''(t) + (x_p + x_h)'(t) + (x_p + x_h)(t)$$

Grâce à la linéarité de la dérivée, on peut séparer la forme obtenue :

$$(x_p''(t) + ax_p'(t) + bx_p(t)) + (x_h''(t) + ax_h'(t) + bx_h(t)) = c(t) + 0 = c(t)$$

Donc notre fonction est bien solution de (E), et on a l'inclusion :

$$\{t \mapsto x(t) | \text{solution de } (E)\} \supset \{x = x_p + x_h\}$$

Avec $t \mapsto x_h(t)$ est une solution de (H), l'équation homogène associée à (E), et $t \mapsto x_p(t)$ une solution particulière.

— ($\subset$) On fixe $t \mapsto x(t)$, une solution de (E) et on cherche une solution $t \mapsto x_h(t)$ de l'équation homogène telle que $x = x_p + x_h$. Pour ça, on pose la fonction $x_h = x - x_p$ et vérifier qu'elle est une solution de (H).

Or, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_h''(t) + ax_h'(t) + bx_h(t)) &= (x''(t) + ax'(t) + bx(t)) - (x_p''(t) + ax_p'(t) + bx_p(t)) \\ &= c(t) - c(t) = 0 \end{aligned}$$

Donc x_h est une solution de (H), et on a :

$$\{t \mapsto x(t) | \text{solution de } (E)\} \subset \{x = x_p + x_h\}$$

Par double inclusion la proposition est vraie. ■

Remarque I.1

Pour trouver une solution particulière on peut utiliser la chance, l'intelligence, l'indication (s'il y en a), variation de la constante, etc.

Définition I.2

On dit qu'une EDO est **sous forme résolue** si on peut l'écrire sous la forme :

$$\forall t \in I, X'(t) = F(t, X(t))$$

On peut toujours écrire une EDO sous forme résolue. C'est ce qu'on appelle le **Principe de réduction de l'ordre**. Mais vous allez voir qu'il y aura une augmentation de dimension.

Exemple I.7

Reprenons encore une fois l'oscillateur harmonique.

L'équation qui décrit son mouvement est d'ordre 2, mais on peut l'écrire sous forme résolue à l'aide d'une fonction vectorielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$$

Alors on a :

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ -\frac{k}{m}x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$$

On obtient la forme résolue :

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} (X(t))$$

Notez qu'on doit augmenter la dimension pour réduire l'ordre.

Exemple I.8

On peut généraliser cette notion avec les équations différentielles ordinaires d'ordre n.

L'équation générale pour une telle équation :

$$\forall t \in I, x^{(k)}(t) + F(t, x(t), x'(t)...x^{(k-1)}(t)) = 0$$

On augment la dimension(et diminue l'ordre) en posant :

$$\forall t \in I, X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(k-1)}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$$

On obtient la forme résolue :

$$\forall t \in I, X'(t) = F(t, X(t)) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ \vdots \\ x^{(k-1)}(t) \\ -F(t, x(t), x'(t)...x^{(k-1)}(t)) \end{pmatrix}$$

Exemple I.9

Reprenons le modèle de Lotka-Volterra. On peut poser une fonction vectorielle qui contient les fonctions X et Y. Le systeme deviendra une seule équation.

Définition I.3

On se donne une EDO écrite sous forme résolue :

$$(E) : \forall t \in I, X'(t) = F(t, x(t))$$

Une **solution** de (E) est un couple (J, y) tel que :

— J est un intervalle inclu dans I.

— y est une fonction dérivable sur J telle que : $\forall t \in J, y'(t) = F(t, y(t))$

Exemple I.10

Considérons l'équation différentielle non-linéaire définir sur $\mathbb{R}$:

$$(E) : \forall t \in \mathbb{R}, x'(t) = x(t)^2$$

On analyse les solutions possibles et considère leurs ensembles de définition :

— La fonction nulle est bien une solution sur $\mathbb{R}$. On note que $(\mathbb{R}, 0)$ est une solution de (E). Il faut faire attention ici que notre 0 est celui dans l'espace des fonctions, qui désigne la fonction nulle sur son intervalle de définition.

— Soit y une solution qui ne s'annule pas, alors on a :

$$y'(t) = y(t)^2 \iff \frac{y'(t)}{y(t)^2} = 1 \quad (\text{ car } y \text{ ne s'annule pas})$$

On reconnaît la dérivée de $\frac{-1}{y(t)}$, donc en faisant une intégration on obtient :

$$\frac{-1}{y(t)} = t + c \quad (c \text{ une constante réelle})$$

Donc $y(t) = \frac{-1}{t+c}$, définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-c\}$
Plus précisément, pour tout $c \in \mathbb{R}$, les deux couples $(]-\infty, c[, y : t \mapsto \frac{-1}{t+c})$ et $(]c, +\infty[, y : t \mapsto \frac{-1}{t+c})$ sont des solutions de (E).
En particulier la fonction nulle est la seule solution qui marche sur $\mathbb{R}$.

Définition I.4

Soit une EDO sous forme résolue : $(E) : \forall t \in I, X'(t) = F(t, X(t))$.

— Une solution (J, y) est dit **globale** si $J = I$.

— Soit (J_1, y_1) et (J_2, y_2) deux solutions.
On dit que (J_1, y_1) est un **prolongement** de (J_2, y_2) si $J_2 \subset J_1$ et si les fonctions y_1 et y_2 coïncident sur J_2. Réciproquement, on dit que (J_2, y_2) est une **restriction** de (J_1, y_1).

— Une solution (J, y) est dit **maximale** si pour toute prolongement (J_0, y_0) de (J, y), on a : $J_0 = J$.

Attention : Globale implique maximale mais la réciproque est en général fausse.

Exemple I.11

Reprenons l'exemple 1.10.
Les trois solutions qu'on a donné sont toutes maximales, mais la seule solution globale est la fonction nulle. Les deux autres sont effectivement "limitées" par c.

Définition I.5

Un **problème de Cauchy** est la donnée d'une EDO(par exemple sous la forme résolue : $\forall t \in I, X'(t) = F(t, X(t))$ et une condition initiale (t_0, x_0).
Résoudre ce problème de Cauchy signifie trouver une solution maximale (J, y) telle que $t_0 \in J$ et $y(t_0) = x_0$.

Pour comprendre qu'est-ce que c'est un problème de Cauchy, on fait quelques exemples sur la dynamique des populations.

On étudie ici l'évolution d'une seule population, qu'on suppose isolée dans un écosystème.

Exemple I.12

Modèle de Malthus

Le modèle le plus simple pour modéliser l'évolution d'une seule population est de supposer que le taux d'accroissement est constant.

On utilise les notations suivantes :

— $N(t)$ la taille de la population à l'instant t.

— $N'(t)$ la vitesse d'évolution de la population à l'instant t.

— r le taux d'accroissement de la population.

— t_0 l'instant initiale et $N_0 = N(t_0)$ la taille initiale.

Le modèle s'écrit :

$$\begin{cases} \forall t \geq t_0, N'(t) = rN(t) \\ N_0 = N(t_0) \end{cases}$$

Analyse du modèle :

On reconnaît un problème de Cauchy avec une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, donc c'est un système qu'on sait résoudre, mais il faut que la solution vérifie la condition initiale qu'on a posé.

