Sommaire du Cours : MATH2310P

Cours assuré par Sébastien GODILLON

Rédigé par Corentin 邱天意

Semestre 2024-2025-2

Table des matières

Première partie

Équations différentielles ordinaires

1 Cours 21 févr : Généralités

Définition 1.1

Une **Équation différentielle linéaire(EDO)** est une équation de la forme :

$$\forall t \in I, F(t, X(t), X'(t)...X^{(k)}(t)) = 0$$

Plus spécifiquement sur les notations :

- X est une fonction inconnue, d'une seule variable réelle, et à valeurs réelles ou vectorielles($X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$). Elle est supposée k-fois dérivable sur $I/$.
- t est la variable da la fonction X.
- $I \subset \mathbb{R}$, c'est l'intervalle de définition de l'équation différentielle.
- F est une fonction de plusieurs variables, elle est fixée.
- $k \in \mathbb{N}^*$, on l'appelle l'ordre de l'EDO.

Exemple 1.1

Chercher les primitives

Soit f une fonction réelle qui est continue sur l'intervalle $I \in \mathbb{R}$.

D'après the théorème fondamental de l'analyse(TFA), on sait que f admet des primitives sur I.

Alors, trouver des primitives de f revient à résoudre l'EDO :

$$\forall t \in I, X'(t) = f(t)$$

ici on a $F(t, X(t), X'(t)) = X'(t) - f(t)$, une EDO d'ordre 1.

Exemple 1.2

L'oscillateur harmonique

Le mouvement d'un oscillateur harmonique est modélisé par l'EDO :

$$\forall t \in I, X''(t) + \frac{k}{m}X(t) = 0$$

Elle est d'ordre 2. En considérant le problème physique on trouve que : $I = \mathbb{R}_+$, et que $X(0)$ est une condition initiale à déterminer. k et m désignent respectivement le raideur du ressort et la masse.

La forme générale s'écrit : $F(t, X(t), X'(t), X''(t)) = X''(t) + \frac{k}{m}X(t)$.

Exemple 1.3

Le pendule simple

Il est modélisé par l'équation :

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\sin\theta(t) = 0$$

Où l est la longeur de la corde, g le module de l'accélération gravitationelle, et θ l'angle aigu entre la corde et la verticale. Attention, elle n'est pas linéaire car la fonction sin ne l'est pas.

Exemple 1.4

Dynamique d'une population : Lotka-Volterra

On se place dans le monde où il n'y a que les proies et les prédateurs.

Notons : $X(t)$ la population des proies et $Y(t)$ celle des prédateurs à l'instant t.

On a :

$$\begin{cases} X'(t) = X(t)(\alpha - \beta Y(t)) \\ Y'(t) = Y(t)(\gamma X(t) - \eta) \end{cases}$$

Il y a deux équations donc posons la fonction vectorielle $Z(t) = (X(t), Y(t))$. La forme générale de notre EDO s'écrit : $F(t, X(t), X'(t)) = Z(t)$. Elle est d'ordre 1.

Rappel 1.1

Équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1

Une équation de la forme :

$$(E_1) : X'(t) + a(t)X(t) = 0$$

Où a est une fonction fixée et continue.

Deuxième partie

Courbes et Surfaces