D'après le théorème pour ce type d'équations différentielles, toutes les solutions sont de la forme $N(t) = \lambda e^{rt}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. De plus, elles sont globales car ces solutions sont bien définies et marchent sur l'intervalle à étudier.

On détermine λ avec la CI, et en injectant la relation $N_0 = N(t_0)$ on trouve : $\lambda = N_0 e^{-rt_0}$. Finalement, le modèle donne : $\forall t \geq t_0, N(t) = N_0 e^{r(t-t_0)}$. À partir de cela on peut dessiner la **courbe représentative** de la solution (appelée la **courbe intégrale**).

Mais ce modèle est trop simpliste ! Il ne reflète pas la réalité, la croissance d'une population n'est pas toujours exponentielle. Au bout d'un certain temps, la population est confrontée aux limites de l'écosystème. pour améliorer ce modèle on introduit un autre, qui s'appelle le modèle de Verhulst :

Exemple I.13

Modèle de Verhulst

On reprend les notations de l'exemple précédent.

Le modèle s'écrit :

$$\begin{cases} \forall t \geq t_0, N'(t) = r(1 - \frac{N(t)}{K})N(t) \\ N_0 = N(t_0) \end{cases}$$

L'équation est non-linéaire à cause de N^2. Ici, l'idée est d'introduire un facteur non-constant dans le coefficient de proportionnalité du taux d'accroissement.

Analyse du modèle :

D'abord on peut faire des remarques sur le facteur ajouté :

— Si $N(t)$ est négligeable devant K, on a que $\frac{N(t)}{K}$ est proche de 0, donc $N'(t) \approx rN(t)$.

— Si $N(t)$ est proche de K, alors $\frac{N(t)}{K} \approx 1$, donc $N'(t) \approx 0$.

Une explication qualitative : la vitesse va ralentir si $N(t)$ s'approche de la valeur maximale K, qui s'appelle la capacité d'accueil de l'écosystème.

D'ailleurs, on voit facilement que pour $t \geq t_0$, les deux fonctions constantes $N(t) = 0$ et $N(t) = K$ sont des solutions particulières de cette équation différentielle. Cependant, ce ne sont pas toujours des solutions du système de Cauchy, car si on prend $0 < N_0 < K$, la condition initiale n'est pas vérifiée.

Petite remarque : Plus tard dans ce chapitre, on peut montrer que si $0 < N_0 < K$, alors la population vérifie : $\forall t \geq t_0, 0 < N_t < K$. On aura besoin du **théorème de Cauchy-Lipschitz**. Pour ce moment on essaye de résoudre le système.

On remarque que $(1 - \frac{N(t)}{K})N(t)$ est non-nul, donc on peut le déplacer. L'ÉDO s'écrit sous la forme :

$$r = \frac{N'(t)}{(1 - \frac{N(t)}{K})N(t)} = \frac{KN'(t)}{(K - N(t))N(t)}$$

On ne peut pas la résoudre directement, mais vous avez vu en MATH1302P qu'on peut faire une **décomposition en éléments simples** pour les calculs d'intégrales, et l'idée est exactement la même ici. Essentiellement, on sépare le dénominateur en deux :

$$r = \frac{KN'(t)}{(K - N(t))N(t)} = \frac{N'(t)}{N(t)} + \frac{N'(t)}{K - N(t)}$$

Comme ça on peut intégrer entre t_0 et t :

$$[rt]_{t_0}^{t} = [ln|N(t)| - ln|K - N(t)|]_{t_0}^{t}$$

On peut supprimer les valeurs absolues car $N(t)$ et $K - N(t)$ sont strictement positives :

$$r(t - t_0) = ln\left(\frac{N(t)}{K - N(t)} \times \frac{K - N(t_0)}{N(t_0)}\right)$$

Donc :

$$\frac{K - N(t)}{N(t)} = \frac{K}{N(t)} - 1 = \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-r(t-t_0)}$$

Par conséquence on a la solution du système de Verhulst :

$$\forall t \geq t_0, N(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-r(t-t_0)} + 1}$$

On remarque 3 choses :

— Cette solution est globale(et donc maximale).

— $N(t_0) = N_0$, la CI est bien vérifiée.

— La limite quand t tend vers $+\infty$ est K.

(Vous pouvez trouver l'image de sa courbe intégrale sur Moodle)

Dans le modèle de Verhulst, il existe deux stratégies possibles pour faire évoluer les populations en fonction des paramètres K et r :

— La stratégie K : croissance lente, maturité sexuelle tardive, longue durée de vie, soin des enfants, et faible descendance.

— La stratégie r : croissance rapide, maturité tôt, faible durée de vie, peu de soin des enfants, et plein d'enfants.

On passe à la section suivante.

2 Propriétés des solutions

2.1 Régularité

Rappel I.4

On rappelle que :

— Une fonction est dite de classe $\mathscr{C}^k$ si elle est k-fois dérivable et si toutes ses dérivées d'ordre k sont continues.

— Une fonction est dite de classe $\mathscr{C}^\infty$ si elle est infiniment dérivable.

— Pour une fonction de plusieurs variables, dérivable signifie que toutes ses dérivées partielles existent.

Théorème I.4

La régularité des solutions.

Soit : $\forall t \in I, X'(t) = F(t, X(t))$, une ÉDO définie sur l'intervalle I sous forme résolue.
Si F est de classe $\mathscr{C}^k$ avec la constante $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, alors toute solution maximale (J, y) de l'équation différentielle est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$.

Preuve : On raisonne par récurrence.

Initialisation :

Pour $k = 0$, F est de classe $\mathscr{C}^0$, c'est-à-dire continue. Donc on a :

$$\forall t \in J, y'(t) = F(t, y(t))(\text{qui est continue})$$

La continuité de y est impliquée par l'existence de sa dérivée. De plus, y' est continue car elle est composée de fonctions continues.

Donc le théorème est vrai pour $k = 0$.

Hérédité :

On suppose que le résultat est vrai au rang k, et on veut montrer qu'il est vraie aussi au rang $k + 1$.

On suppose que F est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$, en particulier elle est de classe $\mathscr{C}^k$.

Donc y est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ par hypothèse de récurrence, et :

$$\forall t \in J, y'(t) = F(t, y(t))$$

Donc y' est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^{k+1}$.

Donc y est de classe $\mathscr{C}^{k+2}$. Le résultat est vrai au rang $k + 1$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence le théorème est démontré. ■

2.2 Existence

Théorème I.5 Cauchy-Péano-Arzelà

Soit (E) : $\forall t \in I, X'(t) = F(t, X(t))$ une équation différentielle ordinaire sous forme résolue, et on se donne une condition initiale $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{R}^n$.
Si F est continue au voisinage de (t_0, X_0), alors il existe au moins une solution maximale au problème de Cauchy : (E) et $X(t_0) = X_0$.

À partir de ce point, je vais utiliser l'abréviation CPA.

Preuve : Admis ■

Rappel I.5

Un **voisinage** de t_0 est un petit intervalle contenant t_0 et inclus dans I, par exemple un intervalle de la forme $]t_0 - r, t_0 + r[$ où $r > 0$, suffisamment petit.

Rappel I.6

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.
On dit que f est **continue au voisinage de** t_0 si on a :

$$\forall t \in]t_0 - r, t_0 + r[, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, |t - t_0| \leq \eta \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon$$

Ce sont des définitions qu'on a déjà vu pour les fonctions réelles d'une seule variable(en effet, on utilise la topologie de la droite réelle), on peut généraliser ces notions en utilisant la topologie d'un espace vectoriel normé.

Dans $\mathbb{R}^n$, soient $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $||.||$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$. Un voisinage de X_0 est une petite boule contenant x_0, par exemple une boule de la forme suivante :

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - x_0|| < r\}$$

où $r > 0$, assez petit. Vous pouvez voir que $]t_0 - r, t_0 + r[$ est une boule pour la valeur absolue sur l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |.|)$

On généralise également la notion de continuité. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. On dit que f est continue au voisinage de X_0 si :

$$\forall x \in \underbrace{B(x_0, r)}_{\text{voisinage de } x_0}, \underbrace{\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, y \in B(x, \eta) \Rightarrow f(y) \in B\left(f(x), \varepsilon\right)}_{\text{continuité en } X}$$

En pratique, on n'utilise jamais ces définitions pour justifier la continuité. Il suffit de reconnaître les fonctions et d'utiliser les théorèmes généraux.

Exemple I.14

$\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = 3|X(t)|^{\frac{2}{3}}$

On reconnaît une EDO sous forme résolue, avec

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (t, X) \mapsto 3\left|X\right|^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

La fonction F est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ comme composée des fonctions continues, en particulier, elle est continue au voisinage de n'importe quelle condition initiale.

D'après le théorème de CPA, on déduit que le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = 3\,|X(t)|^{\frac{2}{3}} \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet des solutions maximales.

Par exemple, pour la condition initiale $(t_0, X_0) = (0, 0)$, la solution constante égale à 0 est une solution évidente. On remarque que $X : t \mapsto t^3$ l'est aussi. Si on réprésente les courbes intégrales(courbes représentatives des solutions), on trouvera qu'il n'y a pas forcément unicité des solutions du problème de Cauchy.

Le problème pour les ingénieurs : si on modélise un problème avec les lois de la physique(qui donne une EDO) et qu'on mesure le système à un instant initial(qui donne une CI), on obtient un problème de Cauchy qui peut avoir plusieurs solutions de donc qui ne permet pas de prédire le futur.

Exemple I.15

Problème de seau percé en physique.

On trouve un seau percé qui est vide, mais était-il plain ?

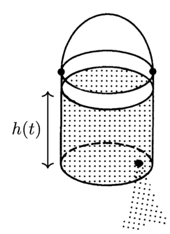

Figure 1 – Corentin a percé un seau avec une équadiff pour obtenir cette image

Modélisation du problème

On utilise ces grandeurs en fonction de t :

— $h(t)$ = la hauteur de l'eau dans le seau à l'instant t

— $v(t)$ = la vitesse de l'eau sortant du trou à l'instant t

— $m(t)$ = la masse de l'eau dans le seau à l'instant t

On suppose qu'il n'y a pas de perte d'énergie. Alors, le principe de conservation de l'énergie en physique nous donne :

$$\underbrace{m(t)gh(t)}_{\text{énergie potentielle}} = \underbrace{\frac{1}{2}m(t)v(t)^2}_{\text{énergie cinétique}}$$

Donc :

$$\boxed{v(t)^2 = 2gh(t)}$$

On désigne de plus :
— A = l'aire de la section du seau (qu'on suppose cylindrique)
— a = l'aire du trou

Comme la masse de l'eau est conservée, la variation du volume d'eau dans le seau est égale à celui d'eau qui sort :

$$Ah'(t) = av(t)$$

Donc :

$$\boxed{v(t) = \frac{A}{a}h'(t)}$$

En mettant ensemble les deux relations encadrées on en déduit que :

$$h'(t)^2 = 2gh(t) \cdot \frac{a^2}{A^2}$$

Donc on a :

$$\boxed{h'(t) = -\frac{a\sqrt{2g}}{A} \cdot \sqrt{h(t)} = -C\sqrt{h(t)}}$$

ici on ajoute le signe $-$ car la hauteur diminue, donc sa dérivée est négative.

On obtient bien une ÉDO sous forme résolue, où :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ (t, h) \quad \mapsto -C\sqrt{h} \end{cases}$$

qui est une fonction continue sur son ensemble de définition.

Donc le problème de Cauchy admet des solutions maximales pour toutes conditions initiales d'après le théorème de CPA. On remarque que la fonction h qui à t associe 0 est une solution évidente, donc c'est possible que le seau n'est jamais contenu d'eau.

Supposons que le seau a contenu de l'eau, car un seau vide n'est pas intéressant :). Par exemple, on suppose que à un instant t_0, la hauteur vaut 1 : $h(t_0) = 1$.

D'après le théorème on sait qu'il existe une solution maximale telle que $h(t_0) = 1$, de plus, F est continue, donc de classe $\mathscr{C}^0$. On en déduit que h est de classe $\mathscr{C}^0$ au voisinage de t_0, en particulier elle est continue au voisinage de t_0.

Par conséquence $h(t) \neq 0$ pour tout t proche de t_0. Donc on peut diviser par $\sqrt{h}$ au voisinage de t_0, et on a :

$$\frac{h'(t)}{\sqrt{h(t)}} = -C$$

Puis on intègre :

$$\int_{t_0}^{t} \frac{h'(s)}{\sqrt{h(s)}} ds = \int_{t_0}^{t} (-C) ds \quad \text{(au voisinage de} \quad t_0)$$

Donc :

$$\left[2\sqrt{h(s)}\right]_{t_0}^{t} = -C(t - t_0)$$

En faisant le calcul on trouve l'expression de h :

$$h(t) = \frac{C^2}{4}\left(t_0 - t + \frac{2}{C}\right)^2$$

Ceci est vrai pour t au voisinage de t_0 et plus précisément pour $t \leq t_0 + \frac{2}{C}$, car au début on a l'expression de $\sqrt{h(t)}$ qui est positif.

Puisque $h\left(t_0 + \frac{2}{C}\right) = 0$ et que h est continue, on obtient comme solution maximale définie sur $[t_0, +\infty[$:

$$h(t) : \begin{cases} \frac{C^2}{4}\left(t_0 - t + \frac{2}{C}\right)^2 & \text{si} \quad t \in [t_0, t_0 + \frac{2}{C}] \\ 0 & \text{si} \quad t \geq t_0 + \frac{2}{C} \end{cases}$$

On peut représenter les courbes intégrales :

Ainsi, on trouve le temps de vidage : $\frac{2}{C}$.

Pour chaque valeur de t_0, on obtient une courbe intégrale différente, mais dans tous les cas on a que $h(T) = 0$ pout T suffisamment grand. Autrement dit, il existe une infinité de solutions maximales à notre problème de Cauchy.

Il n'y a pas unicité des solutions, donc on ne peut pas savoir si le seau était plein, et même s'il était plein, on ne peut pas savoir quand.

Remarque : on n'a pas d'unicité car les courbes intégrales s'intersectent, on verra plus tard le **principe de non-intersection des courbes intégrales**.

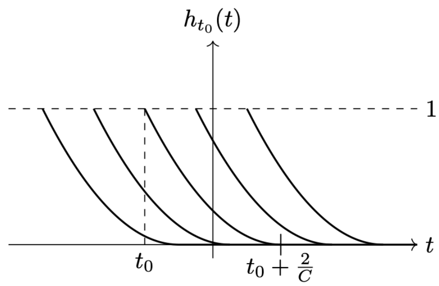

FIGURE 2 – Courbes intégrales

2.3 Unicité

On a vu déjà qu'avec le théorème de Cauchy-Peano-Arzelà, la continuité n'est pas suffisante pour l'unicité, donc on va définir une condition plus forte et puis donner un théorème qui assure l'unicité de la solution.

Définition I.6

Soit $f : O \to \mathbb{R}^n$ une fonction définie sur une partie O de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$.

— On dit que f est **lipschitzienne** sur O si :

$$\exists k > 0, \forall (x_1, x_2) \in O^2, N\left(f(x_1) - f(x_2)\right) \leq k \cdot N\left(x_1 - x_2\right)$$

— On dit que f est **localement lipschitzienne** sur O si :

$$\forall x \in O, \exists \varepsilon > 0, \exists k > 0, \forall (x_1, x_2) \in B(x, \varepsilon)^2, N\left(f(x_1) - f(x_2)\right) \leq k \cdot N\left(x_1 - x_2\right)$$

Ici ε est suffisamment petit, k dépend de x. Cette phrase mathématique dit effectivement que f est lipschitzienne sur la boule de centre x et de rayon ε, ou bien au voisinage de x.

Lipschitzienne implique localement lipschitzienne, mais la réciproque est fausse en générale.

Exemple I.16

On considère la fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin x \end{cases}$$

Elle est lipschitizienne sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

On essaye de vérifier la définition d'une fonction lipschitzienne. Notre fonction est dérivable et sa dérivée est continue, d'après le théorème des accroissements finis, on sait que :

$$\forall a < b, \exists c \in [a, b], f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

En utilisant l'expression de f et le fait que cos est toujours inférieure à 1, on a :

$$\sin(b) - \sin(a) = \cos(c) \cdot (b - a) \leq (b - a)$$

C'est-à-dire :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, |\sin(b) - \sin(a)| \leq |b - a|$$

Conclusion : f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, car on peut poser $k = 1$. ■

Exemple I.17

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x associe x^2, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Elle est localement lipschitzienne mais pas lipschitzienne.

Preuve :

Par l'absurde, supposons que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Donc on sait que :

$$\exists k > 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad |x_1^2 - x_2^2| \leq k|x_1 - x_2|$$

En particulier, pour $x_1 = x > 0$ et $x_2 = 0$, on a :

$$\forall x > 0, \quad x^2 \leq kx \quad \text{donc} \quad x \leq k.$$

Donc c'est absurde lorsque $x \to +\infty$, car $\underline{k \text{ ne dépend pas de } x}$.

Donc f n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Contrairement, on peut essayer de voir si elle est localement lipschitzienne.

On fixe $x \in \mathbb{R}$. Soient $\varepsilon > 0$ et $(x_1, x_2) \in B(x, \varepsilon)^2$. Comme on est sur la droite réelle, on a simplement : $B(x, \varepsilon) =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.

Si $x_1 = x_2$, on a :

$$0 = |x_1^2 - x_2^2| \leq k|x_1 - x_2| = 0, \quad \text{ceci est vraie pour tout k.}$$

On suppose désormais que $x_1 \neq x_2$, et que $x_1 > x_2$. (*Quitte à les échanger.*)

On a :

$$\frac{|x_1^2 - x_2^2|}{|x_1 - x_2|} = |x_1 + x_2| \leq 2(|x| + \varepsilon).$$

$$\Rightarrow k = 2(|x| + \varepsilon).$$

Autrement dit, on a montré que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists \varepsilon > 0, \quad \exists k = 2(|x| + \varepsilon) > 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[^2,$$

$$|x_1^2 - x_2^2| \leq k|x_1 - x_2|.$$

Conclusion : f est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. ■

Propriété I.1

Soit $f : O \to \mathbb{R}^n$, où $O \subset \mathbb{R}^n$.

— Si f est localement lipschitzienne sur O, alors f est continue sur O.

— Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur O, alors f est localement lipschitzienne sur O.

Preuve.

On ne considère que le cas réel ici, avec $n = 1$(si on considère $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$, on aura besoin de calcul différentiel).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ si $I \subset \mathbb{R}$.

— On suppose que f est localement lipschitzienne sur I :

$$\forall x \in I, \exists \varepsilon > 0, \exists k > 0, \forall (x_1, x_2) \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[^2, |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|.$$

En particulier, pour $x_1 = t \to x$ et $x_2 = x$, on a que :

$$(t, x) \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[^2, \quad \text{pour } t \to x.$$

$$\lim_{t\to x} |f(t) - f(x)| \leq \lim_{t\to x} k|t-x| = 0.$$

$$\Rightarrow f(t) \underset{t\to x}{\longrightarrow} f(x).$$

C'est-à-dire que f est continue en x pour tout $x \in I$.

— On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

On fixe $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, et on cherche $k > 0$ tel que :

$$\forall (x_1, x_2) \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[^2, \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|.$$

D'après le théorème des accroissements finis :

$$\exists c \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[, \quad |f(x_1) - f(x_2)| = |f'(c)| \cdot |x_1 - x_2|.$$

Or,

$$|f'(t)| \leq \sup_{t\in]x-\varepsilon,x+\varepsilon[} |f'(t)| < +\infty \quad \text{(théorème des bornes atteintes)}.$$

Conclusion : On a montré que :

$$\forall x \in I, \quad \exists \varepsilon > 0, \quad \exists k = \sup_{t\in]x-\varepsilon,x+\varepsilon[} |f'(t)| > 0,$$

$$\forall (x_1, x_2) \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[^2, \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|.$$

Donc f est localement lipschitzienne sur I. ■

Important : En pratique, pour montrer qu'une fonction est localement lipschitzienne, il suffit de montrer qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$.

Théorème I.6 Cauchy-Lipschitz

Soit : $\forall t \in I,\ X'(t) = F(t, X(t))$, une EDO sous forme résolue.

On suppose que :

- F est continue sur $I \times O$, où O est un ouvert.
- F est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, c'est-à-dire :

$$\forall\,(t, X(t)) \in I \times O,\ \exists \varepsilon > 0,\ \exists k > 0,\ \forall\,(X_1(t), X_2(t)) \in B\,(X(t), \varepsilon)^2\,,$$

$$N\,(F\,(t, X_1(t)) - F\,(t, X_2(t))) \leq kN\,(X_1(t) - X_2(t))$$

Alors, pour toute condition initiale $(t_0, X_0) \in I \times O$, il existe une unique solution maximale $(J,\, y)$ au problème de Cauchy définit par l'EDO et la condition initiale.

De plus, la solution maximale est définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Preuve : admis pour le moment. ■

Corollaire du théorème de Cauchy-Lipschitz

Sous les mêmes hypothèses, on a le principe de non-intersection des courbes intégrales. C'est-à-dire que les courbes représentatives des solutions de l'EDO :

$$\forall t \in I, \quad X'(t) = F(t, X(t))$$

ne peuvent pas se couper.

Preuve : par absurde.

Par absurde, supposons que (J_1, Y_1) et (J_2, Y_2) sont deux solutions de

$$\forall t \in I, \quad X'(t) = F(t, X(t))$$

qui s'intersectent. Alors, il existe $t_0 \in J_1 \cap J_2$ tel que $Y_1(t_0) = Y_2(t_0) = X_0$.

Donc (J_1, Y_1) et (J_2, Y_2) sont solutions du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t)) & \forall t \in I \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

Or, ce problème de Cauchy admet une unique solution d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, donc on a :

$$\Rightarrow (J_1, Y_1) = (J_2, Y_2).$$

■

Exemple I.18

$\forall t \in \mathbb{R}, x'(t) = 3|x(t)|^{\frac{2}{3}} \quad (E)$

On a déjà vu que $y_1 : t \mapsto 0$ et $y_2 : t \mapsto t^3$ sont deux solutions globales de (E).

Mais $y_1(0) = y_2(0) = 0$, donc il n'y a pas de principe de non-intersection des courbes intégrales sur cet exemple.

En effet, on ne peut pas appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour cet exemple.

On a :

$$F(t, x) = 3|x|^{\frac{2}{3}}$$

- F est bien continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad$ (i.e. $I = \mathbb{R}, n = 1, O = \mathbb{R}$).
- Mais F n'est pas localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Sinon, on aurait :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad \exists \varepsilon > 0, \exists k > 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[^2,$$

$$\left| 3|x_1|^{\frac{2}{3}} - 3|x_2|^{\frac{2}{3}} \right| \leq k|x_1 - x_2|$$

En particulier, pour $x_1 \in]0, \varepsilon[$ et $x_2 = 0$,

$$3x_1^{\frac{2}{3}} \leq kx_1$$

Donc

$$\frac{3}{x_1^{\frac{1}{3}}} \leq k$$

ce qui est absurde et impossible lorsque $x_1 \to 0$.

Exemple I.19

On considère l'EDO :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = x(t)^2$$

La fonction $F(t, x) = x^2$ est :

— continue sur $\mathbb{R}^2$

— de classe $\mathscr{C}^1$ par rapport à la deuxième variable, donc localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = 2x$$

Donc on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Par conséquent, pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = x(t)^2 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

De plus, cette solution maximale est définie sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ qui est <u>ouvert</u>.

Et on a le principe de non-intersection des courbes intégrales.

En particulier, puisque la fonction nulle est une solution évidente de $\forall t \in \mathbb{R}, x'(t) = x(t)^2$.

Toutes les autres solutions ne s'annulent pas (*et donc ne changent pas de signe par continuité*).

Exemple I.20

Modèle de Verhulst.

On rappelle l'EDO :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{k}\right)$$

La fonction $F(t, N)$ est définie par :

$$F(t, N) = rN\left(1 - \frac{N}{k}\right)$$

— F est continue sur $\mathbb{R}^2$.

— F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur $\mathbb{R}^2$.

Donc, on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Or, $N_1 : t \mapsto 0$ et $N_2 : t \mapsto K$ sont deux solutions constantes évidentes de :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right).$$

Donc, d'après le principe de non-intersection des courbes intégrales,
on en déduit que pour tout $N_0 \in]0, K[$, l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

Vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 0 < N(t) < K.$$

C'est grâce à cette propriété (qu'on avait admise) qu'on a pu résoudre le modèle de Verhulst en divisant $N'(t)$ par $N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \neq 0$.

Théorème I.7 Cauchy-Lipschitz (global)

On reprend les mêmes notations qu'on a utilisé dans le théorème de Cauchy-Lipschitz(local). Si on a :

— F est localement lipschitzienne par rapport à la première variable sur I :

$$\forall (t, X) \in I \times O, \exists \varepsilon > 0, \exists k > 0, \forall (t_1, t_2) \in]t - \varepsilon, t + \varepsilon[^2,$$

$$||F(t_1, X), F(t_2, X)|| \leq k|t_1 - t_2|$$

— F est globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur O :

$$\forall t \in I, \exists k > 0, \forall (X_1, X_2) \in O^2, ||F(t, X_1), F(t, X_2)|| \leq k|X_1 - X_2|$$

Alors pour tout $(t_0, X_0) \in I \times O$, le problème de Cauchy (qui concerne l'EDO $\forall t \in I$, $X'(t) = F(t, X(t))$ et notre condition initiale) admet une unique solution globale définie sur I.

En pratique, pour appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz local, il suffit de montrer que F est continue sur $I \times O$ et que F est de classe $\mathscr{C}^1$ par rapport à X.

Pour la version globale, il suffit de montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ par rapport à la première variable sur I, et que F est globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur O.

Exemple I.21

$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = \frac{t}{1+x(t)} = F(t, x(t)) \quad$ où $\quad F : (t, x) \mapsto \frac{t}{1+x}$

Analyse de l'exemple avec le théorème local :

On peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz (local) car :

— F est continue sur $\mathbb{R}\times]-1, +\infty[\quad$ (et $]-1, +\infty[\subset \mathbb{R}$ est ouvert),

— F est dérivable par rapport à la 2ème variable sur $]-1, +\infty[$ et :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}\times]-1, +\infty[, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = \frac{-t}{(1+x)^2}$$

donc $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}\times]-1, +\infty[$

Donc F est de classe $\mathscr{C}^1$ par rapport à la deuxème variable sur $]-1, +\infty[$, par conséquence F est localement lipschitzienne par rapport à la deuxème variable sur le même intervalle.

Conclusion : Pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}\times]-1, +\infty[$, le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = \dfrac{t}{1+x(t)} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution **maximale** définie sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ ouvert.

Peut-on appliquer le théorème global ?

— F est dérivable par rapport à la première variable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}\times]-1, +\infty[, \quad \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{constante, donc continue}$$

donc F est de classe $\mathscr{C}^1$ par rapport à la première variable sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, F est localement lipschitzienne par rapport à la première variable sur $\mathbb{R}$

— Vérifions que F est globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur l'intervalle $]-1, +\infty[$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, on cherche $K > 0$ tel que :

$$\forall (x_1,x_2)\in]-1,+\infty[^2,\quad \left|\frac{t}{1+x_1}-\frac{t}{1+x_2}\right|\leq K|x_1-x_2|$$

$$\left|\frac{t}{1+x_1}-\frac{t}{1+x_2}\right|=\left|\frac{t(x_2-x_1)}{(1+x_1)(1+x_2)}\right|=\frac{|t|}{(1+x_1)(1+x_2)}|x_1-x_2|$$

Il suffit donc que :

$$\forall (x_1,x_2)\in]-1,+\infty[^2,\quad \frac{|t|}{(1+x_1)(1+x_2)}\leq K$$

Attention : dans la définition d'une fonction globalement lipschitzienne la constante k peut dépend de t mais pas des x_1 et x_2.

Or ici :

$$\lim_{x_1\to -1}\frac{|t|}{(1+x_1)(1+x_2)}=\lim_{x_2\to -1}\frac{|t|}{(1+x_1)(1+x_2)}=+\infty$$

Donc F n'est pas globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur notre intervalle $]-1,+\infty[$! Ce qui pose problème, c'est le cas limite où le dénominateur tend vers 0. On peut changer l'intervalle d'étude pour qu'on puisse continuer avec le théorème global.

Donc on remplace $]-1,+\infty[$ par $]a,+\infty[\subset]-1,+\infty[$, où $a>-1$,

Maintenant on cherche $K>0$ tel que :

$$\forall (x_1,x_2)\in]a,+\infty[^2,\quad \frac{|t|}{(1+x_1)(1+x_2)}\leq K$$

Or :

$$\forall (x_1,x_2)\in]a,+\infty[^2,\quad \frac{|t|}{(1+x_1)(1+x_2)}\leq \frac{|t|}{(1+a)^2}$$

On pose donc :

$$K=\frac{|t|}{(1+a)^2}>0$$

Donc F est globalement lipschitzienne par rapport à la $2^{\text{ème}}$ variable sur $]a,+\infty[$.

Conclusion :

Pour tout $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times]a,+\infty[$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases}\forall t\in\mathbb{R},\quad x'(t)=\dfrac{t}{1+x(t)}\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$$

admet une unique solution **globale** définie sur $\mathbb{R}$.

Dans cet exemple, on peut aussi calculer les solutions globales. *(Attention : on peut rarement les calculer pour des équations différentielles non linéaires.)*

Soit $x : t \mapsto x(t)$ une solution globale du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, \qquad x'(t) = \dfrac{t}{1+x(t)} \quad (E) \\ x(t_0) = x \end{cases}$$

Alors en séparant les variables :

$$x'(t)(1+x(t)) = t$$

On reconnaît la dérivée de

$$\frac{1}{2}(1+x(t))^2$$

Donc si on intègre E entre t_0 et t, on a :

$$\int_{t_0}^{t} x'(s)(1+x(s))\,ds = \int_{t_0}^{t} s\,ds$$

Donc :

$$\left[\frac{1}{2}(1+x(s))^2\right]_{t_0}^{t} = \left[\frac{s^2}{2}\right]_{t_0}^{t}$$

$$\frac{1}{2}(1+x(t))^2 - \frac{1}{2}(1+x(t_0))^2 = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t_0^2$$

Donc :

$$(1+x(t))^2 = (1+x_0)^2 + t^2 - t_0^2$$

Et enfin :

$$\boxed{x(t) = \sqrt{t^2 - t_0^2 + (1+x_0)^2} - 1}$$

Pour démontrer le théorème de Cauchy−Lipschitz global (et aussi la version locale mais c'est beaucoup plus compliqué), on a besoin d'un résultat important dans la théorie des équations différentielles.

Théorème I.8 Lemme de Grönwall

Soient Φ et $k \geq 0$ deux fonctions continues sur $[t_0, +\infty[$.
Si

$$\forall t \geq t_0, \quad \Phi(t) \leq C + \int_{t_0}^{t} k(s)\Phi(s)\, ds$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante,
alors

$$\forall t \geq t_0, \quad \Phi(t) \leq C \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} k(s)\, ds\right)$$

Preuve :

On pose, pour tout $t \geq t_0$:

$$f(t) = \frac{C + \int_{t_0}^{t} k(s)\Phi(s)\, ds}{\exp\left(\int_{t_0}^{t} k(s)\, ds\right)} = \left(C + \int_{t_0}^{t} k(s)\Phi(s)\, ds\right) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} k(s)\, ds\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} f'(t) &= (0 + k(t)\Phi(t)) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} k(s)\, ds\right) \\ &\quad + \left(C + \int_{t_0}^{t} k(s)\Phi(s)\, ds\right) \cdot (-k(t)) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} k(s)\, ds\right) \end{aligned}$$

Donc :

$$f'(t) = k(t)\left(\Phi(t) - C - \int_{t_0}^{t} k(s)\Phi(s)\, ds\right) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} k(s)\, ds\right)$$

Or : $k(t) \geq 0$, $\exp\left(-\int_{t_0}^{t} k(s)\, ds\right) > 0$, $\Phi(t) \leq C + \int_{t_0}^{t} k(s)\Phi(s)\, ds$
Donc $f'(t) \leq 0$, et ainsi, f est décroissante sur $[t_0, +\infty[$
Donc :

$$\forall t \geq t_0, \quad f(t) \leq f(t_0) = \frac{C + \int_{t_0}^{t_0} k(s)\Phi(s)\, ds}{\exp\left(\int_{t_0}^{t_0} k(s)\, ds\right)} = \frac{C + 0}{1} = C$$

Par conséquent :

$$\forall t \geq t_0, \quad \Phi(t) \leq C + \int_{t_0}^{t} k(s)\Phi(s)\, ds = f(t) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} k(s)\, ds\right)$$

Or $f(t) \leq C$ et $\exp\left(\int_{t_0}^t k(s)\,ds\right) > 0$, donc :

$$\Phi(t) \leq C \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t k(s)\,ds\right)$$

■

Corollaire du Lemme de Grönwall

Soit une EDO :

$$\forall t \in I, \quad X'(t) = F(t, X(t))$$

On suppose qu'on peut appliquer le théorème de Cauchy–Lipschitz global.

Soient Y_1 et Y_2 deux solutions globales (définies sur I).

Alors pour tout $t \in I$:

$$\forall t \in I, \quad \|Y_1(t) - Y_2(t)\| \leq \|Y_1(t_0) - Y_2(t_0)\| \cdot e^{k|t-t_0|}$$

où $k > 0$ est la constante pour la propriété d'être globalement lipschitzienne de F (par rapport à la deuxième variable).

Preuve :

On pose, pour tout $t \geq t_0$:

$$\Phi(t) = \|Y_1(t) - Y_2(t)\|$$

On a :

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &= \|Y_1(t) - Y_2(t)\| \\
&= \left\| Y_1(t_0) + \int_{t_0}^t Y_1'(s)\,ds - Y_2(t_0) - \int_{t_0}^t Y_2'(s)\,ds \right\| \\
&\leq \|Y_1(t_0) - Y_2(t_0)\| + \left\| \int_{t_0}^t [F(s, Y_1(s)) - F(s, Y_2(s))]\,ds \right\|
\end{aligned}$$

Or, puisque F est globalement lipschitzienne par rapport à la $2^{\text{ème}}$ variable :

$$\|F(s, Y_1(s)) - F(s, Y_2(s))\| \leq k\|Y_1(s) - Y_2(s)\|$$

Donc :

$$\Phi(t) \leq C + \int_{t_0}^t k(s)\,\Phi(s)\,ds$$

Puis on applique le lemme de Grönwall. ■

Remarque I.2

2 conséquences importantes :

— Si $Y_1(t_0) = Y_2(t_0) = X_0$, soient deux solutions du même problème de Cauchy, alors on a :

$$\forall t \geq t_0, \quad \|Y_1(t) - Y_2(t)\| \leq \|Y_1(t_0) - Y_2(t_0)\| \cdot e^{k|t-t_0|} = 0$$

Donc :

$$\forall t \geq t_0, \quad Y_1(t) = Y_2(t)$$

On retrouve ainsi l'unicité du théorème de Cauchy–Lipschitz global.

— Si $Y_1(t_0)$ est très proche de $Y_2(t_0)$, alors l'écart entre les deux solutions

$$\|Y_1(t) - Y_2(t)\|$$

croît de manière exponentielle lorsqu'on s'écarte de la condition initiale en t_0.

2.4 Le cas linéaire

Pour simplifier les notations, on notera les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ en colonne :

$$X \in \mathbb{R}^n \text{ sera noté } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

La forme résolue d'une équation différentielle linéaire est donc :

$$\forall t \in I, \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

Pour qu'on puisse effectuer les opérations de multiplication sur les matrices il faut que tous les termes soient de la même taille matricielle :

$$X(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad X'(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad B(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

Avec les notations suivantes :

— $I \subset \mathbb{R}$ est l'intervalle de définition de l'EDL
— $t \in I$ est la variable
— $X : I \to \mathbb{R}^n$ est la fonction inconnue qu'on suppose dérivable sur I
— $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions fixées
— $n \in \mathbb{N}^*$ est l'ordre de l'EDL

Exemple I.22

On peut revenir aux équations différentielles linéaires de la première section du chapitre.

— Pour une EDL d'ordre 1 :

$$\forall t \in I, \quad x'(t) + a(t)x(t) = b(t) \quad \Longleftrightarrow \quad x'(t) = -a(t)x(t) + b(t)$$

Ici, $n = 1$,

$$\begin{cases} A : t \mapsto A(t) = (-a(t)) \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R}) \\ B : t \mapsto B(t) = (b(t)) \in \mathbb{R}^1 \end{cases}$$

— Pour une EDL d'ordre 2 à coefficients constants :

$$\forall t \in I, \quad x''(t) + a\,x'(t) + b\,x(t) = c(t) \quad \Longleftrightarrow \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

Ici : $n = 2$, et on augment la dimension en posant :

$$\forall t \in I, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Donc on a :

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ -ax'(t) - bx(t) + c(t) \end{pmatrix}$$

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix} = A(t)X(t) + B(t)$$

Donc :

$$A : t \mapsto A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \text{(est constante)}$$

$$B : t \mapsto B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Théorème I.9 Théorème de Cauchy–Lipschitz linéaire

On considère une équation différentielle linéaire de la forme :

$$(E) \quad \forall t \in I, \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t), \quad \text{d'ordre } n \in \mathbb{N}^*$$

On suppose que :

$$A : t \mapsto A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B : t \mapsto B(t) \in \mathbb{R}^n$$

sont continues sur I.
Alors, pour toutes conditions initiales $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution globale au problème de Cauchy :

$$(E) \quad \forall t \in I, \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \quad \text{et} \quad X(t_0) = X_0$$

Preuve :

On admet la démonstration (comme pour les autres versions du théorème de Cauchy–Lipschitz), car elle est trop compliquée. ■

On va juste remarquer que

$$F : (t, X) \mapsto A(t)X + B(t)$$

est

— continue sur $I \times \mathbb{R}^n$ (car A et B sont continues sur I et car $X \mapsto AX + B$ est affine),

— localement lipschitzienne par rapport à la $2^{\text{ème}}$ variable.

En effet, on choisit une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ et on définit une norme $|||.|||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$|||A||| = \inf\{M \geq 0 \mid \forall X \in \mathbb{R}^n, \ \|AX\| \leq M\|X\|\}$$

On fixe $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ et $(X_1, X_2) \in \mathcal{B}(X_0, \varepsilon)^2$

Alors :

$$\begin{aligned}
\|F(t_0, X_1) - F(t_0, X_2)\| &= \|A(t_0)X_1 + B(t_0) - A(t_0)X_2 - B(t_0)\| \\
&= \|A(t_0)(X_1 - X_2)\| \\
&\leq |||A(t_0)||| \cdot \|X_1 - X_2\| \quad \text{avec } k = |||A(t_0)|||
\end{aligned}$$

On a bien que F est localement lipschitzienne par rapport à la $2^{\text{ème}}$ variable. Donc on peut au moins appliquer le théorème de Cauchy–Lipschitz local.

Corollaire de Cauchy-Lipschitz linéaire : structure de l'ensemble des solutions

On considère une EDL de la forme :

$$(E) \quad \forall t \in I, \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t), \quad \text{d'ordre } n \in \mathbb{N}^*$$

On suppose que A et B sont continues sur I.
Alors :

— L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'EDL homogène associée

$$(H) \quad \forall t \in I, \quad X'(t) = A(t)X(t)$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$, qui est de dimension :

$$\boxed{\dim(\mathcal{S}_H) = n}$$

— L'ensemble $\mathcal{S}_E$ des solutions de (E) est de la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_E &= X_p + \mathcal{S}_H \\ &= \{X : t \mapsto X_p(t) + X_H(t) \mid X_H \in \mathcal{S}_H\} \end{aligned}.$$

où $X_p : I \to \mathbb{R}^n$ est une solution particulière de (E).

$\Rightarrow$ **Principe de superposition**

Preuve : Il faut démontrer 4 choses : sev, dimension, et deux inclusions.

D'après le théorème de Cauchy−Lipschitz linéaire, on sait que les solutions de (H) sont globales, donc définies sur I. De plus, d'après le principe de régularité des solutions, puisque l'EDL est continue, les solutions sont de classe $\mathscr{C}^1$.

On en déduit que :

$$\mathcal{S}_H \subset \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}^n) \quad \text{et de même} \quad \mathcal{S}_E \subset \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$$

— Montrons que $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(X_1, X_2) \in \mathcal{S}_H^2$
Alors $\forall t \in I$:

$$\begin{aligned} (\lambda X_1 + X_2)'(t) = \lambda X_1'(t) + X_2'(t) &= \lambda A(t)X_1(t) + A(t)X_2(t) \quad (\text{car } X_1, X_2 \in \mathcal{S}_H) \\ &= A(t)\left(\lambda X_1(t) + X_2(t)\right) \end{aligned}$$

Donc $\lambda X_1 + X_2 \in \mathcal{S}_H$.

On a bien montré que $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$.

— Montrons que $\dim(\mathcal{S}_H) = n$

On fixe $t_0 \in I$. On définit l'application :

$$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathcal{S}_H, \quad X_0 \mapsto \begin{cases} \text{l'unique solution du problème de Cauchy} \\ \forall t \in I,\ X'(t) = A(t)X(t), \quad X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Cette application est bien définie d'après le théorème de Cauchy–Lipschitz linéaire.

Vérifions que Φ est un isomorphisme.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(X_0, Y_0) \in (\mathbb{R}^n)^2$

On pose :

$$X = \Phi(X_0), \quad Y = \Phi(Y_0)$$

Alors pour tout $t \in I$:

$$(\lambda X + Y)'(t) = \lambda X'(t) + Y'(t) = \lambda A(t)X(t) + A(t)Y(t) = A(t)(\lambda X(t) + Y(t))$$

Donc $\lambda X + Y$ est aussi solution de (H).

De plus :

$$(\lambda X + Y)(t_0) = \lambda X(t_0) + Y(t_0) = \lambda X_0 + Y_0$$

Autrement dit, on vient de montrer que :

$$\Phi(\lambda X_0 + Y_0) = \lambda X + Y = \lambda \Phi(X_0) + \Phi(Y_0)$$

Donc Φ est bien une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{S}_H$.

De plus, Φ est bijective par unicité de la solution du problème de Cauchy.

$$\big(\text{Sa bijection réciproque est : } \Phi^{-1} : \mathcal{S}_H \to \mathbb{R}^n, \quad X \mapsto X(t_0)\big)$$

Donc $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathcal{S}_H$ est un isomorphisme.

Par conséquent :

$$\dim(\mathcal{S}_H) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$$

Alors, maintenant on va démontrer le principe de superposition $\mathcal{S}_E = X_p + \mathcal{S}_H$, comme on a fait avant en utilisant une double inclusion.

— $(\supset)$ Soit $X \in X_p + \mathcal{S}_H = \{X_p + X_H \mid X_H \in \mathcal{S}_H\}$

Donc $X = X_p + X_H$ où $X_H \in \mathcal{S}_H$

Montrons que $X \in \mathcal{S}_E$

On a, pour tout $t \in I$:

$$X'(t) = (X_p + X_H)'(t) = X_p'(t) + X_H'(t)$$

Or :

$$X_p'(t) = A(t)X_p(t) + B(t) \quad (\text{car } X_p \in \mathcal{S}_E)$$

$$X_H'(t) = A(t)X_H(t) \quad (\text{car } X_H \in \mathcal{S}_H)$$

Donc :

$$\begin{aligned} X'(t) &= A(t)X_p(t) + B(t) + A(t)X_H(t) \\ &= A(t)(X_p(t) + X_H(t)) + B(t) \\ &= A(t)X(t) + B(t) \end{aligned}$$

Donc X est solution de (E), c'est-à-dire $X \in \mathcal{S}_E$.

— $(\subset)$ Soit $X \in \mathcal{S}_E$

Montrons que $X \in X_p + \mathcal{S}_H$

On cherche $X_H \in \mathcal{S}_H$ telle que $X = X_p + X_H$

On pose $X_H = X - X_p$. Vérifions que $X_H \in \mathcal{S}_H$

Pour tout $t \in I$:

$$X_H'(t) = (X - X_p)'(t) = X'(t) - X_p'(t)$$

Or :

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \quad (\text{car } X \in \mathcal{S}_E)$$

$$X_p'(t) = A(t)X_p(t) + B(t) \quad (\text{car } X_p \in \mathcal{S}_E)$$

Donc :

$$X_H'(t) = A(t)X(t) + B(t) - (A(t)X_p(t) + B(t)) = A(t)(X(t) - X_p(t)) = A(t)X_H(t)$$

Donc X_H est solution de (H), c'est-à-dire $X_H \in \mathcal{S}_H$

Par conséquent : $X = X_p + X_H \in X_p + \mathcal{S}_H$

Conclusion : Par double inclusion, on a bien montré le **principe de superposition** :

$$\boxed{\mathcal{S}_E = X_p + \mathcal{S}_H}$$

■

Remarque I.3

Pour une EDL homogène d'ordre 1 :

$$x'(t) = a(t)\,x(t)$$

On sait que les solutions sont toutes de la forme :

$$\forall t \in I, \quad x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)\lambda$$

où :

- $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante,
- $t_0 \in I$,
- $t \mapsto \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$ est une primitive de $t \mapsto a(t)$,
  (l'unique qui s'annule en t_0).

Plus généralement, pour une EDL homogène d'ordre $n \geq 2$,

$$\forall t \in I, \quad X'(t) = A(t)X(t), \quad \text{avec } A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Alors les solutions sont toutes de la forme :

$$\forall t \in I, \quad X(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds\right)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$$

où :

- $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur de constantes,
- $t_0 \in I$,
- $t \mapsto \int_{t_0}^{t} A(s)\,ds$ est une matrice dont les coefficients sont les primitives des coefficients de A.

Maintenant on a introduit les matrices dans la résolution des EDLs, mais pour utiliser la solution précédente il faut bien définir l'exponentielle d'une matrice. C'est ce qu'on va faire dans le cours d'algèbre linéaire avancée plus tard, mais ici il faut expliquer.

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \exp(M) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} M^k \quad \textit{(Voir le cours de suites et séries)}$$

En pratique, il suffit de calculer les puissances $\left(M^k\right)_{k\geq 0}$ de M pour calculer $\exp(M)$, par exemple en diagonalisant ou trigonalisant M.

Voir le cours d'algèbre linéaire avancée.

3 Résolution numérique des équations différentielles

On considère un problème de Cauchy :

$$\forall t \in I \quad X'(t) = F(t, X(t)) \quad \text{et} \quad X(t_0) = X_0$$

Cherchons des approximations de la solution de ce problème.Pour ça, on va utiliser la méthode d'Euler. Fixons $t > t_0$ tel que $[t_0, t] \subset I$.

On choisit n suffisamment grand et on va subdiviser l'intervalle $[t_0, t]$ en n sous-intervalles de longueur $\dfrac{t - t_0}{n}$.

On pose : $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad t_k = t_0 + k \cdot \frac{t-t_0}{n}$ (donc $t_n = t$) et on cherche des approximations de $X(t_k)$ pour tous les $k \in [\![0, n]\!]$, en particulier $X(t_n)$ sera une approximation de $X(t)$.

— $X(t_0) = X_0$ (la condition initiale)

— On a pour la première étape à t_1 :

$$\begin{aligned} X(t_1) &= X\left(t_0 + \frac{t-t_0}{n}\right) \\ &= X(t_0) + \frac{t-t_0}{n} X'(t_0) + o_{n\to\infty}\left(\frac{t-t_0}{n}\right) \\ &= X(t_0) + \frac{t-t_0}{n} F(t_0, X(t_0)) + o_{n\to\infty}\left(\frac{t-t_0}{n}\right) \end{aligned}$$

(en utilisant un développement limité et des approximations)

— De même on a :

$$\begin{aligned} X(t_2) &= X\left(t_1 + \frac{t-t_0}{n}\right) \\ &= X(t_1) + \frac{t-t_0}{n} X'(t_1) + o_{n\to\infty}\left(\frac{t-t_0}{n}\right) \\ &= X(t_1) + \frac{t-t_0}{n} F(t_1, X(t_1)) + o_{n\to\infty}\left(\frac{t-t_0}{n}\right) \end{aligned}$$

Dans ces étapes, on peut négliger le petit o à la fin car ces parties sont petites, et on trouve une expression pour l'approximation. Par récurrence, on définit une suite $(u_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ d'approximations et $(X(t_k))_{k\in[\![0,n]\!]}$ par :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], u_{k+1} = u_k + \frac{t-t_0}{n} \cdot F(t_0 + k\frac{t-t_0}{n}, u_k) \quad \text{et} \quad u_0 = X_0$$

Alors u_n est une approximation de $X(t)$. A chaque étape, l'erreur de l'approxmation est négligeable devant $\frac{t-t_0}{n}$, donc plus n est choisi suffisamment grand, plus l'approxmation ets meilleure, mais plus il y a besoin de calculs.